

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

上册目录

第一章 场论和张量初步	1
(A) 场论	1
1.1 场的定义及分类	1
1.2 场的几何表示	2
1.3 梯度——标量场不均匀性的量度	4
1.4 矢量 \mathbf{a} 通过 S 面的通量, 矢量 \mathbf{a} 的散度, 奥高定理	11
1.5 无源场及其性质	14
1.6 矢量 \mathbf{a} 沿回线的环量, 矢量 \mathbf{a} 的旋度, 斯托克斯定理	15
1.7 无旋场及其性质	18
1.8 基本运算公式	19
1.9 哈密顿算子	22
1.10 张量表示法	29
1.11 梯度, 散度, 旋度, 拉普拉斯算子在曲线 坐标系中的表达式	32
1.12 曲线坐标系中单位矢量对坐标的偏导数及其应用	41
习题一	48
(B) 张量初步	52
1.13 张量的定义	53
1.14 张量的代数运算	56
1.15 张量识别定理	58
1.16 二阶张量	59
1.17 二阶反对称张量的性质	63
1.18 二阶对称张量的性质	64
1.19 张量的微分运算	70
• 1.20 各向同性张量	71
习题二	77



第二章	流体力学的基本概念	81
2.1	流体力学的研究对象、研究方法及其应用	81
2.2	连续介质假设	84
2.3	流体的性质及分类	88
2.4	描写流体运动的两种方法——拉格朗日方法和欧拉方法	91
2.5	轨迹和流线	100
2.6	速度分解定理	106
2.7	变形速度张量	110
2.8	涡旋运动的基本概念	121
2.9	流体运动的分类	126
2.10	质量力和面力、应力张量	127
2.11	理想流体和静止流体的应力张量	133
2.12	物质积分的随体导数	135
	习题	138
第三章	流体力学基本方程组	145
3.1	连续性方程	145
3.2	运动方程	151
3.3	能量方程	156
3.4	本构方程	161
3.5	状态方程、内能及熵的表达式	171
3.6	流体力学基本方程组	180
3.7	初始条件和边界条件	193
	习题	199
第四章	流体的涡旋运动	205
4.1	引言	205
4.2	涡旋的运动学性质	206
4.3	亥姆霍兹方程	207
4.4	凯尔文定理	211
4.5	涡旋不生不灭定理(拉格朗日定理)	213
4.6	涡线及涡管强度保持定理(亥姆霍兹定理)	214
4.7	流体不正压及外力无势时涡旋的产生	218



4.3	粘性流体中涡旋的扩散性	221
4.9	涡旋场和散度场所感应的速度场	223
4.10	直线涡丝, 圆形涡丝, 涡层	231
	习题	239
第五讲	流体静力学	246
5.1	基本方程组, 自由面的形状, 外力限制条件	246
5.2	液体静力学规律	248
5.3	阿基米德定律, 平面壁上和曲面壁上的压力	250
5.4	气体的平衡, 国际标准大气	255
•5.5	气状星球的平衡	258
5.5	旋转液体的平衡	260
	习题	261
第六讲	伯努利积分和动量定理	267
6.1	伯努利积分和拉格朗日积分	267
6.2	伯努利积分和拉格朗日积分的应用	276
6.3	动量定理, 动量矩定理及其应用	285
	习题	298
	习题答案	306

第一章 场论和张量初步

浏览器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

(A) 场 论

1.1 场的定义及分类

设在空间中的某个区域内定义标量函数或矢量函数，则称定义在此空间区域内的函数为场。如果研究的是标量函数则称此场为标量场；如果研究的是矢量函数则称之为矢量场。在场内定义的函数可以随时间改变，此时时间作为参数出现。设 r 是空间点的矢径， x, y, z 是 r 的直角坐标， t 是时间，则标量场和矢量场内的函数 φ 或 \mathbf{a} 可分析地表为：

$$\varphi = \varphi(r, t) = \varphi(x, y, z, t)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(r, t) = \mathbf{a}(x, y, z, t)$$

在物理及力学中我们经常碰到各种不同的标量场及矢量场。温度场、压力场、密度场等都是标量场，而速度场、力场、电磁场等都是矢量场。流体力学中研究的对象就是这些标量和矢量场。因此场论的知识对于学习流体力学是必不可少的工具。

如果同一时刻场内各点函数的值都相等，则称此场为均匀场。反之称为不均匀场。如果场内函数值不依赖于时间，即不随时间 t 改变则称此场为定常场。反之称为不定常场。均匀场和定常场分析地可表为

$$\varphi(t), \mathbf{a}(t)$$

及

$$\varphi(r), \mathbf{a}(r)$$

场论是研究标量场及矢量场数学性质的一门数学分支。本章只研究场的部分性质。

1.2 场的几何表示

用几何方法即用图形表示一个场有助于直观理解问题，并且具有实用意义。

我们先来研究如何用几何方法表示一个标量场 $\varphi(r, t)$ 。如果在每一个时刻，场的几何表示都已知道，则整个场的几何表示也就知道（如果所研究的场是定常的，那么只须研究场 $\varphi(r)$ 的本身即可）。因此，只须取任一固定时刻 t_0 ，研究场 $\varphi(r, t_0)$ 的几何表示。令

$$\varphi(r, t_0) = \text{常数} = \varphi_0$$

得到与之对应的曲面称之为等位面。在等位面上 φ 的值都相等。取一系列不同的 φ_0 值我们得到空间中一组与之对应的等位面，于是整个标量场被等位面分成很多区域（参阅图 1.2.1）。

作出等位面后，我们可以从等位面的相互位置，它的疏密程度看出标量函数的变化状况。例如等位面靠得近的地方函数变化得快，靠得远的地方，变化得慢。函数值的改变主要在等位面的法线方向发生，沿等位面切线方向移动时，函数值并不改变等等。

等位面在气象学上有重要应用，例如气候图上的等压线、等温线等都是标量场的等位面。



图 1.2.1

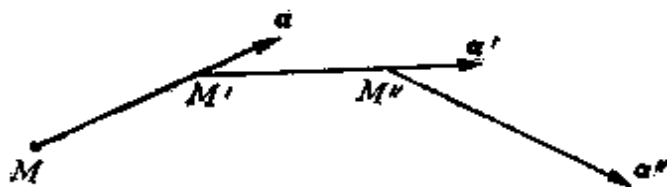


图 1.2.2

现在研究矢量场的几何表示，矢量场的几何表示较标量场复杂，因为矢量是一个有大小及方向的量，须要分别对大小及方向

作几何表示。由于矢量的大小是一个标量，所以可以用上述等位面的概念来几何地表示它。至于矢量的方向则采用矢量线来几何地表示它。所谓矢量线就是这样的线，线上每一点的切线方向与该点的矢量方向重合。我们可以用下面的方法作出同一时刻通过场内任一点 M 的矢量线。如图 1.2.2 所示，过 M 点作该点的矢量 \mathbf{a} ，在 \mathbf{a} 上取一与 M 邻近的点 M' ，过 M' 作其上的矢量 \mathbf{a}' ，然后再在 \mathbf{a}' 上取一与 M' 邻近的 M'' ，如此继续下去我们就得到一个折线 $MM'M''\dots$ ，折线上每一小段的方向和该段起点上矢量的方向重合。令 $MM', M'M'', \dots$ 趋于零，可得一条极限曲线，显然极限曲线上每一点的切线方向与该点的矢量方向重合。按照定义，它就是矢量线。下面我们写出确定矢量线的方程。设 $d\mathbf{r}$ 是矢量线的切向元素，则根据矢量线的定义有

$$\mathbf{a} \times d\mathbf{r} = 0$$

写成直角坐标分量形式则为

$$\frac{dx}{a_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{a_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{a_z(x, y, z, t)}$$

其中 t 是一个参数。 a_x, a_y, a_z 是矢量 \mathbf{a} 在坐标轴上的三个分量。这就是确定矢量线的微分方程。积分此微分方程，在积分时将 t 看成参数，即得矢量线的分析表达式。

有了矢量线后，场内每一点的矢量方向可由矢量线的切线方向定出。

有时，我们也可以从矢量线的疏密程度估计矢量在各点的大小。

在场内取任一非矢量的封闭曲线 C ，通过 C 上每一点作矢量线。则这些矢量线所包围的区域称为矢量管。

上面我们研究了标量场和矢量场的几何表示。下面我们将讲述如何表征任一瞬间场内每一点邻域内的函数变化状况。换句话说，研究每一点上由于场的不均匀性而引起的函数变化。我们先讲标量场的情形。

1.3 梯度——标量场不均匀性的量度

给定一标量场 $\varphi(r, t)$ (以后为了讲述方便, 将场内的函数简称为场), 我们的任务是在任一时刻描写标量场中每点邻域内的函数变化.

和以往一样, 我们在某一固定时刻 $t=t_0$ 研究标量场 $\varphi(r, t_0)$ (为了方便起见今后将 t_0 省略). 在场内任取一点 M , 过 M 点作曲线 s . 我们用下列极限值

$$\lim_{MM' \rightarrow 0} \frac{\varphi(M') - \varphi(M)}{MM'} \quad (1.3.1)$$

表征标量函数 φ 在 M 点上沿曲线 s 方向的函数变化, 其中 M' 是在 s 上与 M 无限邻近的点, $\varphi(M')$ 是 M' 点上的函数值 (参看图 1.3.1). 以符号 $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ 表示 (1.3.1) 式中的极限值, 称为函数在

M 点上沿曲线 s 方向的方向导数. 于是

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \lim_{MM' \rightarrow 0} \frac{\varphi(M') - \varphi(M)}{MM'} \quad (1.3.2)$$

过 M 点可以作无穷多个方向, 每个方向都有对应的方向导数,

如果所有方向上的方向导数都已知道, 那么函数 φ 在 M 点邻域内的变化状况便完全清楚了. 研究表明, 各个方向上的方向导数并不是相互独立的. 事实上只要知道过 M 点的等位面法线方向 n 上的方向导数 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ 后, 所有其他方向 s 上的方向导数

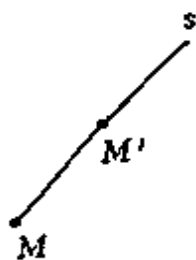


图 1.3.1

都可以通过 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ 及方向 n, s 表示出来, 这样矢量 $\frac{\partial \varphi}{\partial n} n$ 已完全描写了 M 点邻域函数 φ 的变化状况. 现在我们来证明上述事实.

过 M 点作等位面

$$\varphi(r) = \varphi(M) = C$$

及等位面的法线方向 n , n 指向 φ 增长的方向. 在法线 n 上取一与 M 点无限邻近的点 M_1 , 过 M_1 点作等位面

$$\varphi(r) = \varphi(M_1) = C_1$$

现在我们过 M 点作任一方向 s , 它和等位面 $\varphi = C_1$ 交于 M' 点. 显然

$$\varphi(M') = \varphi(M_1)$$

根据方向导数的定义, n 方向和曲线 s 方向的方向导数是

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \lim_{MM_1 \rightarrow 0} \frac{\varphi(M_1) - \varphi(M)}{MM_1} \quad (1.3.3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \lim_{MM' \rightarrow 0} \frac{\varphi(M') - \varphi(M)}{MM'} \quad (1.3.4)$$

从图1.3.2上可以看出, MM' 和 MM_1 之间存在着下列关系

$$MM_1 = MM' \cos(n, s) \quad (1.3.5)$$

将(1.3.5)式代入(1.3.4)式, 并考虑到(1.3.3)式及

$$\varphi(M') = \varphi(M_1)$$

我们有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial s} &= \lim_{MM' \rightarrow 0} \frac{\varphi(M') - \varphi(M)}{MM'} \\ &= \cos(n, s) \lim_{MM_1 \rightarrow 0} \frac{\varphi(M_1) - \varphi(M)}{MM_1} \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cos(n, s) \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

上式表明, s 方向上的方向导数可以通过 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ 及 s 与 n 两方向之

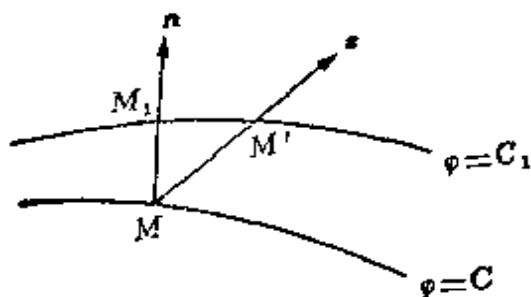


图 1.3.2

间夹角的余弦表示出来。也就是说，知道等位面 $\varphi=C$ 的法线方向 n 及其上的方向导数 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ 后，则任一方向 s 上的方向导数即可按(1.3.6)式求出。

大小为 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ ，方向为 n 的矢量称为标量函数 φ 的梯度，以

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} n \quad (1.3.7)$$

表之，它描写了 M 点邻域内函数 φ 的变化状况，是标量场不均匀性的量度。考虑到(1.3.7)式，(1.3.6)式可改写为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = |\text{grad}\varphi| \cos(n, s) = s_0 \cdot \text{grad}\varphi \quad (1.3.8)$$

其中 s_0 是 s 方向的单位矢量。于是 s 方向的方向导数等于梯度矢量在 s 方向的投影。此外，无论从(1.3.6)式或图 1.3.2 中都可以看出

$$\left| \frac{\partial\varphi}{\partial s} \right| \leq \left| \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right| \quad (1.3.9)$$

即函数 φ 在 n 方向的方向导数值最大， φ 在 n 方向变化最快。而在等位面切线方向的方向导数等于零，因此沿等位面方向 φ 全然不改变。

我们现在求梯度在直角坐标系中的表达式。根据(1.3.8)式梯度 $\text{grad}\varphi$ 在 x, y, z 轴方向上的投影分别等于 x, y, z 轴上的方向导数

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

于是梯度 $\text{grad}\varphi$ 在直角坐标系中的表达式为

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} i + \frac{\partial\varphi}{\partial y} j + \frac{\partial\varphi}{\partial z} k \quad (1.3.10)$$

其中 i, j, k 分别是 x, y, z 轴上的单位矢量。

总结起来, 梯度的主要性质是:

(1) 梯度 $\text{grad}\varphi$ 描写了场内任一点 M 邻域内函数 φ 的变化状况, 它是标量场不均匀性的量度;

(2) 梯度 $\text{grad}\varphi$ 的方向与等位面的法线重合, 且指向 φ 增长的方向, 大小是 n 方向上的方向导数 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$;

(3) 梯度矢量 $\text{grad}\varphi$ 在任一方向 s 上的投影等于该方向的方向导数;

(4) 梯度 $\text{grad}\varphi$ 的方向, 即等位面的法线方向是函数 φ 变化最快的方向;

(5) 梯度 $\text{grad}\varphi$ 在直角坐标系中的表达式是

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}i + \frac{\partial\varphi}{\partial y}j + \frac{\partial\varphi}{\partial z}k$$

下面我们证明两个实际上常常采用的梯度 $\text{grad}\varphi$ 的性质。

定理1 梯度 $\text{grad}\varphi$ 满足关系式

$$d\varphi = dr \cdot \text{grad}\varphi$$

反之, 若 $d\varphi = dr \cdot a$, 则 a 必为 $\text{grad}\varphi$ 。

证 标量函数 φ 的全微分是

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz$$

考虑到

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}i + \frac{\partial\varphi}{\partial y}j + \frac{\partial\varphi}{\partial z}k$$

$$dr = dx i + dy j + dz k$$

我们得到

$$d\varphi = dr \cdot \text{grad}\varphi$$

即 $\text{grad}\varphi$ 满足关系式 $d\varphi = dr \cdot \text{grad}\varphi$ 。反之, 若 $d\varphi = dr \cdot a$, 另一方面 $d\varphi = dr \cdot \text{grad}\varphi$, 两式相减后得

$$dr \cdot (a - \text{grad}\varphi) = 0$$

但因 dr 是任意选取的方向, 故有

$$a = \text{grad}\varphi$$

即得证明.

定理2 若 $a = \text{grad}\varphi$, 且 φ 是矢径 r 的单值函数, 则沿任一封闭曲线 L 的线积分

$$\int_L a \cdot dr$$

等于零, 反之, 若矢量 a 沿任一封闭曲线 L 的线积分

$$\int a \cdot dr = 0$$

则矢量 a 必为某一标量函数 φ 的梯度, 即 $a = \text{grad}\varphi$.

证 若 $a = \text{grad}\varphi$, 则

$$\int_L a \cdot dr = \int \text{grad}\varphi \cdot dr$$

由上一定理知

$$d\varphi = dr \cdot \text{grad}\varphi$$

于是

$$\int_L a \cdot dr = \int_L d\varphi$$

因 φ 是 r 的单值函数, L 是封闭曲线, 故

$$\int_L d\varphi = 0$$

这样我们得到

$$\int_L a \cdot dr = 0$$

反之, 若矢量 a 沿任一封闭曲线 L 的线积分

$$\int_L a \cdot dr = 0$$

现证 a 必为 $\text{grad}\varphi$.

首先证明, 从某一定点 M_0 到任一变动点 $M(r)$ 的线积分与

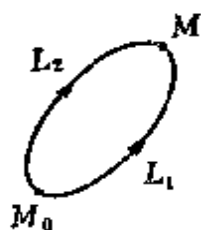


图 1.3.3

积分路线无关. 为此任取两个从 M_0 到 M 的积分曲线 L_1 及 L_2 组成一封闭曲线, 如图 1.3.3 所示. 根据假定, 沿此封闭曲线的线积分为零,

$$\int_{M_0(L_1)}^M \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \int_{M_0(L_2)}^{M_0} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

即

$$\int_{M_0(L_1)}^M \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_{M_0(L_2)}^M \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} \textcircled{1}$$

因为从 M_0 到 $M(r)$ 的线积分与积分路线无关, 因此积分值只是 r 的函数, 以 $\varphi(r)$ 表之, 于是

$$\varphi(r) = \int_{M_0}^M \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$$

由此得

$$d\varphi = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$$

根据上一定理的结果推出

$$\mathbf{a} = \text{grad}\varphi$$

定理证毕.

定理 1 及定理 2 反映了梯度的同一个性质, 定理 1 是微分形式, 而定理 2 是积分形式.

定理 1 和定理 2 将单值函数 φ 的梯度和 φ 的全微分以及线积分联系起来, 而全微分及线积分的运算和性质我们是熟悉的, 因此就有可能利用定理 1 和定理 2, 通过全微分和线积分求函数 φ 的梯度及研究梯度的某些性质.

下面我们举一个例子说明如何利用梯度的性质求某给定函数的梯度.

例 计算仅与矢径大小 r 有关标量函数 $\varphi(r)$ 的梯度 $\text{grad}\varphi$. 现在我们利用梯度的不同性质求 $\varphi(r)$ 的梯度.

① 另外一种更直观的证法是这样的

$$\int_{M_0(L_1)}^M = \int_{M_0(L_1)}^{M_0} + \int_{M_0(L_2)}^M + \int_{M(L_2)}^{M_0} = \int_{M_0(L_2)}^M$$

i) 利用性质(2), 标量函数 $\varphi = \varphi(r)$ 的等位面是以坐标原点为心的球面, 而球面的法线方向, 即矢径 r 的方向, 故 $\text{grad}\varphi$ 的方向就是矢径 r 的方向, 其次 $\text{grad}\varphi$ 的大小是

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \varphi'(r)$$

于是

$$\text{grad}\varphi = \varphi'(r) \frac{r}{r}$$

ii) 利用性质(5), 显然

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dr} \frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{d\varphi}{dr} \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{d\varphi}{dr} \frac{\partial r}{\partial z}$$

因

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

故

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

于是

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{d\varphi}{dr}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{y}{r} \frac{d\varphi}{dr}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{z}{r} \frac{d\varphi}{dr}$$

而

$$\begin{aligned} \text{grad}\varphi &= i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{xi + yj + zk}{r} \frac{d\varphi}{dr} \\ &= \varphi'(r) \frac{r}{r} \end{aligned}$$

iii) 利用定理1,

$$d\varphi(r) = \varphi'(r) dr = \frac{\varphi'(r)}{r} r dr$$

因

$$r \cdot r = r^2$$

超星浏览器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

微分之得

$$2r \cdot dr = 2rdr$$

即

$$r \cdot dr = rdr$$

于是

$$d\varphi = \frac{\varphi'(r)}{r} r \cdot dr$$

根据定理 1 推出

$$\text{grad}\varphi = \varphi'(r) \frac{r}{r}$$

最后我们指出，写成 $\mathbf{a} = \text{grad}\varphi$ 的矢量场亦称位势场， φ 称为位势函数。

1.4 矢量 \mathbf{a} 通过 S 面的通量. 矢量 \mathbf{a} 的散度. 奥高定理

给定一矢量场 $\mathbf{a}(r, t)$. 在场内取一曲面 S (见图 1.4.1), 它可以是封闭的也可以是不封闭的。

在 S 面上取一面积元素 dS , 在 dS 上任取一点 M , 作 S 面在 M 点的法线. 若曲面是封闭的, 则通常取外法线为正方向. 若曲面不封闭, 则可约定取某一方向为法线正方向. 令 \mathbf{n} 表 S 面上法线方向的单位矢量, \mathbf{a} 表 M 点上的矢量函数的值, 则

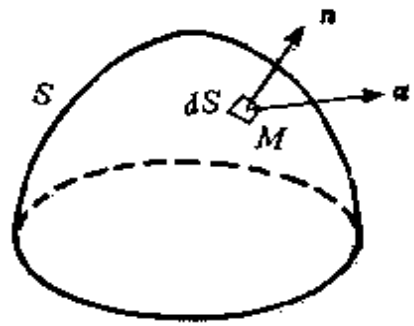


图 1.4.1

$$\begin{aligned} a_n &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \\ &= a_x \cos(n, x) + a_y \cos(n, y) + a_z \cos(n, z) \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

代表矢量 \mathbf{a} 在法线方向的投影. 定义

$$a_n dS$$

为矢量 \mathbf{a} 通过面积元 dS 的通量. 将之沿曲面 S 积分得

$$\int_S a_n dS$$



(1.4.2)

称为矢量 \mathbf{a} 通过 S 面的通量。定义面积矢量 dS 是大小为 dS ，方向为法线正方向的量，即

$$dS = dS \mathbf{n}$$

考虑到

$$dS \cos(n, x) = dydz$$

$$dS \cos(n, y) = dzdx$$

$$dS \cos(n, z) = dxdy$$

及(1.4.1)式，矢量 \mathbf{a} 通过 S 面的通量还可以写成下列几种形式

$$\begin{aligned} \int_S a_n dS &= \int_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{a} \cdot dS \\ &= \int_S [a_x \cos(n, x) + a_y \cos(n, y) + a_z \cos(n, z)] dS \\ &= \int_S (a_x dydz + a_y dzdx + a_z dxdy) \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

当 S 面是封闭曲面时，我们采用积分号上加一小圆圈方法表示矢量 \mathbf{a} 通过 S 面的通量

$$\oint_S a_n dS$$

今在场内任取一点 M ，以体积 V 包之。若 V 的界面为 S ，作矢量 \mathbf{a} 通过 S 面的通量，然后用体积 V 除之。令体积 V 向 M 点无限收缩，得极限

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S a_n dS}{V}$$

设此极限值存在。定义为矢量 \mathbf{a} 的散度，以 $\text{div} \mathbf{a}$ 表示，于是

$$\text{div} \mathbf{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S a_n dS}{V} \quad (1.4.4)$$

由此可见，矢量 \mathbf{a} 的散度是对单位体积而言矢量 \mathbf{a} 通过体积元 V

的界面 S 的通量。从散度的定义(1.4.4)可以看出,它是一个不依赖于坐标系选取的数量。因此是一个标量。这样,散度 $\text{div} \mathbf{a}$ 组成一标量场。

设矢量函数 \mathbf{a} 的三个分量函数 a_x, a_y, a_z 具有连续的一级偏导数,现证此时由(1.4.4)式决定的极限值是存在的。在证明的过程中我们还得到了散度 $\text{div} \mathbf{a}$ 在直角坐标系中的具体表达式。

利用数学分析中的奥高定理,我们有

$$\begin{aligned} \oint_S a_n dS &= \oint_S [a_x \cos(n, x) + a_y \cos(n, y) + a_z \cos(n, z)] dS \\ &= \int_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dV \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

因体积分中的被积函数是连续的,根据中值公式,(1.4.5)式可改写为

$$\oint_S a_n dS = V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right)_Q$$

Q 是体积 V 中某一个点,下标 Q 表示函数在该点取值。将上式代入(1.4.4)式中去得

$$\text{div} \mathbf{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S a_n dS}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right)_Q$$

当 V 向 M 点收缩时, Q 点最后与 M 重合,故由 $\frac{\partial a_x}{\partial x}, \frac{\partial a_y}{\partial y}, \frac{\partial a_z}{\partial z}$ 是连续的假定得

$$\text{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (1.4.6)$$

这样我们便证明了由(1.4.4)式所决定的极限值的确存在,并且它在直角坐标系中采取(1.4.6)式的形式。

将 $\text{div} \mathbf{a}$ 在直角坐标系中表达式(1.4.6)代入(1.4.5)式中去,得到下列不依赖于坐标系选择的奥高公式

超星阅读器捐赠：使用本文档请支持正版

$$\oint_S a_n dS = \int_V \operatorname{div} a dV \quad (1.4.7)$$

(1.4.4)式和(1.4.7)式可看成奥高公式的微分和积分形式。

1.5 无源场及其性质

$\operatorname{div} a = 0$ 的矢量场称为无源场或称管式场。

无源场具有下列几个主要的性质：

(1) 无源矢量 a 经过矢量管任一横截面上的通量保持同一数值。

给定一矢量管，如图 1.5.1 所示，任取此矢量管的两横截面 Σ 及 Σ_1 ，考虑由横截面 Σ, Σ_1 及 Σ, Σ_1 之间矢量管的侧面 Σ' 所组成的封闭曲面 S ，以 V 表曲面 S 内的体积。对 S 及 V 写出奥高定理，有

$$\oint_S a_n dS = \int_V \operatorname{div} a dV$$

因矢量场无源，故 $\operatorname{div} a = 0$

由此得

$$\oint_S a_n dS = 0$$

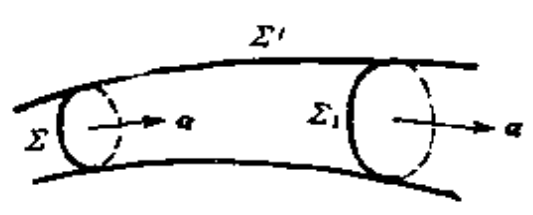


图 1.5.1

亦即

$$-\int_{\Sigma} a_n dS + \int_{\Sigma'} a_n dS + \int_{\Sigma_1} a_n dS = 0$$

式中 Σ 面上取的是内法线方向，其他面上取的都是外法线方向。在矢量管侧面 Σ' 上， $a_n = 0$ 。于是

$$\int_{\Sigma} a_n dS = \int_{\Sigma_1} a_n dS$$

上式变为

$$\int_{\Sigma} a_n dS = \int_{\Sigma_1} a_n dS$$

于是，矢量 a 经过矢量管任一截面上的通量保持同一数值。

(2) 矢量管不能在场内发生或终止. 一般说来它只可能伸延至无穷, 靠在区域的边界上或自成封闭管路.

这个性质是上一性质的推论. 因为若矢量管在场内发生或终止, 则容易证明第一个性质不能保持.

(3) 无源矢量 \mathbf{a} 经过张于一已知周线 L 的所有曲面 S 上的通量均相同, 亦即此通量只依赖于周线 L 而与所张曲面 S 的形状无关.

设 S 及 S_1 是任意两个张于周线 L 上的曲面, 则 S, S_1 组成一封闭曲面. 设此封闭曲面所包围的体积为 V . 对 S 及 V 应用奥高定理有

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV = \int_{S_1} a_n dS - \int_S a_n dS = 0$$

推出

$$\int_{S_1} a_n dS = \int_S a_n dS$$

式中对 S_1 面而言取的是外法线, 对 S 面而言则取的是内法线.

应该指出, 上述性质只在这样的区域内成立, 在此区域内, 任一球形曲面能不超出此区域而缩成一点.

1.6 矢量 \mathbf{a} 沿回线的环量. 矢量 \mathbf{a} 的旋度. 斯托克斯定理

给定一矢量场 $\mathbf{a}(r, t)$, 在场内取任意一曲线 L , 作线积分

$$\int_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_L (a_x dx + a_y dy + a_z dz) \quad (1.6.1)$$

称之为矢量 \mathbf{a} 沿曲线 L 的环量. 若 L 是一封闭曲线, 我们在积分号中加一小圆圈 \oint , 并称之为矢量 \mathbf{a} 沿封闭回线 L 的环量.

设 M 是场内一点. 在 M 点附近取无限小封闭回线 L , 取定某一方向为 L 的正方向. 设张于周线 L 上的曲面是 S , 作 S 的法线方向 n_0 . 选取这样的方向为法线的正方向, 它在右手坐标系中与回线 L 的正方向形成右手螺旋系统. 参看图 1.6.1. 作矢量 \mathbf{a}

沿曲线 L 的环量并除以曲面面积 S . 令 L 这样地向 M 点收缩,

使张于周线 L 的曲面矢量 $S = Sn_0$, 其大小趋于零, 方向趋于某固定的方向 n . 于是得到下列极限

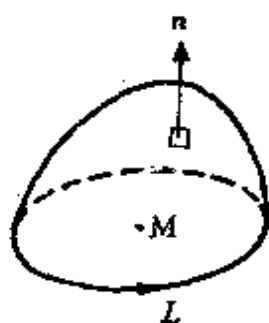


图 1.6.1

的投影, 即

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}}{S} \quad (1.6.2)$$

定义为矢量 \mathbf{a} 的旋度矢量 $\text{rot} \mathbf{a}$ 在 n 方向

$$\text{rot}_n \mathbf{a} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}}{S} \quad (1.6.3)$$

这里也存在这样的问题, 即(1.6.2)的极限是否存在? 如果存在, 它是否一定是某一矢量在 n 方向的投影? 下面我们证明, 如果矢量 \mathbf{a} 的三个分量具有连续一级偏导数, 则(1.6.2)式决定的极限值是存在的, 而且它的确是某矢量在 n 方向的投影. 在证明中还得到旋度 $\text{rot} \mathbf{a}$ 在直角坐标系中的表达式.

利用斯托克斯(stokes)公式, 我们有

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_L (a_x dx + a_y dy + a_z dz) \\ &= \int_S \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \cos(n, x) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \cos(n, y) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right] dS \quad (1.6.4) \end{aligned}$$

利用中值公式后有

$$\oint_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = S \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \cos(n, y) \right]$$

$$+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos(n,z)\Big]_0$$

其中 Q 是曲面 S 上的某点. 将上式代入 (1.6.4) 式得

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_n \mathbf{a} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\oint_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}}{S} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) \cos(n,x) \\ &\quad + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) \cos(n,y) + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) \cos(n,z) \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} &(\operatorname{rot} \mathbf{a})_x \cos(n,x) + (\operatorname{rot} \mathbf{a})_y \cos(n,y) + (\operatorname{rot} \mathbf{a})_z \cos(n,z) \\ &= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) \cos(n,x) + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) \cos(n,y) \\ &\quad + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) \cos(n,z) \end{aligned}$$

因方向 n 是任意的, 推出

$$\begin{cases} \operatorname{rot}_x \mathbf{a} = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \operatorname{rot}_y \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ \operatorname{rot}_z \mathbf{a} = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \end{cases} \quad (1.6.5)$$

或写成

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

由此我们看到, 如果 \mathbf{a} 具有连续一级偏导数, 则 (1.6.2) 的极限值是存在的, 而且它是矢量 $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ 在 n 方向的投影, 矢量 $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ 在直角坐标系的投影由 (1.6.5) 式确定.

(1.6.3)式给出矢量 $\text{rot} \mathbf{a}$ 在任意方向投影的定义, 而且这个定义和坐标系的选择无关.

将 $\text{rot}_n \mathbf{a}$ 的直角坐标系中表达式代入 (1.6.4) 式得到下列不依赖坐标系选择的斯托克斯公式

$$\oint_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \text{rot}_n \mathbf{a} dS = \int_S \text{rot} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.6.6)$$

(1.6.3)式和(1.6.6)式可以看成是斯托克斯公式的微分和积分形式.

1.7 无旋场及其性质

$\text{rot} \mathbf{a} = 0$ 的矢量场称为无旋场.

无旋场最主要的性质是无旋场和位势场的等价性. 即若 \mathbf{a} 是位势场,

$$\mathbf{a} = \text{grad} \varphi$$

则 \mathbf{a} 必为无旋场,

$$\text{rot} \mathbf{a} = 0$$

反之, 若矢量 \mathbf{a} 是无旋场,

$$\text{rot} \mathbf{a} = 0$$

则 \mathbf{a} 必为位势场

$$\mathbf{a} = \text{grad} \varphi$$

现证明之.

设 $\mathbf{a} = \text{grad} \varphi$. 直接微分易证

$$\text{rot} \mathbf{a} = \text{rot} \text{grad} \varphi = 0$$

反之, 设 $\text{rot} \mathbf{a} = 0$, 则由斯托克斯公式有

$$\oint_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \text{rot} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

其中 L 是任意周界, 于是矢量 \mathbf{a} 沿任意封闭回线 L 的线积分为零. 根据 1.3 中定理 2 推出

$$\mathbf{a} = \text{grad} \varphi$$

等价性证毕.

1.11 基本运算公式

a) 微分公式

1. $\text{grad}(\varphi + \psi) = \text{grad}\varphi + \text{grad}\psi.$
2. $\text{grad}(\varphi\psi) = \varphi\text{grad}\psi + \psi\text{grad}\varphi.$
3. $\text{grad}F(\varphi) = F'(\varphi)\text{grad}\varphi, \text{grad}\varphi(r) = \varphi'(r)\frac{r}{r}.$
4. $\text{div}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{div}\mathbf{a} + \text{div}\mathbf{b}.$
5. $\text{div}(\varphi\mathbf{a}) = \varphi\text{div}\mathbf{a} + \text{grad}\varphi \cdot \mathbf{a}.$
6. $\text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \text{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \text{rot}\mathbf{b}.$
7. $\text{rot}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{rot}\mathbf{a} + \text{rot}\mathbf{b}.$
8. $\text{rot}(\varphi\mathbf{a}) = \varphi\text{rot}\mathbf{a} + \text{grad}\varphi \times \mathbf{a}.$
9. $\text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a}\text{div}\mathbf{b} - \mathbf{b}\text{div}\mathbf{a}.$
10. $\text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + \mathbf{b} \times \text{rot}\mathbf{a} + \mathbf{a} \times \text{rot}\mathbf{b}.$
11. $\text{grad} \frac{a^2}{2} = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a} \times \text{rot}\mathbf{a},$

$$\text{或 } (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{a} = \text{grad} \frac{a^2}{2} - \mathbf{a} \times \text{rot}\mathbf{a}.$$

12. $\text{div grad}\varphi = \Delta\varphi.$
13. $\text{div rot}\mathbf{a} = 0.$
14. $\text{rot grad}\varphi = 0.$
15. $\text{rot rot}\mathbf{a} = \text{grad div}\mathbf{a} - \Delta\mathbf{a}.$
16. $\text{div}(\varphi\text{grad}\psi) = \varphi\Delta\psi + \text{grad}\varphi \cdot \text{grad}\psi.$
17. $\Delta(\varphi\psi) = \psi\Delta\varphi + \varphi\Delta\psi + 2\text{grad}\varphi \cdot \text{grad}\psi.$

b) 积分公式

18. $\int_V \text{grad}\varphi dV = \int_S n\varphi dS.$
19. $\int_V \text{div}\mathbf{a} dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} dS$ (此式即奥高公式).

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

$$20. \int_V \operatorname{rot} a dV = \int_S n \times a dS.$$

$$21. \int_V (\mathbf{v} \cdot \nabla) a dV = \int_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) a dS, \text{ 其中 } \mathbf{v} \text{ 是常矢量.}$$

$$22. \int_V \Delta \varphi dV = \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \int_S \mathbf{n} \cdot \nabla \varphi dS.$$

$$23. \int_V \Delta \mathbf{a} dV = \int_S \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial n} dS = \int_S (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{a} dS.$$

24. 格林第一公式

$$\int_V (\varphi \Delta \psi + \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi) dV = \int_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS$$

$$\int_V (\psi \Delta \varphi + \operatorname{grad} \psi \cdot \operatorname{grad} \varphi) dV = \int_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$$

25. 格林第二公式

$$\int_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV = \int_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS$$

$$26. \int_V (\operatorname{grad} \varphi)^2 dV = \int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS, \text{ 其中 } \varphi \text{ 满足}$$

$$\Delta \varphi = 0$$

24—26式中 V 是单联通区域.

在上述公式中出现的符号 Δ 称为拉普拉斯算子, 它在直角坐标系中的表达式是

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$$

微分公式的正确性可以通过直接微分的方法逐一检验, 读者可作为练习自行验证. 现在我们来证明上述积分公式的正确性.

$$18. \int_V \operatorname{grad} \varphi dV = \int_S n \varphi dS.$$

$$\text{证 } \int_V \operatorname{grad} \varphi dV = \int_V \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} i + \frac{\partial \varphi}{\partial y} j + \frac{\partial \varphi}{\partial z} k \right) dV$$

$$= \int_S \varphi \left[\cos(n, x)i + \cos(n, y)j + \cos(n, z)k \right] dS = \int_S \varphi n dS$$

20. $\int_V \text{rot } \mathbf{a} dV = \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{a} dS.$

证 以 x 方向分量为例加以证明.

$$\begin{aligned} \int_V \text{rot}_x \mathbf{a} dV &= \int_V \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) dV \\ &= \int_S [a_z \cos(n, y) - a_y \cos(n, z)] dS \\ &= \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{a})_x dS \end{aligned}$$

同样地, 对 y 方向, z 方向亦可以证明上式的正确性.

21. $\int_V (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{a} dV = \int_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{a} dS, \mathbf{v}$ 是常矢量.

证
$$\begin{aligned} \int_V (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{a} dV &= \int_V \left(v_x \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} \right) dV \\ &= \int_V \left[\frac{\partial (v_x \mathbf{a})}{\partial x} + \frac{\partial (v_y \mathbf{a})}{\partial y} + \frac{\partial (v_z \mathbf{a})}{\partial z} \right] dV \\ &= \int_S [v_x \cos(n, x) + v_y \cos(n, y) + v_z \cos(n, z)] \mathbf{a} dS \\ &= \int_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{a} dS \end{aligned}$$

22. $\int_V \Delta \varphi dV = \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS.$

证 在 19 式中令 $\mathbf{a} = \text{grad } \varphi$, 即得此式.

$$23. \int_V \Delta a dV = \int_S \frac{\partial a}{\partial n} dS.$$

证 对此式左边的三个分量运用 22 式, 即得此式.

$$24. \int_V (\varphi \Delta \psi + \text{grad} \varphi \cdot \text{grad} \psi) dV = \int_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS.$$

证 在 19 式中令 $a = \varphi \text{grad} \psi$, 并考虑到 16 式, 即得此式. 将 φ 与 ψ 易位得:

$$\int_V (\psi \Delta \varphi + \text{grad} \psi \cdot \text{grad} \varphi) dV = \int_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$$

$$25. \int_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV = \int_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS.$$

证 将格林第一公式的两种不同形式相减即得上式.

$$26. \int_V (\text{grad} \varphi)^2 dV = \int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS.$$

证 在 24 式中令 $\varphi = \psi$, 并考虑到 $\Delta \varphi = 0$. 即得此式.

1.9 哈密顿算子

现在我们引进矢量分析中一个非常重要的微分运算符, 称为哈密顿算子, 它的表达式是:

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.9.1)$$

这是一个具有矢量和微分双重性质的符号. 一方面它是一个矢量, 因此在运算时可以利用矢量代数和矢量分析中的所有法则; 另一方面它又是一个微分算子, 因此可以按微分法则进行运算, 但是必须注意它只对位于算子 ∇ 右边的量发生微分作用至于位于算子左边的量算子 ∇ 对它不起作用.

下面我们将 $\text{grad} \varphi, \text{div} a, \text{rot} a, \Delta \varphi$ 及 $\frac{\partial a}{\partial s}$ 写成哈密顿算子形

式，并利用哈密顿算子来证明上节中几个较复杂的微分公式。

$$\nabla\varphi = \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi$$

$$= i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \text{grad} \varphi$$

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (i a_x + j a_y + k a_z)$$

$$= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \text{div} \mathbf{a}$$

$$\nabla \times \mathbf{a} = \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (i a_x + j a_y + k a_z)$$

$$= i \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + j \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + k \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) = \text{rot} \mathbf{a}$$

$$(\mathbf{s}_0 \cdot \nabla) \mathbf{a} = \left[(i \cos(s, x) + j \cos(s, y) + k \cos(s, z)) \right.$$

$$\left. \times \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \mathbf{a}$$

$$= \left[\cos(s, x) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(s, y) \frac{\partial}{\partial y} + \cos(s, z) \frac{\partial}{\partial z} \right] \mathbf{a}$$

$$= \cos(s, x) \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + \cos(s, y) \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + \cos(s, z) \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial s}$$

$$\nabla^2 \varphi = (\nabla \cdot \nabla) \varphi = \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi$$

$$= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi$$

以 $\nabla\varphi, \nabla \cdot \mathbf{a}$ 为例说明哈密顿算子是如何使用的。一方面 $\nabla\varphi$ 是矢量

$$i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

和标量 φ 的乘积，按矢量代数法则它是一个矢量，其分量是

$$\varphi \text{ 与 } \frac{\partial}{\partial x}, \varphi \text{ 与 } \frac{\partial}{\partial y}, \varphi \text{ 与 } \frac{\partial}{\partial z}$$

的乘积；另一方面 ∇ 是微分算子，它应该对 φ 起微分作用，这样 $\nabla\varphi$ 的三个分量必然是

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

即

$$\nabla\varphi = i \frac{\partial\varphi}{\partial x} + j \frac{\partial\varphi}{\partial y} + k \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \text{grad}\varphi$$

我们现在对 $\nabla \cdot \mathbf{a}$ 进行同样的讨论。 $\nabla \cdot \mathbf{a}$ 是

$$\text{矢量 } i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \text{ 和矢量 } \mathbf{a} = ia_x + ja_y + ka_z$$

的点乘，按点乘法则得标量

$$a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z}$$

同时 ∇ 应对 \mathbf{a} 起微分作用，于是 a_x, a_y, a_z 应写在微分号内。这样

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \text{div}\mathbf{a}$$

完全相似地可以对 $\nabla \times \mathbf{a}, (\mathbf{s}_0 \cdot \nabla)\mathbf{a}, (\nabla \cdot \nabla)\varphi$ 进行同样的说明。

现在我们利用哈密顿算子的符号法来证明 1.8 中的几个较复杂的微分公式，

$$(1) \text{div}(\varphi\mathbf{a}) = \varphi \text{div}\mathbf{a} + \text{grad}\varphi \cdot \mathbf{a}.$$

证 等式左边可写成

$$\text{div}(\varphi\mathbf{a}) = \nabla \cdot (\varphi\mathbf{a})$$

根据两函数乘积的微分法则， $\nabla \cdot (\varphi\mathbf{a})$ 等于 φ 看成常数微分 \mathbf{a} 和 \mathbf{a} 看成常数微分 φ 二项之和，于是有

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{a}) = \nabla \cdot (\varphi_c \mathbf{a}) + \nabla \cdot (\varphi \mathbf{a}_c)$$

其中 φ_c, \mathbf{a}_c 代表暂时看作是常数的符号, 这符号以后经常使用, 在使用时我们不再加以说明. 先考虑 $\nabla \cdot (\varphi_c \mathbf{a})$, 既然 φ_c 是常数, ∇ 对它不起微分作用, 因此应该提出放在微分符号 ∇ 之前, 于是有

$$\nabla \cdot (\varphi_c \mathbf{a}) = \varphi_c \nabla \cdot \mathbf{a} = \varphi_c \operatorname{div} \mathbf{a}$$

其次考虑 $\nabla \cdot (\varphi \mathbf{a}_c)$, 此时 \mathbf{a}_c 是常数应提到符号 ∇ 之前, 但它作为一矢量还应和矢量 ∇ 起点乘作用, 于是有

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{a}_c) = \mathbf{a}_c \cdot \nabla \varphi = \mathbf{a}_c \cdot \operatorname{grad} \varphi$$

既然 φ_c, \mathbf{a}_c 都在微分号外便可去掉指标 c , 这样最终得

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{a}$$

$$(2) \operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{b},$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \nabla \cdot (\mathbf{a}_c \times \mathbf{b}) + \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}_c).$$

证 先考虑右边第二项, 现设法将常矢量 \mathbf{b}_c 放在 ∇ 之前, 而变矢量 \mathbf{a} 仍在算子 ∇ 之右. 利用三矢量混合乘积的法则我们有

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}_c) = \mathbf{b}_c \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = \mathbf{b}_c \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a}$$

同样地, 对第一项进行变换, 有

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{a}_c \times \mathbf{b}) &= -\nabla \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}_c) = -\mathbf{a}_c \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \\ &= -\mathbf{a}_c \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) = -\mathbf{a}_c \cdot \operatorname{rot} \mathbf{b} \end{aligned}$$

舍去指标 c 后, 最后我们得到

$$\operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{b}$$

$$(3) \operatorname{rot}(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{a} + \operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{a}.$$

$$\begin{aligned} \text{证 } \operatorname{rot}(\varphi \mathbf{a}) &= \nabla \times (\varphi \mathbf{a}) = \nabla \times (\varphi_c \mathbf{a}) + \nabla \times (\varphi \mathbf{a}_c) \\ &= \varphi_c \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a}_c \times \nabla \varphi = \varphi_c \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a}_c \times \operatorname{grad} \varphi \\ &= \varphi \operatorname{rot} \mathbf{a} + \operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{a}. \end{aligned}$$

$$(4) \operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a}.$$

$$\begin{aligned} \text{证 } \operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \nabla \times (\mathbf{a}_c \times \mathbf{b}) + \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}_c) \\ &= \mathbf{a}_c (\nabla \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a}_c \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b}_c \cdot \nabla) \mathbf{a} - \mathbf{b}_c (\nabla \cdot \mathbf{a}) \\ &= (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a}. \end{aligned}$$

$$(5) \text{ grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \text{rot} \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \text{rot} \mathbf{b}.$$

$$\begin{aligned} \text{证 } \text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \nabla(\mathbf{a}_c \cdot \mathbf{b}) + \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_c) \\ &= (\mathbf{a}_c \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{a}_c \times (\nabla \times \mathbf{b}) + (\mathbf{b}_c \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{b}_c \\ &\quad \times (\nabla \times \mathbf{a}) \\ &= (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \text{rot} \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \text{rot} \mathbf{b}. \end{aligned}$$

(6) 在上式中当 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ 时得

$$\text{grad} \frac{a^2}{2} = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \text{rot} \mathbf{a}$$

或

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a} = \text{grad} \frac{a^2}{2} - \mathbf{a} \times \text{rot} \mathbf{a}$$

$$(7) \text{ div grad} \varphi = \Delta \varphi.$$

$$\text{证 } \text{div grad} \varphi = \nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi.$$

$$(8) \text{ div rot} \mathbf{a} = 0.$$

$$\text{证 } \text{div rot} \mathbf{a} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{a}$$

在混合乘积中既然有两个矢量相同，必然为零，于是

$$\text{div rot} \mathbf{a} = 0$$

$$(9) \text{ rot grad} \varphi = 0.$$

$$\text{证 } \text{rot grad} \varphi = \nabla \times \nabla \varphi = 0.$$

$$(10) \text{ rot rot} \mathbf{a} = \text{grad div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}.$$

$$\begin{aligned} \text{证 } \text{rot rot} \mathbf{a} &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{a} \\ &= \text{grad div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a} \end{aligned}$$

建议读者利用哈密顿算子的符号法证明 1.8 中其余几个微分公式。

现在我们利用哈密顿算子将 18 到 22 的几个积分公式改写成下列形式：

$$18) \int_V \nabla \varphi dV = \int_S n \varphi dS.$$

$$19) \int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \int_S n \cdot \mathbf{a} dS.$$

$$20) \int_V \nabla \times \mathbf{a} dV = \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{a} dS.$$

$$21) \int_V (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{a} dV = \int_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{a} dS, \mathbf{v} \text{ 是常矢量.}$$

$$22) \int_V \nabla \cdot \nabla \varphi dV = \int_S (\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi) dS.$$

细心考察一下这几个公式我们发现一件有趣的事实，就是体积分中 被积函数和面积分中的被积函数存在着这样一个简单关系，即只要将体积分中的哈密顿算子换成法向单位矢量 \mathbf{n} 就可得到面积分中的被积函数。为了普遍起见，我们将体积分中的被积函数看成是矢量 ∇ 或矢量 \mathbf{n} 的函数 $L(\nabla)$ 或 $L(\mathbf{n})$ ，一般地可写成 $L(\mathbf{A})$ ，其中 \mathbf{A} 可以是 ∇, \mathbf{n} 或其他矢量。例如 18), 19) 及 21) 三式中的 $L(\mathbf{A})$ 分别是 $\mathbf{A}\varphi, \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}, (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A})\mathbf{a}$ ；其次，我们假定函数 $L(\nabla)$ 中位于哈密顿算子之前的量都是常量，例如当

$$L(\nabla) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{a}$$

时， ∇ 前的 \mathbf{v} 应该认为是常矢量。我们看到 18) — 22) 各式中的被积函数 $L(\mathbf{A})$ 都具有下列两个性质：

$$L(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = L(\mathbf{A}) + L(\mathbf{B})$$

$$L(\lambda \mathbf{A}) = \lambda L(\mathbf{A})$$

现对 18), 19) 及 21) 三式中的 $L(\mathbf{A})$ 分别证明之：

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\varphi = \mathbf{A}\varphi + \mathbf{B}\varphi, \quad (\lambda \mathbf{A})\varphi = \lambda(\mathbf{A}\varphi)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}, \quad (\lambda \mathbf{A}) \cdot \mathbf{a} = \lambda(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a})$$

$$[\mathbf{v} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B})]\mathbf{a} = [\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}]\mathbf{a} + [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}]\mathbf{a}, \quad [\mathbf{v} \cdot \lambda \mathbf{A}]\mathbf{a} = \lambda[\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}]\mathbf{a}$$

考虑到上面所说的各点，公式 18) — 22) 可推广为下列普遍公式，设函数 $L(\mathbf{A})$ 满足

$$L(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = L(\mathbf{A}) + L(\mathbf{B}), \quad L(\lambda \mathbf{A}) = \lambda L(\mathbf{A})$$

则推广奥高公式

$$\int_V L(\nabla) dV = \int_S L(\mathbf{n}) dS \quad (1.9.2)$$

成立，其中 $L(\nabla)$ 中， ∇ 前的量假定是常数。现证明之。



反复利用 $L(\mathbf{A})$ 的两个性质及奥高公式得:

$$\begin{aligned}
 \int_V L(\nabla) dV &= \int_V L\left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}\right) dV \\
 &= \int_V L\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) dV + \int_V L\left(j \frac{\partial}{\partial y}\right) dV + \int_V L\left(k \frac{\partial}{\partial z}\right) dV \\
 &= \int_V \frac{\partial}{\partial x} L(i) dV + \int_V \frac{\partial}{\partial y} L(j) dV + \int_V \frac{\partial}{\partial z} L(k) dV \\
 &= \int_S [\cos(n, x) L(i) + \cos(n, y) L(j) \\
 &\quad + \cos(n, z) L(k)] dS \\
 &= \int_S \{L[\cos(n, x) i] + L[\cos(n, y) j] \\
 &\quad + L[\cos(n, z) k]\} dS \\
 &= \int_S \{L[\cos(n, x) i + \cos(n, y) j + \cos(n, z) k]\} dS \\
 &= \int_S L(n) dS
 \end{aligned}$$

应该指出, 从第二步到第三步时已经利用了 $L(\nabla)$ 中 ∇ 前的量是常数的假定. 容易看出, 若 $L(\nabla)$ 分别是 $\nabla\varphi, \nabla \cdot \mathbf{a}, \nabla \times \mathbf{a}, (\mathbf{s}_0 \cdot \nabla)\mathbf{a}$ 及 $\nabla \cdot \nabla\varphi$, 则利用推广奥高公式再一次地得到 18)–22) 各式.

现在我们利用推广奥高公式来推导哈密顿算子另一与坐标无关的表达式. 为此首先写出推广奥高公式的微分形式.

设 V 是向 M 点收缩的体积元, 则

$$\int_V L(\nabla) dV = \int_V \{[L(\nabla)]M + \varepsilon\} dV = \{L(\nabla)\}_M V + \eta V$$

其中 ε, η 都是无穷小量, 由上式及推广奥高公式得

$$\frac{\oint_S L(n) dS}{V} = \frac{\int_V L(\nabla) dV}{V} = \{L(\nabla)\}_M + \eta$$

当 V 趋于 M 点时

$$L(\nabla) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S L(n) dS}{V}$$

超星阅览 (1.9.3)
使用本复制品
请尊重相关知识产权!

令 $L(\nabla) = \nabla$, 则得哈密顿算子与坐标无关的表达式

$$\nabla = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S n dS}{V} \quad (1.9.4)$$

若 $L(\nabla) = \nabla\varphi, \nabla \cdot \mathbf{a}$ 或 $\nabla \times \mathbf{a}$, 则由(1.9.3)式分别得到 $\nabla\varphi, \nabla \cdot \mathbf{a}$ 及 $\nabla \times \mathbf{a}$ 与坐标无关的表达式.

通过上述讨论可以清楚地看到引进哈密顿算子的优越性. 它不仅书写简便, 便于记忆, 而且可以按照普通的矢量法则及微分法则进行计算, 大大地简化了计算工作, 克服了公式难于记忆的缺点, 同时也将矢量分析中各种运算融合成一个统一的封闭系统. 从哈密顿算子的角度来看, 引进 $\text{grad}\varphi, \text{div}\mathbf{a}, \text{rot}\mathbf{a}$ 对矢量分析来说原是十分自然的, 因为它只不过是微分算子矢量 ∇ 和标量 φ 的乘积, 和矢量 \mathbf{a} 的点乘及叉乘而已. 而这些矢量运算在矢量分析运算中将会不可避免地大量出现, 因此引进它们是自然的. 当然引进它们还有更重要的物理上的考虑, 因为这些量在物理和力学中各自具有重要的物理含意.

1.10 张量表示法

在近代理论流体力学和计算流体力学中越来越广泛地使用张量表示法. 和哈密顿算子法一样, 张量表示法具有书写简洁、运

任取，例如可不用 a 而用 b 。

例如 $\text{grad}\varphi$ 的张量表示法为 $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ 。



(2) 约定求和法则。为书写简便，我们约定在同一项中如有两个自由指标相同时，就表示要对这个指标从 1 到 3 求和，例如：

$$a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = \text{div } a$$

$$(a \cdot \nabla) b = a_i \frac{\partial b_i}{\partial x_i}$$

$$\Delta a = \nabla^2 a = \nabla \cdot \nabla a = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_i \partial x_i}$$

(3) 符号 δ_{ij} 定义为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{当 } i \neq j \text{ 时} \\ 1, & \text{当 } i = j \text{ 时} \end{cases}$$

例如 $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ ，其中 e_i 是正交坐标轴 q_i 的单位矢量。 δ_{ij} 常称为克罗内克尔 (Kronecker) δ 。

(4) 置换符号 ε_{ijk} 定义为

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & i, j, k \text{ 中有两个以上指标相同时} \\ 1, & i, j, k \text{ 为偶排列 (如 } \varepsilon_{123}, \varepsilon_{231}, \varepsilon_{312} \text{ 等)} \\ -1, & i, j, k \text{ 为奇排列 (如 } \varepsilon_{213}, \varepsilon_{321}, \varepsilon_{132} \text{ 等)} \end{cases}$$

例如

$$a \times b = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \quad \text{rot } a = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3}$$

$\delta_{ij}, \varepsilon_{ijk}$ 是很有用的量，它们将经常在张量表示法中出现，两者之间存在着下列重要的恒等式。

(5) ε - δ 恒等式

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ist} = \delta_{js}\delta_{kt} - \delta_{jt}\delta_{ks}$$

超星阅读器提醒您：
使用本阅读器时，
请尊重版权。

(1.10.1)

证 j, k, s, t 中每一个指标都只能取 1, 2, 3, 所以它们之中最多只能有三个互不相同的. 现区别以下三种情形证明 ε - δ 恒等式为真.

(i) j, k, s, t 中所有指标都相同, 也就是 $j=k=s=t$, 此时 (1.10.1) 式两边皆为 0.

(ii) j, k, s, t 中有二个不同的指标, 又可分为: (a) $j=s \neq k=t$ 两边皆为 1; (b) $j=t \neq k=s$ 两边皆为 -1; (c) $j=k \neq s=t$ 两边皆为 0.

(iii) j, k, s, t 中有三个不同的指标, 有

$$j=k \neq s \neq t, \quad j=s \neq k \neq t$$

等六种可能, 不管那种情形, 恒等式两边皆为 0.

使用张量表示法证明 1.8 中基本运算公式时可以使用所有代数运算法则和微积分运算法则. 作为例子我们证明:

$$\therefore \operatorname{div}(\varphi \mathbf{a}) = \frac{\partial(\varphi a_i)}{\partial x_i} = \varphi \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \varphi \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{a}.$$

$$\begin{aligned} \text{v. } \operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\varepsilon_{ijk} a_j b_k) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} b_k + \varepsilon_{ijk} a_j \frac{\partial b_k}{\partial x_i} \\ &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} b_k - \varepsilon_{jik} \frac{\partial b_k}{\partial x_i} a_j = \mathbf{b} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{b}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{vi. } \operatorname{rot}(\varphi \mathbf{a}) &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial(\varphi a_k)}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk} \varphi \frac{\partial a_k}{\partial x_j} + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} a_k \\ &= \varphi \operatorname{rot} \mathbf{a} + (\nabla \varphi) \times \mathbf{a}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{vii. } \operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \varepsilon_{klm} a_l b_m}{\partial x_j} = \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} \frac{\partial a_l b_m}{\partial x_j} \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \left(a_l \frac{\partial b_m}{\partial x_j} + b_m \frac{\partial a_l}{\partial x_j} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_j} - a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} + b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \\
 &= (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a}.
 \end{aligned}$$

$$10. \quad (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \operatorname{rot} \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \operatorname{rot} \mathbf{b}$$

$$\begin{aligned}
 &= b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} + a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} + \varepsilon_{ijk} b_j \varepsilon_{klm} \frac{\partial a_m}{\partial x_l} + \varepsilon_{ijk} a_j \varepsilon_{klm} \frac{\partial b_m}{\partial x_l} \\
 &= b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} + a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} + (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \left(b_j \frac{\partial a_m}{\partial x_l} + a_j \frac{\partial b_m}{\partial x_l} \right) \\
 &= b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} + a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} + a_j \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} + b_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \\
 &= a_j \frac{\partial b_j}{\partial x_i} + b_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i} = \frac{\partial a_j b_j}{\partial x_i} = \operatorname{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).
 \end{aligned}$$

$$15. \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\varepsilon_{klm} \frac{\partial a_m}{\partial x_l} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \frac{\partial^2 a_m}{\partial x_j \partial x_l} \\
 &= \frac{\partial^2 a_j}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_j} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 20. \quad \int_V \nabla \times \mathbf{a} dV &= \int_V \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} dV = \int_S \varepsilon_{ijk} a_k n_j dS \\
 &= \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{a} dS.
 \end{aligned}$$

1.11 梯度、散度、旋度、拉普拉斯算子在曲线坐标系中的表达式

在许多实际问题中，利用曲线坐标，例如柱坐标、球坐标，比利用直角坐标更为方便。这一节将推导梯度、散度、旋度及拉

普拉斯算子在曲线坐标系中的表达式。

a) 曲线坐标的引进, 柱坐标及球坐标

空间中任一点 M 在直角坐标系中是由 (x, y, z) 三个数唯一决定的。此时矢径 r 的表达式是

$$r = xi + yj + zk$$

但是我们也可以用另外三个数 (q_1, q_2, q_3) 唯一地决定 M 点 (参看图 1.11.1)。 q_1, q_2, q_3 称为曲线坐标。显然曲线坐标 q_1, q_2, q_3

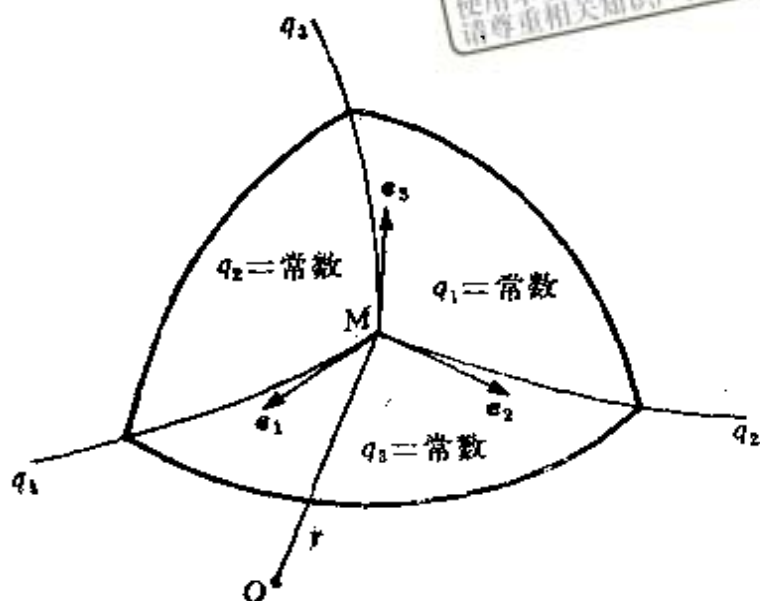


图 1.11.1

和直角坐标 x, y, z 之间存在着函数关系。一方面, 因 q_1, q_2, q_3 随 M 点的不同而改变其值, 即它们是矢径 r 或 x, y, z 的函数:

$$q_1 = q_1(x, y, z), \quad q_2 = q_2(x, y, z), \quad q_3 = q_3(x, y, z) \quad (1.11.1)$$

另一方面, 根据同样地考虑, 可得 x, y, z 也是 q_1, q_2, q_3 的函数

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3) \quad (1.11.2)$$

显然 函数(1.11.2)是(1.11.1)的反函数。反函数(1.11.2)在区域 R 内存在唯一的条件是:

- (1) 函数 q_i 在区域 R 内单值连续且具有连续一阶偏导数;
- (2) 雅可比 $\partial(q_1, q_2, q_3) / \partial(x, y, z)$ 在区域 R 内处处不为零。

在直角坐标系中作曲面

$$q_1 = \text{常数}, \quad q_2 = \text{常数}, \quad q_3 = \text{常数}$$

称为由面坐标系 (q_1, q_2, q_3) 中的坐标面。两个不同坐标面的交线称为坐标线, 以 q_1, q_2, q_3 表之。例如坐标面 $q_1 = \text{常数}$ 和 $q_2 = \text{常数}$ 的交线以 q_3 表之, 坐标面 $q_2 = \text{常数}$ 和 $q_3 = \text{常数}$ 的交线以 q_1 表之等等。显然, 在坐标线 q_1 上只有 q_1 改变, q_2 与 q_3 维持不变; 在

坐标线 q_3 上只有 q_3 变, q_1 与 q_2 不变等等.

在坐标线 q_1, q_2, q_3 上作单位矢量 e_1, e_2, e_3 . 若 e_1, e_2, e_3 相互正交, 则称为正交曲线坐标系; 反之, 称为斜交曲线坐标系. 下面我们只研究正交曲线坐标系的情形. 在曲线坐标中一矢量 a 可写成

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \quad (1.11.3)$$

a_1, a_2, a_3 称为矢量 a 在曲线坐标系中的分量或投影.

曲线坐标系和直角坐标系的根本区别在于曲线坐标系中的单位矢量 e_1, e_2, e_3 其方向是随着 M 点的不同而改变的.

最常用的正交曲线坐标是柱坐标及球坐标 (见图 1.11.2).

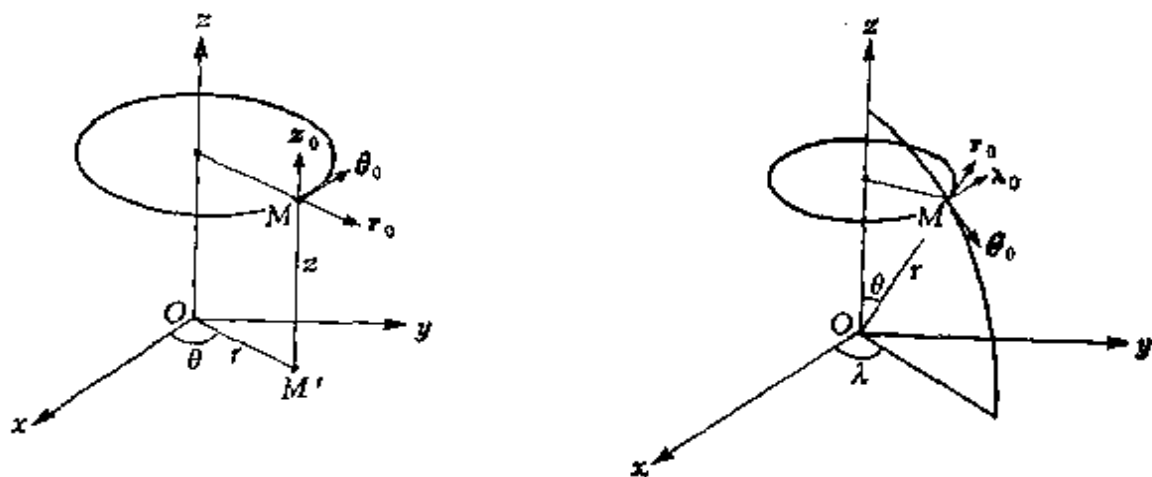


图 1.11.2

在柱坐标系中, $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = z, r$ 由 0 变到 ∞, θ 由 0 变到 $2\pi, z$ 由 $-\infty$ 变到 $+\infty$. 此时函数关系 (1.11.1) 是

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

坐标面和坐标线分别是:

坐标面	坐标线
$r = \text{常数}$ —— 以 MM' 为母线的圆柱面,	r 坐标线 —— 由 z 轴出发且垂直 z 轴的射线,
$\theta = \text{常数}$ —— 过 Oz 轴的半平面,	θ 坐标线 —— 圆心在 z 轴且平行 xy 平面的圆周,
$z = \text{常数}$ —— 垂直于 Oz 的平面.	z 坐标线 —— 平行 Oz 轴的诸直线.

在球坐标系中, $q_1=r, q_2=\theta, q_3=\lambda, r$ 由 0 变到 ∞, θ 由 0 变到 π, λ 由 0 变到 2π . 此时函数关系(1.11.1)是

$$x=r \sin \theta \cos \lambda, \quad y=r \sin \theta \sin \lambda, \quad z=r \cos \theta$$

坐标面和坐标线分别是:

r = 常数 —— 以 O 为心的球面, r 坐标线 —— 矢径,

θ = 常数 —— 以 Oz 轴为轴的圆锥面, θ 坐标线 —— 经线,

λ = 常数 —— 过 Oz 轴的半平面, λ 坐标线 —— 纬线.

b) 弧元素在曲线坐标系中的表达式

给定曲线 $r=r(q_1, q_2, q_3)$ (见图 1.11.3), 欲求弧元素矢量 dr 在曲线坐标系中的表达式. 显然

$$dr = \frac{\partial r}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial r}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial r}{\partial q_3} dq_3 \quad (1.11.4)$$

现在我们来研究矢量 $\frac{\partial r}{\partial q_1}, \frac{\partial r}{\partial q_2}, \frac{\partial r}{\partial q_3}$,

$\frac{\partial r}{\partial q_3}$ 的大小及方向. 以 $\frac{\partial r}{\partial q_1}$ 为例,

$\frac{\partial r}{\partial q_1}$ 是: q_2, q_3 不变, 只变 q_1 时 r

的偏导数, 故 $\frac{\partial r}{\partial q_1}$ 的方向显然是

坐标线 q_1 的方向 (其单位矢量为 e_1). 同理, $\frac{\partial r}{\partial q_2}, \frac{\partial r}{\partial q_3}$ 的方向分别

是坐标线 q_2 和 q_3 的方向. $\frac{\partial r}{\partial q_i}$ ($i=1, 2, 3$) 的大小是:

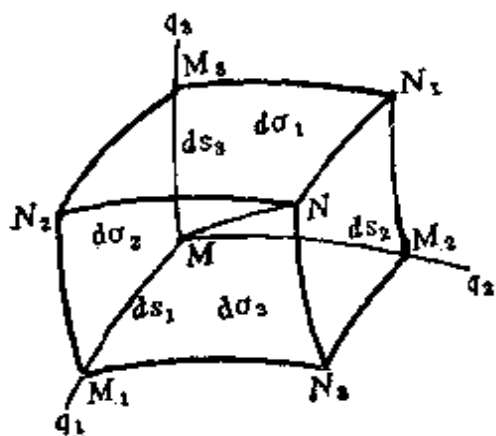


图 1.11.3

$$\begin{cases} \left| \frac{\partial r}{\partial q_1} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2} = H_1 \\ \left| \frac{\partial r}{\partial q_2} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2} = H_2 \\ \left| \frac{\partial r}{\partial q_3} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2} = H_3 \end{cases} \quad (1.11.5)$$

H_1, H_2, H_3 称为拉梅系数。它们是 q_1, q_2, q_3 的已知函数。

考虑到 $\frac{\partial r}{\partial q_i}$ 的大小及方向后, (1.11.4) 式可改写为

$$dr = H_1 dq_1 \mathbf{e}_1 + H_2 dq_2 \mathbf{e}_2 + H_3 dq_3 \mathbf{e}_3 \quad (1.11.6)$$

这就是弧元素矢量在曲线坐标系中的表达式, 它们在坐标轴上的投影 ds_1, ds_2, ds_3 分别是

$$ds_1 = H_1 dq_1, \quad ds_2 = H_2 dq_2, \quad ds_3 = H_3 dq_3 \quad (1.11.7)$$

而 dr 的大小 ds 是

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2 \quad (1.11.8)$$

以 ds_1, ds_2, ds_3 为边作一平面六面体 $M_1 M_2 M_3 N_1 N_2 N_3$, 则其体积为

$$dV = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3 \quad (1.11.9)$$

而各面的面积则为

$$\begin{cases} d\sigma_1 = H_2 H_3 dq_2 dq_3 \\ d\sigma_2 = H_3 H_1 dq_3 dq_1 \\ d\sigma_3 = H_1 H_2 dq_1 dq_2 \end{cases} \quad (1.11.10)$$

在柱坐标系中

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = 1$$

于是

$$\begin{aligned} ds^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \\ dV &= r dr d\theta dz \end{aligned} \quad (1.11.11)$$

在球坐标系中

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = r \sin \theta$$

于是

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\lambda^2$$

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\lambda$$



c) 梯度 $\text{grad}\varphi$ 在曲线坐标系中的表达式

根据梯度的性质, $\text{grad}\varphi$ 在曲线坐标轴上的投影分别是该方向的方向导数 $\frac{\partial\varphi}{\partial s_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial s_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial s_3}$, 将(1.11.7)式中的 ds_1, ds_2, ds_3 的表达式代入, 即得

$$(\text{grad}\varphi)_{e_1} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial\varphi}{\partial q_1}$$

$$(\text{grad}\varphi)_{e_2} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial\varphi}{\partial q_2}$$

$$(\text{grad}\varphi)_{e_3} = \frac{1}{H_3} \frac{\partial\varphi}{\partial q_3}$$

或

$$\text{grad}\varphi = \frac{1}{H_1} \frac{\partial\varphi}{\partial q_1} e_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial\varphi}{\partial q_2} e_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial\varphi}{\partial q_3} e_3 \quad (1.11.13)$$

这就是梯度 $\text{grad}\varphi$ 在曲线坐标系中的表达式.

在柱坐标及球坐标系中(1.11.13)式的形式是:

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} e_\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial z} e_z \quad (1.11.14)$$

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} e_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} e_\lambda \quad (1.11.15)$$

d) 散度 $\text{div}\mathbf{a}$ 在曲线坐标中的表达式

$\text{div}\mathbf{a}$ 的定义为

$$\text{div}\mathbf{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{a}_n dS}{V} \quad (1.11.16)$$

这个定义与坐标系的选取无关. 现在我们利用它来求散度 $\text{div}\mathbf{a}$ 在

曲线坐标系中的表达式。在场内任取一点 M ，作 M 点的体积元素 dV ， dV 是一个以 ds_1, ds_2, ds_3 为边的平行六面体，现在相当于(1.11.16)式中的 V 是 dV ，而 S 则相当于平行六面体的六个面。我们计算矢量 \mathbf{a} 经过这六个面的通量。

经过曲面 $MM_2N_1M_3$ 的通量为

$$-a_1 dS_2 dS_3 = -a_1 H_2 H_3 dq_2 dq_3,$$

因为此面的外法线方向是 q_1 的负方向，故取负号。

经过曲面 $M_1N_3NN_2$ 的通量为

$$\left[a_1 H_2 H_3 + \frac{\partial(a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} dq_1 \right] dq_2 dq_3,$$

于是经过这两个面的总通量是

$$\frac{\partial(a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} dq_1 dq_2 dq_3, \quad (1.11.17)$$

同理，经过 $MM_1N_2M_3$ 和 $M_2N_3NN_1$ 两面的总通量是

$$\frac{\partial(a_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} dq_1 dq_2 dq_3, \quad (1.11.18)$$

经过 $MM_1N_3M_2$ 和 $M_3N_2NN_1$ 两面上的总通量为

$$\frac{\partial(a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} dq_1 dq_2 dq_3, \quad (1.11.19)$$

将(1.11.17), (1.11.18)与(1.11.19)三式相加，得经过六个面的总通量为

$$\oint_S \mathbf{a}_n dS = \left[\frac{\partial(a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(a_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right] dq_1 dq_2 dq_3,$$

根据(1.11.9)式

$$dV = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3,$$

两式相除得 $\operatorname{div} \mathbf{a}$ 在曲线坐标系中的表达式为

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial(a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(a_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right] \quad (1.11.20)$$

超星浏览器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

在柱坐标和球坐标中， $\operatorname{div} \mathbf{a}$ 的表达式分别为

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (1.11.21)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\lambda}{\partial \lambda} \quad (1.11.22)$$

e) 旋度 $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ 在曲线坐标系中的表达式
 $\operatorname{rot}_n \mathbf{a}$ 的定义是

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{a} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}}{S} \quad (1.11.23)$$

此定义与坐标系的选取无关。现在我们利用它来求 $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ 在曲线坐标系中的表达式。作为一个例子，我们求 $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ 在 q_1 轴上的投影。此时取 n 为 q_1 的正方向； S 面是 $q_1 = \text{常数}$ ，即曲面 $d\sigma_1$ ；

(1.11.23) 中的曲线 L ，现为 $MM_2N_1M_3$ ，设其正方向为逆时针方向。现在我们计算矢量 \mathbf{a} 沿 $MM_2N_1M_3$ 的环量：

$$\begin{aligned} \int_{MM_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} &= a_2 dS_2 = a_2 H_2 dq_2 \\ \int_{M_2N_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} &= \left[a_2 H_2 + \frac{\partial(a_2 H_2)}{\partial q_3} dq_3 \right] dq_2 \\ \int_{MM_3} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} &= a_3 H_3 dq_3 \\ \int_{M_3N_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} &= \left[a_3 H_3 + \frac{\partial(a_3 H_3)}{\partial q_2} dq_2 \right] dq_3 \end{aligned}$$

因此

$$\oint_{MM_2N_1M_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_{MM_2} + \int_{M_2N_1} - \int_{M_2N_1} - \int_{MM_2}$$

$$= \left[\frac{\partial(a_3H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(a_2H_2)}{\partial q_3} \right] dq_2 dq_3$$

另一方面, 根据(1.11.10)式

$$d\sigma_1 = H_2 H_3 dq_2 dq_3$$

两式相除得

$$(\text{rota})_1 = \frac{1}{H_2 H_3} \left[\frac{\partial(a_3H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(a_2H_2)}{\partial q_3} \right] \quad (1.11.24)$$

同样地可得 $(\text{rota})_2, (\text{rota})_3$ 的表达式, 它们是

$$(\text{rota})_2 = \frac{1}{H_3 H_1} \left[\frac{\partial(a_1H_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(a_3H_3)}{\partial q_1} \right]$$

$$(\text{rota})_3 = \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial(a_2H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(a_1H_1)}{\partial q_2} \right]$$

或写成

$$\text{rota} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \begin{vmatrix} H_1 \mathbf{e}_1 & H_2 \mathbf{e}_2 & H_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1 a_1 & H_2 a_2 & H_3 a_3 \end{vmatrix}$$

在柱坐标和球坐标情形, rota 的表达式是

$$\begin{cases} \text{rot}_r \mathbf{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \\ \text{rot}_\theta \mathbf{a} = \frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r} \\ \text{rot}_z \mathbf{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \end{cases} \quad (1.11.25)$$

及

$$\begin{cases} \text{rot}_r \mathbf{a} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(a_\lambda \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\theta}{\partial \lambda} \\ \text{rot}_\theta \mathbf{a} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \lambda} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_\lambda)}{\partial r} \\ \text{rot}_\lambda \mathbf{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \end{cases} \quad (1.11.26)$$

f) 拉普拉斯算子 $\Delta \varphi$ 在曲线坐标系中的表达式

令 $\mathbf{a} = \text{grad} \varphi$ 代入 $\text{div} \mathbf{a}$ 的曲线坐标表达式(1.11.20)中去, 并考虑到(1.11.13)式, 我们有 $\Delta \varphi$ 在曲线坐标系中的表达式

$$\begin{aligned} \Delta \varphi = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} & \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.11.27)$$

在柱坐标和球坐标系中, 有

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (1.11.28)$$

$$\begin{aligned} \Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} \end{aligned} \quad (1.11.29)$$

1.12 曲线坐标系中单位矢量对坐标的偏导数及其应用

在物理及力学问题中常常须要计算矢量对曲线坐标的偏导数, 在计算这些偏导数时具有基本意义的是单位矢量 \mathbf{e}_i 对曲线坐标 q_i 的九个偏导数, 它们分别满足下列公式

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_1} = -\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 - \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial q_1} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \mathbf{e}_1 \\ \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_2} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \mathbf{e}_2 \end{cases} \quad (1.12.1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial q_2} = -\frac{1}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \mathbf{e}_3 - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 \\ \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial q_2} = \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \mathbf{e}_2 \\ \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial q_3} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \mathbf{e}_3 \end{cases} \quad (1.12.2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial q_3} = -\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 \\ \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_3} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial q_1} = \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \mathbf{e}_1 \end{cases} \quad (1.12.3)$$

或简写为

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q_i} = -\frac{1}{H_j} \frac{\partial H_i}{\partial q_j} \mathbf{e}_j - \frac{1}{H_k} \frac{\partial H_i}{\partial q_k} \mathbf{e}_k \quad (i, j, k \text{ 置换}) \quad (1.12.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q_j} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_j}{\partial q_i} \mathbf{e}_j \quad (i \neq j \text{ 时}) \quad (1.12.5)$$

现证明之。先推导(1.12.1)中的后两式。

因

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q_i} \cdot \mathbf{e}_i = \frac{\partial(1/2)}{\partial q_i} = 0 \quad (1.12.6)$$

所以

$$\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_2} \perp \mathbf{e}_1, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial q_1} \perp \mathbf{e}_2$$

其次, 由

$$\frac{\partial r}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial r}{\partial q_2} = H_1 \mathbf{e}_1 \cdot (H_2 \mathbf{e}_2) = 0$$

两边对 q_3 微分后得

$$\frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{\partial r}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial r}{\partial q_2} \right) = \frac{\partial r}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial q_3 \partial q_2} + \frac{\partial r}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial q_3 \partial q_1} = 0 \quad (1.12.7)$$

将上式中的 q_1, q_2, q_3 作指标轮换可得类似的两个式子, 然后将此两式和(1.12.7)式相加得:

$$\frac{\partial r}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial q_2 \partial q_3} + \frac{\partial r}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial q_3 \partial q_1} + \frac{\partial r}{\partial q_3} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial q_1 \partial q_2} = 0 \quad (1.12.8)$$

(1.12.8)式减(1.12.7)式得

$$\frac{\partial r}{\partial q_3} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial q_1 \partial q_2} = 0 \quad (1.12.9)$$

因

$$\frac{\partial^2 r}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{\partial(H_1 \mathbf{e}_1)}{\partial q_2} = \frac{\partial(H_2 \mathbf{e}_2)}{\partial q_1} \quad (1.12.10)$$

由(1.12.9), 易见

$$H_3 \mathbf{e}_3 \cdot \frac{\partial(H_1 \mathbf{e}_1)}{\partial q_2} = H_3 H_1 \mathbf{e}_3 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_2} = 0$$

及

$$H_3 \mathbf{e}_3 \cdot \frac{\partial(H_2 \mathbf{e}_2)}{\partial q_1} = H_3 H_2 \mathbf{e}_3 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial q_1} = 0$$

这就证明了

$$\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_2} \perp \mathbf{e}_3, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial q_1} \perp \mathbf{e}_3 \quad (1.12.11)$$

考虑到(1.12.6)和(1.12.11)式得

$$\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_2} \parallel \mathbf{e}_1, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial q_1} \parallel \mathbf{e}_1 \quad (1.12.12)$$

根据(1.12.10)式, 我们有

$$H_2 \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial q_1} + \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \mathbf{e}_2 = \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \mathbf{e}_1 + H_1 \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_2}$$

考虑到(1.12.12)式及 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 线性无关得

$$\frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial q_1} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \mathbf{e}_1, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_2} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \mathbf{e}_2$$

同理可证(1.12.2)与(1.12.3)中后两式成立.

容易看出

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_1} &= \frac{\partial(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)}{\partial q_1} \\ &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 \\ &= -\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 - \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

同理可证(1.12.2)与(1.12.3)中第一式成立.

在流体力学基本方程中会出现带有 $\text{grad}\varphi, \text{div}\mathbf{a}, \text{rot}\mathbf{a}, \Delta\varphi, (\mathbf{a} \cdot \nabla)b, \Delta\mathbf{a} \dots$ 等算子的项, 这些算子在曲线坐标系中的表达式可以利用(1.12.1)–(1.12.3)式经过运算得到. 上节我们利用算子的定义已导出 $\text{grad}\varphi, \text{div}\mathbf{a}, \text{rot}\mathbf{a}, \Delta\varphi$ 在曲线坐标系中的表达式(1.11.13), (1.11.20), (1.11.24), (1.11.27), 现利用(1.12.1)–(1.12.3)式也可以导出它们来, 这个工作留给读者完成(见习题). 下面我们推导其他两个算子在曲线坐标系中的表达式.

(1) $(\mathbf{a} \cdot \nabla)b$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \cdot \nabla)b &= \mathbf{a} \cdot \nabla(b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3) \\ &= \mathbf{e}_1 (\mathbf{a} \cdot \nabla b_1) + \mathbf{e}_2 (\mathbf{a} \cdot \nabla b_2) + \mathbf{e}_3 (\mathbf{a} \cdot \nabla b_3) + b_1 (\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{e}_1) \\ &\quad + b_2 (\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{e}_2) + b_3 (\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{e}_3) \\ &= \mathbf{e}_1 (\mathbf{a} \cdot \nabla b_1) + \mathbf{e}_2 (\mathbf{a} \cdot \nabla b_2) + \mathbf{e}_3 (\mathbf{a} \cdot \nabla b_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{a_1 b_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 - \frac{a_1 b_1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \mathbf{e}_3 + \frac{a_2 b_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \mathbf{e}_2 \\
& + \frac{a_2 b_1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \mathbf{e}_3 - \frac{a_2 b_2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \mathbf{e}_3 - \frac{a_2 b_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 \\
& + \frac{a_3 b_2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \mathbf{e}_3 + \frac{a_1 b_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \mathbf{e}_1 - \frac{a_3 b_3}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 \\
& - \frac{a_3 b_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + \frac{a_1 b_3}{H_3 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \mathbf{e}_1 + \frac{a_2 b_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \mathbf{e}_2
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} = & \mathbf{e}_1 \left\{ \mathbf{a} \cdot \nabla b_1 + \frac{b_2}{H_1 H_2} \left(a_1 \frac{\partial H_1}{\partial q_2} - a_2 \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right) \right. \\
& \left. + \frac{b_3}{H_3 H_1} \left(a_1 \frac{\partial H_1}{\partial q_3} - a_3 \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \right) \right\} + \mathbf{e}_2 \left\{ \mathbf{a} \cdot \nabla b_2 \right. \\
& \left. + \frac{b_3}{H_2 H_3} \left(a_2 \frac{\partial H_2}{\partial q_3} - a_3 \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \right) + \frac{b_1}{H_1 H_2} \left(a_2 \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right. \right. \\
& \left. \left. - a_1 \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \right) \right\} + \mathbf{e}_3 \left\{ \mathbf{a} \cdot \nabla b_3 + \frac{b_1}{H_3 H_1} \left(a_3 \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \right. \right. \\
& \left. \left. - a_1 \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \right) + \frac{b_2}{H_2 H_3} \left(a_3 \frac{\partial H_3}{\partial q_2} - a_2 \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \right) \right\} \quad (1.12.13)
\end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{a} \cdot \nabla = \frac{a_1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{a_2}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{a_3}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3}$$

(2) $\Delta \mathbf{a}$

由基本运算公式 15 我们有:

$$\Delta \mathbf{a} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a})$$

先推寻 $\Delta \mathbf{a}$ 在 q_1 轴上的投影 $(\Delta \mathbf{a})_1$, 利用公式(1.11.20), (1.11.13)

及(1.11.24)我们有

$$\begin{aligned}
 (\Delta a)_1 &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left\{ \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial(H_2 H_3 a_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(H_3 H_1 a_2)}{\partial q_2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\partial(H_1 H_2 a_3)}{\partial q_3} \right] \right\} - \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial q_2} \left\{ \frac{H_1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial(H_2 a_1)}{\partial q_1} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\partial(H_1 a_1)}{\partial q_2} \right] \right\} + \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \left\{ \frac{H_2}{H_3 H_1} \left[\frac{\partial(H_1 a_1)}{\partial q_1} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\partial(H_3 a_3)}{\partial q_1} \right] \right\} \\
 &= \Delta a_1 + \frac{2}{H_1^2 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \frac{\partial a_1}{\partial q_1} - \frac{2}{H_1 H_2^2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \frac{\partial a_2}{\partial q_2} \\
 &\quad + \frac{2}{H_1^2 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \frac{\partial a_3}{\partial q_1} - \frac{2}{H_1 H_3^2} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \frac{\partial a_3}{\partial q_3} \\
 &\quad + \left\{ \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial(H_2 H_3)}{\partial q_1} \right] + \frac{1}{H_2 H_3} \right. \\
 &\quad \times \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\frac{H_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \right] + \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \left[\frac{H_2}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \right] \left. \right\} a_1 \\
 &\quad + \left\{ \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial(H_3 H_1)}{\partial q_2} \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\frac{H_3}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right] \right\} a_2 + \left\{ \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \frac{\partial(H_1 H_2)}{\partial q_3} \right] - \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \left[\frac{H_2}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \right] \right\} a_3
 \end{aligned}$$

(1.12.14)

同理可得

$$\begin{aligned} (\Delta \mathbf{a})_2 = & \Delta \mathbf{a}_2 \frac{2}{H_2^2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial q_2} - \frac{2}{H_2 H_3^2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial q_3} \\ & + \frac{2}{H_3^2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial q_2} - \frac{2}{H_2 H_1^2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial q_1} \\ & + \left\{ \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial (H_3 H_1)}{\partial q_3} \right] + \frac{1}{H_3 H_1} \right. \\ & \times \frac{\partial}{\partial q_3} \left[\frac{H_1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \right] + \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{H_3}{H_1 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right] \left. \right\} \mathbf{a}_2 \\ & + \left\{ \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial (H_1 H_2)}{\partial q_3} \right] - \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial}{\partial q_3} \left[\frac{H_1}{H_2 H_3} \right. \right. \\ & \times \left. \left. \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \right] \right\} \mathbf{a}_3 + \left\{ \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial (H_2 H_3)}{\partial q_1} \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{H_3}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \right] \right\} \mathbf{a}_1 \end{aligned} \quad (1.12.15)$$

$$\begin{aligned} (\Delta \mathbf{a})_3 = & \Delta \mathbf{a}_3 + \frac{2}{H_3^2 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial q_3} - \frac{2}{H_3 H_1^2} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial q_1} \\ & + \frac{2}{H_3^2 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial q_3} - \frac{2}{H_3 H_2^2} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial q_2} \\ & + \left\{ \frac{1}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \left[\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial (H_1 H_2)}{\partial q_3} \right] \right. \\ & + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{H_2}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \right] + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{2}{\partial q_2} \left[\frac{H_1}{H_3 H_2} \right. \\ & \times \left. \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \right] \left. \right\} \mathbf{a}_3 + \left\{ \frac{1}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \left[\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial (H_2 H_3)}{\partial q_1} \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{H_2}{H_3 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \right] \right\} \mathbf{a}_1 \end{aligned}$$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial(H_2 H_3)}{\partial q_2} \right] \right. \\
 & \left. - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\frac{H_1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right] \right\} a_2 \quad (1.12.16)
 \end{aligned}$$

习 题 一

1. 证明下列各式

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \text{grad}(\varphi + \psi) = \text{grad}\varphi + \text{grad}\psi, \\
 & \text{grad}(\varphi\psi) = \varphi\text{grad}\psi + \psi\text{grad}\varphi, \\
 & \text{grad}F(\varphi) = F'(\varphi)\text{grad}\varphi;
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \text{grad} \frac{1}{r} = -\frac{r}{r^3}, \quad \text{grad}r^n = nr^{n-2}r;$$

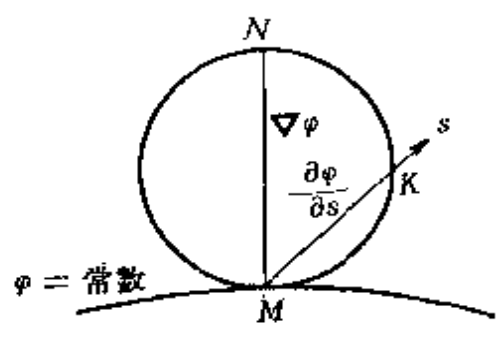
$$(3) \quad \text{grad}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{c};$$

$$(4) \quad \text{grad}\varphi(u(r), v(r)) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\text{grad}u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\text{grad}v;$$

$$(5) \quad \text{grad}|\mathbf{c} \times \mathbf{r}|^2 = 2r(\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}) - 2\mathbf{c}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{c});$$

2. 若 $\text{grad}y = \frac{m}{n}\text{grad}x$, 求 $\text{grad}(x^m y^n)$ 的值.

3. 若在 $x-y$ 平面上



题 4

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$$

求证等位线 $\varphi = \text{常数}$ 和 $\psi = \text{常数}$ 相互正交.

4. 设 $\varphi = \text{常数}$ 为一等位面.

在其上取一点 M , 过 M 在 φ 的增长方向作法线 MN . 在 MN 取矢

量 $\text{grad}\varphi$, 以 $\text{grad}\varphi$ 为直径作一球面. 自 M 任作一方向 s 与球面交于 K , 试证

$$MK = \frac{\partial \varphi}{\partial s}$$

5. 已知椭圆 $r_1 + r_2 = 2a$ 是函数 $\varphi = r_1 + r_2$ 的一个等位线，此处 r_1 及 r_2 为动点至两焦点的距离。证明在椭圆上所作的法线平分两向径间的夹角。

6. 求作卵形线 $r_1 r_2 = a^2$ 的法线的几何方法，其中 r_1, r_2 为动点至两焦点 A 及 B 的距离。

7. 给定平面标量场 φ 。设在 M 点上已知两个方向的方向导数 $\frac{\partial \varphi}{\partial s_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial s_2}$ ，试用几何方法求 M 点上的 $\text{grad} \varphi$ 。

8. 证明下列各式：

$$(1) \quad \text{div}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \text{div} \mathbf{a}_1 + \text{div} \mathbf{a}_2;$$

$$(2) \quad \text{div}(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \text{div} \mathbf{a} + \text{grad} \varphi \cdot \mathbf{a};$$

$$(3) \quad \text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \text{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \text{rot} \mathbf{b};$$

$$(4) \quad \text{div} \mathbf{r} = 3;$$

$$(5) \quad \text{div}(r\mathbf{c}) = \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}}{r}, \quad \text{div}(r^2\mathbf{c}) = 2\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}, \text{其中 } \mathbf{c} \text{ 为一常矢$$

量；

$$(6) \quad \text{div}(a\mathbf{r}) = 3a, a \text{ 为一常数标量；}$$

$$(7) \quad \text{div} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{2}{r};$$

$$(8) \quad \text{div} \mathbf{b}(r \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \text{div} r(r \cdot \mathbf{a}) = 4r \cdot \mathbf{a}, \\ \text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 0, \text{其中 } \mathbf{a} \text{ 及 } \mathbf{b} \text{ 为常矢量；}$$

$$(9) \quad \text{div} r^4 \mathbf{r} = 7r^4;$$

$$(10) \quad \text{div}[r(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] = 0, \text{此处 } \boldsymbol{\omega} \text{ 为常矢量；}$$

$$(11) \quad \text{div}[\mathbf{a} \times (r \times \mathbf{b})] = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \text{其中 } \mathbf{a} \text{ 及 } \mathbf{b} \text{ 为常矢量；}$$

$$(12) \quad \text{若 } \mathbf{v} = v_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \text{则 } \text{div} \mathbf{v} = 0.$$

9. 证明下列各式：

超星浏览器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

- (1) $\text{rot}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \text{rot}\mathbf{a}_1 + \text{rot}\mathbf{a}_2$;
 (2) $\text{rot}(\varphi\mathbf{a}) = \varphi\text{rot}\mathbf{a} + \text{grad}\varphi \times \mathbf{a}$;
 (3) $\text{rot}f(r)\mathbf{r} = 0$;
 (4) $\text{rot}b(r \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, 其中 \mathbf{a}, \mathbf{b} 是常矢量;
 (5) $\text{rot}(r\mathbf{a}) = \frac{r \times \mathbf{a}}{r}$, 其中 \mathbf{a} 是常矢量;
 (6) 若 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \omega \times \mathbf{r}$, 则 $\text{rot}\mathbf{v} = 2\omega$.

10. 利用哈密顿符号法和张量表示法证明下列公式:

- (1) $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\varphi\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{v} \cdot \text{grad}\varphi) + \varphi(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{a}$;
 (2) $(\mathbf{c} \cdot \nabla)(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (\mathbf{c} \cdot \nabla)\mathbf{b} - \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \cdot \nabla)\mathbf{a}$;
 (3) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \text{rot}\mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{c} - \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{c}$;
 (4) $(\mathbf{a} \times \nabla) \times \mathbf{b} = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a} \times \text{rot}\mathbf{b} - \mathbf{a}\text{div}\mathbf{b}$;
 (5) $(\mathbf{a} \times \nabla) \times \mathbf{r} = -2\mathbf{a}$;
 (6) $(\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b} = -(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} - \mathbf{a} \times \text{rot}\mathbf{b} + \text{rot}\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a}\text{div}\mathbf{b}$.

11. 证明:

(1) $(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{n} = \text{rot}\mathbf{n} \times \mathbf{n}$, 其中 \mathbf{n} 是大小相等方向可变的矢量;

(2) $\mathbf{n} \cdot [\text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) - \text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{n})] = \text{div}\mathbf{a}$, 其中 \mathbf{a} 是变矢量, \mathbf{n} 是单位常矢量;

(3) $(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{a} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a}\text{div}\mathbf{v}$.

12. 证明下列各积分公式:

(1) $\int_V [(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a}\text{div}\mathbf{v}]dV = \int_S \mathbf{a}v_n dS$, 当 $\mathbf{a} = \mathbf{v}$ 时有

$$\int_V [(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{v}\text{div}\mathbf{v}]dV = \int_S v_n \mathbf{v} dS$$

(2) $\oint r(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})dS = \mathbf{a}V$, 其中 \mathbf{a} 为常矢量, r 为矢径, V 是

S 面所包含的体积;

超星浏览器提醒您：
 请购买正版制品
 尊重知识版权！

$$(3) \quad \oint_S (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) n dS = \mathbf{a}V, \text{符号意义同上};$$

$$(4) \quad \int_S \varphi a_n dS = \int_V (\varphi \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \operatorname{grad} \varphi) dV;$$

$$(5) \quad \int_S (\mathbf{a} + \mathbf{b})_n dS = \int_V (\mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{b}) dV;$$

$$(6) \quad \int_S \varphi \psi \frac{\partial \chi}{\partial n} dS \\ = \int_V [\varphi \operatorname{div}(\psi \operatorname{grad} \chi) + \psi \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \chi] dV;$$

$$(7) \quad \int_S \Delta \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \int_V [(\Delta \varphi)^2 + (\operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \Delta \varphi)] dV;$$

$$(8) \quad \int_S (\mathbf{a} \times \operatorname{grad} \varphi)_n dS = \int_V \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a} dV;$$

$$(9) \quad \int_S \mathbf{n} \cdot (\operatorname{rot} \mathbf{a} \times \Delta \mathbf{a}) dS \\ = - \int_V [(\Delta \mathbf{a})^2 + \operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \Delta \operatorname{rot} \mathbf{a}] dV, \text{其中} \operatorname{div} \mathbf{a} = 0;$$

$$(10) \quad \int_C \varphi d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{n} \times \operatorname{grad} \varphi dS, \\ \int_C \varphi \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_S [\varphi \operatorname{rot}_n \mathbf{a} + (\operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{a})_n] dS;$$

$$(11) \quad \int_C u dv = \int_S (\operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} v) \cdot \mathbf{n} dS.$$

13. 试利用 $\operatorname{div} \mathbf{a}$, $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ 的定义推导它们在柱坐标和球坐标中的表达式.

14. 求 $\frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2 - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}$ 在曲线坐标、柱坐标及球坐标内的表达式.

15. 证明

$$\operatorname{grad} q_i = \frac{1}{H_i} \mathbf{e}_i$$

并利用 $\operatorname{rot} \operatorname{grad} q_i = 0$ 证明

超星浏览器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

$$\operatorname{rote}_i = \frac{1}{H_i} \operatorname{grad} H_i \times \mathbf{e}_i$$

16. 由公式

$$\operatorname{div}(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 \cdot \operatorname{rote}_1 - \mathbf{e}_2 \cdot \operatorname{rote}_1$$

及上式求 $\operatorname{div} \mathbf{e}_1$ 的表达式，写出 $\operatorname{div} \mathbf{e}_2$ 及 $\operatorname{div} \mathbf{e}_3$ 的表达式。

17. 利用 15 题和 16 题的结果推导 $\operatorname{div} \mathbf{a}$ 及 $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ 在曲线坐标系的表达式。

18. 若

$$a_r = \frac{2k \cos \theta}{r^3}, \quad a_\theta = \frac{k \sin \theta}{r^3}, \quad a_\varphi = 0$$

其中 k 为一常数。验证矢量 \mathbf{a} 是否是位势矢量，若是则 ψ 等于什么。并求矢量场 \mathbf{a} 的矢量线及矢量 \mathbf{a} 经过球面 $r=R$ 及半球面 $r=R, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 的通量。

19. 利用公式(1.12.1)–(1.12.3)推导 $\operatorname{div} \mathbf{a}, \operatorname{rot} \mathbf{a}, \Delta \varphi$ 在曲线坐标系中的表达式。

(B) 张量初步

近代连续介质力学和理论物理中广泛采用张量。这不仅因为采用张量表示基本方程书写高度简炼，物理意义鲜明，更重要的是因为连续介质力学中出现的一些重要物理量如应力、应变等本身就是张量。因此将张量的共同特性抽象出来加以定义，并对张量的性质加以数学上的探讨，对于更好地研究连续介质力学无疑地是十分必要的。

在笛卡儿直角坐标系中定义的张量称为笛卡儿张量，而在任意曲线坐标系中定义的张量则称为普遍张量。本章只限于研究笛卡儿张量，因为有了笛卡儿张量方面的知识对于研究基础流体力学而言已经够用了。

在这一部分中我们介绍笛卡儿张量的定义，运算及其性质。

我们从大家熟知的标量和矢量的概念出发自然地引进张量的定义。

在选定的测量单位下，只需用一个不依赖于坐标系的数字表征其性质的量称为标量。例如数学上的无名数，物理上的质量，密度，温度，能量等都是标量。

在选定的测量单位下，需要用不依赖于坐标系的数字及方向表征其性质的量称为矢量。例如数学上的有向线段，物理上的位移、速度、加速度及力等都是矢量。

在上述标量和矢量的定义中强调客观存在的物理量（例如标量、矢量）具有不依赖坐标系而存在的不变量，例如质量的大小，速度的方向和大小等，这种定义方式比较直观易于理解。但是顺着这条线索要给更复杂的张量下一个定义就不是那么容易的了。因此我们想变换一下形式引进标量和矢量另一种形式的定义，这种形式虽然不那么直观，但能很自然地很容易地推广到张量中去。

大家知道在自然科学中，为了能在数量上表示出某物理量并对其进行计算，常常需要选定参考的坐标系。不同的坐标系将得到不同的数量表征。但由于它们描写了客观存在的同一个物理量，因此不同坐标系下不同的数量表征之间必有确定的变换律。这种坐标变换的规律正是客观存在的物理量独立于坐标系的反映。我们把它当作标量或矢量的另一种形式的定义。

1.13 张量的定义

首先复习一下笛卡儿坐标变换。我们知道，任何一个笛卡儿坐标变换都由平动、转动和反射组成。如果新旧坐标系都是右手系统，则只有平动和转动。下面为了简单起见只限于考虑旋转变换。

设 $Ox_1x_2x_3$ 和 $Ox'_1x'_2x'_3$ 是旧的和新的直角坐标系， e_1, e_2, e_3 ； e'_1, e'_2, e'_3 分别是新旧坐标系中坐标轴上的单位矢量。则

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \delta_{ij} \quad (1.13.1)$$

此外，新旧单位矢量之间存在着下列关系

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \alpha_{11}\mathbf{e}_1 + \alpha_{12}\mathbf{e}_2 + \alpha_{13}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 = \alpha_{21}\mathbf{e}_1 + \alpha_{22}\mathbf{e}_2 + \alpha_{23}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 = \alpha_{31}\mathbf{e}_1 + \alpha_{32}\mathbf{e}_2 + \alpha_{33}\mathbf{e}_3 \end{cases} \quad (1.13.2)$$

其中 $\alpha_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j$ ($i, j = 1, 2, 3$) 是二坐标系中不同坐标轴夹角的余弦。(1.13.2)式也可以直观地以附图表之，图中每个 α 代表所在行的单位矢量和所在列单位矢量之间的夹角的余弦。采用张量表示法(1.13.2)式可简写为

	\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_3
\mathbf{e}'_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}
\mathbf{e}'_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}
\mathbf{e}'_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}

示法(1.13.2)式可简写为

$$\mathbf{e}'_i = \alpha_{ij}\mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}_i = \alpha_{ji}\mathbf{e}'_j \quad (1.13.3)$$

由于 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 相互正交，而对自身来说却是相互平行的，即 $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ 。因此我们有

$$\begin{cases} \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} + \alpha_{31}\alpha_{32} = 0 \\ \alpha_{12}\alpha_{13} + \alpha_{22}\alpha_{23} + \alpha_{32}\alpha_{33} = 0 \\ \alpha_{13}\alpha_{11} + \alpha_{23}\alpha_{21} + \alpha_{33}\alpha_{31} = 0 \\ \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 = 1 \\ \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{32}^2 = 1 \\ \alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{33}^2 = 1 \end{cases} \quad (1.13.4)$$

或简写为

$$\alpha_{ij}\alpha_{ik} = \delta_{jk} \quad (1.13.5)$$

同样地，由 $\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \delta_{ij}$ 可推出

$$\alpha_{ji}\alpha_{ki} = \delta_{jk} \quad (1.13.6)$$

现在我们来研究标量和矢量在坐标变换时的性质。以 $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ 及 $\varphi'(x'_1, x'_2, x'_3)$ 分别表示标量在新旧坐标系中的数值。由于标量的数值不依赖于坐标系，于是有

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \varphi'(x'_1, x'_2, x'_3) \quad (1.13.7)$$

此公式给出标量的另一定义：若对每一个直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 都有一个量，它在坐标系变换时满足(1.13.7)式，即保持其值不

变, 则 φ 定义一个标量.

现在考虑矢量, 以 \mathbf{a} 表示某一矢量. $a_1, a_2, a_3; a'_1, a'_2, a'_3$ 分别是 \mathbf{a} 在旧坐标轴上和新坐标轴上的投影. 显然, a'_1, a'_2, a'_3 和 a_1, a_2, a_3 之间具有下列关系:

$$a'_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}'_1 = a_{11}a_1 + a_{12}a_2 + a_{13}a_3$$

$$a'_2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}'_2 = a_{21}a_1 + a_{22}a_2 + a_{23}a_3$$

$$a'_3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}'_3 = a_{31}a_1 + a_{32}a_2 + a_{33}a_3$$

或简写为

$$a'_i = a_{ij}a_j \quad (a_j = a_{ji}a'_j) \quad (1.13.8)$$

(1.13.8) 式给出矢量的另一种定义: 即对于每一个直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 来说有三个量 a_1, a_2, a_3 , 它们根据 (1.13.8) 式变换到另一坐标系 $Ox'_1x'_2x'_3$ 中的三个量 a'_1, a'_2, a'_3 中去, 则此三个量定义一新的量 \mathbf{a} , 称为矢量.

将矢量的以坐标变换为基础的定义 (1.13.8) 加以推广, 可得张量的定义. 如果对每一个直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 来说有九个数 p_{im} , 它按照下列公式

$$p'_{ij} = a_{ji}a_{jm}p_{im} \quad (1.13.9)$$

转换为另一个直角坐标系 $Ox'_1x'_2x'_3$ 中的九个数 p'_{ij} , 则此九个数定义一新的量 P , 称为二阶笛卡儿张量, 简称二阶张量, 通常用下列几种符号表示.

$$P = \{p_{ij}\} = p_{ij} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

p_{ij} 称为二阶张量的分量. 为了简单起见, $\{p_{ij}\}$ 中的 $\{\}$ 常省去, 这样张量及其分量都用同一符号 p_{ij} . 读者在阅读时要注意区分.

二阶张量的定义可继续推广到 n 阶张量中去.

设在每一个坐标系内给出 3^n 个数 $p_{i_1i_2\cdots i_n}$, 当坐标变换时, 这些数按公式

$$p'_{i_1i_2\cdots i_n} = a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}p_{j_1j_2\cdots j_n} \quad (1.13.10)$$

转换, 则此 3^n 个数定义一个 n 阶张量.

从 n 阶张量的定义可以看出当 $n=0$ 时, 张量的分量只有一个, 且满足

$$p' = p$$

的关系, 因此是一个标量. 由此可见标量可视为零阶张量. 当 $n=1$ 时, 张量有三个分量, 且满足

$$p'_{i_1} = a_{i_1 m_1} p_{m_1}$$

的关系, 因此它是一个矢量, 由此可见矢量可视为一阶张量.

在任意直角坐标系中各分量皆为零的量显然满足(1.13.10)式, 因此它组成一个 n 阶张量称为零张量, 以 0 表之.

1.14 张量的代数运算

本节讲述张量加减, 张量乘积和张量收缩等代数运算.

a) 张量的加减

设

$$P = p_{i_1 i_2 \dots i_n}, \quad Q = q_{i_1 i_2 \dots i_n}$$

是两个 n 阶张量, 在每一个坐标系内作这两个张量的分量之和或差得

$$p_{i_1 i_2 \dots i_n} \pm q_{i_1 i_2 \dots i_n} \quad (1.14.1)$$

并以 $t_{i_1 i_2 \dots i_n}$ 表之. 现在我们证明 $t_{i_1 i_2 \dots i_n}$ 也是一个 n 阶张量. 因为 P, Q 是 n 阶张量, 根据定义有

$$p'_{i_1 i_2 \dots i_n} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n} p_{j_1 j_2 \dots j_n}$$

$$q'_{i_1 i_2 \dots i_n} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n} q_{j_1 j_2 \dots j_n}$$

将两式相加或相减得

$$p'_{i_1 i_2 \dots i_n} \pm q'_{i_1 i_2 \dots i_n} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n} (p_{j_1 j_2 \dots j_n} \pm q_{j_1 j_2 \dots j_n})$$

即

$$t'_{i_1 i_2 \dots i_n} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n} t_{j_1 j_2 \dots j_n}$$

于是根据定义 $t_{i_1 i_2 \dots i_n}$ 是 n 阶张量. 张量

$$T = t_{i_1 i_2 \dots i_n}$$

定义为 P, Q 之和或差, 而运算(1.14.1)则称为张量的加法或减法, 以

$$T = P \pm Q \quad \text{或} \quad t_{i_1 i_2 \dots i_n} = p_{i_1 i_2 \dots i_n} \pm q_{i_1 i_2 \dots i_n}$$

表之.

推论 若两同阶张量 P 和 Q 在某一直角坐标系内相等, 即 $P=Q$, 则它们将在任一直角坐标系中相等.

设在某一直角坐标系内 $P=Q$, 则有 $P-Q=0$. 于是在任一直角坐标内 $P-Q$ 仍为零张量, 即 $P=Q$ 在任一直角坐标系成立.

b) 张量乘积

设 $P = p_{i_1 i_2 \dots i_m}$ 是 m 阶张量, $Q = q_{j_1 j_2 \dots j_n}$ 是 n 阶张量, 作分量乘积

$$p_{i_1 i_2 \dots i_m} q_{j_1 j_2 \dots j_n} \quad (1.14.2)$$

现证(1.14.2)是 $m+n$ 阶张量. 因

$$\begin{aligned} p'_{i_1 i_2 \dots i_m} q'_{j_1 j_2 \dots j_n} \\ = a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2} \dots a_{i_m k_m} a_{j_1 s_1} a_{j_2 s_2} \dots a_{j_n s_n} p_{i_1 i_2 \dots i_m} q_{j_1 j_2 \dots j_n} \end{aligned}$$

故 $p_{i_1 i_2 \dots i_m} q_{j_1 j_2 \dots j_n}$ 是 $m+n$ 阶张量, 以 PQ 表之, 称为张量乘积. 两个张量的张量乘积可以很容易地推广到 n 个张量的张量乘积.

例1 设 λ 是标量 (零阶张量), P 为 n 阶张量, 则标量和张量乘积 λP 为 n 阶张量.

例2 两矢量 a 和 b 的乘积 $ab = a_i b_j$ 是二阶张量, 常称并矢. 并矢可推广到 n 个矢量连乘.

例3 n 阶张量 P 可写成下列并矢形式

$$P = p_{i_1 i_2 \dots i_n} e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_n}$$

c) 张量收缩

设 $P = p_{i_1 i_2 \dots i_n}$ 中有两个下标相同. 根据约定求和法则, 则得具有 $n-2$ 个下标的量 Q . 现证此量为 $n-2$ 阶张量. 为确定起见设最后两个下标相同, 于是

$$p'_{i_1 i_2 \dots i_{n-2} k k} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_{n-2} j_{n-2}} a_k r a_k s p_{i_1 j_2 \dots j_{n-2} r s}$$

$$\begin{aligned}
 &= \alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \cdots \alpha_{i_{n-2} j_{n-2}} \delta_{rs} p_{j_1 j_2 \cdots j_{n-2} r s} \\
 &= \alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \cdots \alpha_{i_{n-2} j_{n-2}} p_{j_1 j_2 \cdots j_{n-2} r r}
 \end{aligned}$$

可见 $Q = p_{i_1 i_2 \cdots i_{n-2} k k}$ 确为 $n-2$ 阶张量，称之为张量 P 的收缩。

例1 并矢 $ab = a_i b_i$ 收缩后得标量 $a_i b_i$ ，此即矢量 a 和 b 的内积 $a \cdot b$ 。

d) 张量的内积

张量乘积 PQ 中， m 阶张量 P 和 n 阶张量 Q 中各取出一下标收缩一次后得 $m+n-2$ 阶张量，称为 P 和 Q 的内积，以 $P \cdot Q$ 表之。

例1 $P \cdot a = p_{ij} a_j$ 是二阶张量和矢量的右向内积； $a \cdot p = a_i p_{ij}$ 是二阶张量和矢量的左向内积。一般来说，

$$P \cdot a \neq a \cdot P$$

只有在 P 是二阶对称张量时 $P \cdot a$ 才等于 $a \cdot P$ 。

例2 $P \cdot Q = p_{ih} q_{ki}$ 是二阶张量 P 和二阶张量 Q 的内积。它是二阶张量。

例3 $P:Q = p_{ij} q_{ji}$ 是由二阶张量 P 和 Q 二次收缩得来，以 $:$ 表之。

1.15 张量识别定理

定理1 若 $p_{i_1 i_2 \cdots i_m j_1 j_2 \cdots j_n}$ 和任意 n 阶张量 $q_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 的内积

$$p_{i_1 i_2 \cdots i_m j_1 j_2 \cdots j_n} q_{j_1 j_2 \cdots j_n} = t_{i_1 i_2 \cdots i_m}$$

恒为 m 阶张量，则 $p_{i_1 i_2 \cdots i_m j_1 j_2 \cdots j_n}$ 必为 $m+n$ 阶张量。

$$\begin{aligned}
 \text{证} \quad p'_{i_1 i_2 \cdots i_m j_1 j_2 \cdots j_n} q'_{j_1 j_2 \cdots j_n} &= t'_{i_1 i_2 \cdots i_m} = \alpha_{i_1 r_1} \alpha_{i_2 r_2} \cdots \alpha_{i_m r_m} t_{r_1 r_2 \cdots r_m} \\
 &= p_{r_1 r_2 \cdots r_m s_1 s_2 \cdots s_n} \alpha_{i_1 r_1} \alpha_{i_2 r_2} \cdots \alpha_{i_m r_m} q_{s_1 s_2 \cdots s_n} \\
 &= p_{r_1 r_2 \cdots r_m s_1 s_2 \cdots s_n} \alpha_{i_1 r_1} \alpha_{i_2 r_2} \cdots \alpha_{i_m r_m} \alpha_{j_1 s_1} \alpha_{j_2 s_2} \cdots \alpha_{j_n s_n} q'_{j_1 j_2 \cdots j_n}
 \end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned}
 &(p'_{i_1 i_2 \cdots i_m j_1 j_2 \cdots j_n} - \alpha_{i_1 r_1} \alpha_{i_2 r_2} \cdots \alpha_{i_m r_m} \alpha_{j_1 s_1} \alpha_{j_2 s_2} \cdots \alpha_{j_n s_n} \\
 &\quad \times p_{r_1 r_2 \cdots r_m s_1 s_2 \cdots s_n}) q'_{j_1 j_2 \cdots j_n} = 0
 \end{aligned}$$

因 $q'_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 是任意的，由此推出

$$p_{i_1 i_2 \dots i_m j_1 j_2 \dots j_n} = \alpha_{i_1 r_1} \alpha_{i_2 r_2} \dots \alpha_{i_m r_m} \alpha_{j_1 s_1} \alpha_{j_2 s_2} \dots \alpha_{j_n s_n} p_{r_1 r_2 \dots r_m s_1 s_2 \dots s_n}$$

即 $p_{i_1 i_2 \dots i_m j_1 j_2 \dots j_n}$ 是 $m+n$ 阶张量。

定理2 若 $p_{i_1 i_2 \dots i_m}$ 和任意 n 阶张量 $q_{j_1 j_2 \dots j_n}$ 的乘积

$$p_{i_1 i_2 \dots i_m} q_{j_1 j_2 \dots j_n} = t_{i_1 i_2 \dots i_m j_1 j_2 \dots j_n} \quad (1.15.1)$$

恒为 $m+n$ 阶张量, 则 $p_{i_1 i_2 \dots i_m}$ 必为 m 阶张量。

证 (1.15.1) 式两边乘 $q_{j_1 j_2 \dots j_n}$ 得

$$p_{i_1 i_2 \dots i_m} q_{j_1 j_2 \dots j_n} q_{j_1 j_2 \dots j_n} = t_{i_1 i_2 \dots i_m j_1 j_2 \dots j_n} q_{j_1 j_2 \dots j_n} \quad (1.15.2)$$

(1.15.2) 式右边是 m 阶张量, 左边 $q_{j_1 j_2 \dots j_n} q_{j_1 j_2 \dots j_n}$ 是一标量 λ , 总可选出这样的 $q_{j_1 j_2 \dots j_n}$ 使 λ 不为零。由此立即推出 $p_{i_1 i_2 \dots i_m}$ 是一个 m 阶张量。

张量识别定理很有用, 它常常为识别张量提供了一种简单易行的方法, 而不必去直接验证麻烦的变换公式 (1.13.10) 是否满足。

例1 因 $a_i = \delta_{ij} a_j$ 对任意矢量 a_i 恒成立, 根据张量识别定理立知克罗内克尔符号 δ_{ij} 是二阶张量。

例2 因 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \epsilon_{ijk} a_j b_k$ 对任意二阶张量 $a_j b_k$ 恒成立, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 是矢量, 由张量识别定理推出置换符号 ϵ_{ijk} 是三阶张量。

例3 p_{ij} 和任意矢量 a_j 的内积 $p_{ij} a_j = b_i$ 恒为一矢量, 则根据定理 1 知, p_{ij} 必为二阶张量。

1.16 二阶张量

a) 二阶张量的主值、主轴及不变量

设 P 为二阶张量, 对空间中任意非零矢量 \mathbf{a} 作张量和矢量的右向内积

$$P \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \quad (1.16.1)$$

则得空间中另一矢量 \mathbf{b} 。若矢量 \mathbf{b} 和矢量 \mathbf{a} 共线, 即

$$\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a} \quad (1.16.2)$$

则称矢量 \mathbf{a} 的方向为张量 P 的主轴方向, λ 称为张量的主值。根

据张量识别定理 2 推出 λ 是一个标量。

现求张量的主值及主轴方向。将(1.16.2)式代入(1.16.1)，得确定 λ 的下列方程

$$P \cdot a = \lambda a$$

展开得

$$\begin{cases} p_{11}a_1 + p_{12}a_2 + p_{13}a_3 = \lambda a_1 \\ p_{21}a_1 + p_{22}a_2 + p_{23}a_3 = \lambda a_2 \\ p_{31}a_1 + p_{32}a_2 + p_{33}a_3 = \lambda a_3 \end{cases}$$



这是确定 a_1, a_2, a_3 的线性齐次代数方程。要使此方程有不全为零的解，必须

$$\begin{vmatrix} p_{11} - \lambda & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} - \lambda & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

对 λ 展开上述行列式得

$$\begin{aligned} & \lambda^3 - \lambda^2(p_{11} + p_{22} + p_{33}) + \lambda \left(\begin{vmatrix} p_{22} & p_{32} \\ p_{23} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{31} \\ p_{13} & p_{33} \end{vmatrix} \right. \\ & \left. + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & -p_{22} \end{vmatrix} \right) - \begin{vmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{vmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (1.16.4)$$

这就是确定 λ 的三次代数方程。它有三个根，可以是三个实根，也可以是一个实根，二个共轭复根。

求出主值 λ 后，代入(1.16.3)式即可求出 $a_1 : a_2 : a_3$ ，由此得对应于 λ 值的主轴方向。

不随坐标轴的转换而改变其数值的量称为不变量。例如标量、矢量的大小及方向皆为不变量。不变量常常具有重要的几何及物理意义，因此研究不变量具有重要意义。现根据(1.16.4)式研究张量的不变量。从确定 λ 的三次方程推出根与系数之间存在着下列关系

$$\begin{cases}
 I_1 = p_{11} + p_{22} + p_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\
 I_2 = \begin{vmatrix} p_{22} & p_{32} \\ p_{23} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{31} \\ p_{13} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{vmatrix} \\
 \quad = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 \\
 I_3 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3
 \end{cases} \quad (1.16.5)$$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

因为 λ 是标量，即不变量，由此推出张量分量的组合 I_1, I_2, I_3 亦是不变量，称为二阶张量 P 的第一，第二和第三不变量。十分明显，从这三个基本不变量出发可以作出无穷多个不变量，例如 $I_1 - 2I_2$ 等等。

b) 共轭张量、对称张量和反对称张量

(1) 共轭张量 设 $P = p_{ij}$ 是一个二阶张量，则 $P_c = p_{ji}$ 也是一个二阶张量，称为 P 的共轭张量。

证 因 p_{ij} 是一个二阶张量，故有

$$p'_{ij} = a_{il} a_{jm} p_{lm}$$

将 l 和 m 对换， i 和 j 对换得

$$p'_{ji} = a_{im} a_{jl} p_{mi}$$

即 p_{ji} 组成一二阶张量。

P_c 可表为

$$P_c = p_{ji} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix}$$

(2) 对称张量 设 p_{ij} 是一二阶张量。若分量之间满足

$$p_{ij} = p_{ji}$$

的关系，则称此张量为对称张量，以

$$S = s_{ij} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{31} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{23} & s_{33} \end{pmatrix}$$

表之。

容易证明若在某一坐标系中

$$p_{ij} = p_{ji}$$

成立，则在任一坐标系中

$$p'_{ij} = p'_{ji}$$

亦成立，因此张量的对称性是一个不变的性质。对于一个对张量来说，只有六个不同的分量，且满足

$$S = S_0$$

的关系。

(3) **反对称张量** 设 p_{ij} 是一二阶张量。若分量之间满足

$$p_{ij} = -p_{ji}$$

的关系，则称此张量为反对称张量，以

$$A = a_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & -a_{31} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

表之。

容易证明，若在某一坐标系中

$$p_{ij} = -p_{ji}$$

成立，则在任一坐标系中

$$p'_{ij} = -p'_{ji}$$

亦成立。因此张量的反对称性也是一个不变的性质，对于一个反对称张量来说，只有三个不同的分量，且满足

$$A = -A_0$$

的关系。

c) 张量的分解

张量分解定理 二阶张量可以唯一地分解成为一个对称张量



和一个反对称张量之和。

证 存在性：将张量 P 写成

$$P = \frac{1}{2}(P + P_c) + \frac{1}{2}(P - P_c) \quad (1.16.6)$$

显然，右边第一项是对称张量，第二项是反对称张量。于是我们证明了存在性，同时找到了对称张量和反对称张量的具体表达式。

唯一性：设二阶张量 P 已分解成对称张量 S 和反对称张量 A 之和。今证， S, A 必具(1.16.6)所确定的表达式。因

$$P = S + A$$

对上式取共轭得

$$P_c = S_c + A_c = S - A$$

两式相加，相减得

$$S = \frac{1}{2}(P + P_c), \quad A = \frac{1}{2}(P - P_c)$$

由此可见张量的分解方式是唯一的。

张量分解定理告诉我们，研究任意二阶张量的问题可归结为研究与之对应的二阶对称张量和反对称张量问题。

1.17 二阶反对称张量的性质

二阶反对称张量 A 的形式为

$$A = a_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & -a_{31} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $\omega_1 = a_{23}, \omega_2 = a_{31}, \omega_3 = a_{12}$ 。于是

$$a_{ij} = \varepsilon_{ijk} \omega_k \quad (1.17.1)$$

二阶反对称张量具有下列几个主要性质：

- (1) A 的反对称性不因坐标转换而改变；
- (2) 反对称张量的三个分量 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 组成一矢量 ω (因 $a_{ij}, \varepsilon_{ijk}$ 是张量，由张量识别定理 1 推出 ω_k 是一矢量)。

(3) 反对称张量 A 和矢量 b 的内积等于矢量 ω 和 b 的矢积。即

$$A \cdot b = \omega \times b \quad (1.17.2)$$

证 $A \cdot b = a_{ij} b_j = \varepsilon_{ijk} b_j \omega_k = \omega \times b$

1.18 二阶对称张量的性质

二阶对称张量 S 的形式为:

$$S = s_{ij} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{31} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{23} & s_{33} \end{pmatrix}$$

二阶对称张量的主要性质如下:

(1) S 的对称性不因坐标转换而改变。

(2) 二阶对称张量的三个主值都是实数, 而且一定存在三个互相垂直的主轴。

先证三个主值皆为实数。设 λ 是 S 的任一主值, \mathbf{a} 是与 λ 对应的非零矢量, 则

$$s_{ij} a_j = \lambda a_i$$

两边乘 a_i 的共轭 \bar{a}_i 得

$$\bar{a}_i s_{ij} a_j = \lambda a^2 \quad (1.18.1)$$

其中 a 是矢量 \mathbf{a} 的大小。(1.18.1)式两边取共轭并考虑到 s_{ij} 是实数得:

$$a_i s_{ij} \bar{a}_j = \bar{\lambda} a^2 \quad (1.18.2)$$

因 s_{ij} 是对称张量, 故有

$$a_i s_{ij} \bar{a}_j = a_j s_{ji} \bar{a}_i = \bar{a}_i s_{ij} a_j$$

于是由(1.18.1)和(1.18.2)得

$$(\lambda - \bar{\lambda}) a^2 = 0$$

因 $a^2 \neq 0$, 由此推出 $\lambda = \bar{\lambda}$, 即 λ 为实数。

为了证明一定存在三个互相垂直的主轴, 先证和 S 中不同主值相对应的两主轴方向必定互相垂直。设主值 $\lambda = \mu$, 与之对应



的特征矢量为 \mathbf{a} 及 \mathbf{b} , 于是有

$$S \cdot \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a}, \quad S \cdot \mathbf{b} = \mu \mathbf{b}$$

左式两边左乘 \mathbf{b} , 右式两边左乘 \mathbf{a} , 然后两式相减得

$$(\lambda - \mu) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

这里已考虑到, 当 S 是对称张量时 $\mathbf{b}S\mathbf{a} = \mathbf{a}S\mathbf{b}$ 的事实. 因

$$\lambda - \mu \neq 0$$

由(1.18.3)立即得出

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$$

即主轴方向 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 正交.

下面分三种情形证明一定存在三个互相垂直的主轴.

(i) 三个主值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 互不相同.

此时, 由上述事实立即推出与 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 相对应的三个不同的主轴方向是互相垂直的. 设主轴方向的单位向量分别是 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, 以主轴为坐标轴的主轴坐标系中 S 的分量为 s_{ij} . 由于 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 是特征向量, 于是:

$$S \cdot \mathbf{e}_1 = s_{11}\mathbf{e}_1 + s_{12}\mathbf{e}_2 + s_{31}\mathbf{e}_3 = \lambda_1 \mathbf{e}_1$$

推出

$$s_{12} = s_{31} = 0, \quad s_{11} = \lambda_1$$

$$S \cdot \mathbf{e}_2 = s_{12}\mathbf{e}_1 + s_{22}\mathbf{e}_2 + s_{23}\mathbf{e}_3 = \lambda_2 \mathbf{e}_2$$

推出

$$s_{12} = s_{23} = 0, \quad s_{22} = \lambda_2$$

$$S \cdot \mathbf{e}_3 = s_{31}\mathbf{e}_1 + s_{23}\mathbf{e}_2 + s_{33}\mathbf{e}_3 = \lambda_3 \mathbf{e}_3$$

推出

$$s_{31} = s_{23} = 0, \quad s_{33} = \lambda_3$$

由此在主轴坐标系中, 对称张量 S 的形式为:

$$S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (1.18.4)$$

(ii) 两个主值相同, 另一不同, 即 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \lambda_3 = \mu \neq \lambda$.

设 \mathbf{e}_1 和 \mathbf{e}_2 分别为对应于 μ 和 λ 的单位特征矢量. 于是 $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$. 令

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$$

则 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 形成相互垂直的右手直角坐标系. 现证 \mathbf{e}_3 也是 S 的特征矢量. 设此坐标系内 S 的分量为 s_{ij} . 由于 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是特征矢量, 于是

$$S \cdot \mathbf{e}_1 = s_{11}\mathbf{e}_1 + s_{12}\mathbf{e}_2 + s_{13}\mathbf{e}_3 = \mu\mathbf{e}_1$$

推出

$$s_{12} = s_{13} = 0, \quad s_{11} = \mu \quad (1.18.5)$$

$$S \cdot \mathbf{e}_2 = s_{21}\mathbf{e}_1 + s_{22}\mathbf{e}_2 + s_{23}\mathbf{e}_3 = \lambda\mathbf{e}_2$$

推出

$$s_{12} = s_{23} = 0, \quad s_{22} = \lambda \quad (1.18.6)$$

考虑到(1.18.5)及(1.18.6)我们有

$$S \cdot \mathbf{e}_3 = s_{31}\mathbf{e}_1 + s_{32}\mathbf{e}_2 + s_{33}\mathbf{e}_3 = s_{33}\mathbf{e}_3 \quad (1.18.7)$$

(因 $I_1 = \mu + \lambda + s_{33} = \mu + 2\lambda$, 故 $s_{33} = \lambda$)

这就证明了 \mathbf{e}_3 也是 S 的特征矢量. 于是 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 就是 S 的三个互相垂直的主轴方向.

事实上与 \mathbf{e}_1 垂直的平面 S_1 上任一方向都是 S 的主轴方向. 这是因为对 $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 的任一线性组合 $\alpha\mathbf{e}_2 + \beta\mathbf{e}_3$ 有

$$S \cdot (\alpha\mathbf{e}_2 + \beta\mathbf{e}_3) = \alpha S \cdot \mathbf{e}_2 + \beta S \cdot \mathbf{e}_3 = \alpha\lambda\mathbf{e}_2 + \beta\lambda\mathbf{e}_3 = \lambda(\alpha\mathbf{e}_2 + \beta\mathbf{e}_3)$$

由此可见平面 S_1 中任意两个互相垂直的方向都可取作为主轴方向 \mathbf{e}_2 和 \mathbf{e}_3 . 在主轴坐标系中, S 具有下列形式

$$S = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (1.18.8)$$

(iii) 三个主值都相同, 此时 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$.

设 \mathbf{e}_1 为对应于主值 λ 的单位特征矢量. 在与 \mathbf{e}_1 垂直的平面内任取两垂直的矢量 \mathbf{e}_2 和 \mathbf{e}_3 , 使 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 形成右手直角坐标系, 现证 $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 也是 S 的主方向. 设 S 在此坐标系内的分量为 s_{ij} .

由于 e_1 是特征矢量, 于是

$$S \cdot e_1 = s_{11}e_1 + s_{12}e_2 + s_{31}e_3 = \lambda e_1$$

推出

$$s_{12} = s_{31} = 0, \quad s_{11} = \lambda \quad (1.18.9)$$

根据(1.16.5)式, 三个不变量给出下列三个关系式:

$$I_1 = 3\lambda = \lambda + s_{22} + s_{33}$$

$$I_2 = 3\lambda^2 = 3\lambda^2 + s_{23}^2$$

$$I_3 = \lambda^3 = \lambda(s_{22}s_{33} - s_{23}^2)$$

由此立得

$$s_{23} = 0, \quad s_{22} = s_{33} = \lambda \quad (1.18.10)$$

考虑到(1.18.9)及(1.18.10)有

$$S \cdot e_2 = s_{12}e_1 + s_{22}e_2 + s_{23}e_3 = \lambda e_2$$

$$S \cdot e_3 = s_{31}e_1 + s_{23}e_2 + s_{33}e_3 = \lambda e_3$$

可见 e_2, e_3 确是 S 的特征矢量. 于是 e_1, e_2, e_3 形成 S 的三个互相垂直的主轴方向.

事实上任一矢量 $a = a_i e_i$ 都是主方向, 因为

$$S \cdot a = S \cdot (a_i e_i) = a_i \lambda e_i = \lambda a$$

所以可取任意三个互相垂直的方向为主轴方向. 在主轴坐标系中

$$S = \lambda \delta_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (1.18.11)$$

(3) 二阶对称张量在主轴坐标系中具有最简单的标准形式

$$S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (1.18.12)$$

可见二阶对称张量可以由三个主值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 表征. 根据所有不变量可通过三个主值表出的性质可知, S 的独立不变量 ≤ 3 . 当 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 中有三个不同、两个不同与一个不同时, 独立不变量分别有三个、两个和一个.

(4) 二阶对称张量和二次有心曲面一一对应, 因此二次有心曲面可作为二阶对称张量的几何表示.

我们知道, 矢量和几何上的有向线段一一对应, 因此, 有向线段可作为矢量的几何表示. 同样地, 我们可以在二阶对称张量和二次有心曲面

$$F = s_{11}x_1^2 + s_{22}x_2^2 + s_{33}x_3^2 + 2s_{12}x_1x_2 + 2s_{23}x_2x_3 + 2s_{31}x_3x_1 = \text{常数} \quad (1.18.13)$$

之间建立一一对应关系. 设给定一个二阶对称张量 $S = S_{ij}$, 作

$$r \cdot (S \cdot r) = 1$$

展开后得(1.18.13)式, 或简写为

$$s_{ij}x_ix_j = \text{常数} \quad (1.18.14)$$

其中 $s_{ij} = s_{ji}$. 这就是说, 有一个由(1.18.13)式确定的二次曲面与 S 对应. 反之, 若给定一个二次曲面(1.18.14), 则因 x_i, x_j 是矢量, 右边常数是标量, 根据张量识别定理知, 二次曲面方程中的系数 s_{ij} 组成二阶张量. 考虑到条件 $s_{ij} = s_{ji}$ 后, s_{ij} 还是一个二阶对称张量. 这就是说给定二次曲面(1.18.13), 存在一二阶对称张量 s_{ij} 与之对应.

这样一来, 我们证明了对称张量和二次有心曲面之间存在着——对应关系. 因此可以用二次有心曲面作为二阶对称张量的几何表示.

在连续介质力学中出现的二阶对称张量, 其三个主值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 恒同号, 此时称 S 为恒定的 (都是正号称正定, 都是负号称负定). 恒定的二阶对称张量 S , 其对应的二次有心曲面(1.18.13)为椭球面

$$F = s_{ij}x_ix_j = \pm 1 \quad (1.18.15)$$

(正定取 +1, 负定取 -1). 因此椭球面是恒定二阶对称张量的几何表示.

设椭球面中心为 O 点, P 为椭球面上任一点, 其矢径为 r . 则下式成立:

$$S \cdot r = \frac{1}{2} \text{grad} F \quad (1.18.16)$$

证 根据(1.18.15)式有

$$\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x_1} = s_{11}x_1 + s_{12}x_2 + s_{13}x_3$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x_2} = s_{21}x_1 + s_{22}x_2 + s_{23}x_3$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x_3} = s_{31}x_1 + s_{32}x_2 + s_{33}x_3$$

此即(1.18.16)式.

(1.18.16)式说明 $S \cdot r$ 的方向恰与张量椭球面在 P 点的法线方向一致. 考虑到 $r \cdot (S \cdot r) = \pm 1$, 有

$$|S \cdot r| = \frac{1}{ON}$$

ON 为 r 在 n 方向投影 (见图1.18.1). 利用这个性质, 我们看到张量主轴方向 $S \cdot r = \lambda r$ 恰好是椭球面法线方向和矢径方向重合时 OP 的方向, 也就是椭球面的主轴方向.

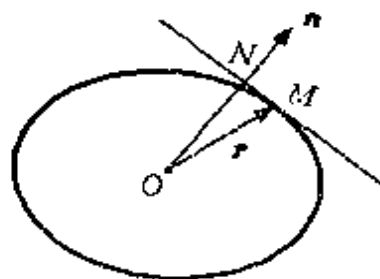


图 1.18.1

在主轴坐标系中, 张量椭球面的方程(1.18.15)化为标准型

$$\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2 = \pm 1 \quad (1.18.17)$$

由此式亦可看到张量的主轴方向正好是椭球面的主轴方向. 而

$\frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}}$ 正是椭球面的对应半主轴的长度. 当 $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ 时得半主轴长度不等的一般椭球, 此时只有三个相互垂直的主轴. 当 $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ 时得有两个半主轴不等长度的旋转椭球, 且与对称轴垂直的平面上, 所有矢径方向皆为主轴方向 (那里的所有点上椭球面法线方向与矢径方向恒重合). 当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ 时则得球面, 此时任意矢径皆为主轴.

1.19 张量的微分运算

a) 张量的梯度

n 阶张量 $P = p_{i_1 i_2 \dots i_n}$ 的梯度 ∇P 定义为:

$$\nabla P = \text{grad} P = \frac{\partial}{\partial x_k} p_{i_1 i_2 \dots i_n} \quad (1.19.1)$$

简记为 $p_{i_1 i_2 \dots i_n, k}$.

现证 ∇P 为 $n+1$ 阶张量. 由微分法则

$$d p_{i_1 i_2 \dots i_n} = \left(\frac{\partial}{\partial x_k} p_{i_1 i_2 \dots i_n} \right) dx_k = p_{i_1 i_2 \dots i_n, k} dx_k$$

因 $d p_{i_1 i_2 \dots i_n}$ 是 n 阶张量, dx_k 是一阶张量, 由张量识别定理推出 $\nabla P = p_{i_1 i_2 \dots i_n, k}$ 是 $n+1$ 阶张量.

b) 张量的散度

设 P 为 n 阶张量, P 的散度 $\nabla \cdot P$ 定义为

$$\nabla \cdot P = \text{div} P = \frac{\partial}{\partial x_k} p_{k i_2 \dots i_n}$$

它是由 ∇P 收缩一次所得的 $n-1$ 阶张量. 例如

$$\text{div} \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$$

是由梯度 $\nabla \mathbf{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}$ (二阶张量) 收缩而得的标量.

c) 奥高公式

场论中的奥高公式可推广到张量中去. 设 P 是 n 阶张量, 则张量情形下的奥高公式可写为

$$\int_S \mathbf{n} \cdot P dS = \int_V \text{div} P dV \quad (1.19.2)$$

证 设 $p_{i_1 \dots i_n}$ 为张量 P 中任一分量, 则有

$$\int_S n_i p_{i_1 i_2 \dots i_n} dS = \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} p_{i_1 i_2 \dots i_n} dV \quad (1.19.3)$$

在(1.19.3)中取 $i=i_1=1$ 或 2 或 3 时, (1.19.3)式都成立, 故有

$$\int_S n_k p_{k, i_2 \dots i_n} dS = \int_V \frac{\partial}{\partial x_k} p_{k, i_2 \dots i_n} dV$$

此即(1.19.2)式.

例1 证明 $\nabla \cdot (\varphi \delta_{ij}) = \nabla \varphi$.

证
$$\nabla \cdot (\varphi \delta_{ij}) = \frac{\partial (\varphi \delta_{ij})}{\partial x_i} = \delta_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \nabla \varphi$$

例2 证明 $\nabla \cdot (\varphi p_{ij}) = \varphi \nabla \cdot p_{ij} + (\nabla \varphi) \cdot P$.

证
$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\varphi p_{ij}) &= \frac{\partial (\varphi p_{ij})}{\partial x_i} = \varphi \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} p_{ij} \\ &= \varphi \nabla \cdot p_{ij} + (\nabla \varphi) \cdot P \end{aligned}$$

例3 证明 $\operatorname{div}(aa) = (\nabla \cdot a)a + (a \cdot \nabla)a$.

证
$$\begin{aligned} \operatorname{div} aa &= \frac{\partial a_i a_j}{\partial x_i} = a_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} + a_j \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \\ &= (\nabla \cdot a)a + (a \cdot \nabla)a \end{aligned}$$

例4 证明 $\nabla \cdot (a \cdot \nabla a) = \nabla a : \nabla a + a \cdot \nabla (\nabla \cdot a)$.

证
$$\begin{aligned} \nabla \cdot (a \cdot \nabla a) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) = a_i \frac{\partial^2 a_j}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \\ &= \nabla a : \nabla a + a \cdot \nabla (\nabla \cdot a) \end{aligned}$$

*1.20 各向同性张量

a) 各向同性张量的定义

绝大多数张量的分量经过旋转坐标变换后将改变其值. 例如矢量 \mathbf{a} 在 $Ox_1x_2x_3$ 坐标系中其分量为 $(a_1, 0, 0)$, 经过旋转变换变到新坐标系 $x'_1 = -x_1, x'_2 = -x_2, x'_3 = x_3$ 后其分量变为 $(-a_1, 0, 0)$, 显然只要 \mathbf{a} 不是零矢量, 则恒有 $a_i \neq -a_i$, 即新旧坐标系中的分量值不等. 这类张量称为各向异性张量. 但也有个别一类张量, 其每一分量经过旋转坐标变换后不改变其值. 这类张量称为各向同性张量. 例如标量, 克罗内克尔 δ_{ij} , 置换张量 ϵ_{ijk} 就都是这类

张量。各向同性的名词来源于物理。物理中的某些物理常数常常用张量表征。例如张量 c_{ijkl} 中第一个分量 c_{1111} 可以表示 x_1 轴方向的拉伸弹性系数。当坐标系变换到任意直角坐标系 $Ox'_1x'_2x'_3$ 时，如果 $c'_{1111} = c_{1111}$ 即任意 x'_i 轴方向上的拉伸弹性系数维持 x_i 轴方向上的值不变，那么这样的弹性体对拉伸来说就是各向同性的了。各向同性张量的名词就是借用上述物理概念。

现在，我们对各向同性张量给一个严格的定义： n 阶张量 $H_{i_1 i_2 \dots i_n}$ ，其每一分量都是旋转坐标变换下的不变量，即

$$H'_{i_1 i_2 \dots i_n} = H_{i_1 i_2 \dots i_n} \quad (1.20.1)$$

则称它为 n 阶各向同性张量。

b) 置换定理

为了明确起见以二阶各向同性张量的 H_{12} 分量为例进行论证。设 $Ox_1x_2x_3$ 为原坐标系，旋转变换后的新坐标系 $Ox'_1x'_2x'_3$ 要和原坐标系完全重合，只有两种可能，即

$$(1) \quad x'_1 = x_2, x'_2 = x_3, x'_3 = x_1$$

(图 1.20.1);

$$(2) \quad x'_1 = x_3, x'_2 = x_1, x'_3 = x_2.$$

因为张量是各向同性的，于是根据 (1.20.1) 式有 $H'_{12} = H_{12}$ ，但新坐标系中的 H'_{12} 就是原坐标系的 H_{23} (情形 (1))，或 H_{31} (情形 (2))，由此推出

$$H_{12} = H_{23} = H_{31} \quad (1.20.2)$$

同样的推理得

$$H_{21} = H_{32} = H_{13} \quad (1.20.3)$$

$$H_{11} = H_{22} = H_{33} \quad (1.20.4)$$

完全类似地，对于三阶各向同性张量 H_{ijk} 我们有

$$H_{111} = H_{222} = H_{333} \quad (1.20.5)$$

$$H_{112} = H_{223} = H_{331}, \quad H_{113} = H_{221} = H_{332} \quad (1.20.6)$$

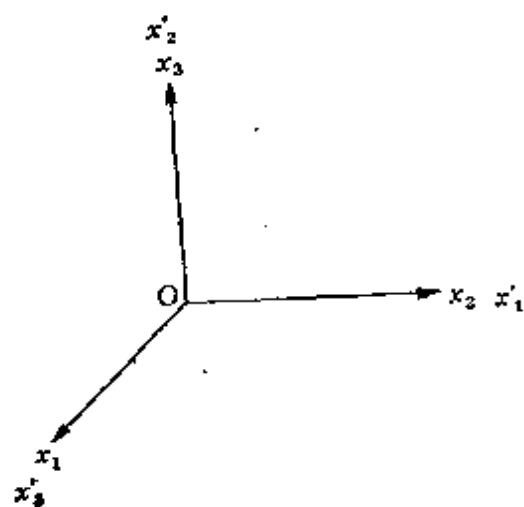


图 1.20.1

$$H_{1,2} = H_{2,1} = H_{3,3} \quad (1.20.7)$$

$$H_{1,3} = H_{2,3} = H_{3,2} \quad (1.20.8)$$

以上叙述的就是置换定理的主要内容。

置换定理可一般地叙述为： $H_{i_1 i_2 \dots i_n}$ 是 n 阶张量的任一分量，将此分量的每一个下标值作相同的循环置换

$$1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1, \quad \text{或} \quad 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2,$$

则得 H 的另一个分量。如果 H 是各向同性张量，则此两个分量相等。

c) 零到四阶张量各向同性性质的讨论

1°. 零阶张量（标量）都是各向同性的。

2°. 一阶张量（矢量）除零矢量外，都是各向异性的。

3°. 二阶各向同性张量的形式必为 $\lambda \delta_{ij}$ ，其中 λ 为一标量，

即

$$H_{ij} = \lambda \delta_{ij}$$

证 即欲证

$$H_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{当 } i \neq j \text{ 时} \\ \lambda, & \text{当 } i = j \text{ 时} \end{cases} \quad (1.20.9)$$

$$(1.20.10)$$

先证(1.20.9). 根据(1.20.2)及(1.20.3)式，独立的 $i \neq j$ 的分量只有 H_{23} 及 H_{32} 两项。将原坐标系绕 x_3 轴旋转 180° 得新坐标系。于是

$$x_1' = -x_1, \quad x_2' = -x_2, \quad x_3' = x_3$$

对应的

$$\beta_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.20.11)$$

因 H 是各向同性的于是

$$H_{23} = H'_{23} = \beta_{2m} \beta_{3n} H_{mn} = \beta_{22} \beta_{33} H_{23} = -H_{23}$$

$$H_{32} = H'_{32} = \beta_{3m} \beta_{2n} H_{mn} = \beta_{33} \beta_{22} H_{32} = -H_{32}$$

由此得

$$H_{23} = 0, \quad H_{32} = 0$$

再考虑到(1.20.2)及(1.20.3)式,(1.20.9)得证. 又由(1.20.4)

$$H_{11} = H_{22} = \lambda$$

故(1.20.10)得证.

最后, 因 H_{11} 是坐标转换下的不变量, 故 λ 是标量.

4° . 二阶各向同性张量的形式必为 $\lambda \delta_{ij}$, 其中 λ 为标量.



根据(1.20.7)及(1.20.8),再考虑到上式有

$$H_{123} = H_{231} = H_{312} = \lambda, \quad H_{213} = H_{321} = H_{132} = -\lambda$$

(1.20.14)和(1.20.15)得证.

最后因 H_{123} 是坐标转换下的不变量,故 λ 是一标量.

5°. 四阶各向同性张量的形式必为

$$H_{ijkl} = \nu \delta_{ij} \delta_{kl} + \alpha \delta_{ik} \delta_{jl} + \beta \delta_{il} \delta_{jk} \quad (1.20.17)$$

其中 ν, α, β 为标量.

证 即欲证

$$H_{ijkl} = \begin{cases} \nu + \alpha + \beta, & \text{当 } i=j=k=l \text{ 时} & (1.20.18) \\ \nu, & \text{当 } i=j \neq k=l \text{ 时} & (1.20.19) \\ \alpha, & \text{当 } i=k \neq j=l \text{ 时} & (1.20.20) \\ \beta, & \text{当 } i=l \neq j=k \text{ 时} & (1.20.21) \\ 0, & \text{其他情形} & (1.20.22) \end{cases}$$

因 H_{ijkl} 是各向同性张量,故有:

$$H_{ijkl} = H'_{ijkl} = \beta_{im} \beta_{jn} \beta_{kp} \beta_{lq} H_{mnpq} \quad (1.20.23)$$

(i) 原坐标系绕 x_3 轴转 180° , 此时 β_{ij} 取(1.20.11)式,于是,当 i, j, k, l 中有单数个 3 时,根据(1.20.23)式有

$$H_{ijkl} = H'_{ijkl} = -H_{ijkl}$$

即 $H_{ijkl} = 0$. 再根据置换定理可知,只要 1 或 2 或 3 在 i, j, k, l 中出现单数次,就有

$$H_{ijkl} = 0$$

(1.20.22)得证

(ii) 原坐标系绕 x_3 轴转 90° , 此时 β_{ij} 取(1.20.16)式,于是根据(1.20.23)式有

$$H_{1122} = H'_{1122} = \beta_{12}^2 \beta_{21}^2 H_{2211} = H_{2211}$$

同理有

$$H_{1212} = H_{2121}, \quad H_{1221} = H_{2112}$$

再根据置换定理可知(1.20.19);(1.20.20)与(1.20.21)式成立.

(iii) 根据置换定理有

$$H_{1111} = H_{2222} = H_{3333} \quad (1.20.24)$$

原坐标系绕 x_3 轴转 45° (图1.20.2), 此时

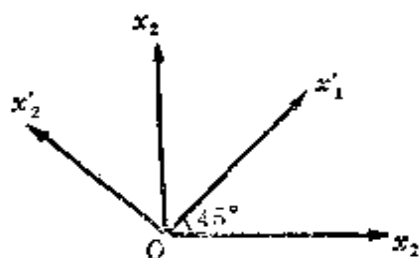


图 1.20.2

$$\beta_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(1.20.25)$$

根据(1.20.23)式有

$$H_{1111} = H'_{1111} = \beta_{.m}\beta_{.n}\beta_{.p}\beta_{.q}H_{mnpq}$$

考虑到(1.20.22)及(1.20.25), m, n, p, q 只须取 1 或 2, 而且只须取偶数个 1 和偶数个 2, 其它情形皆为零, 于是

$$H_{1111} = \frac{1}{4} \left(H_{1111} + H_{2222} + H_{1322} + H_{2211} + H_{1212} \right. \\ \left. + H_{2121} + H_{1221} + H_{2112} \right)$$

根据(1.20.19), (1.20.20), (1.20.21) 及(1.20.24)式有

$$H_{1111} = H_{2222} = H_{3333} = \nu + \alpha + \beta$$

(1.20.18)式得证.

最后, 由于各向同性张量各分量都是旋转坐标变换下的不变量, 根据(1.20.19), (1.20.20) 及(1.20.21)式推出 ν, α, β 都是标量. 下面我们推导 H_{ijkl} 当 i, j 两指标对称时(1.20.17) 的特殊形式. 为此首先将(1.20.17)改写成另一形式, 令

$$\alpha = \mu + \lambda, \quad \beta = \mu - \lambda$$

代入(1.20.17)式得

$$H_{ijkl} = \nu \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ + \lambda (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (1.20.26)$$

因为 H_{ijkl} 对 i, j 对称, 故有

$$H_{ijkl} = H_{jikl} = \frac{1}{2}(H_{ijkl} + H_{jikl}) \quad (1.20.27)$$

将(1.20.26)中的下标 i, j 对换有

$$H_{jikl} = \nu \delta_{li} \delta_{kj} + \mu (\delta_{jk} \delta_{il} + \delta_{jl} \delta_{ik}) + \lambda (\delta_{jk} \delta_{il} - \delta_{jl} \delta_{ik}) \quad (1.20.28)$$

将(1.20.26)式和(1.20.28)式相加, 并考虑到(1.20.27)式及 $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, 得

$$H_{ijkl} = \nu \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (1.20.29)$$

(1.20.29)式比(1.20.26)式又简化了, 这里只出现两个标量常数 ν 及 μ . 由(1.20.29)易见 H_{ijkl} 对后两个指标 k, l 也是对称的.

习 题 二

1. 在任意直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 中有三个量 b_i , 若对任一矢量 a_i 作 $a_i b_i$. 且在坐标变换时满足下列条件

$$a'_i b'_i = a_i b_i$$

试证: b_i 是一矢量.

2. 若 $a_i b_i$ 是一标量, a_i 是矢量, 求证 b_i 必为矢量.
3. 求证: (1) $a \cdot b = (b \cdot a)_c$; (2) $a \cdot P = P_c \cdot a$.
4. 若 P 为对称张量, 证:
 - (1) $P = p_c$
 - (2) $b \cdot (P \cdot a) = a \cdot (p \cdot b)$, 其中 a, b 为两矢量.
5. 若 P 为反对称张量, 证:
 - (1) $P = -P_c$
 - (2) $b \cdot (P \cdot a) + a \cdot (P \cdot b) = 0$, 其中 a, b 为两矢量.
6. 求证 $P_c = p_i e_i$. 并利用 P 及 P_c 的并矢形式证明

$$a \cdot P = P_c \cdot a = a_i p_i$$
7. 定义张量 P 和矢量 a 的右向矢乘和左向矢乘分别为

$$P \times a = e_i (p_i \times a), \quad a \times P = (a \times e_i) p_i$$

求证: (1) $bc \times a = b(c \times a)$; (2) $(\omega \times I)a = \omega \times a$; (3) $(a \times P)_c = -(P_c \times a)$.

8. 证明: (1) PP_c 是对称张量; (2) $(PQ) \cdot a = P(Q \cdot a)$.

9. 利用张量 P, Q 的并矢形式 $P = e_i p_i$ 及 $Q = q_i e_i$, 证明

$$P \cdot Q = p_{ik} q_{ki}$$

10. 将张量 p_{ij} 分解成对称部分和反对称部分. 证明与反对称部分相当的矢量 ω 具有下列表达式

$$\omega = -\frac{1}{2} [e_i \times p_i]$$

11. 将并矢张量 ab 分解为对称部分和反对称部分. 证明与反对称部分相当的矢量 ω 是

$$\omega = \frac{1}{2} b \times a$$

12. 将张量

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

分解为对称部分和反对称部分. 证明反对称部分相当于矢量

$$\omega = \frac{1}{2} \text{rota}$$

若

$$da_i = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j$$

试证

$$da = S \cdot dr + \frac{1}{2} \text{rota} \times dr$$

其中 S 是 $\frac{\partial a_i}{\partial x_j}$ 的对称部分.

13. 有一张量 P , 将其分解为对称的和反对称的两部分, 并以 ω 表示相当于反对称部分的矢量. 试证

$$u \cdot (P \cdot v) - v \cdot (P \cdot u) = -2\omega \cdot (u \times v)$$

其中 u 及 v 为任意矢量.

14. 张量 P 为反对称张量的充分必要条件是: 对任意矢量有等式

$$a \cdot (P \cdot a) = 0$$

成立.

15. 计算并矢张量 ab 的不变量.

16. 计算相于矢量 ω 的反对称张量的不变量.

17. 若 $P = e_i \rho_i$. 证

$$I_1 = e_1 \cdot \rho_1 + e_2 \cdot \rho_2 + e_3 \cdot \rho_3$$

$$I_2 = e_1 \cdot (\rho_2 \times \rho_3) + e_2 \cdot (\rho_3 \times \rho_1) + e_3 \cdot (\rho_1 \times \rho_2)$$

$$I_3 = \rho_1 \cdot (\rho_2 \times \rho_3)$$

18. 若 a, b, c 为三个不共平面的矢量, 且

$$P \cdot a = a', \quad P \cdot b = b', \quad P \cdot c = c'$$

证:

$$I_1 = \frac{a' \cdot (b \times c) + b' \cdot (c \times a) + c' \cdot (a \times b)}{a \cdot (b \times c)}$$

$$I_2 = \frac{a \cdot (b' \times c') + b \cdot (c' \times a') + c \cdot (a' \times b')}{a \cdot (b \times c)}$$

$$I_3 = \frac{a' \cdot (b' \times c')}{a \cdot (b \times c)}$$

19. 设 P 为对称张量, 且 $p = nP$. 证:

$$(1) \int_S \rho_n \cdot v dS = \int_V \operatorname{div}(P \cdot v) dV;$$

$$(2) \quad \operatorname{div}(P \cdot v) = v \cdot \operatorname{div} P + P : S,$$

其中 S 是题 13 中 $\frac{\partial a_i}{\partial x_i}$ 的对称张量部分, 现在 a 应以 v 替代之.

20. 设 P 为对称张量, 试证 $\operatorname{div} P$ 在曲线坐标系中的表达式为

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} P)_1 = & \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 p_{11}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 H_1 p_{12}) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 p_{31}) \right] + \frac{p_{12}}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \\ & + \frac{p_{13}}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \frac{p_{22}}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} - \frac{p_{33}}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} P)_2 = & \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 p_{12}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 H_1 p_{22}) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 p_{32}) \right] + \frac{p_{12}}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \\ & + \frac{p_{23}}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} - \frac{p_{33}}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} - \frac{p_{11}}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} P)_3 = & \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 p_{31}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 H_1 p_{23}) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 p_{33}) \right] + \frac{p_{31}}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \\ & + \frac{p_{23}}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} - \frac{p_{11}}{H_3 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \frac{p_{22}}{H_3 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \end{aligned}$$

第二章 流体力学的基本概念

2.1 流体力学的研究对象、研究方法及其应用

力学是研究机械运动以及它与其他运动形态相互作用的科学。为了有成效地解决实际问题，在力学中广泛地采用了抽象的理论模型，例如质点、质点组、刚体、连续介质等等。理论力学研究力学的普遍运动规律，一般性的原理以及质点、质点组和刚体这些理论模型的运动规律。连续介质力学研究连续介质的运动规律。它包括弹塑性力学和流体力学两个分支。由此可见流体力学是力学的一个分支，它是研究流体（包括液体及气体）这样一个连续介质的宏观运动规律以及它与其他运动形态之间的相互作用。

流体力学的研究方法和物理学中其他领域一样，有理论、计算和实验三种。三种方法取长补短，相互促进，彼此影响，从而促使流体力学得到飞速的发展。

理论研究方法一般说来包括下列几个主要步骤：（1）通过实验和观察对流体的物理性质及运动的特性进行分析研究，根据不同问题分析哪些是主要因素，哪些是次要因素，然后，抓住主要因素忽略次要因素对流体或运动进行简化和近似，设计出合理的理论模型。在这一步骤中，一方面要善于根据不同问题分清主次，抓住决定该问题中流体运动的主导方面；另一方面也要使得简化后的理论模型便于理论处理。（2）对于上述理论模型，根据物理上已经总结出来的普遍定律（例如牛顿定律、热力学定律等）以及有关流体性质的实验公式，建立描写流体运动规律的封闭方

程组（积分形式或微分形式）以及与之相应的初始条件和边界条件。（3）利用各种数学工具（在流体力学中主要是偏微分方程、常微分方程、复变函数、近似计算等）准确地或近似地解出方程组。对于某些较复杂的流动问题还常常需要进一步考虑流动的物理特性将方程组作进一步的简化。（4）求出方程组的解答后，必需对它进行分析，揭示由解表示出来的物理量的变化规律，并且将它和实验或观察资料进行比较，确定解的准确度及适用范围。

理论研究方法的特点在于科学的抽象（近似），从而能够利用数学方法求出理论结果，清晰地、普遍地、揭示出物质运动的内在规律。列宁在哲学笔记中写道：“抽象化的方法（有意弃去它的次要属性而仅保留主要的）不仅对于工程实际目的是完全许可的，而且是科学认识过程的条件之一。”“从具体的东西上升到抽象的东西，思维不是离开——如果它是正确的——真理而是接近真理”。

由于数学发展水平的局限，理论研究方法往往只能局限于比较简单的理论模型。因此不能满足生产技术日益提高的要求——研究更复杂更符合实际的流体运动。近年来出现了快速电子计算机并发展了一系列有效的近似计算方法，如有限差分法、有限元法、有限基本解方法等等。使数值计算在流体力学研究方法中的作用和地位不断提高，并已成为与理论分析，实验方法并列的具有同等重要意义的研究方法。目前，应用各种有效的数值计算方法和电子计算机已能迅速地准确地确定出飞机外形、喷气发动机喷嘴、汽轮机叶片的最优形式，并且在气象预报、油田开发的动态模拟、水利工程各种水流问题、环境污染预报、人工脏器的流体力学问题等各个工程领域内发挥着越来越大的作用。

数值方法的优点是能够解决理论研究无法解决的复杂流动问题。和实验相比，所需的费用和时间都比较少，而且有较高的精度。有些问题，例如星云演化过程、可控热核聚变中的高温等离

子流动等在实验室里无法进行实验，但是采用数值计算方法却可以对它们进行研究。当然数值方法也有其局限性，它要求对问题的物理特性有足够的了解，从而能够提炼出较精确的数学方程。正是在这些方面，实验方法和理论分析起到数值方法所不能起的作用。

实验研究方法在流体力学中有着广泛的应用。流体力学的实验研究主要是在风洞、激波管、水洞、水槽、水电比拟等实验设备中进行模型试验或实物试验。它的主要特点，也就是它的优点在于它能在与所研究的问题完全相同或大体相同的条件下进行观测。因此通过实验得出的结果一般说来是可靠的。但是实验方法往往要受模型尺寸的限制，此外还有边界影响，相似准则不能全部满足等问题。应该指出有些问题，例如宇宙气体力学、碳酸岩油田的渗流等，目前还没有方法在实验室里进行实验研究。

理论、计算和实验这三种方法各有利弊，相互促进。实验用来检验理论结果和计算结果的正确性与可靠性，并提供建立运动规律及理论模型的依据。这样的作用不管理论和计算发展得多么完善都是不可顶替的。而理论则能指导实验和计算，使它进行得富于成效。并且可以把部分实验结果推广到一整类没有做过实验的现象中去。计算可以弥补理论和实验的不足，对一系列复杂流动进行既快又省的研究工作。理论、计算和实验这样不断的相互作用是流体力学方法的威力所在，也是流体力学得到飞速发展的原因之一。

流体力学在生产部门中有着非常广泛的应用。可以这样说，目前已很难找出一个技术部门，它与流体力学没有或多或少的联系。航空工程和造船工业中的基本问题，如飞机及船的外形设计、操纵性、稳定性等向流体力学提出了广泛的研究课题，并促使流体力学得到了很大的发展。在水利工程中，如大型水利枢纽、水库、水力发电站的设计和建造、洪峰的预报工作、河流泥沙等问题都是与流体力学紧密地联系在一起。流体力学的研究

对于动力机械制造工业也具有重要意义，如提高水力及蒸气透平、喷气发动机、压缩机和水泵等动力机械的性能与正确地设计叶片、导流片及其他零件的形状有关。近代热工学在研究如何加速透平机和发动机中的燃烧过程，使灼热的表面冷却等问题中广泛地利用了流体力学的知识。此外，现代气象科学中的基本问题——天气预报的解决也是绝对离不开流体力学的。甚至在天文学上也有着流体力学广阔的研究天地，例如研究星系螺旋结构，研究组成星云的气状物质的运动，研究气云的膨胀及其相互作用等问题都是宇宙流体力学的内容。近年来，由于科学技术的飞速发展，流体力学和其他学科相互渗透，形成了一系列边缘学科，例如电磁流体力学、化学流体力学、高温气体力学、爆炸力学、生物流体力学、地球流体力学、非牛顿流、多相流等等。这些学科的出现使得流体力学这一古老学科更加欣欣向荣充满朝气。

从上面粗略不全的介绍中可以看出流体力学有着广泛用途，它在祖国社会主义建设及国防建设事业中有着重要的地位。

2.2 连续介质假设

流体由大量分子组成。分子间的真空区其尺度远大于分子本身。每个分子无休止地作不规则的运动，相互间经常碰撞，交换着动量和能量。因此流体的微观结构和运动无论在时间或空间上都充满着不均匀性，离散性和随机性。另一方面人们用仪器测量到的或用肉眼观察到的流体宏观结构及运动却又明显地呈现出均匀性，连续性和确定性。微观运动的不均匀性，离散性，随机性和宏观运动的均匀性，连续性，确定性是如此之不同却又和谐地统一在流体这一物质之中，从而形成了流体运动的两个重要侧面。

流体力学研究流体的宏观运动。研究流体的宏观运动存在着两种不同的途径。一种是统计物理的办法。从分子和原子的运动出发，采用统计平均的方法建立宏观物理量满足的方程，并确定流体的性质。大家知道，采用统计物理的方法可以导出热力学三

大定律，在气体的分子运动论方面，对分子碰撞作某些简化假设后可导出正确的宏观方程，但某些分子输运系数的值还不能准确地得出。至于液体输运过程的理论迄今为止还不完善。由此可见，统计物理的办法虽然自然直接，但还不能为流体力学提供充分的理论根据。第二种办法以连续介质假设为基础，认为流体质点连续地充满了流体所在的整个空间，流体质点所具有的宏观物理量(如质量、速度、压力、温度等)满足一切应该遵循的物理定律及物理性质，例如牛顿定律、质量、能量守恒定律、热力学定律，以及扩散、粘性、热传导等输运性质。但流体的某些物理常数和关系还必须由实验确定。这种方法已广泛地被流体力学所采用并获得了很大的成功。虽然如此，统计物理处理问题的方法和结果对于理解流体力学中很多基本性质和概念十分有用，因它力图从微观导出宏观，从而深刻地揭示了微观和宏观之间的内在联系。

现在较仔细地讨论一下后一种做法的基础——连续介质假设。由于宏观问题的特征尺度和特征时间，例如机翼的翼弦、机翼的振动周期和分子间的距离及碰撞时间相比大得不可比拟，个别分子的行为几乎不影响大量分子统计平均后的宏观物理量，因此在考虑流体的宏观运动时可不必直接考虑流体的分子结构，而采用连续介质这一近似的理论模型。连续介质假设认为真实流体所占有的空间可近似地看做是由“流体质点”连续地无空隙地充满着的。所谓流体质点指的是微观上充分大，宏观上充分小的分子团。一方面，分子团的尺度 L_2 和分子运动的尺度 L_1 相比应足够地大，使得其中包含大量的分子。对分子团进行统计平均后能得到稳定的数值，少数分子出入分子团不影响稳定的平均值。另一方面又要求分子团的尺寸 L_2 和所研究问题的特征尺度 L_3 相比要充分的小，使得分子团内平均物理量可看成是均匀不变的，因而可以把它近似地看成是几何上没有维度的一个点。为了对微观充分大宏观充分小的流体质点的概念有一个更直观形象的认识，让我们考察平均物理量(例如密度)和分子团尺寸的关系。图 2.2.1 画出

了两者依赖关系的示意图。当分子团的尺寸取得太小，小到和分子运动的尺度 L_1 同数量阶时，分子团中只有几个分子，密度值

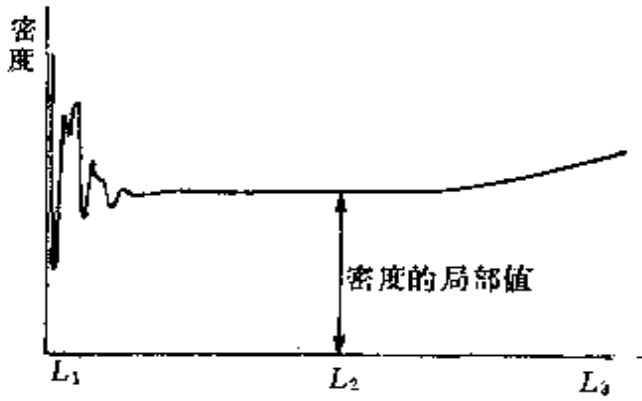


图 2.2.1

出现很大的随机脉动，因为当分子团尺度变化时，分子数目的增减对密度平均值将产生很大的影响。图 2.2.1 还清楚地显示当分子团的尺寸取得太大，大到和问题的特征尺度 L_3 同数量阶时，密度空间分布的不均匀性将如何影响密度值的变化。上述两种极端情形都不能得到

密度的稳定值。只有当分子团尺度 L_2 取 $L_1 \ll L_2 \ll L_3$ ，即微观充分大，宏观充分小时，密度值才是稳定不变的，而且可近似地看成是一个几何点上的局部值。

在进行统计平均时除了分子团的尺寸必须满足上述要求外，还应对进行统计平均的时间 t 作出规定，即要求它必须是微观充分长宏观充分短的。也就是说，一方面进行统计平均的时间应选得足够长，使得在这段时间内，微观的性质，例如分子间的碰撞已进行了许多次，在这段时间内进行统计平均能够得到稳定的数值。另一方面，进行统计平均的时间从宏观上来说也应选得比特征时间小得多，使得我们可以把进行平均的时间看成是一个瞬间。平均物理量与时间 t 的关系和图 2.2.1 类似，不再说明。

有了连续介质假设，在研究流体的宏观运动时，就可以把一个本来是大量的离散分子或原子的运动问题近似为连续充满整个空间的流体质点的运动问题。而且每个空间点和每个时刻都有确定的物理量，它们都是空间坐标和时间的连续函数，从而可以利用强有力的数学分析的工具。正因为这样，连续介质假设是流体

力学中第一个带根本性的假设。

在一般情况下，连续介质假设是合理的。事实上，在通常遇到的问题中，从体积来说，宏观小微观大；从时间来说，宏观短微观长的条件是可以办到的。例如在冰点温度和一个大气压下，一立方厘米体积中所含气体分子数约为 2.7×10^{19} ，即使在 10^{-9} (厘米)³ 这样一个宏观上说来很小的体积里，也还有 2.7×10^{10} 个分子，从微观方面看来这样的体积还是非常大。另一方面，在冰点温度和一个大气压下，每立方厘米的气体分子在一秒钟内要碰撞 10^{29} 次，因此在 10^{-6} 秒宏观说来很短的时间内，即使在很小的体积 10^{-9} 立方厘米内的分子仍然要碰撞 10^{14} 次，这个时间从微观看来是够长的了。

但是，在某些特殊问题中，连续介质的假设也可以不成立。例如在研究导弹和卫星在高空中飞行的稀薄气体力学中，分子间的距离很大，它能和物体的特征尺度比拟，这样虽然获得稳定平均值的分子团还是存在的，但是不能将它看成一个质点。又如考虑激波内的气体运动，激波的尺寸与分子自由路程同阶，激波内的流体只能看成分子而不能当作连续介质来处理了。

由此可见，除了个别情形外，连续介质假设是合理的。根据连续介质假设得到的理论结果在很多情形与实验很好地符合。

在结束本节时我们愿意强调指出以下几点：(1) 当流体力学中引进连续介质假设，并将流体近似地看成是由流体质点连续地无空隙地组成后，我们将不再考虑流体的分子结构。也就是说，从连续介质力学看来，流体的形象是宏观的均匀连续体，而不是微观的包含大量分子的离散体。(2) 在流体力学中谈到流体质点的位移，不是指个别分子的位移，而是指包含大量分子，在流体力学中看成是几何点的分子团的位移。特别地当我们说流体质点处于静止状态时，那就是说它将永远留在原地不动，虽然那里的分子由于热运动将不断移动位置。(3) 当我们在连续介质内某点 A 上取极限时，不管离 A 多近的地方都有流体质点存在，并有确定的

物理值，而不能这样地认为，似乎在取极限时会出现叙列点陷入分子间真空区的现象，因为我们已经将流体看成是宏观连续体，不再认为其中有分子结构了。



2.3 流体的性质及分类

从这一节开始，我们将对流体运动的三大要素，即流体、运动与力分别地进行研究。随后在下一章中根据力学及热力学的普遍规律再将这三个因素联系起来从而建立起理论研究赖以出发的基本方程组。

这一节我们讲述流体的宏观性质。由于宏观性质是微观性质的统计平均，所以在叙述宏观性质的时候，将常常从微观的角度加以说明。

流体的宏观性质主要是易流动性、粘性及压缩性。现分别说明之。

a) 易流动性

大家知道，固体在静止时可以承受切应力。当固体受到切向作用力时，在一般情形下沿切线方向将发生微小的变形，而后达到平衡状态，在它的截面上承受切线方面的应力。因此，固体在静止时，既有法应力也有切应力。与此相反，流体在静止时不能承受切向应力，不管多小的切向应力，只要持续地施加，都能使流体流动发生任意大的变形。因此流体在静止时只有法应力而没有切应力。流体的这个宏观性质称为易流动性。

流体和固体的区别不是绝对的。有些物质它们的性质介乎固体和流体之间，具有固体和流体双重的性质。例如胶状物和油漆这类触变物质放置一段时间后它们的性质看起来像弹性固体，但是在摇动和刷漆时却失去弹性，发生很大的变形，其行为完全像流体。沥青在正常条件下像固体，用錘子錘它会发生碎裂，但是放在地面上在重力作用下经过相当长的时间之后会逐渐向四外铺开，它的行为又象流体。浓缩的聚合物溶液甚至同时存在类固体

的性质和类流体的性质。

本课程主要研究水或空气这类“纯粹”的流体。

流体的宏观性质和分子的结构以及分子间作用力的性质直接相关。图 2.3.1 画出了不形成化学键的两孤立分子间的相互作用力和分子间距离 d 的曲线图。当 d 和 $d_0 = 3-4 \times 10^{-8}$ 同量阶时，分子间存在着量子型强作用力，当 d 的量阶变为 10^{-7} 厘米或 10^{-6} 厘米时存在着经典型弱吸引力，其大小约为 d^{-7} 和 d^{-8} 。

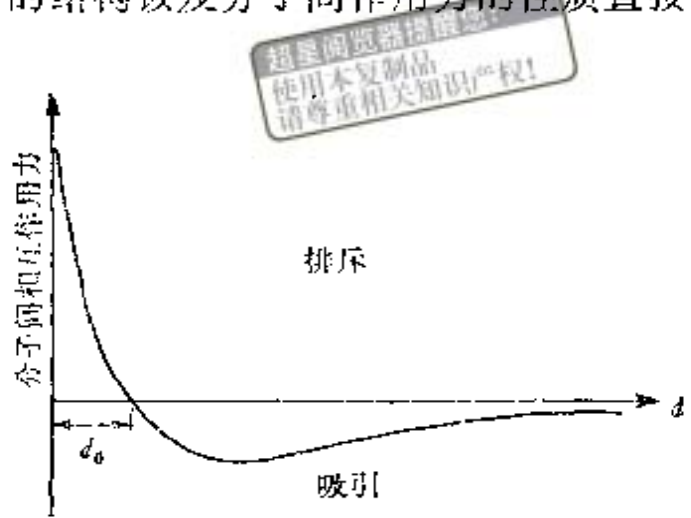


图 2.3.1

现在我们利用图 2.3.1 说明固、液、气的区别。当温度较低时，分子运动不甚剧烈，分子间的距离是 d_0 的数量阶，分子间的作用力是量子型的强作用力，数值很大，因此分子只能在各自的平衡位置作微小的振动，此时物质表现为固体的状态。固体具有一定的形状和体积。当温度升高时，分子运动变得剧烈了，分子间距离增大，分子间作用力变为量子型和经典型混合的中等作用力。到达某一温度时，分子间的作用力已不能维持分子在固定的平衡位置附近作微小的振动，但还能维持分子不散开，此时，便表现为液体状态。液态时分子无固定的平衡位置，因而整个物体的形状不能维持不变，但仍然有一定的体积。当温度再升高时，分子运动的激烈程度愈甚，分子间距离达 $10d_0$ 左右，只有非常弱的弱作用力作用在它们上面，此时分子相互分散远离，分子运动接近于自由运动，这时，物质便表现为气体状态。气体既然能自由运动，因此没有固定的形状和大小。

从上面叙述可以看出，固体中分子的作用力较强，有固定的平衡位置，因而不仅具有一定的体积，而且具有一定的形状，当

外界有力作用在固体时，它可以作微小的变形，然后承受住切应力不再变形。而在液体和气体中，分子间的作用力较弱或很弱，很小的切应力，都可使它们产生任意大的变形。

b) 粘性，理想流体和粘性流体

流体在静止时虽不能承受切应力，但在运动时，对相邻两层流体间的相对运动，即相对滑动速度却是有抵抗的，这种抵抗力称为粘性应力。流体所具有的这种抵抗两层流体相对滑动速度，或普遍说来抵抗变形的性质称为粘性。粘性大小依赖于流体的性质，并显著地随温度而变化。实验表明，粘性应力的大小与粘性及相对速度成正比。当流体的粘性较小（实用上最重要的流体如空气、水等的粘性都是很小的），运动的相对速度也不大时，所产生的粘性应力比起其他类型的力如惯性力可忽略不计。此时，我们可以近似地把流体看成是无粘性的，这样的流体称为理想流体。十分明显，理想流体对于切向变形没有任何抗拒能力。这样对于粘性而言，我们可以将流体分成理想流体和粘性流体两大类。应该强调指出，真正的理想流体在客观实际中是不存在的，它只是实际流体在某种条件下的一种近似模型。

除了粘性外，流体还有热传导及扩散等性质。当流体中存在着温度差时，温度高的地方将向温度低的地方传送热量，这种现象称为热传导。同样地，当流体混合物中存在着混合物某组元的浓度差时，浓度高的地方将向浓度低的地方输送该组元的物质，这种现象称为扩散。

流体的宏观性质，如扩散、粘性、热传导等是分子输运性质的统计平均。由于分子的不规则运动，在各层流体间将交换着质量、动量和能量，使不同流体层内的平均物理量均匀化，这种性质称为分子运动的输运性质。质量输运在宏观上表现为扩散现象，动量输运表现为粘性现象，能量输运则表现为热传导现象。

理想流体忽略了粘性，即忽略了分子运动的动量输运性质，因此在理想流体中也不应考虑质量和能量输运性质——扩散和热

传导，因为它们具有相同的微观机制。

c) 压缩性，不可压缩流体和可压缩流体

在流体的运动过程中，由于压力、温度等因素的改变，流体质点的体积（或密度，因质点的质量一定），或多或少有所改变。流体质点的体积或密度在受到一定压力差或温度差的条件下可以改变的这个性质称为压缩性。真实流体都是可以压缩的。它的压缩程度依赖于流体的性质及外界的条件。液体在通常的压力或温度下，压缩性很小。例如水在100个大气压下，容积缩小0.5%，温度从20°变化到100°，容积降低4%。因此在一般情形下液体可以近似地看成是不可压的。但是在某些特殊问题中，例如水中爆炸或水击等问题，则必须把液体看作是可压缩的。气体的压缩性比液体大得多，所以在一般情形下应该当作可压缩流体处理。但是如果压力差较小，运动速度较小，并且没有很大的温度差，则实际上气体所产生的体积变化也不大。此时，也可以近似地将气体视为不可压缩的。

通过上面的讨论，可以看出，流体都是可压缩的，但对液体或低速运动而温度差又不大的气体而言，在一般情形下可近似地视为不可压缩的。这样我们便可按压缩性将流体分成不可压缩流体和可压缩流体两大类。应该特别强调，不可压缩流体在实际上是不存在的，它只是真实流体在某种条件下的近似模型。

液体和气体具有不同的压缩性可以从微观中得到说明。如上所述，在液体中分子间存在着一定的作用力，它使分子不分散远离，保持一定的体积。因此要使液体的体积改变是较难的。对气体而言，分子间的作用力十分微小，它不能保持固定的形状及大小，因此在同样的外界的作用下，可以较大地改变它的体积。

2.4 描写流体运动的两种方法——拉格朗日方法和欧拉方法

从这一节开始我们将在不考虑外力作用的前提下研究已经发生的流体运动。首先阐明如何用分析的方法和几何的方法描绘流

体的运动，随后在每一点的邻域内对复杂的流体运动进行分析，找出流体运动的三种基本方式，即平动、转动和变形。最后，在运动分析的基础上对运动进行分类。

这一节中我们将叙述描写流体运动的方法及其分析表达。

设流体质点在空间中运动，我们的任务是确定描写流体运动的方法并且将它用数学式子表达出来。在流体力学中描写运动的观点和方法共有两种，即拉格朗日方法和欧拉方法。先介绍拉格朗日方法。拉格朗日方法，着眼于流体质点。设法描述出每个流体质点自始至终的运动过程，即它们的位置随时间变化的规律。如果知道了所有流体质点的运动规律，那么整个流体运动的状况也就清楚了。打个比方说，每个流体质点好比一架敌机，我们通过雷达跟踪把每架敌机的来龙去脉都搞清楚，就掌握了整个敌机群的动向。拉格朗日方法也是我们在理论力学中研究质点和质点组运动时所经常采用的，只不过现在把它推广到连续介质中去而已。

现在我们将上述描写运动的观点和方法用数学式子表达出来，为此首先必须用某种数学方法区别不同的流体质点。通常利用初始时刻流体质点的坐标作为区分不同流体质点的标志。设初始时刻 $t=t_0$ 时，流体质点的坐标是 (a, b, c) ，它可以是曲线坐标，也可以是直角坐标 (x_0, y_0, z_0) ，重要的是给流体质点以标号而不在于采取什么具体的方式。我们约定采用 a, b, c 三个数的组合来区别流体质点，不同的 a, b, c 代表不同的质点。于是流体质点的运动规律数学上可表为下列矢量形式：

$$r = r(a, b, c, t) \quad (2.4.1)$$

其中 r 是流体质点的矢径。在直角坐标系中，有

$$\begin{aligned} x &= x(a, b, c, t) \\ y &= y(a, b, c, t) \\ z &= z(a, b, c, t) \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

变数 a, b, c, t 称为拉格朗日变数。在(2.4.1)式中，如果固定 a, b, c 而令 t 改变，则得某一流体质点的运动规律。如果固定时间

t 而令 a, b, c 改变, 则得同一时刻不同流体质点的位置分布. 应该指出, 在拉格朗日观点中, 矢径函数 r 的定义区域不是场, 因为它不是空间坐标的函数, 而是质点标号的函数.

现在我们从(2.4.1)式出发求流体质点的速度和加速度. 假设由(2.4.1)式确定的函数具有二阶连续偏导数. 速度和加速度是对于同一质点而言的单位时间内位移变化率及速度变化率, 设 v, \dot{v} 分别表示速度矢量和加速度矢量, 则

$$\begin{aligned} v &= \frac{\partial r(a, b, c, t)}{\partial t} \\ \dot{v} &= \frac{\partial^2 r(a, b, c, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

既然对同一质点而言, a, b, c 不变, 因此上式写的是对时间 t 的偏导数. 在直角坐标系中, 速度和加速度的表达式是

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial x(a, b, c, t)}{\partial t} \\ v &= \frac{\partial y(a, b, c, t)}{\partial t} \\ w &= \frac{\partial z(a, b, c, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

及

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{\partial^2 x(a, b, c, t)}{\partial t^2} \\ \dot{v} &= \frac{\partial^2 y(a, b, c, t)}{\partial t^2} \\ \dot{w} &= \frac{\partial^2 z(a, b, c, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

现在我们来介绍描写流体运动的另一种观点和方法, 即欧拉方法. 和拉格朗日方法不同, 欧拉方法的着眼点不是流体质

点，而是空间点。设法在空间中的每一点上描述出流体运动随时间的变化状况。如果，每一点的流体运动都已知道，则整个流体的运动状况也就清楚了。那么应该用什么物理量来表现空间点上流体运动的变化情况呢？因为不同时刻将有不同流体质点经过空间某固定点，所以站在固定点上就无法观测和记录掠过的流体质点以前和以后的详细历史。也就是说我们无法象拉格朗日方法那样直接测量出每个质点的位置随时间的变化情况。虽然如此，不同时刻经过固定点的流体质点的速度是可以测出的，这样采用速度矢量来描写固定点上流体运动的变化状况就是十分自然的了。考虑到上面所说的情形，欧拉方法中流体质点的运动规律数学上可表为下列矢量形式：

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(r, t) \quad (2.4.6)$$

在直角坐标系中有：

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, z, t) \\ v &= v(x, y, z, t) \\ w &= w(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

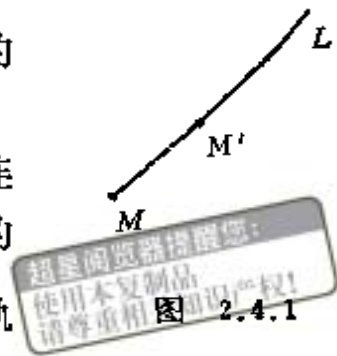
要完全描写运动流体的状况还需要给定状态函数压力、密度、温度等

$$p = p(x, y, z, t), \quad \rho = \rho(x, y, z, t), \quad T = T(x, y, z, t)$$

变数 x, y, z, t ，称为欧拉变数。以后除了个别的线、面而外都假设 \mathbf{v} 具有连续的一级偏导数。当 x, y, z 固定， t 改变时，(2.4.7) 式中的函数代表空间中某固定点上速度随时间的变化规律。当 t 固定， x, y, z 改变时，它代表的是某一时刻中速度在空间中的分布规律。应该指出，由(2.4.7)式确定的速度函数是定义在空间点上的，它们是空间点的坐标 x, y, z 的函数，所以我们研究的是场，如速度场、压力场、密度场等。因此当我们采用欧拉观点描述运动时，就可以广泛地利用场论的知识。若场内函数不依赖于矢径 r 则称之为均匀场；反之称为不均匀场。若场内函数不依赖时间 t 则称为定常场；反之称不定常场。

在气象观测中广泛使用欧拉法。在世界各地（相当于空间点）设立星罗棋布的气象站。根据统一时间各气象站把同一时间观测到的气象要素迅速报到规定的通讯中心，然后发至世界各地，绘制成同一时刻的气象图，据此做出天气预报。

我们假定速度函数(2.4.6)具有一阶连续偏导数，现在从(2.4.6)式出发求质点的加速度 $\frac{dv}{dt}$ 。设某质点在场内运动，其运动轨



迹为 L 。在 t 时刻，该质点位于 M 点，速度为 $v(M, t)$ ，过了 Δt 时刻后，该质点运动至 M' 点，速度为 $v(M', t + \Delta t)$ （参看图 2.4.1）。根据定义，加速度的表达式为

$$\frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(M', t + \Delta t) - v(M, t)}{\Delta t} \quad (2.4.8)$$

从 (2.4.8) 式可以看到，速度的变化亦即加速度的获得主要是下面两个原因引起的。一方面，当质点由 M 点运动至 M' 点时，时间过去了 Δt ，由于场的不定常性速度将发生变化。另一方面与此同时 M 点在场内沿迹线移动了 MM' 距离，由于场的不均匀性亦将引起速度的变化。根据这样的考虑，我们将(2.4.8)的右边分成两部分

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(M', t + \Delta t) - v(M', t)}{\Delta t} \\ &\quad + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(M', t) - v(M, t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(M', t + \Delta t) - v(M', t)}{\Delta t} \\ &\quad + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{MM'}{\Delta t} \lim_{MM' \rightarrow 0} \frac{v(M', t) - v(M, t)}{MM'} \end{aligned}$$

右边第一项当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时 $M' \rightarrow M$, 因此它是 $\frac{\partial v(M, t)}{\partial t}$, 这一项代表由于场的不定常性引起的速度变化, 称为局部导数或就地导数; 右边第二项是 $V \frac{\partial v(M, t)}{\partial s}$, 它代表由于场的不均匀性引起的速度变化, 称为位变导数或对流导数, 其中 $\frac{\partial v}{\partial s}$ 代表沿 s 方向移动单位长度引起的速度变化, 而如今在单位时间内移动了 V 的距离, 因此 s 方向上的速度变化是 $V \frac{\partial v}{\partial s}$. 这样总的速度变化即加速度就是局部导数和位变导数之和, 称之为随体导数. 于是我们有

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + V \frac{\partial v}{\partial s}$$

从场论中得知

$$\frac{\partial v}{\partial s} = (s_0 \cdot \nabla) v$$

其中 s_0 是曲线 L 上的单位切向矢量. 考虑到 $V s_0 = v$, 得

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \quad (2.4.9)$$

这就是矢量形式的加速度的表达式.

在直角坐标系中(2.4.9)式采取下列形式

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (2.4.10)$$

(2.4.9.)式也可以通过直接微分的方式得到. 设与轨迹 L 相对

应的运动方程是

$$r = r(t)$$

或

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

于是速度函数可写成

$$v = v(x(t), y(t), z(t), t)$$

对 v 作复合函数微分, 并考虑到

$$\frac{dr}{dt} = v$$



即

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w$$

于是得

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ &= \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \end{aligned}$$

这就是(2.4.9)式.

上述将随体导数分解为局部导数和位变导数之和的方法对于任何矢量 \mathbf{a} 和任何标量 φ 都是成立的, 此时有

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (v \cdot \nabla) \mathbf{a} \quad (2.4.11)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \cdot \text{grad } \varphi \quad (2.4.12)$$

例 试讨论不可压缩流体的数学表示.

根据定义, 质点的密度在运动过程中不变的流体称为不可压

缩流体。换言之，对于不可压缩流体而言，密度的随体导数为零，即

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (2.4.13)$$

这就是不可压缩流体的数学表示。应该特别指出，不可压缩流体的数学表示 $\frac{d\rho}{dt} = 0$ 和不可压缩均质流体的数学表示 $\rho = \text{常数}$ 是不

同的，不能把它们混为一谈。 $\frac{d\rho}{dt} = 0$ 表示每个质点的密度在它运动的全过程中不变。但是这个质点的密度和那个质点的密度可以不同，因此不可压缩流体的密度并不一定处处都是常数，只有既为不可压缩流体同时又是均质时密度才处处时时都是同一常数。

这个事实也可推导如下：由 $\frac{d\rho}{dt} = 0$ (不可压缩)， $\nabla\rho = 0$ (均质)，

根据(2.4.12)式有 $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ ，于是 $\rho = \text{常数}$ 。

因为拉格朗日方法和欧拉方法从不同观点出发描绘了同一流体的运动，所以它们之间可以互相转换。

设拉格朗日方法中的运动规律

$$r = r(a, b, c, t) \quad (2.4.14)$$

为已知，则速度函数是

$$v = v^*(a, b, c, t) = \frac{\partial r(a, b, c, t)}{\partial t} \quad (2.4.15)$$

反解(2.4.14)代表的三个标量方程得

$$a = a(r, t), \quad b = b(r, t), \quad c = c(r, t)$$

将之代入(2.4.15)式得

$$v = v^*(a(r, t), b(r, t), c(r, t), t) = v(r, t)$$

这就是欧拉变数中的速度函数。

设欧拉方法中的速度函数

$$v = v(r, t)$$

为已知，将之写成

$$\frac{dr}{dt} = v(r, t)$$

这是一个由三个方程组成的确定 $r(t)$ 的常微分方程组，其通解为

$$r = r(C_1, C_2, C_3, t) \quad (2.4.16)$$

其中 C_1, C_2, C_3 是三个积分常数，由 $t=0$ 时 $r=r_0$ 的初始条件确定。于是

$$C_1 = C_1(r_0), \quad C_2 = C_2(r_0), \quad C_3 = C_3(r_0)$$

将之代入(2.4.16)式，并注意到 r_0 的三个坐标 x_0, y_0, z_0 就是拉格朗日变数 a, b, c ，我们有

$$r = r(a, b, c, t)$$

这就是拉格朗日变数下的运动规律。

采用欧拉方法描写流体运动常常比采用拉格朗日方法优越，因为利用欧拉变数所得的是场，而利用拉格朗日变数得到的不是场，所以在欧拉变数中我们能广泛地利用已经研究得很多的场论知识，使理论研究具有强有力的工具，而在拉格朗日变数中却没有这样的优点。另一方面采用拉格朗日方法，加速度 $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$ 是二阶导数，运动方程将是二阶偏微分方程组；而在欧拉方法中，加速度 $\frac{dv}{dt}$ 是一阶导数，因此所得的运动方程将是一阶偏微分方程组。显然一阶偏微分方程组在数学上要比二阶偏微分方程组容易求解。当然采用拉格朗日方法所得的结果比较多，例如可以直接得到质点的运动规律，而欧拉方法却不能直接得到它。但是要解决实际问题常常并无必要知道每一个质点的详细历史。比如，飞机在空中飞行，要计算飞机上的空气动力学特性。解决这一问题并不需要知道流体质点是从哪里来，又到什么地方去。只要知道飞机上的速度和压力就可以求出空气动力学特性。由于以上所说

的几种原因，在流体力学研究中将广泛地采用欧拉方法，并且着重探讨和欧拉方法联系在一起的各种问题，当然这并不意味着可以忽视拉格朗日方法，因为在点爆炸，计算流体力学的某些问题中，采用拉格朗日方法是方便的。不仅如此，拉格朗日观点在流体力学中还有着广泛的应用，例如随体导数的概念本质上就是拉格朗日观点，而在流体力学中经常需要在欧拉场中考虑由质点组成的体、面、线的随体导数。

超星阅读器
使用本复制品
请尊重相关知识产权!

2.5 轨迹和流线

本节讨论流体运动的几何表示，它对于直观形象地分析流体运动很有帮助。

在拉格朗日方法中，我们是通过描写不同流体质点运动规律的途径来描写整个运动的，数学上流体质点的运动规律可表为

$$r = r(a, b, c, t) \quad (2.5.1)$$

流体质点运动规律的几何表示，亦即函数(2.5.1)的几何表示是轨迹。所谓轨迹就是流体质点在空间运动时所描绘出来的曲线。

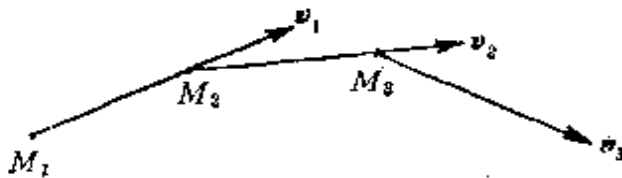


图 2.5.1

它给出同一质点在不同时刻的速度方向。从(2.5.1)式消去时间 t 后即得轨迹的方程。

如流体运动是以欧拉变数形式给出的，即给定

$$v = v(r, t)$$

此时，要得到轨迹的方程，必须将欧拉变数转换到拉格朗日变数中去。亦即解下列微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t)$$

$$\frac{dy}{dt} = v(x, y, z, t)$$

$$\frac{dz}{dt} = w(x, y, z, t)$$

或

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)} \quad (2.5.2)$$

其中 t 是自变量, x, y, z 是 t 的函数. 积分后在所得的表达式中消去时间 t 后即得轨迹的方程.

给出欧拉变数下的速度函数后, 也可以采用下述几何直观的方法作出流体质点的轨迹. 如图 2.5.1 所示, 设 $t=t_1$ 时, 流体质点位于 M_1 点, 速度为 v_1 ; 过了很短的时刻 Δt 后, 流体质点沿 v_1 的方向移动到 M_2 点, M_2 点上的速度为 v_2 ; 再过 Δt 时刻后, 流体质点将沿 v_2 的方向移动至 M_3 点, 如此继续地作下去得到一折线 $M_1M_2M_3\cdots$. 令 $t \rightarrow 0$, 则折线 $M_1M_2M_3\cdots$ 趋于轨迹.

总结上面所说我们可以看到, 轨迹的概念是和拉格朗日观点相联系的, 它是同一流体质点运动规律的几何表示.

下面我们介绍与欧拉方法相联系的流线的概念. 在欧拉方法中我们以速度场描写流体运动, 此时

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(r, t) \quad (2.5.3)$$

速度场是矢量场. 从场论的知识中得知, 可以利用矢量线的概念几何地表示一个矢量场. 在我们这个情况下矢量线就是流线. 所谓流线就是这样的曲线, 对于某一固定时刻而言, 曲线上任一点的速度方向和曲线在该点的切线方向重合. 应该特别指出, 流线是同一时刻不同质点所组成的曲线. 它给出该时刻不同流体质点的运动方向. 现在我们来求确定流线的方程. 设 $d\mathbf{r}$ 是流线的弧元素, 则根据流线的定义, 有

$$d\mathbf{r} \times \mathbf{v} = 0$$

或

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)} \quad (2.5.4)$$

此即流线应该满足的微分方程，它是由两个常微分方程组成的方程组，其中 t 是参数，在积分时当作常数处理。

流线也可以采用几何直观的方法作出，考虑某一固定时刻的速度场，在场内取一点 M_1 ，作 M_1 点的速度矢量 v_1 ；在 v_1 上取一与 M_1 邻近的点 M_2 ，作 M_2 点上速度矢量 v_2 ；在 v_2 上取一与 M_2 邻近的点 M_3 ，如此继续下去我们就得到一条折线 $M_1M_2M_3\cdots$ 。令折线节点间的距离趋于零即得流线。

知道每一时刻的流线族后，速度的方向可由流线的切线方向给出，大小由流线的疏密度给出。流线密的地方速度大，流线稀的地方速度小。所以每一时刻的流线族给出该时刻流体运动的方向。

综上所述，流线是与欧拉方法相联系的概念，它是速度场的几何表示。

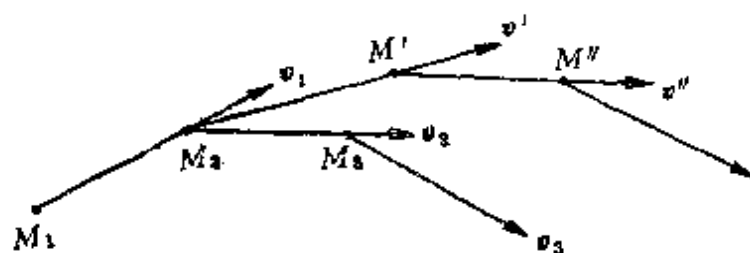


图 2.5.2

现分析轨迹和流线的联系和区别。轨迹和流线是两个具有不同内容和意义的曲线。轨迹是同一质点在不同时刻形成的曲线，它与拉格朗日观点相联系，而流线则是同一时刻不同质点所组成的曲线，它是与欧拉观点相联系的。因此这两种曲线内容是不同的。形式上来说人们发现，在不定常运动时，流线和轨迹一般说来是不重合的，而在定常运动时，二者必然重合。下面先用几何直观的方法加以证明，然而再从微分方程出发，重证一次。

设我们已经作出 $t=t_0$ 时刻通过 M_1 点的流线 $M_1M_2M_3\cdots$ (见图2.5.2)，现在作通过 M_1 点的轨迹。处于 M_1 点的质点经过 Δt

时刻后运动至 M_2 点。如果运动是不定常的, 则 $t = t_1 + \Delta t$ 时刻在 M_2 点上的速度 v' 一般说来不同于 $t = t_1$ 时刻的速度 v_1 , 于是流体质点在下一时刻将沿 v' 方向运动, 这样得到轨迹 $M_1 M_2 M' M'' \dots$ 。显然它的形状与流线 $M_1 M_2 M_3 \dots$ 不同。如果运动是定常的, 则 $t = t_1 + \Delta t$ 时刻在 M_2 点上的速度 v' 将和 $t = t_1$ 时刻在 M_2 点上的速度相同, 于是质点将沿着流线在 M_2 点上的方向 v_2 运动, 如此继续下去可以确信, 定常运动的轨迹和流线是重合的。

上述事实也可以从微分方程组(2.5.2)和(2.5.4)出发加以证明。虽然流线应该满足的方程(2.5.4)和轨线应该满足的方程(2.5.2)形式相同。但是在(2.5.2)式中, 时间 t 是自变数, 而(2.5.4)式中的 t 却是参数, 因此在不定常运动时一般说来, 方程组(2.5.2)和(2.5.4)是不相同的, 因此流线和轨迹也不相同。如果运动是定常的, 此时(2.5.2)式和(2.5.4)式中的时间 t 不复出现, 而(2.5.2)式中的 dt 在消去时间求轨迹亦可抹去, 于是方程组(2.5.2)和(2.5.4)完全一样, 流线和轨迹也就重合。

下面通过机翼运动具体地了解轨迹和流线在不定常运动和定常运动中的关系。

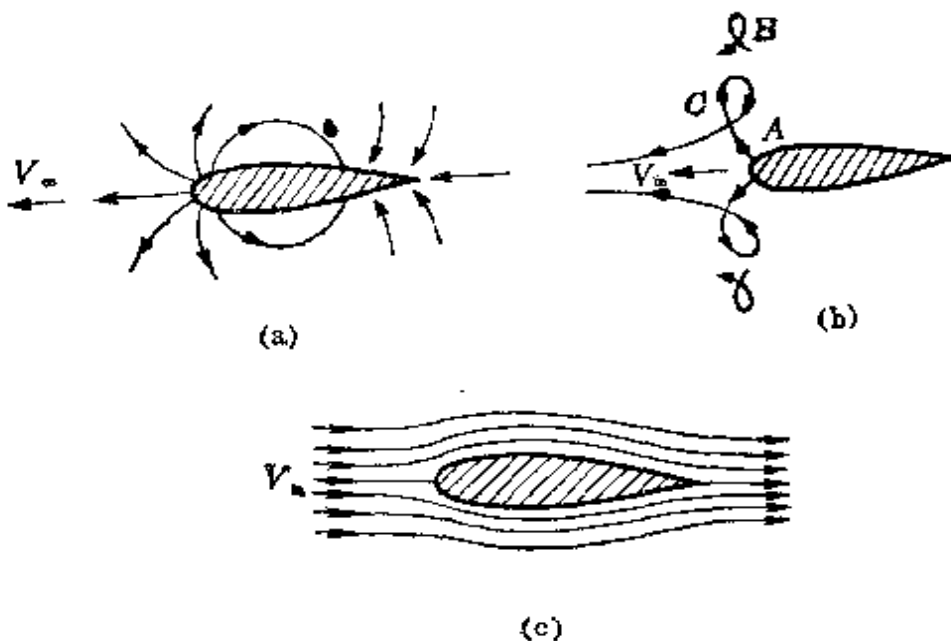


图 2.5.3

机翼在静止空气中以等速 V_0 向左飞行（参考系取在静止空气中），引起的流体运动显然是不定常的。考虑流线和轨迹。机翼在运动时，前缘把空气挤向上下两边，而后缘又把空气吸引回来，形成如图 2.5.3(a) 所示的流线图。而轨迹则与此不同。考虑机翼表面 A 处的流体质点，当机翼运动时被挤向斜上方，到达最高位置 B 后，机翼后面出现的空气稀疏区又把它吸引回斜下方 C 点来填补空档。此时 ABC 就是流体质点的轨迹（见图 2.5.3(b)）。由此可见，不定常运动时，轨迹和流线是很不相同的。现在让机翼静止不动，由无穷远处来的流体以等速 V_0 向它绕流过来（参考系取在物体上）。这是一个定常运动，轨迹和流线重合，具体形状见图 2.5.3(c)。比较 2.5.3(a) 和 2.5.3(c)，可以看出，同一问题，如果参考系取得不一样，流线图案可以截然不同。

下面举例说明如何由微分方程求轨迹和流线以及二者的关系。

例 设流体运动由下列欧拉变数下的速度函数

$$u = x + t, \quad v = -y + t, \quad w = 0$$

给出。求 $t=0$ 时过 $M(-1, -1)$ 点的流线及轨迹。

流线的微分方程是

$$\frac{dx}{x+t} = \frac{dy}{-y+t}$$

其中 t 是参数。积分后得

$$(x+t)(-y+t) = C$$

其中 C 是积分常数，以 $t=0, x=-1, y=-1$ 代入得 $C=-1$ 。于是 $t=0$ 时，过 $M(-1, -1)$ 点的流线是

$$xy = 1$$

这是双曲线的方程。

轨迹应满足的微分方程是

$$\frac{dx}{dt} = x + t, \quad \frac{dy}{dt} = -y + t$$

这是两个非齐次常系数的线性常微分方程，它们的解是

$$x = C_1 e^t - t - 1, \quad y = C_2 e^{-t} + t - 1$$

以 $t = 0, x = 1, y = -1$ 代入得 $C_1 = C_2 = 0$ 。于是过 $M(-1, -1)$ 质点的运动规律是

$$x = -t - 1, \quad y = t - 1$$

消去 t 后得

$$x + y = -2$$

这是直线方程。

由此可见，在定常运动时，轨迹和流线一般说来不相重合。

如果我们考虑的是定常运动，速度函数是

$$u = x, \quad v = -y, \quad w = 0$$

则轨迹应满足的微分方程变为

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = -y$$

消去 t 得

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y} \quad \ln x + C = -\ln y + C$$

$$\ln xy = 0 \quad xy = 1$$

积分之，并考虑到 $t = 0$ 时应通过 M 点的条件得

$$xy = 1$$

由此可见在定常运动时，轨迹和流线的确重合。

最后我们讲述射流和流管的概念。在流体中取一非轨迹且不自相交的封闭曲线 C ，如图 2.5.4 所示。通过 C 上每一

点作轨迹，则这些轨迹组成的曲面称为射流面，射流面所包围的流体称为射流。若曲线 C 无限小则称射流元；若曲线 C 有限，

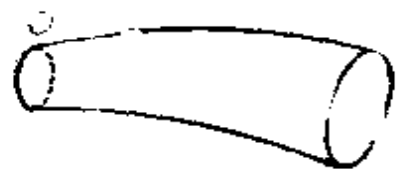


图 2.5.4

则称有限射流。若曲线 C 亦非流线，则在同一时刻过 C 上每一点作流线，这些流线所组成的曲面称为流面， C 面所包围的流体称为流管。若曲线 C 无限小称之为流管元；否则称为有限流管。

在不定常运动时，过曲线 C 的流管和射流一般说来互不重合。在定常运动时，两者重合。

轨迹、射流、流线、流管的概念对于直观理解问题，以及理论上处理某些问题具有重要的意义。

2.6 速度分解定理

从理论力学教程中得知，任何一个刚体运动可以分解为平动和转动之和。因此平动和转动是刚体的基本运动形式。以公式表之有：

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \quad (2.6.1)$$

其中 \boldsymbol{v}_0 是刚体中选定一点 O 上的平动速度， $\boldsymbol{\omega}$ 是刚体绕 O 点旋转的瞬时角速度矢量。 \boldsymbol{r} 是要确定速度那一点到 O 点的矢径。从

(2.6.1)式可见，刻划平动的特征量是平动速度 \boldsymbol{v}_0 ，刻划转动的特征量是角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 。角速度矢量还可以通过 \boldsymbol{v} 表示出来。为此，在(2.6.1)式两边取旋度，考虑到 $\boldsymbol{\omega}$ 在同一时刻是常矢量得

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \boldsymbol{v} \quad (2.6.2)$$

将之代入(2.6.1)式

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \frac{1}{2} \text{rot} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r} \quad (2.6.3)$$

这就是刚体的速度分解定理。

流体运动要比刚体运动复杂，因为它除了平动和转动外，还要发生变形。例如，研究纯剪切流动 $u = ay, v = 0, w = 0$ ，其中 a 是常数（速度分布在图 2.6.1(a)中画出）。在流体中取如图所示的正方形 1234，过了一段时间后运动到 1'2'3'4'，变成菱形。从 1234 变到 1'2'3'4' 可以看成是三种运动的复合：1) 平动。把 1234 向右平移使 3 与 3', 4 与 4' 重合（图 2.6.1(b)）。2) 转动。让正

方形绕轴 3 转动，使对角线 23 与 2'3' 重合 (图 2.6.1(c)). 3) 变形. 剪切 1234, 使 23 伸长直至与 2'3' 重合 (图 2.6.1(d)). 由此可见，如此简单的流动 (流线都是直线) 也还是由平动、转动、变形这三种运动形式复合成的。

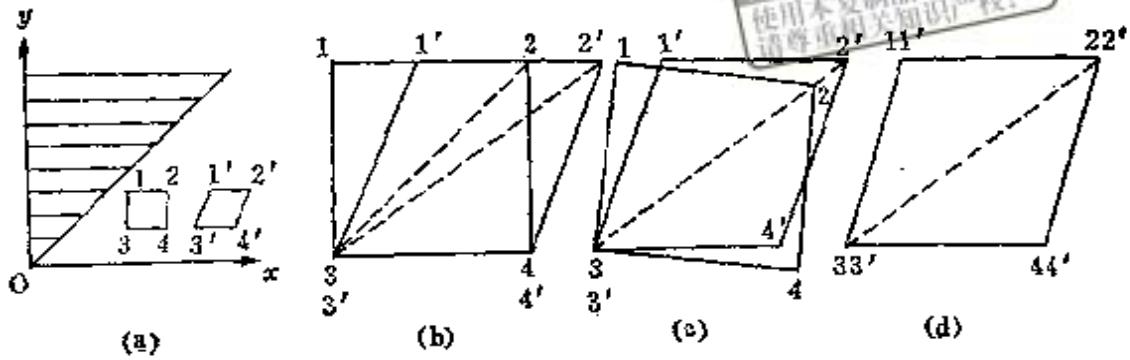


图 2.6.1

现在我们对 M_0 点邻域内的流体微团运动进行分解. 证明它们是由平动、转动和变形三部分组成的, 并由此找出表征它们的特征量. 设 $M_0(x, y, z)$ 点处的速度为 v_0 , 微团内任一点 $M(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$ 处的速度为 v (图 2.6.2), δ 表示对坐标的微分, $\delta x, \delta y, \delta z$ 都是一阶无穷小量. 将 v 在 M_0 点邻域内展成泰勒级数并略去二阶无穷小量以上的项, 我们得到

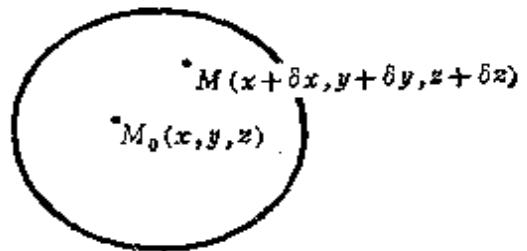


图 2.6.2

$$v = v_0 + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z$$

或缩写为

$$v_i = v_{0i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta x_j \quad (2.6.4)$$

因 $v_i - v_{0i}, \delta x_j$ 都是任取的矢量, 根据张量识别定理 $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ 是二阶

张量。其次张量分解定理告诉我们任一个二阶张量可分解为反对称张量 A 和对称张量 S 之和，于是

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\ &= a_{ij} + s_{ij} = A + S \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

其中

$$S = s_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e_1 & \frac{1}{2} \theta_3 & \frac{1}{2} \theta_2 \\ \frac{1}{2} \theta_3 & e_2 & \frac{1}{2} \theta_1 \\ \frac{1}{2} \theta_2 & \frac{1}{2} \theta_1 & e_3 \end{pmatrix} \quad (2.6.6)$$

这里

$$e_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_3 = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\theta_1 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \theta_2 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \theta_3 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.6.7)$$

与反对称张量 a_{ij} 对应的矢量 ω ，其分量为

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \omega_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \omega_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

即

$$\omega = \frac{1}{2} \operatorname{rot} v \quad (2.6.8)$$

将(2.6.5)式代入(2.6.4)式,并考虑到(2.6.7)与(2.6.8)式,以及反对称张量和对称张量的性质,我们有

$$v_i = v_{0i} + a_{ij}\delta x_j + s_{ij}\delta x_j$$

即

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_0 + \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \delta \mathbf{r} + \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{r} \\ &= \mathbf{v}_0 + \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \delta \mathbf{r} + \operatorname{grad} \phi \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

其中

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{2} (\varepsilon_1 \delta x^2 + \varepsilon_2 \delta y^2 + \varepsilon_3 \delta z^2 + \theta_1 \delta y \delta z + \theta_2 \delta z \delta x \\ &\quad + \theta_3 \delta x \delta y) \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

(2.6.9)式表明, M_0 点邻域内流体微团的速度由三部分组成:

(1) 平动速度 \mathbf{v}_1 . 它是流体微团平动引起的,刻划平动的特征量是平动速度 \mathbf{v}_0 .

(2) 转动速度

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \delta \mathbf{r}$$

它是由于流体微团绕通过 M_0 点的瞬时转动轴线旋转而产生的,刻划转动的特征量是 $\operatorname{rot} \mathbf{v}$. 知道 $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ 流体微团中任一点 M (与 M_0 点的距离是 δr) 的转动速度皆可按 $\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \delta \mathbf{r}$ 求出.

(3) 变形速度 $\mathbf{v}_3 = \operatorname{grad} \phi$. 它是由于流体微团变形引起的,刻划变形的特征量是二阶对称张量 \mathbf{S} , 知道 \mathbf{S} 后, M_0 点邻域内任一点的变形速度皆可按公式 $\mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{r}$ 或 $\operatorname{grad} \phi$ 求出. 正因为这样 \mathbf{S} 亦称为变形速度张量.

于是我们得到亥姆霍兹(Helmholtz)速度分解定理: 流体微团的运动可以分解为平动、转动和变形三部分之和.

比较(2.6.3)式和(2.6.9)式,我们看到刚体运动和流体微团

运动的主要差别在于流体微团运动多了变形速度部分。

刚体速度分解定理和流体速度分解定理还有一个重要的差别。刚体速度分解定理对整个刚体成立，因此它是整体性的定理；两流体速度分解定理只是在流体微团内成立，因此它是局部性的定理。例如，刚体的角速度 ω 是刻划整个刚体转动的一个整体性特征量，两流体的速度旋度 $\text{rot } v$ 却是刻划流体微团转动的一个局部性特征量。因此虽然表达式的形式完全相同，但它们却存在着上述重要差别。不注意这个差别，有时就会对于不符合直观感觉的正确结论感到迷惑不解(参看第八节)。

2.7 变形速度张量

先阐明变形速度张量各分量的物理意义。我们采用两种方法。第一种方法直观但不严格；第二种方法严格但不直观。我们之所以不厌其烦讲述两种方法，是希望通过这样的取长补短的处理，使读者对变形速度张量各分量的物理意义有一个既直观形象而又严格的了解。

写出变形速度 v_s 的表达式

$$\begin{pmatrix} u_s \\ v_s \\ w_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\theta_3 & \frac{1}{2}\theta_2 \\ \frac{1}{2}\theta_3 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\theta_1 \\ \frac{1}{2}\theta_2 & \frac{1}{2}\theta_1 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} \quad (2.7.1)$$

考虑 $\varepsilon_1 \neq 0, \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$ 的特殊情形，于是(2.7.1)式简化为

$$u_s = \varepsilon_1 \delta x, \quad v_s = w_s = 0 \quad (2.7.2)$$

根据(2.7.2)式可画出 u_s 的分布图 2.7.1, 此图非常清楚地显示这是 x 方向的拉伸(或压缩)。

因

$$u_3 = \frac{d(\delta x)}{dt}$$

由(2.7.2)第一式得

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\delta x} \frac{d(\delta x)}{dt}$$

说明 ε_1 的物理意义是 x 轴上线段元 δx 的相对拉伸速度或相对压缩速度。同理可说明 $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ 分别是 y, z 轴上线段元 $\delta y, \delta z$ 的相对拉伸速度和相对压缩速度。

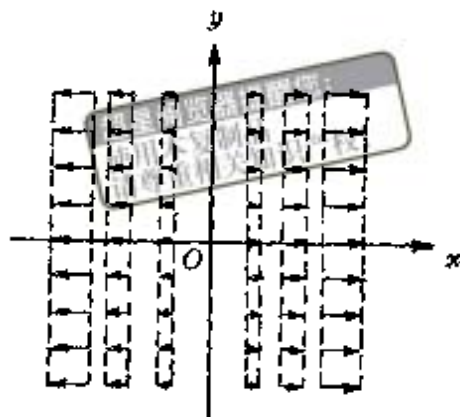


图 2.7.1

现在考虑 $\theta_3 \neq 0, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0, \theta_1 = \theta_2$ 的特殊情形。此时(2.7.1)简化为

$$u_3 = \frac{1}{2} \theta_3 \delta y, \quad v_3 = \frac{1}{2} \theta_3 \delta x, \quad w_3 = 0 \quad (2.7.3)$$

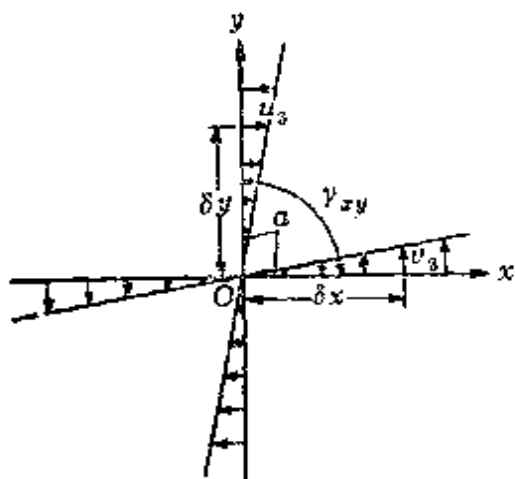


图 2.7.2

图 2.7.2 画出了 $x-y$ 平面上速度分布图，此图很直观地说明这是 x 与 y 轴之间的剪切运动。因

$$\frac{u_3}{\delta y} = \frac{v_3}{\delta x} = \alpha \quad (\text{见图2.7.2})$$

由(2.7.3)式得

$$\theta_3 = \frac{u_3}{\delta y} + \frac{v_3}{\delta x} = 2\alpha = \frac{d\gamma_{xy}}{dt}$$

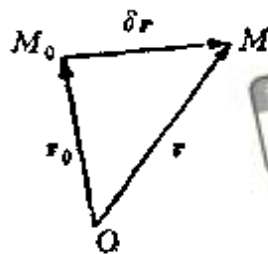
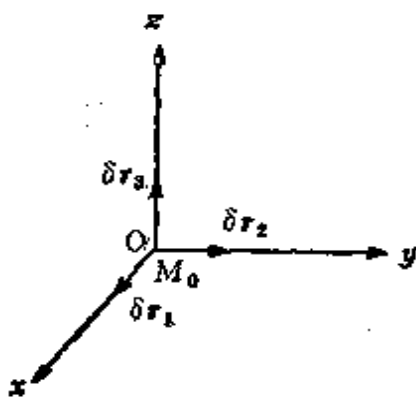
其中 γ_{xy} 是 x 与 y 轴之间的夹角。

由于剪切运动 γ_{xy} 减少了 2α ，故

$$\frac{d\gamma_{xy}}{dt} = 2\alpha \quad (\text{参看图2.7.2})$$

由此可见 θ_3 的物理意义是 x 与 y 轴之间夹角的剪切速度的负值。

同理可说明, θ_1, θ_2 的物理意义分别是 y 与 z 轴, z 与 x 轴之间夹角的剪切速度的负值。



上述方法直观但不严格。因为实际变形运动, S 的六个分量都可以同时取非零值。下面给出上述结论的严格证明。

图 2.7.3

如图 2.7.3 所示, 取一由流体质点组成的线段元 δr , 考虑它的随体导数 $\frac{d}{dt} \delta r$ 。由于

$$\delta r = r - r_0$$

于是

$$\frac{d}{dt} \delta r = \frac{d}{dt} (r - r_0) = v - v_0 = \delta v \quad (2.7.4)$$

上式表明微分号 $\frac{d}{dt}$ 与 δ 可以对换。由此可见, 线段元 δr 的随体导数等于同一时刻内 M_0 与 M 两点间速度之差, 将 v 视为 x, y, z 的函数, (2.7.4) 亦可写为

$$\frac{d}{dt} \delta r = \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z \quad (2.7.5)$$

现在我们通过场内某点 M_0 作直角坐标系 $Oxyz$, 在坐标轴上分别取流体质点组成的线段元 $\delta r_1 (\delta x, 0, 0)$, $\delta r_2 (0, \delta y, 0)$ 及 $\delta r_3 (0, 0, \delta z)$, 它们亦可写成

$$\delta r_1 = \delta x i, \quad \delta r_2 = \delta y j, \quad \delta r_3 = \delta z k \quad (2.7.6)$$

研究由流体质点组成的线段元 δr_1 与 δr_2 的随体导数 $\frac{d}{dt} \delta r_1$ 与

$\frac{d}{dt} \delta r_2$. 根据(2.7.5)式并考虑到(2.7.6)我们有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta r_1 &= \frac{\partial v}{\partial x} \delta x = \frac{\partial u}{\partial x} \delta x i + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x j + \frac{\partial w}{\partial x} \delta x k \\ \frac{d}{dt} \delta r_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} \delta y = \frac{\partial u}{\partial y} \delta y i + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y j + \frac{\partial w}{\partial y} \delta y k \end{aligned} \quad (2.7.7)$$

(2.7.6)的第一式和(2.7.7)的第一式点乘, 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} \delta x^2 = \delta r_1 \cdot \frac{d}{dt} \delta r_1 = \delta x \frac{d}{dt} \delta x$$

即

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\delta x} \frac{d}{dt} \delta x \\ e_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\delta y} \frac{d}{dt} \delta y \\ e_3 &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{\delta z} \frac{d}{dt} \delta z \end{aligned} \right\} \quad (2.7.8)$$

同理得

由此可见变形速度张量对角线分量 e_1, e_2, e_3 的物理意义分别是 x, y, z 轴上线段元 $\delta x, \delta y, \delta z$ 的相对拉伸速度或相对压缩速度.

将(2.7.6)中的第一式和第二式分别和(2.7.7)中的第二式和第一式点乘, 得

$$\delta r_1 \cdot \frac{d \delta r_2}{dt} = \frac{\partial u}{\partial y} \delta x \delta y, \quad \delta r_2 \cdot \frac{d \delta r_1}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \delta x \delta y$$

两式相加得:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \delta x \delta y &= \frac{d}{dt} (\delta r_1 \cdot \delta r_2) = \frac{d}{dt} (\delta x \delta y \cos \nu_{xy}) \\ &= \cos \nu_{xy} \frac{d}{dt} (\delta x \delta y) - \delta x \delta y \sin \nu_{xy} \frac{d \nu_{xy}}{dt} \end{aligned}$$

$$= -\delta x \delta y \frac{d\gamma_{xy}}{dt}$$

这里 γ_{xy} 是 x 与 y 轴之间的夹角。在推导过程中已考虑到

$$\cos \gamma_{xy} = 0, \quad \sin \gamma_{xy} = 1$$

从上式立即推出

$$\theta_1 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{d\gamma_{yz}}{dt}$$

同理得

$$\theta_2 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{d\gamma_{zx}}{dt}$$

$$\theta_3 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{d\gamma_{xy}}{dt}$$

由此可见，变形速度张量非对角线分量 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 的物理意义分别是 y 与 z 轴， z 与 x 轴， x 与 y 轴之间夹角的剪切速度的负值。

现在我们采用以上的推理过程导出变形速度张量各分量在曲线坐标系的表达式。先推导 s_{11}, s_{12} 的表达式。过 M_0 点作正交曲线坐标系 (q_1, q_2, q_3) 。在坐标轴上取流体质点组成的线段元 δr_1 ($\delta s_1, 0, 0$), δr_2 ($0, \delta s_2, 0$), δr_3 ($0, 0, \delta s_3$)，于是

$$\frac{d}{dt} \delta r_1 = \frac{\partial v}{\partial s_1} \delta s_1 = \left[\frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} (v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3) \right] \delta s_1$$

考虑到第一章公式(1.12.1)—(1.12.3)有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta r_1 = & \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \right) \delta s_1 \mathbf{e}_1 \\ & + \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial v_2}{\partial q_1} - \frac{v_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \right) \delta s_1 \mathbf{e}_2 \\ & + \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial v_3}{\partial q_1} - \frac{v_1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \right) \delta s_1 \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

由此推出

$$\begin{aligned}\delta s_1 \frac{d}{dt} \delta s_1 &= \delta r_1 \cdot \frac{d}{dt} \delta r_1 \\ &= \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \right) \delta s_1^2\end{aligned}$$

于是

$$s_{11} = \frac{1}{\delta s_1} \frac{d}{dt} (\delta s_1) = \frac{1}{H_1} \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3}$$

其次我们有

$$\delta r_2 \cdot \frac{d}{dt} \delta r_1 = \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial v_2}{\partial q_1} - \frac{v_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \right) \delta s_1 \delta s_2$$

下标 1 和 2 轮换得

$$\delta r_1 \cdot \frac{d}{dt} \delta r_2 = \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial v_1}{\partial q_2} - \frac{v_2}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right) \delta s_1 \delta s_2$$

两式相加得

$$\begin{aligned}-\frac{d\gamma_{12}}{dt} \delta s_1 \delta s_2 &= \frac{d}{dt} (\delta r_1 \cdot \delta r_2) \\ &= \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial v_2}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial v_1}{\partial q_2} - \frac{v_1}{H_1 H_2} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\partial H_1}{\partial q_2} - \frac{v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right) \delta s_1 \delta s_2\end{aligned}$$

由此

$$\begin{aligned}2s_{12} = -\frac{d\gamma_{12}}{dt} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial v_2}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial v_1}{\partial q_2} \\ &\quad - \frac{v_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} - \frac{v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1}\end{aligned}$$

采取下标轮换的方法可得 s_{22}, s_{33} 及 s_{23}, s_{31} . 综合起来, 变形速度张量各分量在曲线坐标系中的表达式为

$$\begin{aligned}
 s_{11} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \\
 s_{22} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial v_2}{\partial q_2} + \frac{v_1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} + \frac{v_1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \\
 s_{33} &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial v_3}{\partial q_3} + \frac{v_1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \\
 2s_{12} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial v_1}{\partial q_2} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial v_2}{\partial q_1} - \frac{v_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} - \frac{v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \\
 2s_{23} &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial v_2}{\partial q_3} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial v_3}{\partial q_2} - \frac{v_2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} - \frac{v_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \\
 2s_{31} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial v_3}{\partial q_1} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial v_1}{\partial q_3} - \frac{v_3}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} - \frac{v_1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_3}
 \end{aligned} \tag{2.7.9}$$

变形速度张量是二阶对称张量，因此具有二阶对称张量所有的性质。

(1) 变形速度张量和变形二次曲面

$$\begin{aligned}
 2\phi &= \delta r \cdot (S \cdot \delta r) = \epsilon_1 \delta x^2 + \epsilon_2 \delta y^2 + \epsilon_3 \delta z^2 \\
 &+ \theta_3 \delta x \delta y + \theta_1 \delta y \delta z + \theta_2 \delta z \delta x = 1
 \end{aligned} \tag{2.7.10}$$

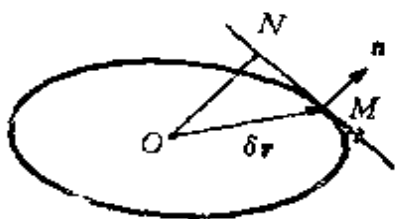


图 2.7.4

之间存在着——对应关系，因此变形二次曲面(2.7.10)可作为变形速度张量的几何描述。利用变形二次曲面椭圆可几何地作出M点上的变形速度

$$v_s = S \cdot \delta r = \text{grad} \phi$$

显然

$$v_s = \frac{1}{ON} n \quad (\text{图2.7.4})$$

其中 n 是变形二次曲面在M点上的法线单位矢量， ON 是 δr 在 n 上的投影。

由此可见，有了变形二次曲面后，流体微团中任一点上的变

形速度都可以通过上述方法几何地作出。于是我们从几何角度又一次证明了二阶对称张量 S 的确刻画了一点邻域内流体微团的变形状况。

(2) 变形速度张量恒有三个互相垂直的主轴，以这三个主轴为正交直角坐标系，变形速度张量 S 可写成下列标准形式

$$S = \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon'_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon'_3 \end{pmatrix} \quad (2.7.11)$$

$\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3$ 称为主相对拉伸速度。与之对应的变形二次曲面为

$$\varepsilon'_1 \delta x'^2 + \varepsilon'_2 \delta y'^2 + \varepsilon'_3 \delta z'^2 = 1$$

由此可见变形速度张量完全由三个主相对拉伸速度 ε'_i 决定。因为 (2.7.11) 式中非对角线分量皆为零，所以主轴之间的夹角在变形过程中不承受剪切，也就是说流体微团在主轴上的质点线段元以 ε'_i 的相对拉伸速度变形，变形后仍在主轴方向。这个性质利用变形二次曲面也可得出。

(3) 变形速度张量有三个基本不变量。

$$\begin{cases} I_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div} \mathbf{v} \\ I_2 = \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \frac{1}{4}(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2) \\ I_3 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \frac{1}{4} \theta_1 \theta_2 \theta_3 - \frac{1}{4}(\theta_1^2 \varepsilon_1 + \theta_2^2 \varepsilon_2 + \theta_3^2 \varepsilon_3) \end{cases} \quad (2.7.12)$$

现考察 I_1 的物理意义。根据散度的定义我们有

$$\text{div} \mathbf{v} = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{v}_n dS}{\delta V}$$

通过封闭曲面 S 的速度通量 $\oint_S \mathbf{v}_n dS$ 等于体积 δV 的变化率，

于是

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{\delta V} \frac{d}{dt} \delta V \quad (2.7.13)$$

由此可见不变量 I_1 , 即散度 $\operatorname{div} \mathbf{v}$ 的物理意义是相对体积膨胀率. 利用(2.7.8)式也可证明(2.7.13)式, 为此取 $\delta x, \delta y, \delta z$ 为边的长方体体积元

$$\delta V = \delta x \delta y \delta z$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta V} \frac{d}{dt} \delta V &= \frac{1}{\delta x} \frac{d}{dt} \delta x + \frac{1}{\delta y} \frac{d}{dt} \delta y + \frac{1}{\delta z} \frac{d}{dt} \delta z \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{v} \end{aligned}$$

例1 若 $\operatorname{div} \mathbf{v} \neq 0$, 则一般变形运动 s_{ij} 可以看作均匀膨胀

$\frac{1}{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \delta_{ki}$ 和无体积变化的变形运动 $s_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \delta_{ki}$ 之和. 即

$$S_{ij} = \frac{1}{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \delta_{ki} + S_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \delta_{ki} \quad (2.7.14)$$

例2 设平面纯剪切运动的速度分布为 $u = ay, v = w = 0$. 试求: 1) $\operatorname{rot} \mathbf{v}$, ϕ 及旋转速度 v_2 和变形速度 v_3 ; 2) 主值及主轴方向, 变形速度张量的标准形式.

解 根据(2.6.8), (2.6.10)和(2.6.9)式, 有

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = (0, 0, -a), \quad \phi = \frac{1}{2} a \delta x \delta y$$

$$\mathbf{v}_2 = \left(\frac{a}{2} \delta y, -\frac{a}{2} \delta x, 0 \right), \quad \mathbf{v}_3 = \left(\frac{a}{2} \delta y, \frac{a}{2} \delta x, 0 \right)$$

按(2.7.12)式三个不变量为

$$I_1 = 0, \quad I_2 = -\frac{1}{4} a^2, \quad I_3 = 0$$

于是确定主值的特征方程为



$$-\lambda^3 + \frac{1}{4}a^2\lambda = 0$$

由此得

$$\lambda_1 = \frac{a}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{a}{2}, \quad \lambda_3 = 0$$

对应的主轴方向分别为

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), (0, 0, 0)$$

在主轴坐标系中变形速度张量的标准形式为

$$S = \begin{pmatrix} a/2 & 0 & 0 \\ 0 & -a/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对应的二次曲面为

$$\frac{a}{2}\delta x'^2 - \frac{a}{2}\delta y'^2 = 1$$

显然是双曲面。

图 2.7.5 画出了 x, y 轴上和主轴上旋转运动、变形运动及其复合。

例 3 试证任一平面变形运动可分解为一个均匀膨胀运动、一个纯剪切运动和一个旋转运动。

证 在主轴坐标系中，变形运动的 ϕ 为

$$\phi = \frac{1}{2}(\varepsilon'_1 \delta x'^2 + \varepsilon'_2 \delta y'^2)$$

将之改写为

$$\phi = \frac{1}{4}(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2) \delta r^2 + \frac{1}{4}(\varepsilon'_1 - \varepsilon'_2) (\delta x'^2 - \delta y'^2)$$

这里 $\delta r^2 = \delta x'^2 + \delta y'^2$ 。将坐标轴进一步旋转 45° ，得

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

$$\phi = \frac{1}{4} (e_1' + e_2') \delta r'^2 - \frac{1}{2} (e_1' - e_2') \delta x' \delta y'$$

显然，第一项代表均匀膨胀，速率为

$$\frac{1}{2} (e_1' + e_2') = \frac{1}{2} \text{div} \mathbf{v}$$

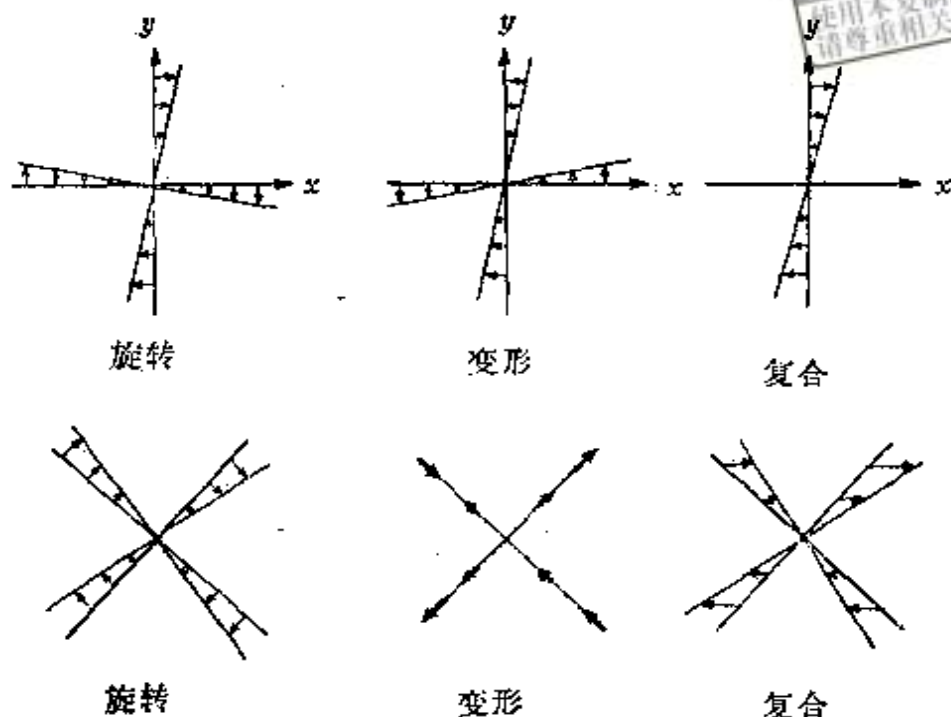


图 2.7.5

根据例 2，第二项加上适当的旋转运动（强度为 $\pm \frac{1}{2} (e_1' - e_2')$ ）代表纯剪切运动。因此第二项代表一个剪切运动和一个旋转运动之和。由此得证。

例 4 试证任一个三维变形运动可分解为一个均匀膨胀运动、两个纯剪切运动和一个旋转运动。

证 在主轴坐标系中变形运动的 ϕ 为

$$\phi = \frac{1}{2} (e_1' \delta x'^2 + e_2' \delta y'^2 + e_3' \delta z'^2)$$

$$= \frac{1}{2}(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3) \delta r^2 + \frac{1}{2} \left(\varepsilon'_1 - \frac{1}{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) (\delta x'^2 - \delta z'^2) \\ + \frac{1}{2} \left(\varepsilon'_2 - \frac{1}{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) (\delta y'^2 - \delta z'^2)$$

由此式立即可推出所需结论。

超星浏览器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

2.8 涡旋运动的基本概念

a) 涡旋的概念

从速度分解定理我们知道， $\text{rot} \mathbf{v}$ 刻划了流体微团的转动部分，其方向和大小分别代表微团的瞬时转动轴和两倍的角速度。要问流动是有旋或无旋，只要检验 $\text{rot} \mathbf{v}$ 是否等于零就行了。下面考虑两个例子：

(1) 剪切流动

速度场为

$$u = ay, \quad v = w = 0$$

其中 a 是常数，流线是平行 x 轴的直线

(参看图 2.8.1)。

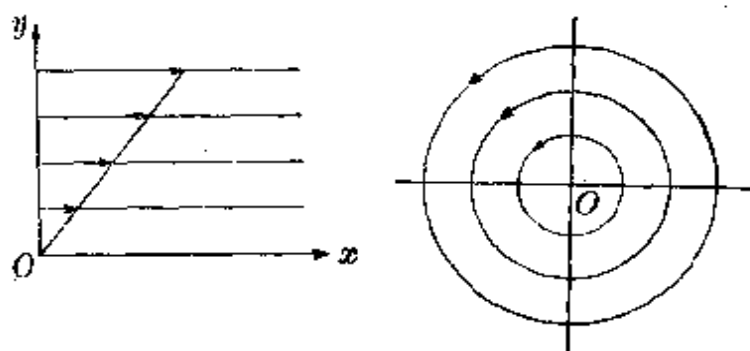


图 2.8.1

(2) 点涡运动

速度场为

$$v_r = 0, \quad v_\theta = \frac{b}{r},$$

其中 b 是常数，流线是以原点为中心的同圆心。

试问这两个流动是有旋的还是无旋的？有些读者可能会这样想，剪切流动质点作直线运动，应该是无旋，而点涡运动每个质点都绕圆心作圆周运动，肯定是处处有旋的。事实果真如此吗？请看：

剪切流动 $(\text{rot} \mathbf{v})_z = -a$, 处处有旋。

点涡运动 当 $r \neq 0$ 时

$$(\text{rot}v)_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = 0$$

除原点处有旋外，处处无旋，和直观判断刚好相反。

为什么直观感觉到的东西和事实如此矛盾呢？问题就出在用老眼光看新事物。我们看惯了刚体绕轴的旋转运动，只要看到刚体绕轴旋转，质点作圆周运动，那么就处处有旋。如果作直线运动，那么就处处无旋，而忘掉了判断流体运动在该点是否有旋必须看流体微团是不是在自转，而不是看它有没有绕中心作圆周运动。这就是局部性和整体性的差别。圆心一点有旋，则点点有旋，一点可以代表全体，这是刚体具有整体性质的标志。与此相反，圆心一点有旋，其他点不一定有旋，一点不能代表全体必须逐点检验，这是流体具有局部性质的体现。因此，对于刚体可以谈论整个刚体是否有旋（即旋转了没有），而对于流体则必须指明哪一点或哪个区域有旋。

直观地分析剪切流动和点涡流动的微团运动，也可以得出上述正确结论。图(2.8.1)已经分析了剪切流动是点点有旋的。下面再来分析点涡流动除原点外是处处无旋的事实。

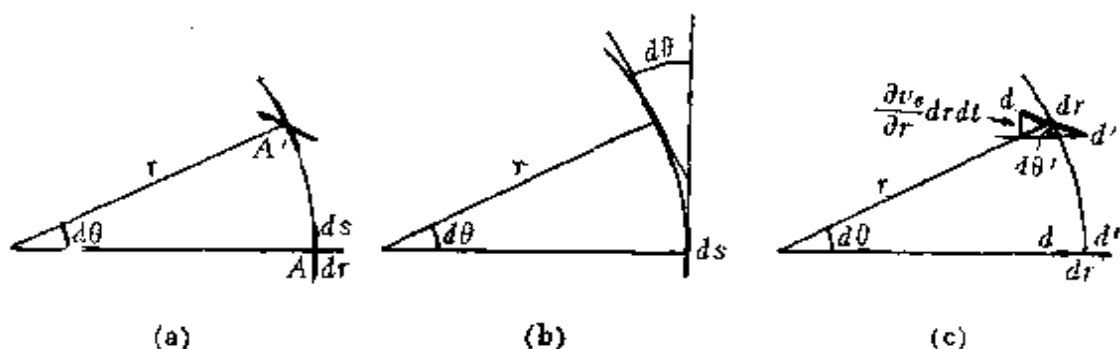


图 2.8.2

在距原点 r 处任取正交的两流体线元 dr, ds (图 2.8.2(a))。经过 dt 时刻后， ds 由于圆周运动，逆时针方向转过了角度

$$d\theta = \frac{dR}{r} = \frac{v_\theta dt}{r} = \frac{b}{r^2} dt \quad (\text{图} 2.8.2(b))$$

再看 dr , 由于 $v_\theta = \frac{b}{r}$, 所以 d 点的 v_θ 比 d' 点的大, 过了 dt 时

刻后, 多走了 $\frac{\partial v_\theta}{\partial r} dr dt$ 距离, 于是 dr 顺时针方向转了角度

$$d\theta' = \frac{\partial v_\theta}{\partial r} dt = -\frac{b}{r^2} dt$$

负号代表顺时针方向. 可见 dr 与 ds 夹角的二等分线是主轴方向, 流体微团有没有旋转, 主要看主轴有没有改向. 显然在点涡运动中主轴方向始终不变. 所以除原点外, 流动无旋.

b) 涡线、涡面、涡管

设所考虑的流动区域是有旋的. 按照欧拉法, 任意固定一个时刻 t , 则流动区域内各点均有一个确定的向量 $\text{rot } v$, 从而组成一向量场称为涡旋场, 记作

$$\Omega = \text{rot } v$$

Ω 称为涡量, 它不仅依赖于点的空间位置 r , 而且也依赖于时间 t , 即一般说来是坐标与时间的函数.

$$\Omega = \Omega(r, t)$$

既然涡旋场是向量场, 我们照样可引进几何上表征向量场的一些概念.

涡线 涡线为一条曲线. 此曲线上每一点的切线方向和该点的涡量方向重合. 它是由同一时刻不同流体质点所组成的. 显然, 涡线上各流体微团将绕涡线的切线方向旋转. 确定涡线的方程为

$$\frac{dx}{\Omega_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{\Omega_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{\Omega_z(x, y, z, t)} \quad (2.8.1)$$

其中 $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ 为 Ω 在直角坐标系的三个分量.

涡面 在涡旋场内取一非涡线的曲线, 过曲线每一点作涡线, 这些涡线组成的曲面, 称作涡面.

涡管 如所取的非涡线的曲线 L 封闭, 且不自交, 则过曲线上每一点作涡线组成一管状曲面, 称作涡管. 若曲线 L 无限小, 则称为涡管元. 如果在涡管的周围, 流体的涡旋皆为零, 则称此涡管为孤立涡管 (图2.8.3).

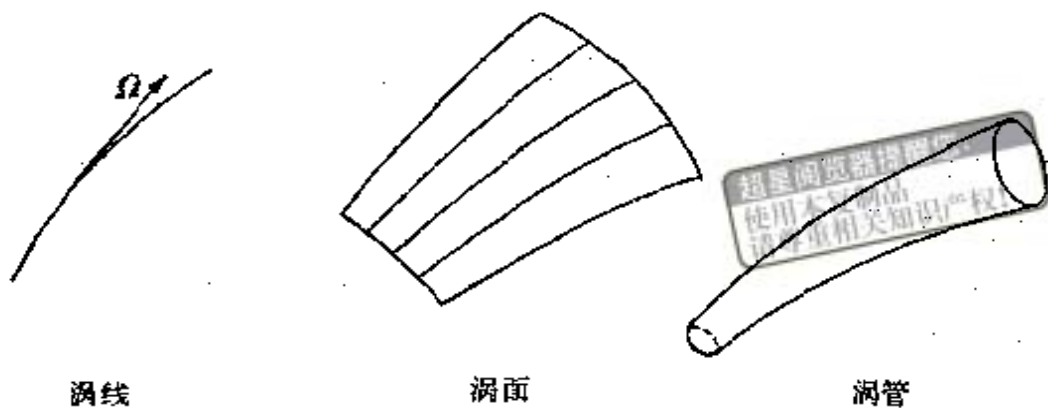


图 2.8.3

c) 涡通量和速度环量
面积分

$$\int_S \Omega \cdot dS$$

称为 Ω 通过任一截面的涡通量.

速度环量是一个与涡通量紧密地联系在一起物理量, 它是流体力学重要概念之一.

线积分

$$\Gamma = \int_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

称为速度向量沿封闭曲线 L 的环量, 简称速度环量, 以 Γ 表之, 其中 \mathbf{v} 和 $d\mathbf{r}$ 分别是封闭曲线 L 上的速度矢量和弧元素矢量, 并规定逆时针方向为 L 的正方向. 速度环量表征流体质点沿封闭曲线 L 方向运动的总的趋势的大小.

速度环量和涡通量之间的紧密联系由斯托克斯公式给出.

$$\int_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \Omega \cdot dS \quad (2.8.2)$$

其中 S 面张于 L 上, 法线单位矢量 n 的正方向与 L 的正方向组成右手螺旋系统(图2.8.4). (2.8.2)式写成直角坐标的投影式, 有

$$\int_L u dx + v dy + w dz = \int_S \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right] dS \quad (2.8.3)$$

(2.8.2)与(2.8.3)式表明, 速度向量 v 沿封闭曲线 L 的环量等于量 Ω 通过张于 L 上的曲面 S 的通量.

涡通量和速度环量虽然都能表征涡旋强度, 但是, 在某些情况下, 利用速度环量来研究涡旋运动有很多方便之处. 因为速度环量是线积分, 被积函数是速度本身, 而涡通量则是面积分, 被积函数是速度的偏导数,

所以无论是实验和理论利用速度环量常常比利用涡通量简单些. 除此之外, 在有些情况下我们只能利用速度环量的概念来描写涡旋的强度.

d) 涡旋的物理意义

现在我们严格地阐明涡旋矢量 $\Omega = \text{rot} v$ 的物理意义. 在 M 点邻域取一与 Ω 垂直的无限小圆, 其半径为 a (见图2.8.5). 写出斯托克斯公式

$$\int_S \Omega \cdot dS = \int_L v \cdot dr$$

其中 L 和 S 分别是小圆的周界及面积. 忽略高级小量并引进平均切向速度

$$\bar{v} = \frac{\int_L v \cdot dr}{2\pi a}$$

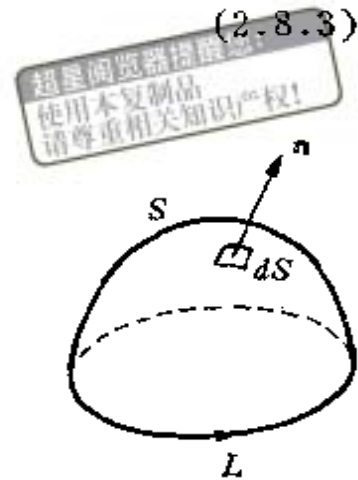


图 2.8.4

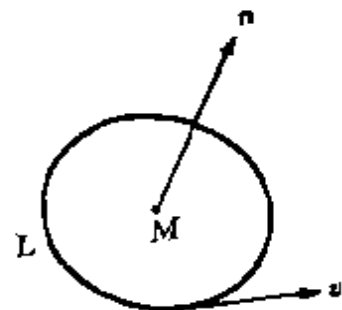


图 2.8.5

及平均角速度

$$\bar{\omega} = \frac{\bar{v}}{a}$$

的概念，我们有

$$|\Omega| = \frac{\int_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}}{\pi a^2} = 2 \frac{\bar{v}}{a} = 2\bar{\omega}$$

由此可见， M 点涡旋矢量的大小是流体微团绕该点旋转的平均角速度的两倍，方向与微团的瞬时转动轴线重合。

2.9 流体运动的分类

一般形式的流体运动常常是很复杂的。在进行具体研究之前，需要将流体运动加以分类。而后从简单的运动形式着手，研究流体运动及其与固体间相互作用的规律，并在流动规律和处理方法方面积累必要的知识，在这样的基础上再进一步处理更复杂的流体运动。这种处理问题的过程符合从简单到复杂这一客观规律，是科学发展必经之途。分类后所得的许多简单形式并不都是一丝不差地存在于客观实际中，但是它们常常是实际流体运动某种程度的近似。因此将运动进行分类也具有实际意义。

设流体运动以欧拉方法给出，此时

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(q_1, q_2, q_3, t)$$

其中 q_1, q_2, q_3 是曲线坐标，此外还应在欧拉变数下给出其他有关的物理量。通常按下述三种方式对流体运动进行分类。

(1) 以运动形式为标准：设在整个流场中 $\text{rot} \mathbf{v} = 0$ ，则称此运动为无旋运动；反之称为有旋运动。于是流体运动可以分为无旋运动和有旋运动两种。因为绝大部分流体运动都是有平动和变形的，因此对于平动及变形这两种运动形式不加分类。

(2) 以时间为标准：设速度函数及所有有关物理量皆不依赖于时间 t ，即

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

则称此运动为定常运动；反之称为不定常运动。于是流体运动亦可以分为定常运动和不定常运动两种。

(3) 以空间为标准：设所有有关物理量只依赖于一个曲线坐标，则称此运动为一维运动；依赖于两个曲线坐标称为二维运动；依赖于三个曲线坐标则称为三维运动。于是流体运动以空间为标准又可分为一维运动、二维运动、三维运动三种。

2.10 质量力和面力。应力张量

本节研究流体所受的力及其性质。

首先引入密度的概念。在连续介质中，一点 M 的密度是这样定义的：在流体中取一点 M ，围绕 M 点作体积元素 $\Delta\tau$ ，它的质量为 Δm 。作比值 $\frac{\Delta m}{\Delta\tau}$ ，并令 $\Delta\tau$ 向 M 点无限收缩。若极限值

$$\rho = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta\tau} = \frac{dm}{d\tau} \quad (2.10.1)$$

存在，则称此极限为流体在 M 点的密度，以 ρ 表之。一般说来， ρ 是坐标 x, y, z 和时间 t 的函数，即

$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$

由此可见密度的物理意义就是单位体积内流体的质量。密度大，说明单位体积内质量多，反之就比较少。

由(2.10.1)推出

$$dm = \rho d\tau \quad (2.10.2)$$

在工程中还广泛采用比重 γ 的概念。它定义为单位体积内流体的重量，即

$$\gamma = \rho g \quad (2.10.3)$$

其中 g 为重力加速度，等于 9.81 米/秒²。

在工程制中， ρ 和 γ 的单位分别为公斤·秒²/米³和公斤/米³。



在标准状况下，即气温为 15°C ，压力为一个大气压时，空气的 $\rho = 0.125$ 公斤·秒²/米³，水的 $\rho = 102$ 公斤·秒²/米³。

在流体中取一以封闭曲面 S 为界面的体积 τ ，则作用在流体上的力可以分为两类，即质量力和面力。

作用在 τ 内各个流体微团上的力称为质量力。例如重力、引力、惯性力等都是质量力。与界面 S 接触的流体或固体作用于表面 S 上的力称为面力。例如压力、摩擦力都是面力。

质量力用空间中的分布密度来表示。在 τ 内任取一点 M ，围绕 M 点作体积元素 $\Delta\tau$ ，设它的质量为 Δm ，作用在它上面的质量力为 Δf ，作比值 $\frac{\Delta f}{\Delta m}$ ，并令 $\Delta\tau$ 向 M 点收缩。若极限值

$$F = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta m} = \frac{df}{dm} = \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\tau} \quad (2.10.4)$$

存在，则此极限值代表 M 点上单位质量流体所受到的质量力。 F 是空间坐标 x, y, z 和时间 t 的函数，称为质量力在空间中的分布密度。

由(2.10.4)作用在体积元 $d\tau$ 上的质量力是

$$df = \rho F d\tau \quad (2.10.5)$$

而作用在有限体积 τ 上的质量力则是

$$\int_{\tau} \rho F d\tau \quad (2.10.6)$$

容易看出，质量力和体积成正比。若 $d\tau$ 是体积元， F 的大小有限，则作用在 $d\tau$ 上的质量力 df 是三阶无穷小量。

面力用表面上的分布密度来表示。在 S 上任取一点 M 作面积元素 ΔS 包住 M 点。设 ΔS 的法线方向为 n ， n 所指向的流体或固体作用在 ΔS 面上的面力为 ΔP 。作 $\frac{\Delta P}{\Delta S}$ ，令 ΔS 向 M 点收缩。若

极限值

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

$$\rho_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta S} = \frac{dP}{dS} \quad (2.10.7)$$

存在，则它代表M点上以n为法线的单位面积上所受的力。必须指出， ρ_n 不仅是x, y, z, t的函数，而且还依赖于作用面的方向，作用面方向不同，一般说来， ρ_n 也不同。 ρ_n 称为面力在S面上的分布密度，或称应力。由(2.10.7)作用在dS面上的面力为

$$dP = \rho_n dS \quad (2.10.8)$$

而作用在有限面积S上的面力是

$$\int_S \rho_n dS \quad (2.10.9)$$

显然面力是和面积成正比的。若作用面是面积元素dS，而面力 ρ_n 有限，则作用在dS面上的面力dP是二阶无穷小量。

F和 ρ_n 的量纲分别是 $\left[\frac{L}{T^2} \right]$ 和 $\left[\frac{M}{LT^2} \right]$ 。

过任一点M可以作无数个不同方向的表面，作用在这些不同表面上的面力一般说来是互不相等的，因此要描写一点的应力需要知道所有通过M点的面上所受的应力。换句话说， ρ_n 是矢径r和表面法向单位矢量n这两个矢量的函数。但是，过同一点不同面上所受的应力并不是互不相关的。事实上，只要知道三个坐标面上的应力，则任一以n为法线方向的表面上的应力都可通过它们及n表示出来。也就是说三个矢量或九个分量完全地描写了一点的应力状况。现在我们来证明这一事实。

在证明之前，我们引进一些符号和名词。先谈谈dS面的法线方向。如果dS是封闭曲面的一部分，则取外法线方向为dS的正方向。如果dS所在的曲面不封闭，则约定取一方向为法线的正方向，法线n指向的那一边流体作用在dS面上的应力以 ρ_n 表之，而位于-n方向的流体质点作用于dS面上的应力则以 ρ_{-n} 表之。根据牛顿的作用和反作用定律有(图2.10.1)

$$\rho_{-n} = -\rho_n \quad (2.10.10)$$

应力矢量 p_n 在直角坐标轴上的投影分别以 p_{nx}, p_{ny}, p_{nz} 表之。这样应力分量的符号具有二个下标。第一个下标表示作用面的法线方向；第二个下标表示应力的投影方向。由于粘性的作用，应力 p_n 一般说来不垂直于作用面，所以它在法线方向和切线方向都有投影。法线方向的投影 p_{nn} 称为法向应力，切线方向的投影 p_{nr} 称为切向应力。

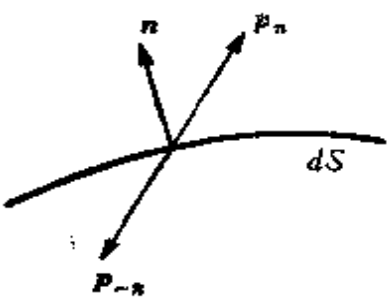


图 2.10.1

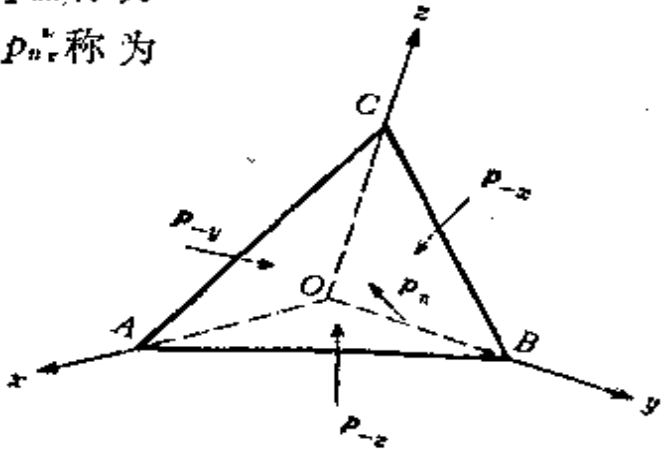


图 2.10.2

在流体中取四面体元素 $OABC$ (图 2.10.2), 其侧面 OBC, OAC, OAB 分别垂直于 x 轴, y 轴和 z 轴, 而底面 ABC 的法线方向 n 是任意的. 设 OBC, OAC, OAB, ABC 的面积分别为 dS_x, dS_y, dS_z 和 dS , 现在考虑四面体元素 $OABC$ 所受的力及力矩. 作用于四面体上的力有外力、惯性力和面力三种. 根据达朗贝尔原理, 这三种力及其力矩应该平衡. 由于外力和惯性力都是质量力, 它们是三阶无穷小量, 而面力则是二阶无穷小量, 因此当体积元趋于零时可以不考虑外力和惯性力及其力矩的作用. 于是当体积元趋于零时作用于四面体各面上的合力和合力矩等于零. 这件事说明, 在流体运动时, 作用在微元面上的合力和合力矩永远为零. 因为四面体各面 OBC, OCA, OAB, ABC 的外法线方向分别是 $-x, -y, -z, n$, 所以作用于这些面上的应力是 $p_{-x}, p_{-y}, p_{-z}, p_n$, 而总的面力则为: $p_{-x}dS_x, p_{-y}dS_y, p_{-z}dS_z, p_n dS$, 写出这些面力的平衡条件我们得

$$p_n dS + p_{-x}dS_x + p_{-y}dS_y + p_{-z}dS_z = 0 \quad (2.10.11)$$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

根据(2.10.10),有

$$p_{-x} = -p_x, \quad p_{-y} = -p_y, \quad p_{-z} = -p_z, \quad (2.10.12)$$

其次

$$\begin{aligned} dS_x &= \cos(n, x) dS = \alpha dS \\ dS_y &= \cos(n, y) dS = \beta dS \\ dS_z &= \cos(n, z) dS = \gamma dS \end{aligned}$$

于是(2.10.11)式可写成

$$p_n = p_x \alpha + p_y \beta + p_z \gamma \quad (2.10.13)$$

在直角坐标系中则有

$$\begin{cases} p_{nx} = p_{xx}\alpha + p_{yx}\beta + p_{zx}\gamma \\ p_{ny} = p_{xy}\alpha + p_{yy}\beta + p_{zy}\gamma \\ p_{nz} = p_{xz}\alpha + p_{yz}\beta + p_{zz}\gamma \end{cases} \quad (2.10.14)$$

上式表明,若三个坐标面的应力矢量 p_x, p_y, p_z 为已知,则任一法向为 n 的面上的应力 p_n 可按(2.10.13)求出.因此三个矢量 p_x, p_y, p_z , 或九个量

$$P = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.10.15)$$

的组合完全地描写了一点的应力状况.利用符号(2.10.15), (2.10.14)式可改写为

$$p_n = n \cdot P \quad (2.10.16)$$

根据张量识别定理, P 是二阶张量,称之为应力张量.

现在证明应力张量的对称性.在流体内任取体积元 V ,其界面为 S ,在 V 内取一点 O 为力矩参考点.利用作用在 S 面上的合面力矩等于零这一事实,并利用(2.10.14)式我们有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S r \times p_n dS = \int_S \epsilon_{ijk} x_j p_k dS = \int_S \epsilon_{ijk} x_j p_{ki} n_i dS \\ &= \int_V \epsilon_{ijk} \frac{\partial(x_j p_{ki})}{\partial x_i} dV = \int_V \epsilon_{ijk} \left(p_{ki} + x_j \frac{\partial p_{ki}}{\partial x_i} \right) dV \end{aligned} \quad (2.10.17)$$

这里已用到面积分转换为体积分的奥高公式。因 O 点在 V 内， V 是体积元，所以 x_i 是一阶无穷小量。(2.10.17) 中被积函数的第二项和第一项相比是高阶无穷小量，可忽略不计，于是得

$$\int_V \varepsilon_{ijk} p_{kj} dV = 0 \quad (2.10.18)$$

由 V 的任意性推出

$$\varepsilon_{ijk} p_{kj} = 0$$

即

$$\varepsilon_{ijk}(p_{kj} - p_{jk}) = 0 \quad (i, j, k \text{ 各不相同})$$

或

$$p_{jk} = p_{kj}$$

此式表明应力张量是一个二阶对称张量，且只有六个不同的分量，其对角线分量 p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} 是法向应力，非对角线分量 p_{xy}, p_{yz}, p_{zx} 是切向应力。

既然应力张量是一个二阶对称张量，因此它具有对称张量所有的性质。

(1) 应力张量的几何表示是应力二次曲面

$$\begin{aligned} r \cdot (P \cdot r) &= p_{xx}x^2 + p_{yy}y^2 + p_{zz}z^2 + 2p_{xy}xy \\ &\quad + 2p_{yz}yz + 2p_{zx}zx = 1 \end{aligned}$$

任一方向 n 上的应力 p_n 可由应力二次曲面上矢径方向为 n 的那一点处的法线方向给出。

(2) 应力张量具有三个互相垂直的主轴方向。在主轴坐标系中，应力张量可写成下列对角线形式

$$P = \begin{pmatrix} p'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & p'_{33} \end{pmatrix} \quad (2.10.19)$$

$p'_{11}, p'_{22}, p'_{33}$ 称为法向主应力。于是在与主轴方向垂直的面上，只有法应力，切应力等于零。

(3) 应力张量的三个不变量为

超星浏览器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

$$\begin{cases} I_1 = p_{11} + p_{22} + p_{33} \\ I_2 = p_{22}p_{33} + p_{33}p_{11} + p_{11}p_{22} - p_{23}^2 - p_{31}^2 - p_{12}^2 \\ I_3 = p_{11}p_{22}p_{33} + 2p_{12}p_{23}p_{31} - p_{22}p_{31}^2 - p_{33}p_{12}^2 - p_{11}p_{23}^2 \end{cases} \quad (2.10.20)$$

2.11 理想流体和静止流体的应力张量

根据定义，理想流体对于切向变形没有任何抗拒能力，因此作用在任一表面 dS 上的应力 ρ_n 只有法线方向分量 p_{nn} ，切线方向的分量等于零。由此得出结论，在理想流体内部，应力到处与它所作用的面垂直。因为流体不能承受拉力，所以法向应力必为向着表面 dS 的压力（图 2.11.1）。现在我们进一步证明，同一点的各个不同方向上，法向应力是相等的。

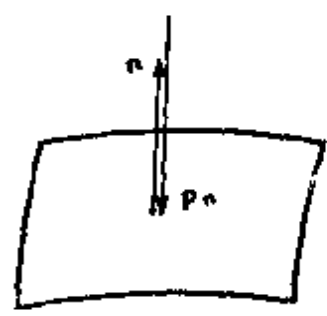


图 2.11.1

根据 ρ_n 的方向与法线方向 n 重合的性质，易见直角坐标系三个坐标面上的应力 ρ_x, ρ_y, ρ_z ，其法向应力 p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} 不等于零，而切向应力皆为零，即

$$p_{xy} = p_{yz} = p_{zx} = 0$$

于是根据(2.10.14)式我们有

$$p_{nx} = p_{xx}\alpha, \quad p_{ny} = p_{yy}\beta, \quad p_{nz} = p_{zz}\gamma$$

考虑到

$$p_{nx} = p_{nn}\alpha, \quad p_{ny} = p_{nn}\beta, \quad p_{nz} = p_{nn}\gamma$$

得

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = p_{nn}$$

由于 n 是任意选取的，这便证明了同一点上各个不同方向上的法向应力是相等的。令法向应力的共同值以 $-p$ 表示，则

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = p_{nn} = -p$$

p 称为理想流体的压力，它是 x, y, z, t 的函数。

$$p = p(x, y, z, t)$$

取 $-p$ 的原因是强调压力与作用面的法线方向恰好相反。由此可

见，在理想流体中，只要用一个标量函数即压力函数 p 便完全地刻划了任一点上的应力状态。此时应力张量(2.10.15)变为

$$P = -p\delta_{ij}$$

我们还可以采用下述直观的方法证明理想流体同一点上各个不同方向上的法向应力是相等的。设想在流体内取出一个无穷小的三棱柱体，两端面与棱边垂直（参看图 2.11.2(a)）。如前所述

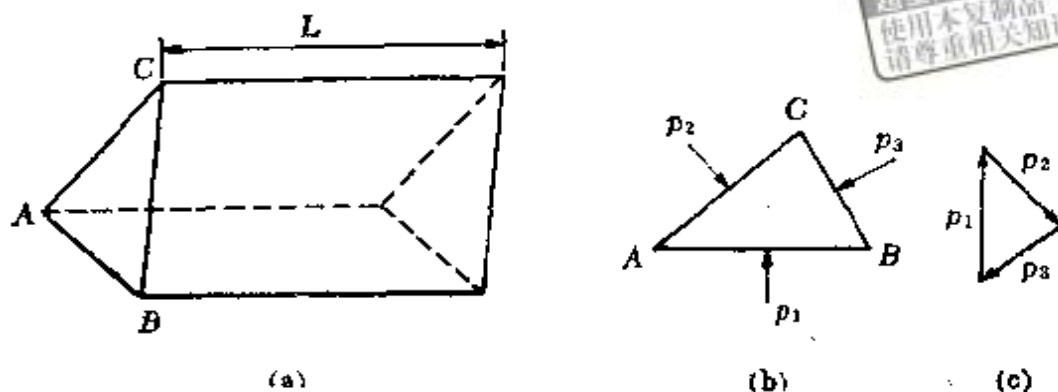


图 2.11.2

作用在三棱柱体上的面力处于平衡状态。两端面上的作用力彼此平衡无需讨论。现研究侧面各力的平衡。由于各侧面的作用力都与该面垂直，因此它们必定在棱柱体的截面上（图 2.11.2(b)）。为了能平衡，这些力必须形成如(图 2.11.2(c))所示的三角形。易见(b)与(c)两三角形相似（对应边正交），于是

$$\frac{P_1}{AB} = \frac{P_2}{BC} = \frac{P_3}{CA}$$

即

$$\frac{P_1}{AB \cdot L} = \frac{P_2}{BC \cdot L} = \frac{P_3}{CA \cdot L}$$

也就是说，棱柱体所有三个侧面上的压力都是相同的。由于棱柱体是任意选取的，这就证明了同一点各个不同方向上的压力是相等的。

现考虑静止流体情形。此时流体可以是理想的，也可以是粘

性的。根据流体的易流动性流体在静止时不能承受切向应力，因此，任一面上的切向应力和理想流体一样亦必然为零。于是，重复上述对理想流体应力张量的讨论，我们同样地得出 $P = -pI$ 的结论。此时， p 代表的已是静力学压力函数，它表征流体在静止时每一点上的应力状态。

2.12 物质积分的随体导数

考虑由流体质点组成的物质线、物质面和物质体。我们知道，流体质点具有速度、动量、能量等物理属性。设在这些物质线、面和体上定义物理量，例如在物质线上定义速度环量 $\oint_L v \cdot dr$ ，在物质面上考虑涡通量 $\int_S \Omega \cdot dS$ ，在物质体上研究质量 $\int_V \rho d\tau$ ，动量 $\int_V \rho v d\tau$ ，动能 $\int_V \rho \frac{v^2}{2} d\tau$ 等等。随着时间的推延，连续的物质线、面、体不断改变自己的位置和形状，并维持其连续性（证明见下册附录1），因而定义在这些流动几何形体上的物理量也在不断改变数值。这两种因素都将使速度环量、涡通量、质量、动量、能量等物理量随时间不断改变其值。刻划上述变化的量是这些线积分、面积分、体积分的随体导数。在建立流体力学基本方程组和研究涡旋的动力学性质时将经常遇到它们，因此很有必要集中起来对它们进行研究，这就是本节要解决的问题。

a) 线段元、面积元和体积元的随体导数

根据(2.7.4)和(2.7.13)式我们有

$$\frac{d}{dt} \delta r = \delta v = \delta r \cdot \nabla v \quad (2.12.1)$$

$$\frac{d}{dt} \delta \tau = \nabla \cdot v \delta \tau \quad (2.12.2)$$

现利用(2.12.1)和(2.12.2)式推导面积元的随体导数 $\frac{d}{dt} \delta S$ 。给定

δS 后, 任选不与 δS 垂直的物质线元 δr 为母线, 并与 δS 组成柱体, 其体积为 $\delta \tau$, 于是

$$\delta \tau = \delta r \cdot \delta S \quad (2.12.3)$$

两边取随体导数后得

$$\frac{d\delta \tau}{dt} = \frac{d\delta r}{dt} \cdot \delta S + \delta r \cdot \frac{d\delta S}{dt}$$

利用(2.12.1), (2.12.2)和(2.12.3)式后上式变为

$$\delta r_i \left(\delta s_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{d\delta s_i}{dt} - \delta s_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) = 0$$

由于 δr 是任取的, 由此推出

$$\frac{d}{dt} \delta s_i = \delta s_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} - \delta s_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (2.12.4)$$

b) 线积分、面积分和体积分的随体导数

考虑物质线积分的随体导数

$$\frac{d}{dt} \oint_L \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r}$$

其中 L 是一条由流体质点组成的流动封闭曲线 L , \mathbf{v} 是速度矢量, δ 是对空间的微分 (为了和随体符号 d 区分). 线积分的随体变化主要由两方面的原因引起的: 一方面, 当时间改变时, 速度矢量 \mathbf{v} 将发生变化; 另一方面由流体质点组成的流动封闭回线在运动过程中也不断地改变其形状. 于是

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \oint_L \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r} &= \oint_L \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r}) \\ &= \oint_L \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta \mathbf{r} + \oint_L \mathbf{v} \cdot \frac{d\delta \mathbf{r}}{dt} \\ &= \oint_L \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta \mathbf{r} + \oint_L \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} \\ &= \oint_L \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta \mathbf{r} + \oint_L \delta \frac{V^2}{2} = \oint_L \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta \mathbf{r} \end{aligned}$$

这里已考虑到速度是单值函数，即

$$\oint_L \delta \frac{V^2}{2} = 0$$

的事实。

考虑物质面积分的随体导数

$$\frac{d}{dt} \int_S \Omega \cdot \delta S$$

其中 Ω 为涡旋矢量。于是采用完全类似的做法，并考虑到 (2.12.4) 式后得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_S \Omega \cdot \delta S &= \int_S \frac{d\Omega}{dt} \cdot \delta S + \int_S \Omega \cdot \frac{d}{dt} \delta S \\ &= \int_S \frac{d\Omega}{dt} \cdot \delta S + \int_S (\operatorname{div} v) \Omega \cdot \delta S - \int_S \Omega_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \delta s_j \\ &= \int_S \left(\frac{d\Omega}{dt} + \Omega \operatorname{div} v - \Omega \cdot \nabla v \right) \cdot \delta S \end{aligned}$$

同理，对物质体积分的随体导数有

$$\frac{d}{dt} \int_V \varphi \delta \tau = \int_V \frac{d\varphi}{dt} \delta \tau + \int_V \varphi \frac{d}{dt} \delta \tau = \int_V \left(\frac{d\varphi}{dt} + \varphi \operatorname{div} v \right) \delta \tau$$

考虑到

$$\frac{d\varphi}{dt} + \varphi \nabla \cdot v = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \cdot \nabla \varphi + \varphi \nabla \cdot v = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi v)$$

及奥高定理，上式亦可写成

$$\frac{d}{dt} \int_V \varphi \delta \tau = \int_V \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi v) \right] \delta \tau = \int_V \frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta \tau + \int_S \varphi v_n \delta S$$

对于矢量 \mathbf{a} 的体积分的随体导数我们有

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{a} \delta \tau = \int_V \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{a} \operatorname{div} v \right) \delta \tau = \int_V \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \delta \tau + \int_S v_n \mathbf{a} \delta S$$

其中 φ 和 \mathbf{a} 是任一标量和任一矢量。

将上述结果集合起来我们有



$$\frac{d}{dt} \oint_L \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r} = \oint_L \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta \mathbf{r} \quad (2.12.5)$$

$$\frac{d}{dt} \int_S \boldsymbol{\Omega} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) \cdot \delta \mathbf{S} \quad (2.12.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_r \varphi \delta \tau &= \int_r \left(\frac{d\varphi}{dt} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \delta \tau \\ &= \int_r \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi \mathbf{v}) \right] \delta \tau \\ &= \int_r \frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta \tau + \int_S \varphi v_n \delta S \end{aligned} \quad (2.12.7)$$

$$\frac{d}{dt} \int_r \mathbf{a} \delta \tau = \int_r \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \delta \tau = \int_r \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \delta \tau + \int_S v_n \mathbf{a} \delta S \quad (2.12.8)$$

(2.12.5) — (2.12.8) 还可以从定义出发更严格地导出 (参看下册附录 2)。

习 题

一、基本概念

1. 能把流体看作连续介质的条件是什么?
2. 设稀薄气体的分子自由程是几米数量级, 问下列两种情况连续介质假设是否成立?
 - (1) 人造卫星在飞离大气层进入稀薄气体层时;
 - (2) 假想地球在这样的稀薄气体中运动。
3. 大气层的空气密度随着离地面的高度的增加而减小, 能否从密度变化这件事推断大气是可压缩的。
4. 粘性流体在静止时有没有切应力? 理想流体在运动时有没有切应力? 若流体静止时没有切应力, 那么它们是不是都没有粘性?
5. 设 $\mathbf{v} \neq 0$, 说明

$$\frac{dv}{dt} = 0, \frac{\partial v}{\partial t} = 0, (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = 0$$

的物理意义。

6. 试写出不可压缩流体在欧拉观点和拉格朗日观点下的数学表达式。

7. 用欧拉观点写出下列各情况下密度的数学表达式：1) 均质流体；2) 不可压均质流体；3) 定常运动。

8. 在欧拉观点中用加速度场 $\dot{\mathbf{v}}(x, y, z, t)$ 能否描绘流体运动。

9. 设已知在拉氏观点和欧拉观点下分别有速度函数：

$$v = a^2 + b^2 + t^2$$

$$v = x^2 + y^2 + t^2$$

试说明它们分别表示的物理意义及它们之间的异同。

10. 给定速度场 $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ ，设 s 是：(1) 场内任一曲线；(2) 轨迹；(3) 流线。试求沿 s 方向 \mathbf{v} 的方向导数，并说明它们的区别。

11. 设流体运动以欧拉观点给出

$$u = ax + t^2, \quad v = by - t^2, \quad w = 0 \quad (a + b = 0)$$

将此转换到拉格朗日观点中去，并用两种观点分别求加速度。

12. 陨星下坠时在天空划过的白线是什么线？烟囱里冒出的烟是什么线？

13. 看完电影，从大门相继疏散出去的人流，在刚出门的不同时刻，他们的相对位置可以连成不同形状的曲线，试问这类曲线相当于流体运动中的什么线（流线，迹线，或两者皆是，或两者皆不是）？为什么？

14. 在同一时刻，刚体上每点的角速度一样吗？流体呢？试考虑流体运动

$$u = ay^2, \quad v = w = 0$$

的旋度，又其角速度点点一样吗？由此体会局部和整体的关系。

二、流线与迹线，加速度

1. 对下列各种不同的速度分布，试求流线与迹线。

(1) $v = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ ，其中 C_1, C_2 是常矢量， ω 是常数，试比较流线与迹线；

(2) $u = \frac{cx}{x^2 + y^2}$, $v = \frac{cy}{x^2 + y^2}$, $w = 0$, c 是常数，试画出流线族；

(3) $u = -\frac{cy}{x^2 + y^2}$, $v = \frac{cx}{x^2 + y^2}$, $w = 0$, c 是常数，试画出流线族；

(4) $v_r = \frac{\cos \theta}{r^2}$, $v_\theta = \frac{\sin \theta}{r^2}$, $v_z = 0$ (柱坐标)，试画出流线族。

(5) $v = \frac{r}{r^3}$ ，其中 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ，画流线族；

(6) $v_r = \frac{2k \cos \theta}{r^3}$, $v_\theta = \frac{k \sin \theta}{r^3}$, $v_\varphi = 0$ (球坐标)，其中 k 为常数。

(7) $u = y, v = -a^2 x, w = 0$, a 为常数，画流线族；

(8) $u = x^2 - y^2, v = -2xy$ ，求通过 $x=1, y=1$ 的一条流线；

(9) $v_r = V_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \cos \theta$, $v_\theta = -V_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \sin \theta$,

$v_\varphi = 0$ ，其中 V_∞ 和 a 为常数，试证 $r=a$ 是一条流线。

(10) $v_r = V_\infty \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \cos \theta$, $v_\theta = -V_\infty \left(1 + \frac{a^3}{2r^3}\right) \sin \theta$,

$v_\varphi = 0$ ，试证球面 $r=a$ 是流面；

(11) 设 $u = x + t, v = -y + t, w = 0$ ，求通过 $x = -1$,

$y = -1$ 的流线及 $t = 0$ 时通过 $x = -1, y = -1$ 的迹线;

(12) $u = ax + t^2, v = -ay - t^2, w = 0$ 求流线、迹线族;

(13) 已知 $u = x + t, v = y + t, w = 0$. 若令 $t = 0$ 时的坐标值为 a, b , 求用拉格朗日变数表示的速度分布.

2. 考虑空间点源运动, 设流体由点源 O 辐射流出. 又设速度大小为

$$|v| = \frac{\theta(t)}{4\pi} \frac{1}{r^2}$$

其中 r 为 O 点到要求速度那点的距离, 方向为矢径 r 的方向.

(1) 证明在此特殊情形, 流线与迹线是重合的;

(2) 试问, 在一般情况下, 有没有流线与迹线重合的充分必要条件.

3. 在不可压缩流动中, 若流线是 $f_1 = c_1, f_2 = c_2$ 两曲面的交线, 试证

$$v = F(f_1, f_2)(\nabla f_1 \times \nabla f_2)$$

其中 F 是由 f_1, f_2 所决定的函数.

4. (1) 已知一流体质点, 迹线由下列方程给出:

$$x = 2 + 0.01\sqrt{t^5}, y = 2 + 0.01\sqrt{t^5}, z = 2$$

问此质点运动到横坐标 $x = 8$ 时, 它的加速度是多少?

(2) 已知速度场分布为

$$u = yzt, v = zxt, w = 0$$

问当 $t = 10$ 时质点在点 $(2, 5, 3)$ 处的加速度是多少?

5. 对第 1 题的 (1) — (12) 题求加速度. 并讨论什么情况下只有局部加速度, 什么情况下只有迁移加速度?

三、运动类型的判别

1. 对以下流场

(1) $u = cy, v = w = 0;$

(2) $u = c, v = w = 0;$

(3) $u = -cy, v = cx, w = 0;$

$$(4) \quad u = \frac{cy}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{cx}{x^2 + y^2}, \quad w = 0$$

进行分析, 哪些是有旋运动? 哪些是无旋运动? 求出它们的流线形状, 其中 c 是常数.

2. 从空间、时间及运动形式来判别下列运动是什么类型的 (对空间而论, 只在直角坐标、柱坐标、球坐标系的范围内划分)?

$$(1) \quad u = cy, \quad v = w = 0;$$

$$(2) \quad u = cx, \quad v = -cy, \quad w = cxy;$$

$$(3) \quad u = yzt, \quad v = zxt, \quad w = 0;$$

$$(4) \quad u = -\frac{2xyz}{(x^2 + y^2)^2}, \quad v = \frac{(x^2 - y^2)z}{(x^2 + y^2)^2}, \quad w = \frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$(5) \quad u = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad v = \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$w = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}};$$

$$(6) \quad v_r = V_\infty(t) \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \cos \theta,$$

$$v_\theta = -V_\infty(t) \left(1 + \frac{a^3}{2r^3}\right) \sin \theta, \quad v_\varphi = 0;$$

$$(7) \quad v_r = \frac{2k(t) \cos \theta}{r^3}, \quad v_\theta = \frac{k(t) \sin \theta}{r^3}, \quad v_\varphi = 0.$$

3. 以拉格朗日变数 (a, b, c) 给出流场

$$(1) \quad x = ae^{-2t/k}, \quad y = be^{t/k}, \quad z = ce^{t/k};$$

$$(2) \quad x = ae^{-2t/k}, \quad y = b(1 + t/k)^2, \quad z = ce^{2t/k}(1 + t/k)^{-2}.$$

式中 k 为非零常数, 请判断

(a) 速度场是否定常?

(b) 流场是否是可压缩的?

(c) 是否有旋流场?

4. 设一圆球在静止的流体中作匀速直线运动

(1) 从固定在空间的坐标系来看,

(2) 从固定在圆球上的坐标系来看,

运动是定常的还是不定常的? 由此得出什么结论? 并试设想出它们的流线形状.

四、速度分解定理, 应力张量

1. 过 M 点作正六面体, 利用正六面体各面上的应力证明应力张量的对称性. 用取任一微元的方法再证一次.

2. 试证在任一点, 应力满足

$$p_{nm} = p_{mn}$$

说明 p_{nm}, p_{mn} 所代表的物理意义.

3. 在只有法应力存在的情况下, 试证在均匀重力场作用下的匀速流场中, 压力(即法应力)沿铅直方向的变化规律为

$$p(z_2) - p(z_1) = \rho g(z_1 - z_2)$$

其中 z 为铅垂方向的坐标, 向上为正. (提示: 考虑一个其轴沿铅垂方向, 截面任意小的柱体的平衡.)

4. 过任意点, 如果在某一个面上只有法应力 δ 作用, 没有切应力, 则称 δ 为主应力, 试证:

(1) 对任意一点, 有三个主应力 $\delta_1, \delta_2, \delta_3$. 若 $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ 各不同, 则它们作用的面互相垂直;

(2) 若 $|\delta_1| \geq |\delta_2| \geq |\delta_3|$, 则 $|\delta_1| \geq |p_n| \geq |\delta_3|$. 即过在一点的各个不同面上作用的应力的最大的与最小值是主应力;

(3) 若 $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \delta_3$, 则 $\delta_1 \geq p_{nn} \geq \delta_3$. 即作用在过一点的各个不同面上的法应力的最大和最小值是主应力.

5. 试证, 最大切应力 $p_r (p_r^2 = p_{nn}^2 + p_{rr}^2)$ 等于最大及最小主应力之差的一半, 即

$$(p_r)_{\max} = \frac{\delta_1 - \delta_3}{2} \quad (\delta_1 \geq \delta_2 \geq \delta_3)$$

五、其他

1. 试证在流管中存在与流线垂直的横截面的必要充分条件为:

$$\mathbf{v} \cdot \text{rot} \mathbf{v} = 0$$

2. 速度场给定如下:

$$(1) \quad \mathbf{v} = \frac{r}{r^3} \mathbf{j}, \quad \text{其中 } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$(2) \quad \mathbf{v} = \frac{c}{r} \theta_0, \quad \text{其中 } \theta_0 \text{ 为球坐标中 } \theta \text{ 方向的单位矢量. 试}$$

求通过以原点为中心, 半径为 R 的球面 S 的流体体积流量.

3. 规定一个大气压为在温度 0°C 时, 海平面上的压力值, 如果它为 760 毫米水银柱的高度. 试以公斤/厘米² 计算压力值的大小, 并换算成以英制磅/吋² 表示.

4. 在通常条件下, 空气的密度取 $\frac{1}{8}$ 公斤·秒²/米³, 而水的密度为 102 公斤·秒²/米³, 试求一立方米体积下空气和水的重量, 并与自己平常的印象作比较.

第三章 流体力学基本方程组

一切客观事物都是互相联系的，具有其自己的特殊规律。流体运动固然千变万化，但也有其内在规律。这些规律就是自然科学中通过大量实践和实验归纳出来的质量守恒定律、动量定理、能量守恒定律、热力学定律以及流体的物性。它们在流体力学中有其独特的表达形式，组成了制约流体运动的基本方程。

本章将根据上述基本定律及流体的性质推导流体力学的基本方程组，并讨论其初始条件和边界条件。

3.1 连续性方程

无数生产实践和科学实验都证明，质量是不生不灭的。无论经过什么形式的运动，机械的、物理的、化学的，物质的总质量总是不变的。这个普遍规律就叫做“质量守恒定律”。当然，质量守恒定律也有局限性。当物体的运动速度接近光速和在微观的原子核反应中，质量和能量互相转化，质量不再守恒。流体力学研究宏观运动而且速度和光速不可比拟，所以质量守恒定律完全成立。

现在我们从质量守恒定律出发推导连续性方程。

质量守恒定律告诉我们，同一流体的质量在运动过程中不生不灭。

在流体中取由一定流体质点组成的物质体，其体积为 τ ，质量为 m ，则

$$m = \int_{\tau} \rho \delta \tau$$

根据质量守恒定律，下式在任一时刻都成立

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \delta\tau = 0 \quad (3.1.1)$$

根据(2.12.7)式有

$$\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta\tau + \int_S \rho v_n \delta S = 0 \quad (3.1.2)$$

这就是积分形式的连续性方程。

其次，由(2.12.7)式我们还有

$$\int_{\tau} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \delta\tau = \int_{\tau} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right] \delta\tau = 0$$

假定被积函数连续，而且体积 τ 是任意选取的，由此推出被积函数必须恒等于零，于是有

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \right) \quad (3.1.3)$$

及

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \right) \quad (3.1.4)$$

(3.1.3)或(3.1.4)式称为微分形式的连续性方程。

在直角坐标系中连续性方程(3.1.4)采取下列形式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (3.1.5)$$

上面我们对有限体积内的质量运用拉格朗日观点推导出了连续性方程。下面我们利用另外三种方法来推导上述结果。

考虑质量为 δm 的体积元 $\delta\tau$ ，对 δm 运用拉格朗日观点，根据质量不灭定律有

$$\frac{d}{dt} \delta m = 0$$

因

$$\delta m = \rho \delta\tau$$

于是

$$\frac{d}{dt}(\rho \delta \tau) = 0$$

$$\rho \frac{d}{dt} \delta \tau + \delta \tau \frac{d\rho}{dt} = 0$$

或写成

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\delta \tau} \frac{d\delta \tau}{dt} = 0$$

相对体积膨胀速度

$$\frac{1}{\delta \tau} \frac{d\delta \tau}{dt}$$

即为速度 \mathbf{v} 的散度 $\text{div } \mathbf{v}$, 由此得

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \text{div } \mathbf{v} = 0$$

此即 (3.1.3) 式的连续性方程. 从这个推导方法可以很清楚地看出 (3.1.3) 式各项的物理意义,

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

是相对密度变化率, $\text{div } \mathbf{v}$ 是相对体积变化率, 为了要维持体积元内质量不灭, 必须要求相对密度变化率等于负的相对体积变化率, 因此 (3.1.3) 式必须成立.

现在应用欧拉观点推导连续性方程, 在空间中取一以 S 面为界的有限体积 τ , 该体积是由空间点组成的, 因此它将固定在空间中而不随时间改变. 在流体力学中固定在空间中的 S 面常称为控制面. 取外法线方向为法线的正方向, \mathbf{n} 为外法线的单位矢量. 考虑体积 τ 内流体质量的变化. τ 内流体质量的变化主要由下面两个原因产生: 第一, 通过表面 S 有流体流出或流入, 单位时间内流出的流体和流入的流体总和是

$$\int_S \rho v_n \delta S \quad (3.1.6)$$

正号表示总的说来流体是流出表面 S 之外的；第二，由于密度场的不定常性，单位时间内体积 τ 的质量将减少，减少的数量是

$$-\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta \tau \quad (3.1.7)$$

负号表示质量的减少。根据质量不灭定理，(3.1.6) 式必须等于 (3.1.7) 式，由此得到

$$\int_S \rho v_n \delta S = -\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta \tau$$

即

$$\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta \tau + \int_S \rho v_n \delta S = 0$$

运用奥高公式，将上式中的面积分化为体积分即得

$$\int_{\tau} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \right) \delta \tau = 0$$

由于体积 τ 是任意的，且被积函数连续，于是

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0$$

这就是(3.1.4)式的连续性方程。

从推导过程看出，第一项 $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ 代表

单位体积内由于密度场不定常性引起的质量变化；第二项 $\operatorname{div} \rho \mathbf{v}$ 代表流出单位体积表面的流体质量。

现在我们叙述最后一种推导连续性方程的方法。在直角坐标系中取一由空间点组成的固定不

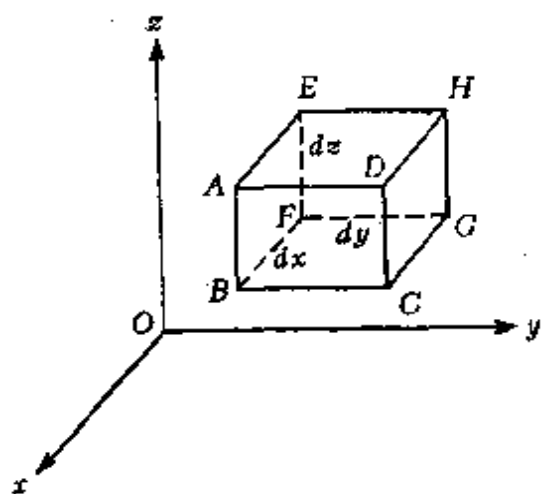


图 3.1.1

动的平行六面体元素，其棱边 dx , dy , dz 分别平行坐标轴（图 3.1.1）。现在应用欧拉观点对上述控制面推导连续性方程，考虑六面体内流体质量的变化，首先计算通过六面体表面的流体质量。在 x 轴方向，单位时间内通过表面 $EFGH$ 的通量是

$$\rho u dy dz$$

而通过表面 $ABCD$ 的通量则是

$$\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right] dy dz$$

这样在 x 方向上单位时间内，通过 $EFGH$ 和 $ABCD$ 的总的流体质量是

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz$$

同理可得 y 方向和 z 方向上单位时间内通过表面的流体总质量是

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy dz$$

及

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx dy dz$$

将这三式相加得单位时间内通过六面体六个表面的总质量为

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz. \quad (3.1.8)$$

其次，由于密度的变化，六面体中单位时间内流体质量将减少

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz \quad (3.1.9)$$

根据质量不灭定律，流出六面体外的流体质量应该等于六面体内质量的减少，由此得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

这就是直角坐标系内的连续性方程(3.1.5)式,将之写成矢量形式即得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

现推导几种特殊情形下的连续性方程.

在定常运动时, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, 于是连续性方程(3.1.4)变成:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

或

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (3.1.10)$$

此式说明定常运动时单位体积流进和流出的质量应相等.

在不可压缩流体时, $\frac{d\rho}{dt} = 0$, 于是由(3.1.3)得不可压缩流体的连续性方程为

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (3.1.11)$$

或

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

这就是说, 由于流体微团的密度、质量在随体运动中都不变, 所以流体微团的体积在随体运动中也不变. (3.1.11)还说明, 不可压缩流体的速度场是无源场.

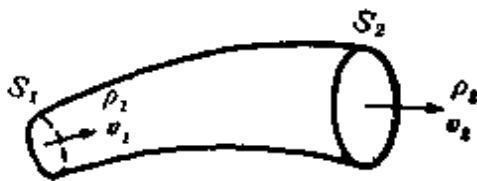


图 3.1.2

最后我们推导流管中平均运动的连续性方程. 它在工程计算中很有用.

在流体中取一流管, 设其中两个横截面为 S_1, S_2 ; 平均速度和密度分别为 $v_1, \rho_1; v_2, \rho_2$ (图 3.1.2). 根据质量守恒定理, 对于定常流动有

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 \quad (3.1.12)$$

或

$$\rho v S = \text{常数}$$

这是因为如果流过任何两个截面的流体质量不相等，则流管中这两个截面间的质量就势必要不断增加或减少，这就与定常运动的假设相矛盾（根据(3.1.10)式亦可导出(3.1.12)式）。

对于不可压缩流体，应用(3.1.11)式有

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad (3.1.13)$$

或

$$S v = \text{常数}$$

它表明，低速气流或水流中，流速与流管截面积成反比。截面积小的地方流速大，截面积大的地方流速小。风洞试验段速度最大，低速机翼上表面速度较大，其原因都在于此（图 3.1.3）。

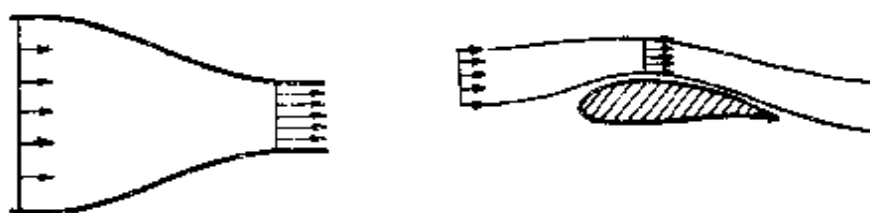


图 3.1.3

最后我们推导以下两节要用的两个公式，利用质量守恒定律有：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \varphi \delta \tau &= \frac{d}{dt} \int_V \varphi \delta m = \int_V \frac{d\varphi}{dt} \delta m + \int_V \varphi \frac{d}{dt} \delta m \\ &= \int_V \rho \frac{d\varphi}{dt} \delta \tau \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{a} \delta \tau = \int_V \rho \frac{d\mathbf{a}}{dt} \delta \tau \quad (3.1.15)$$

3.2 运动方程

现在我们从动量定理出发导出运动方程。

任取一体积为 τ 的流体，它的边界为 S 。根据动量定理，体积 τ 中流体动量的变化率等于作用在该体积上的质量力和面力之和。以 F 表作用在单位质量上的质量力分布函数，而 p_n 为作用在单位面积上的面力分布函数（图3.2.1），则作用在 τ 上和 S 上的总质量力和面力为

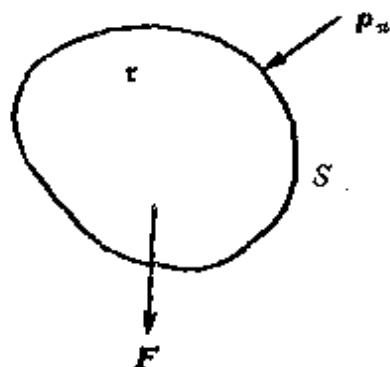


图 3.2.1

及
$$\int_{\tau} \rho F \delta\tau$$

其次，体积 τ 内的动量是
$$\int_{\tau} \rho v \delta\tau$$

于是，动量定理可写成下列表达式

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho v \delta\tau = \int_{\tau} \rho F \delta\tau + \int_S p_n \delta S \quad (3.2.1)$$

对上式左边应用(1.12.8)式得

$$\int_{\tau} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} \delta\tau + \int_S \rho v_n v \delta S = \int_{\tau} \rho F \delta\tau + \int_S p_n \delta S \quad (3.2.2)$$

这就是积分形式的动量方程。

其次，根据(3.1.15)式得

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho v \delta\tau = \int_{\tau} \rho \frac{dv}{dt} \delta\tau$$

应用奥高定理有

$$\int_S p_n \delta S = \int_S n \cdot P \delta S = \int_{\tau} \operatorname{div} P \delta\tau$$

其中 P 是应力张量，于是(3.2.1)式变为

$$\int_{\tau} \left(\rho \frac{dv}{dt} - \rho F - \operatorname{div} P \right) \delta\tau = 0$$

因 τ 任意，且假定被积函数连续，由此推出，被积函数恒为零

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho F + \operatorname{div} P \quad (3.2.3)$$

用张量表示法则为

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i + \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.2.4)$$

这就是微分形式的动量方程，即运动方程，其中 $\rho \frac{dv}{dt}$ 表示单位体积上的惯性力， ρF 表示单位体积上的质量力，而 $\operatorname{div} P$ 则表示单位体积上应力张量的散度，它是与面力等效的体力分布函数。于是运动方程 (3.2.3) 表明单位体积上的惯性力等于单位体积上的质量力加上单位体积上应力张量的散度。

在直角坐标系中运动方程 (3.2.3) 式采取下列形式

$$\left. \begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ & = \rho F_x + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} \\ & \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ & = \rho F_y + \frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} \\ & \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ & = \rho F_z + \frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.5)$$

下面对体积 τ 应用动量矩定理，任取一点为力矩参考点， r 为流体质点到参考点的矢径，则动量矩定理可写成

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} r \times \rho v d\tau = \int_{\tau} r \times \rho F d\tau + \int_S r \times \rho_n dS \quad (3.2.6)$$

应用(2.12.8)式, 上式变为

$$\begin{aligned} & \int_V \left[r \times \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} \right] \delta \tau + \int_S (r \times \rho v_n) \delta S \\ & = \int_V r \times \rho F \delta \tau + \int_S r \times p_n \delta S \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

这就是积分形式的动量矩定理。

现在我们考察微分形式的动量矩定理给出什么方程。应用(3.1.15)及(2.10.17)式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V r \times \rho v d\tau & = \int_V \rho \frac{d}{dt} (r \times v) \delta \tau \\ & = \int_V \left(r \times \rho \frac{dv}{dt} \right) \delta \tau \\ \int_S r \times p_n dS & = \int_V e_{ijk} \left(p_{ki} + x_j \frac{\partial p_{ki}}{\partial x_l} \right) \delta \tau \\ & = \int_V (r \times \operatorname{div} P) \delta \tau + \int_V e_{ijk} p_{ki} \delta \tau \end{aligned}$$

(3.2.6)式可写为

$$\int_V e_{ijk} p_{kj} \delta \tau = \int_V \left[r \times \left(\rho \frac{dv}{dt} - \rho F - \operatorname{div} P \right) \right] \delta \tau$$

考虑到运动方程(3.2.3)我们有

$$\int_V e_{ijk} p_{kj} \delta \tau = 0$$

由此推出

$$p_{ik} = p_{ki}$$

上式表明微分形式的动量矩定理只给出应力张量是对称的这个已经知道了的结论, 它并不给出新的方程。

最后我们写出运动方程(3.2.3)的另一种形式以及它在运动坐标系中的表达形式。

将加速度 $\frac{dv}{dt}$ 写成

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v$$

考虑到场论中基本运算公式(11)我们有

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \text{grad} \frac{V^2}{2} + \text{rot} v \times v \quad (3.2.8)$$

将惯性加速度写成上述形式的优点在于它将 $v \cdot \nabla v$ 中的位势部分和涡旋部分分开，这样做在解决具体问题时常常是方便的。将(3.2.8)代入(3.2.3)式得

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \text{grad} \frac{V^2}{2} + \text{rot} v \times v \right) = \rho F + \text{div} P \quad (3.2.9)$$

这就是所谓的兰姆-葛罗米柯 (Lamb-Громeko) 形式的运动方程。

在某些问题例如气象学中常常把固定在地面上的坐标系看作和地球一起运动，因此有时需要写出流体在运动坐标系中的运动方程。从理论力学得知，绝对速度 v_0 和相对速度 v_r 之间的关系是

$$v_0 = v_r + v_e$$

其中 v_e 是牵连速度，它由下列公式确定，

$$v_e = v_0 + \omega \times r$$

这里 r 是质点的矢径。 v_0 是运动系某点的平动速度， ω 是相对该点转动角速度。其次，绝对加速度 w_0 和相对加速度 w_r 之间有下列公式：

$$w_0 = w_r + w_e + w_c \quad (3.2.10)$$

其中 w_e, w_c 分则是牵连加速度和柯里奥利加速度，它的表达式分别是

$$w_e = \frac{dv_0}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \times r + \omega \times (\omega \times r)$$

$$w_c = 2(\omega \times v_r) \quad (3.2.11)$$

将(3.2.10)式及(3.2.11)式代入(3.2.3)式得

$$\frac{d'v_r}{dt} = F + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} P - w_c - 2(\omega \times v_r) \quad (3.2.12)$$

其中“ \cdot ”表示在运动坐标系中进行微分，这就是运动坐标系中的运动方程式。上式亦可写成

$$\begin{aligned} \frac{\partial' v_r}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{v_r^2}{2} + \operatorname{rot} v_r \times v_r \\ = F + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} P - w_c - 2(\omega \times v_r) \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

由此可见，只要将外力 F 换成虚拟外力 $F - w_c - 2(\omega \times v_r)$ ，则运动坐标系中的运动方程和绝对坐标系中的运动方程具有完全相同的形式。

3.3 能量方程

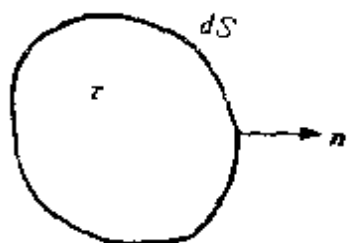


图 3.3.1

现在我们从能量守恒这一普遍规律出发推导能量方程。

任取一界面为 S 的流体体积 τ ，设 n 为界面 S 的外法线单位矢量（图3.3.1）。能量守恒定律可表达为：体积 τ 内流体的动能和内能的改变率等于单位时间内质量力和面力所作的功加上单位时间内给予体积 τ 的热量。容易看到，体积 τ 内，动能和内能的总和是

$$\int_{\tau} \rho \left(U + \frac{V^2}{2} \right) d\tau$$

其中 U 是单位质量的内能，而质量力和面力所作的功则是

$$\int_{\tau} \rho F \cdot v d\tau$$

及

$$\int_S \rho_n \cdot \nu dS$$

现在我们来研究 τ 内热量的增加。传热的方式主要有热传导及幅射两种。在能量转换中，还有化学反应（例如燃烧）和其他物理原因（凝固、蒸发等）。根据著名的富利叶公式，单位时间内由于热传导通过表面 dS 传给 τ 内的热量是 $f \cdot n dS$ ，其中 f 是热流矢量，它是 ∇T 的线性函数，即

$$f_i = k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}$$

其中 k_{ij} 是热传导系数， T 是温度。由张量识别定理易知， k_{ij} 是二阶张量。对于空气和水这类各向同性流体而言， k_{ij} 是各向同性张量。于是根据第一章 1.20 各向同性张量的性质有 $k_{ij} = k \delta_{ij}$ ，其中 k 是热传导系数。因此

$$f_i = k \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

而单位时间内由于热传导通过表面 dS 传给 τ 内的热量是 $k \frac{\partial T}{\partial n} dS$ ，

由此单位时间内由于热传导通过 S 传入的热量为

$$\int_S k \frac{\partial T}{\partial n} dS$$

设 q 为由于幅射或其他原因在单位时间内传入单位质量的热量分布函数，定义为

$$q = \frac{dQ}{dm} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta m}$$

其中 Δm 为包围 M 点的体积 $\Delta \tau$ 内的质量， ΔQ 为其他方式传入 $\Delta \tau$ 内的热量。于是单位时间内由于幅射或其他原因传入 τ 内的总热量为

$$\int_V \rho q d\tau$$

现在能量守恒定律可以写为:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \left(U + \frac{V^2}{2} \right) d\tau \\ & = \int_{\tau} \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} d\tau + \int_S \rho_n \cdot \mathbf{v} dS + \int_S k \frac{\partial T}{\partial n} dS + \int_{\tau} \rho q d\tau \quad (3.3.1) \end{aligned}$$

根据(2.12.7)式, 上式可改写为

$$\begin{aligned} & \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(U + \frac{V^2}{2} \right) \right] d\tau + \int_S \rho v_n \left(U + \frac{V^2}{2} \right) dS \\ & = \int_{\tau} \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} d\tau + \int_S \rho_n \cdot \mathbf{v} dS + \int_S k \frac{\partial T}{\partial n} dS + \int_{\tau} \rho q d\tau \quad (3.3.2) \end{aligned}$$

这就是积分形式的能量方程, 现在我们来推导微分形式的能量方程, 为此, 根据(3.1.14)将(3.3.1)式中的体积分的随体导数写成

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \left(U + \frac{V^2}{2} \right) d\tau = \int_{\tau} \rho \frac{d}{dt} \left(U + \frac{V^2}{2} \right) d\tau$$

此外, 根据奥高公式将(3.3.1)式中的面积分化为体积分

$$\begin{aligned} \int_S \rho_n \cdot \mathbf{v} dS & = \int_S (\mathbf{n}P) \cdot \mathbf{v} dS = \int_S \mathbf{n} \cdot (P\mathbf{v}) dS \\ & = \int_{\tau} \operatorname{div}(P\mathbf{v}) d\tau \end{aligned}$$

$$\int_S k \frac{\partial T}{\partial n} dS = \int_{\tau} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) d\tau$$

于是(3.3.1)式可写成

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \rho \frac{d}{dt} \left(U + \frac{V^2}{2} \right) d\tau & = \int_{\tau} \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} d\tau + \int_{\tau} \operatorname{div}(P \cdot \mathbf{v}) d\tau \\ & \quad + \int_{\tau} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) d\tau + \int_{\tau} \rho q d\tau \end{aligned}$$

由于 τ 是任意的, 且假定被积函数连续, 由此推出

$$\rho \frac{d\left(\frac{V^2}{2}\right)}{dt} + \rho \frac{dU}{dt} = \rho F \cdot v + \operatorname{div}(Pv) + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + \rho q \quad (3.3.3)$$

或写成

$$\rho \frac{d\left(\frac{1}{2} v_i v_i\right)}{dt} + \rho \frac{dU}{dt} = \rho F_i v_i + \frac{\partial(p_{ij} v_j)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \rho q \quad (3.3.4)$$

这就是微分形式的能量方程，在直角坐标系中，能量方程(3.3.3)的形式是

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[U + \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right] \\ & = \rho (u F_x + v F_y + w F_z) + \frac{\partial}{\partial x} (p_{xx} u + p_{xy} v + p_{xz} w) \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial y} (p_{xy} u + p_{yy} v + p_{yz} w) + \frac{\partial}{\partial z} (p_{xz} u + p_{yz} v + p_{zz} w) \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \rho q \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

(3.3.3)式中各项的物理意义是十分明显的。左边一、二项代表单位体积内动能和内能的随体导数；右边第一项是单位体积内质量力所作的功，第二项代表单位体积内面力所作的功，第三项代表单位体积内由于热传导传入的热量，最后一项代表单位体积内由于辐射或其他物理或化学原因的贡献。

现在我们来推导微分形式能量方程的另一种形式。易见

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(P \cdot v) & = \operatorname{div}(v \cdot P) = \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i p_{ij}) = v_i \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_i} + p_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \\ & = v_i \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_i} + p_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = v_i \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_i} + p_{ij} a_{ij} + p_{ij} S_{ij} \end{aligned}$$

$$= v_i \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} + p_{ij} S_{ij} = \mathbf{v} \cdot \text{div} P + P : S \quad (3.3.6)$$

在推导中我们已考虑到(2.6.5)式以及 $p_{ij} a_{ji} = 0$ 的事实, 其中 S 是变形速度张量, A 是反对称张量. (3.3.6) 式表明面力对单位体积作的功由两部分组成: 一部分是由于面力的改变所作的功, 此部分由 $\mathbf{v} \cdot \text{div} P$ 表达; 另部分是由于流体变形后, 面力所作的功, 表现在右式第二部分 $P : S$ 中.

将(3.3.6)式代入(3.3.3)式得

$$\rho \frac{d\left(\frac{V^2}{2}\right)}{dt} + \rho \frac{dU}{dt} = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \text{div} P + P : S + \text{div}(k \text{ grad } T) + \rho q \quad (3.3.7)$$

现在我们证明, 体力所作的功 $\rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ 加上面力中由于面力的改变所作的功 $\mathbf{v} \cdot \text{div} P$ 等于单位体积内动能的随体导数. 为此只需在(3.2.3)式的两边点乘速度矢量 \mathbf{v} , 即得

$$\rho \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \text{div} P$$

或

$$\rho \frac{d\left(\frac{V^2}{2}\right)}{dt} = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \text{div} P$$

考虑到上式, (3.3.7)式可写成

$$\rho \frac{dU}{dt} = P : S + \text{div}(k \text{ grad } T) + \rho q \quad (3.3.8)$$

或

$$\rho \frac{dU}{dt} = p_{ij} S_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \rho q \quad (3.3.9)$$

这就是微分形式能量方程的另一种形式. 此式的物理意义可叙述为: 单位体积内由于流体变形面力所作的功加上热传导及辐射等

其他原因传入的热量恰好等于单位体积内的内能在单位时间内的增加。(3.3.8)式在直角坐标系中的形式是

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial U}{\partial t} + u \frac{\partial U}{\partial x} + v \frac{\partial U}{\partial y} + w \frac{\partial U}{\partial z} \\ &= p_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + p_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + p_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} + p_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &+ p_{yz} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + p_{zx} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \rho q \quad (3.3.10) \end{aligned}$$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

3.4 本构方程

真实流体都有粘性。当相邻两层流体作相对滑动即剪切变形时，在相反方向产生一切向应力，阻止变形的发生。因此，切向应力和剪切变形速度之间存在着一定的关系，流体的这种性质称为粘性。由此可见，流体的宏观性质——粘性规律将应力张量和变形速度张量以某种关系联系起来。这一节中我们将在一定的假定下推导表达粘性规律的应力张量和变形速度张量之间的关系，即本构方程。

牛顿在1687年第一个对于最简单的剪切运动作了一个著名的实验，并且建立了切向应力和剪切变形速度之间的关系。现在我们简要地叙述一下牛顿的实验。考虑两个很长的平行平板间的粘性

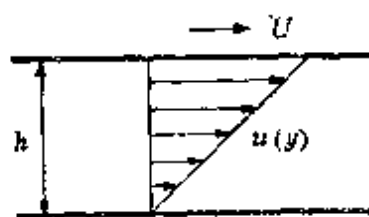


图 3.4.1

流体运动，平板间的距离为 h ，设下面一个平板静止不动，而上面那个平板则在自己的平面上以等速 U 运动。实验表明，两平板上的流体质点粘附在平板上，随着平板一起运动。因此，下平板上流体速度为零，而上平板上的流体速度则为 U 。根据测量结果两平板间的速度分布遵守线性规律

$$u(y) = \frac{U}{h}y$$

显然, $\frac{U}{h}$ 可写成

$$\frac{U}{h} = \frac{du}{dy} \quad (3.4.1)$$

为了实现上述切向变形, 必须在上平板与运动相反的方向上加上一个切向力以抵消流体抗拒变形所产生的切向阻力. 实验结果表明, 此力和上平板的运动速度 U 成正比, 而与两平板间的距离 h 则成反比, 于是

$$\tau = \mu \frac{U}{h} \quad (3.4.2)$$

根据(3.4.1)式, 上式可写成更普遍的形式

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (3.4.3)$$

其中 τ 是切应力, $\frac{du}{dy}$ 是剪切变形速度, μ 是流体的一个物理常数, 是流体抗拒变形的内摩擦的量度, 称为动力学粘性系数, 简称粘性系数. (3.4.2) 式称为牛顿粘性公式, 它表明切向应力和剪切变形速度成正比.

以后我们将常碰到另一粘性系数, 它等于动力学粘性系数除以密度 ρ

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

称为运动学粘性系数.

容易看出, μ 的量纲是 $\frac{M}{LT}$, 而 ν 的量纲则是 $\frac{L^2}{T}$. 在 CGS 制

中, μ 和 ν 的单位分别是 $\frac{\text{克}}{\text{厘米} \cdot \text{秒}}$ 和 $\frac{\text{厘米}^2}{\text{秒}}$, 而在 MKS 制中则是



$\frac{\text{公斤}}{\text{米} \cdot \text{秒}}$ 和 $\frac{\text{米}^2}{\text{秒}}$.

粘性系数 μ 的数值依赖于流体的性质. 对于粘性较小的流体, 粘性系数 μ 的数值很小. 例如水在一个大气压, 温度为 20°C 的条件下, 它的粘性系数

$$\mu = 0.01 \text{ 克/厘米} \cdot \text{秒}$$

运动学粘性系数

$$\nu = 0.01 \text{ 厘米}^2/\text{秒}$$

而空气则是

$$\mu = 1.9 \cdot 10^{-4} \text{ 克/米} \cdot \text{秒}, \quad \nu = 0.15 \text{ 厘米}^2/\text{秒}$$

对于粘性很大的流体, 粘性系数可达到很高的数值. 例如甘油在 3°C 时的粘性系数是 $42.20 \text{ 克/米} \cdot \text{秒}$, 比水的粘性系数大好几千倍.

粘性系数 μ 还显著地依赖于温度, 但很少随压力发生变化. 它与温度的关系对于液体和气体来说是截然不同的. 对于液体来说, 随着温度的升高, 粘性系数 μ 下降. 对于气体而言, 当温度升高时, 粘性系数反而上升.

对于气体, 粘性系数 μ 和温度 T 的关系可表成:

$$\mu = \text{常数} \times \frac{T^{3/2}}{T + C} \quad (3.4.4)$$

其中 $C \approx 110.4^\circ\text{K}$, 此式称为索士兰特(Sutherland)公式. 索士兰特公式在相当大的范围内 ($T < 2000^\circ\text{K}$) 对空气是适用的. 由于上式较复杂, 在实用上多采用幂次公式

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^n \quad (3.4.5)$$

来近似真实的粘性关系, 其中幂次 n 的变化范围是

$$\frac{1}{2} \leq n \leq 1$$

它依赖于气体的性质及所考虑的温度范围。在高温时，例如 3000°K 以后， n 可近似地取为 $\frac{1}{2}$ ，在低温时可取 1。对于空气而言，在 $90^{\circ}\text{K} < T < 300^{\circ}\text{K}$ 的温度间隔内可采用公式

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{n/2} \quad (3.4.6)$$

它与索士兰特公式的误差不超过 5%。

应该指出，牛顿粘性规律只适用于剪切流动这一最简单的情形。但是实际遇到的流动常常是很复杂的。要在理论上或通过实验直接导出一般运动情形下应力张量和变形速度张量之间的关系是很困难的。下面我们采用演绎法在以下几个基本假定下推出适用于一般情形的广义牛顿定律。

(1) 运动流体的应力张量在运动停止后应趋于静止流体的应力张量。据此将应力张量 P 写成各向同性部分 $-pI$ 和各向异性部分 P' 之和是方便的。

$$P = -pI + P', \quad p_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (3.4.7)$$

写成分量形式则为

$$\begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.4.8)$$

其中 p 是根据纯力学考虑定义出来的运动流体的压力函数。它不等于静止流体的压力函数，但当运动静止时趋于静止流体的压力函数。 P' 是除去 $-pI$ 后得到的张量，称为偏应力张量。当运动消失时它趋于零。显见，偏应力张量和应力张量一样也是对称二阶张量。



(2) 偏应力张量 τ_{ij} 的各分量是局部速度梯度张量 $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ 各分量的线性齐次函数。当速度在空间均匀分布时，偏应力张量为零，当速度偏离均匀分布时，在粘性流体中产生了偏应力，它力图使速度恢复到均匀分布情形。由此可见，偏应力张量 τ_{ij} 应和局部速度张量 $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ 有关。至于 τ_{ij} 各分量为什么是 $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ 各分量的线性齐次函数这纯粹是一种假设，它是牛顿定律的逻辑上的推广，其合理性需要从理论与实验符合与否加以验证。

(3) 流体是各向同性的。各向同性的意思就是流体的所有性质如粘性、热传导等在每点的各个方向上都是相同的，即流体的性质不依赖于方向或坐标系的转换。所有气体都是各向同性的，大部分简单液体例如水等也是各向同性的。包含长链状分子的悬浮液或溶液可能呈现出某种方向性，这样的液体不在我们考虑之列。

根据假设(2)，有

$$\tau_{ij} = c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \tag{3.4.9}$$

其中 c_{ijkl} 是表征流体粘性的常数，共 $3^4 = 81$ 个。下面我们证明当流体是各向同性时， c_{ijkl} 的数目由 81 个减至两个。因 τ_{ij} ， $\frac{\partial u_k}{\partial x_l}$ 是张量，根据张量识别定理推出 c_{ijkl} 是四阶张量。其次因 τ_{ij} 是对称张量，所以 c_{ijkl} 对指标 i, j 是对称的。根据(2.6.5)， $\frac{\partial u_k}{\partial x_l}$ 可写成变形速度对称张量 s_{ij} 和反对称张量 $-\varepsilon_{klm} \omega_m$ (旋转部分) 之和，于是

$$\tau_{ij} = c_{ijkl} s_{kl} - c_{ijkl} \varepsilon_{klm} \omega_m \tag{3.4.10}$$

根据假定(3)， c_{ijkl} 是各向同性张量且对指标 i, j 对称，于是由(1.20.29)有

$$c_{ijkl} = \nu \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3.4.11)$$

从(3.4.11)可见, 现在的独立常数只有 ν 与 μ 两个了. 此外还可看出 c_{ijkl} 对指标 k, l 也是对称的. 这样(3.4.10)式中右边第二项为 0, 从而严格证明了偏应力和旋转无关, 它只和变形有关. 将(3.4.11)式代入(3.4.10)式得

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kk} s_{kk} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) s_{kk} \\ \tau_{ij} &= \lambda s_{kk} \delta_{ij} + 2\mu s_{ij} \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

代入(3.4.7)式有

$$p_{ij} = (-p + \lambda s_{kk}) \delta_{ij} + 2\mu s_{ij} \quad (3.4.13)$$

引进

$$\mu' = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

于是(3.4.13)亦可写成

$$p_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu \left(s_{ij} - \frac{1}{3} s_{kk} \delta_{ij} \right) + \mu' s_{kk} \delta_{ij} \quad (3.4.14)$$

现考察物性常数 μ 及 μ' 的物理意义. 考虑剪切运动

$$u = u(y), \quad v = w = 0$$

此时本构方程为


$$p_{xy} = \mu \frac{du}{dy}$$

其形式和牛顿定律完全相同. 可见, μ 就是流体的动力学粘性系数.

在一固定点 M 上考虑以不同 n 为其法向的所有面上的法应力的平均值. 此平均值也就是以 M 为中心, 以 r 为半径的无限小球面 S 上法应力的平均值.

$$\frac{1}{4\pi r^2} \int_S n \cdot p_n dS = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S n \cdot P \cdot n dS = \frac{1}{4\pi r^2} \int_S p_{ij} n_i n_j dS$$

应力张量 p_{ij} 本应在 S 上取值, 因球体无限小, 可转移到 M 点上取值, 应用奥高定理后有



$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi r^2} \int_S p_{ij} n_i n_j dS &= \frac{p_{ij}}{4\pi r^2} \int_V \frac{\partial n_i}{\partial x_j} dV = \frac{p_{ij}}{4\pi r^2} \int_V \frac{\partial x_i}{\partial x_j} dV \\ &= p_{ij} \delta_{ij} \frac{1}{4\pi r^2} \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{3} p_{ij} \delta_{ij} \\ &= \frac{1}{3} p_{ii} = \frac{1}{3} (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) \end{aligned}$$

可见 M 点上所有方向上法应力的平均值等于 x, y, z 三个方向上法应力的平均值，显然这是一个不随坐标系改变的不变量。根据(3.4.14)有

$$\frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) = -p + \mu' \operatorname{div} v \quad (3.4.15)$$

对于不可压缩流体而言（通常的液体，低速运动的气体都是不可压缩流体）

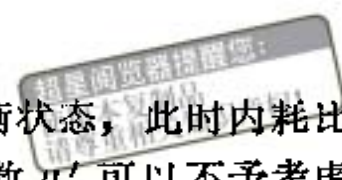
$$\operatorname{div} v = 0$$

平均法应力等于运动流体的压力 p ，此时 μ' 自动不出现，本构方程中只出现一个常数，即动力学粘性系数 μ 。

对于可压缩流体而言（高速运动的气体是可压缩流体）

$$\operatorname{div} v \neq 0$$

流体的体积在运动过程中发生膨胀或收缩，根据(3.4.15)，它将引起平均法应力的值发生 $\mu' \operatorname{div} v$ 的改变， μ' 称为第二粘性系数亦称膨胀粘性系数。由此可见，可压缩流体（主要是气体）一般来说也和虎克弹性体一样有两个粘性系数 μ 及 μ' 。从微观上来看，当气体产生膨胀和收缩时，气体的体积发生变化，从一种状态进入另一种状态，于是气体处于不平衡状态，这是一个不可逆的过程，因此系统的熵将增加，从而产生了由于膨胀或收缩引起的内耗， μ' 就是量度这类内耗大小的粘性系数。真实的气体都有内耗和膨胀粘性系数，只是大小不同而已。当弛豫时间，即失去平衡后再恢复到新的平衡所需的时间，比宏观运动状态改变所



需的时间短，气体便可近似地认为处于平衡状态，此时内耗比起压力值小得很多可忽略不计，第二粘性系数 μ' 可以不予考虑。反之，如果弛豫时间和宏观运动状态改变所需的时间同等数量阶，甚至更大，则不平衡状态引起的内耗达到相当的值。此时就必须考虑第二粘性系数。

对于单原子气体来说，在压力不特别高的条件下，粒子只有平动，没有转动和振动。当粒子从一个状态进入到另一状态时，它的能量经过四、五个撞击后就能和新的环境相适应。对处于标准状态下的空气而言，这个时间大约是 10^{-9} 秒的数量阶。因此只要流动的宏观运动变化得不是太快，我们就可以认为单原子气体的运动处于平衡状态，即不必考虑第二粘性系数引起的内耗。

对于象空气那样的双原子气体，除平动外，还有转动和振动。在温度不太高的情况下，振动未被激发，因而不参与能量交换。而转动能又几乎和平动能一样地容易和新环境相适应。因此对于温度不太高的双原子气体而言，也可以忽略第二粘性系数的影响。

当气体处于振动能被激发的高温状态，或虽在常温状态但宏观运动的周期短，如高频声波，此时气体在运动过程中处于非平衡态，迟后现象引起的内耗达到不可忽略的程度。此时必须考虑第二粘性系数的影响。观察一般的高频声波在双原子气体中的衰减表明线性关系(3.4.14)式是准确的，并且得到 μ' 和 μ 同数量阶的结果。频率很高时（例如标准状态下的氮气中声波频率超过 10^7 周/秒时），振动能对内能贡献很大，由于很长的弛豫时间使线性关系(3.4.14)式不再准确，此时必须考虑运动的历史提出另外的公式。

由此可见，除了高温和高频声波这些极端情况而外，对一般情形下的气体运动而言，可以近似地认为

$$\mu' = 0$$

这个在分子运动论里得到证明的事实当年只是斯托克斯提出的

个假设，斯托克斯认为平均法应力不仅依赖于 p ，而且还和膨胀率 $\text{div } \mathbf{v}$ 有关的事实，是不合理的，于是他提出 $\mu' = 0$ 的假设 (1880). 将此代入 (3.4.15) 有

$$p = -\frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) \quad (3.4.16)$$

后人便称 $\mu' = 0$ 或 (3.4.16) 为斯托克斯假设.

(3.4.16) 式表明粘性流体中的压力函数 p 就是平均法应力. 这个压力函数和热力学中的压力具有不同的含义，我们并不能证明它们是相同的，但是大量实际计算表明，在斯托克斯假设成立的大部分情形下，可以认为两者实际上是相等的.

考虑到 (3.4.14) 式，在作了斯托克斯假定后，应力张量和变形速度张量之间的关系可写成下列形式

$$\begin{cases} p_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\left(s_{ij} - \frac{1}{3}s_{kk}\delta_{ij}\right) \\ P = -pI + 2\mu\left(S - \frac{1}{3}I\text{div } \mathbf{v}\right) \end{cases} \quad (3.4.17)$$

上式和 (3.4.14) 式都称为广义牛顿公式.

写成分量形式则有

$$\begin{cases} p_{xx} = -p - \frac{2}{3}\mu \text{div } \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ p_{yy} = -p - \frac{2}{3}\mu \text{div } \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ p_{zz} = -p - \frac{2}{3}\mu \text{div } \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ p_{xy} = p_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ p_{zx} = p_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ p_{yz} = p_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \end{cases} \quad (3.4.18)$$

当流体是不可压缩时, $\operatorname{div} v=0$, (3.4.17)式变为

$$P = -pI + 2\mu S, \quad p_{,ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu S_{,ij} \quad (3.4.19)$$

广义牛顿公式成立的基础是假设偏应力张量各分量和速度梯度张量各分量之间存在着线性关系, 也就是说速度变化的二阶量以及二阶以上的高阶量可以忽略不计. 粗看起来这样的假设只是对速度梯度比较小的缓慢运动才是对的, 例如液体的流动及低速空气绕物体的流动就是这样的流动. 但是实践表明, 广义牛顿公式的适用范围远远超出人们所能预料的. 它不仅适用于超音速气流, 甚至对于高超音速气流也是适用的. 只有在物理量变化极端剧烈的激波层内, 它的适用性才存在问题. 广义牛顿公式适用范围的讨论给我们提供了一个范例, 说明只有实践而不是主观想象 (不管这样的想象是多么合乎情理) 才是检验真理的标准. 应力张量和变形速度张量之间的关系满足广义牛顿公式的流体称为牛顿流体, 否则称为非牛顿流体. 常用的流体, 例如水及空气都是牛顿流体. 但是也有一些流体特别是化工系统中经常碰到的液体在通常的工作条件下呈现出明显的非牛顿特性. 例如油漆、颜料、橡胶、低温润滑油、血液等等. 这些具有复杂分子结构特别是具有长链分子结构的液体, 溶液和混合物, 其本构方程已不能用广义牛顿公式描写. 某些橡胶类的液体, 其偏应力甚至和应变史发生关系. 这类非牛顿流体在工业上很有用处, 但它的讨论已超出本书的范围, 感兴趣的读者可阅读有关专著.

讨论 1: 根据(3.4.14)式或(3.4.17)可以很容易看到牛顿流体的应力张量和变形速度张量, 其主轴方向是完全重合的.

讨论 2: 现讨论理想流体的数学表示. 根据理想流体的定义, 所有切应力分量皆为零, 由(3.4.14)推出剪切变形速度等于零或粘性系数 μ 等于零. 理想流体在运动中可任意变形, 因此一般说来剪切变形速度不为零. 由此推出理想流体的数学表示应为

$$\mu = 0 \quad (3.4.20)$$

3.5 状态方程. 内能及熵的表达式

从能量方程我们看到在流体力学问题中既有力学变数 p 也有热力学变数 T , 既有机械能也有内能, 而且这两种能量相互转化. 因此为了全面地描绘流体的运动规律, 建立封闭的方程组, 必须考虑热力学基本规律. 本节将写出热力学的状态方程、第一定律和第二定律, 并由此出发推导内能和熵的表达式.

a) 状态方程

考虑一个均匀的热力学体系, 这样的均匀系可以就是我们所要研究的流体. 设流体处在平衡态, 即在没有外界影响的条件下, 流体的各部分在长时间内不发生任何变化. 描写平衡态的物理量是几何变数体积 V , 力学变数压力 p 和热力学变数温度 T , 这三个变数不是相互独立的, 它们之间有一个关系式联系起来, 这个关系就称为状态方程, 可写成

$$F(p, V, T) = 0 \quad (3.5.1)$$

或写作

$$p = f(T, V) \quad (3.5.2)$$

对于完全气体而言, 状态方程可写成

$$pV = \frac{m}{M} R_0 T \quad (3.5.3)$$

其中 m 为气体的质量, M 为分子量, R_0 是克分子气体常数, 它是一个与气体种类及所处条件无关的普适常数, 在工程制中

$$R_0 = 8.206 \times 10^{-2} \text{升} \cdot \text{大气压/克分子} \cdot \text{度}$$

在 MKS 制中

$$R_0 = 84.789 \times 10^{-2} \text{公斤} \cdot \text{米/克分子} \cdot \text{度}$$

在 CGS 制中

$$R_0 = 8.31 \times 10^7 \text{尔格/克分子} \cdot \text{度}$$

对于一克分子气体, $m = M$, 此时 (3.5.3) 的形式变成

$$pV = R_0 T \quad (3.5.4)$$

对于单位质量的完全气体，状态方程的形式是

$$pV = RT \quad (3.5.5)$$

或

$$p = \rho RT \quad (3.5.6)$$

其中 V 表示单位质量气体的体积， ρ 是密度， $R = \frac{R_0}{M}$ 。例如空气的平均分子量为 28.9，因此

$$R = 2.93 \times 10^{-2} \text{ 公斤} \cdot \text{米/克分子} \cdot \text{度}$$

(3.5.6) 式是流体力学中经常采用的形式，称为克拉伯龙方程。

完全气体的状态方程对于密度不太大，分子间作用力及分子所占据的体积可以忽略时是正确的，但是对于高度压缩的气体，就必须考虑分子间相互作用力及分子所占体积的影响，此时我们可以采用范德瓦耳斯 (Van der Waals) 公式

$$\left(p + \frac{a}{V^2} \right) (V - \beta) = RT \quad (3.5.7)$$

式中 a/V^2 代表分子间吸引力， β 代表分子的体积。对空气而言 a 和 β 的经验值约为 $3 \times 10^{-3} p_0 V_0^2$ 和 $3 \times 10^{-3} V_0$ ，其中 p_0, V_0 是标准状态下的值。当气体的性质和完全气体有微小偏离时，发现范德瓦耳斯公式是适用的。

对均质液体而言，由于在正常条件下，密度几乎不随压力，温度而改变，因此它的状态方程为

$$\rho = \text{常数} \quad (3.5.8)$$

深水中的压力或水下爆炸时的压力可达几百个大气压甚至更高，此时必须考虑密度随压力的微小变化。柯尔 (Cole) (1948) 建议采用下列状态方程

$$\frac{p+B}{1+B} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n \quad (3.5.9)$$

其中 ρ_0 是一个大气压下水的密度，若 n 及 B 取作 7 及 3000 大气压则压力一直到 10^5 大气压，上述公式和实测数据的误差都在百

分之几的范围内。

b) 热力学第一定律

对于单位质量流体而言，表达能量守恒规律的热力学第一定律可写成

$$\delta Q = dU + pdV \quad (3.5.10)$$

其中 δQ 为传给单位质量流体的总热量， dU 为单位质量流体内能的增量， pdV 是流体因膨胀对外界作的功。

c) 热力学第二定律

热力学第二定律讨论过程的进行方向问题，它可表达为：对于挑选的某一不可逆过程（例如热传导或摩擦生热），指明它所产生的效果无论利用什么方法也不能完全恢复原状而不引起其他变化。

对于可逆循环过程有

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$$

由此可知， $\frac{\delta Q}{T}$ 是某状态函数 S 的全微分，即

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \quad (3.5.11)$$

状态函数 S 称为熵，是一个判断过程方向的特性函数。将 δQ 的表达式(3.5.10)代入得

$$TdS = dU + pdV \quad (3.5.12)$$

利用熵函数热力学第二定律可数学地表示为

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}$$

即可以找出这样一个状态函数熵，它在可逆过程中的变化等于系统所吸收的热量与热源的绝对温度之比，在不可逆过程中，这个比值小于熵的变化。从热力学第二定律还可推出熵增加原理：一个孤立系的熵永不减少

$$dS \geq 0$$

d) 比热

为了从实验上能够测量物体吸收的热量，引入比热的概念。单位质量的气体每升高一度所吸收的能量称为比热，以 C 表之。于是

$$C = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\delta Q}{\Delta T} \quad (3.5.13)$$

C 的数值与过程有关，最重要的是等容过程和等压过程，与之相应的是等容比热 C_V 及等压比热 C_p ，它们分别是体积或压力不变时单位质量的气体每升高一度所吸收的能量，

$$C_V = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left(\frac{\delta Q}{\Delta T} \right)_V \quad (3.5.14)$$

$$C_p = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left(\frac{\delta Q}{\Delta T} \right)_p \quad (3.5.15)$$

当体积不变时，对外界所作的功为零，即

$$\delta Q = \Delta U$$

于是

$$C_V = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta U}{\Delta T} \right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \quad (3.5.16)$$

当压力不变时

$$\delta Q = \Delta U + p\Delta V$$

代入(3.5.15)式得

$$C_p = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta U + p\Delta V}{\Delta T} \right)_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_p + p \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (3.5.17)$$

引进热力学函数焓 i

$$i = U + pV \quad (3.5.18)$$

(3.5.17)式可写成

$$C_p = \left(\frac{\partial i}{\partial T} \right)_p \quad (3.5.19)$$

e) 麦克斯韦热力学关系式

引进态函数亥姆霍兹自由能 F 和吉布斯函数 G , 它们定义为

$$F = U - TS \quad (3.5.20)$$

$$G = i - TS \quad (3.5.21)$$

于是根据(3.5.12)式我们有下列四个对称的关系式

$$dU = TdS - pdV \quad (3.5.22)$$

$$di = dU + pdV + Vdp = TdS + Vdp \quad (3.5.23)$$

$$dF = dU - TdS - SdT = -SdT - pdV \quad (3.5.24)$$

$$dG = di - TdS - SdT = -SdT + Vdp \quad (3.5.25)$$

(3.5.22), (3.5.23), 和(3.5.24)表明在等容过程中单位质量中传入的热量 $\delta Q = TdS$ 等于内能的增加 dU ; 在等压过程中传入的热量 δQ 等于焓的增加 di ; 在等温过程中对外界所做的功等于自由能的减少。

由以上四式我们有

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_s = -p, \quad \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_v = T; \quad \left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_s = V, \quad \left(\frac{\partial i}{\partial S}\right)_p = T$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_v = -S, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -p; \quad \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = -S, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T = V$$

两两对 $S, V; S, p; V, T; p, T$ 交叉微分后得麦克斯韦热力学关系式

$$\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_v = -\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_s \quad (3.5.26)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s \quad (3.5.27)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \quad (3.5.28)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T \quad (3.5.29)$$

f) 内能和熵的表达式

取 T, V 作独立变数, 从热力学中我们知道均匀系的热力学性质由三个基本热力学函数完全确定, 这三个基本热力学函数就是状态方程 $p = p(T, V)$, 内能 $U = U(T, V)$ 和熵 $S = S(T, V)$. 现在我们阐明如何从实验数据确定这三个基本热力学函数. 状态方程及比热是可以从实验上测出的. 设通过实验, 状态方程 $p(T, V)$, 及等容比热 $C_V(T, V)$ 已知, 现在让我们从热力学第一定律及第二定律将内能及熵通过 $p(T, V)$ 及 $C_V(T, V)$ 表达出来. 这样我们就可以根据实验数据经过必要的计算, 求出确定均匀系热力学性质的内能及熵.

根据(3.5.12)式 $TdS = dU + pdV$ 及麦克斯韦关系式易得

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = C_V \quad (3.5.30)$$

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \quad (3.5.31)$$

于是

$$\begin{aligned} dU &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \\ &= C_V dT + \left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p \right] dV \end{aligned} \quad (3.5.32)$$

$$\begin{aligned} dS &= \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV \\ &= \frac{C_V}{T} dT + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV \end{aligned} \quad (3.5.33)$$

由此得内能及熵的表达式为

$$U(T, V) = \int_{T_0, V_0}^{T, V} C_V dT + \left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p \right] dV \quad (3.5.34)$$

$$S(T, V) = \int_{T_0, V_0}^{T, V} \frac{C_V}{T} dT + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV \quad (3.5.35)$$

下面推导 $C_p(T, V)$ 的表达式, 其中只包含 $C_v(T, V)$ 及 $p(T, V)$. 由(3.5.17)有

$$\begin{aligned} C_p &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p + p \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_v + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + p \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_v + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \end{aligned}$$



将(3.5.16)式及(3.5.31)式代入得

$$C_p = C_v + T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \quad (3.5.36)$$

知道 $C_v(T, V)$ 及 $p(T, V), V(T, p)$ 后即可按上式求出 $C_p(T, V)$.

这样一来, 知道 $C_v(T, V)$ 与 $p(T, V)$ 后, $U(T, V), S(T, V), i(T, V), F(T, V), G(T, V)$ 及 $C_p(T, V)$ 就可按公式(3.5.34), (3.5.35), (3.5.18), (3.5.20), (3.5.21) 及(3.5.36) 计算出来. 最后我们指出函数 $C_v(T, V)$ 及 $p(T, V)$ 不是相互独立的, 它们之间存在着联系. 由(3.5.33)推出

$$\left(\frac{\partial C_v}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_v$$

积分之得

$$C_v = C_{v_0} + T \int_{V_0}^V \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_v dV \quad (3.5.37)$$

积分是在温度固定为 T 时施行的. 由这个式子看出, 只要在某一体积 V_0 下测得 C_{v_0} , 则任何体积 V 时的 C_v 均可根据状态方程所给的 $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_v$ 按(3.5.37)式算出, 也就是说实际上我们只须知道状态方程及 C_{v_0} 即可完全确定内能及熵.

g) 完全气体情形

现在我们考虑完全气体，此时状态方程为

$$p = R \frac{T}{V} \quad (3.5.38)$$

我们有

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V}, \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V = 0$$

于是(3.5.37)式给出

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = 0$$

即

$$C_V = C_V(T)$$

定容比热 C_V 只与温度 T 有关而与体积 V 无关。这就是焦耳 (Joule) 实验的结果。

将(3.5.38)式分别代入(3.5.36)，(3.5.34)，(3.5.18)与(3.5.35)式得完全气体情形下的 C_p, U, i 及 S 的表达式

$$C_p - C_V = \frac{RT}{V} \frac{R}{p} = R \quad (3.5.39)$$

$$U = \int C_V dT + \int \left(\frac{TR}{V} - p \right) dV = \int C_V dT \quad (3.5.40)$$

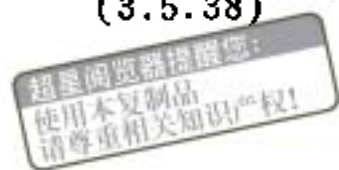
$$i = \int C_V dT + pV = \int C_p dT \quad (3.5.41)$$

$$\begin{aligned} S &= \int \frac{C_V}{T} dT + \int \frac{R}{V} dV \\ &= \int C_V d \ln T + (C_p - C_V) \ln V \end{aligned} \quad (3.5.42)$$

根据分子运动论，在振动态未被激发以前，对双原子分子而言

$$C_p = \frac{7}{2} R$$

空气是 O_2 和 N_2 的混合物，它的 C_p/R 不是常数而是随温度变化



的。例如从 $T=300^{\circ}\text{K}$ 的 3.506 上升到 $T=1000^{\circ}\text{K}$ 的 3.979。但是只要温度不是太高， C_p 与 C_v 可近似地当作常数处理，此时 (3.5.39) — (3.5.42) 变为

$$C_p - C_v = R \quad (3.5.43)$$

$$U = C_v T \quad (3.5.44)$$

$$i = C_p T \quad (3.5.45)$$

$$S = C_v \ln TV^{\gamma-1} + \text{常数} = C_v \ln \frac{p}{\rho^{\gamma}} + \text{常数} \quad (3.5.46)$$

这里我们认为 $T=0$ 时

$$U = i = 0, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

称为绝热指数。

h) 液体情形

在一般情形下，液体的密度和体积是不随压力和温度改变的常数，于是我们有

$$C_p = C_v = C \quad (\text{实际上对水而言在 } 15^{\circ}\text{C} \text{ 时有 } C_p - C_v = 0.003C_p)$$

及

$$T dS = dU = \delta Q = C dT$$

即液体的内能和熵完全由温度，亦即输入的热量决定，因为此时由于体积不变，压力不再做功。

i) 正压流体和斜压流体

设流体的质点在运动过程中，它的密度只是压力的函数而和其他热力学变数（例如温度、湿度、盐度等）无关，则称此流体为正压流体，否则称为斜压流体。

不可压缩流体和理想绝热（等熵）气体因存在关系式

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

及

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^{\gamma}} \right) = 0 \quad (\text{由 (3.5.46) 可得})$$

所以都是正压流体。

上述热力学函数公式都是对于均匀系和平衡态而言的，这些结果可以直接用于处于均匀平衡态的静止流体。流体在运动时显然处于非平衡态和非均匀态。由于我们对于非平衡态的热力学了解得很少，所以不得不近似地使用均匀系的平衡态公式。为此将流体分成许多小部分，每一小部分的流体近似地看成均匀系且处于平衡态，对它应用前面推得的公式。换句话说，我们对于流体质点使用平衡态的热力学。当然这样是否可以，还需要从理论与实践符合与否加以检验。大量的结果表明，对于流体力学这类非平衡非均匀系采用平衡态的结果是近似地准确的。虽然运动流体可能离平衡态很远，但看来它们并不对热力学关系产生显著影响。

3.6 流体力学基本方程组

前几节我们根据质量守恒定律、动量定理、能量守恒定律、粘性规律导出了连续性方程、运动方程、能量方程及本构方程，这些方程加上状态方程、内能和熵的表达式组成了流体力学基本方程组。下面我们具体地写出它们的微分形式和积分形式。

(I) 微分形式的流体力学基本方程组

a) 应力形式

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, & \text{连续性方程} \\
 \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{F} + \operatorname{div} \mathbf{P}, & \text{运动方程} \\
 \rho \frac{dU}{dt} = \mathbf{P} : \mathbf{S} + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + \rho q, & \text{能量方程} \\
 \mathbf{P} = -p\mathbf{I} + 2\mu \left(\mathbf{S} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) + \mu' \mathbf{I} \operatorname{div} \mathbf{v}. & \text{本构方程} \\
 p = f(\rho, T), & \text{状态方程}
 \end{array} \right. \quad (3.6.1)$$

或写成

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0$$

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i + \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\rho \frac{dU}{dt} = p_{ij} s_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \rho q \quad (3.6.2)$$

$$p_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu \left(s_{ij} - \frac{1}{3} s_{kk} \delta_{ij} \right) + \mu' s_{kk} \delta_{ij}$$

$$p = f(\rho, T)$$

其中粘性系数 μ , μ' , 以及热传导系数 k 与温度 T 的关系 $\mu(T)$, $k(T)$ 是给定的, U 的表达式由 (3.5.34) 式给出. 若所考虑的是完全气体, 则 U 的表达式由 (3.5.44) 式给出. 而状态方程可写成

$$p = \rho RT$$

(3.6.1) 式是由 12 个方程组成的方程组, 用来确定 v , p , ρ , T , p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} , p_{xy} , p_{yz} , p_{zx} 等 12 个未知函数. 由此可见, 方程组 (3.6.1) 是封闭的.

b) 矢量形式

现在写出方程组 (3.6.1) 的另一种形式. 利用本构方程将运动方程与能量方程中的应力张量 P 消去, 因为

$$\begin{aligned} \operatorname{div} P &= \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[-p \delta_{ij} + 2\mu \left(s_{ij} - \frac{1}{3} s_{kk} \delta_{ij} \right) + \mu' s_{kk} \delta_{ij} \right] \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[2\mu \left(s_{ij} - \frac{1}{3} s_{kk} \delta_{ij} \right) \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu' s_{kk} \delta_{ij}) \end{aligned}$$

所以运动方程可写成

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{F} - \text{grad } p - \frac{2}{3} \text{grad}(\mu \text{div} \mathbf{v}) + \text{div}(2\mu \mathbf{S}) + \text{grad}(\mu' \text{div} \mathbf{v}) \quad (3.6.3)$$

对某些流体而言， μ 显著地依赖于温度，此时 μ 是矢径的函数。但是也经常遇到流场中温差很小以至可以认为 μ 是均匀的情形，此时

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_i} \left[2\mu \left(s_{ij} - \frac{1}{3} s_{kk} \delta_{ij} \right) \right] \\ &= \mu \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial s_{kk}}{\partial x_i} \right) \\ &= \mu \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{3} \frac{\partial s_{kk}}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

于是当 $\mu' = 0$ ，且 $\mu = \text{常数}$ 时，(3.6.3) 式变为

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{F} - \text{grad } p + \mu \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} \mu \text{grad } \text{div} \mathbf{v} \quad (3.6.4)$$

其次考虑应力张量所作的功 $P:S$

$$\begin{aligned} P:S &= p_{ij} s_{ji} \\ &= \left[-p \delta_{ij} + 2\mu \left(s_{ij} - \frac{1}{3} s_{kk} \delta_{ij} \right) + \mu' s_{kk} \delta_{ij} \right] s_{ji} \\ &= -p s_{kk} + 2\mu \left(s_{ij} s_{ji} - \frac{1}{3} s_{kk}^2 \right) + \mu' s_{kk}^2 \quad (3.6.5) \end{aligned}$$

由此可见，应力张量所作的功是由三部分组成：第一部分是 $-p \text{div} \mathbf{v}$ ，它代表当体积有相对膨胀或压缩时压力 p 所作的功；第二部分是 $\mu' (\text{div} \mathbf{v})^2$ ，这是膨胀时粘性所耗损的机械能，是一个永远大于等于零的量；第三部分是 $2\mu \mathbf{S} : \mathbf{S} - \frac{2}{3} \mu (\text{div} \mathbf{v})^2$ ，它代表粘性应力张量所作的功，也就是我们所熟知的剪切粘性所耗损的机

械能,这部分机械能全部转化为热能,这是一个不可逆的过程. 令

$$\Phi = -\frac{2}{3}\mu(\operatorname{div}\mathbf{v})^2 + 2\mu\mathbf{S}:\mathbf{S} \quad (3.6.6)$$

Φ 称为耗损函数,表征由于剪切粘性耗损掉的机械能. 现在我们进一步分析 Φ 与速度变形张量各分量的关系,为此将(3.6.6)式变换一下

$$\begin{aligned} \Phi &= 2\mu\left(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \frac{1}{2}\theta_1^2 + \frac{1}{2}\theta_2^2 + \frac{1}{2}\theta_3^2\right) \\ &\quad - \frac{2}{3}\mu(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2\varepsilon_2\varepsilon_3 + 2\varepsilon_3\varepsilon_1) \\ &= \mu(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2) + \frac{2}{3}\mu(2\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_3^2 \\ &\quad - 2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\varepsilon_2\varepsilon_3 - 2\varepsilon_3\varepsilon_1) \\ &= \mu(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2) + \frac{2}{3}\mu[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \\ &\quad + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2] \end{aligned}$$

由此可见,耗损函数 Φ 与 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 及 $\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_3 - \varepsilon_1$ 的平方成正比,显见当

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$$

时或

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3, \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$$

时,耗损函数为零,即没有机械能的耗损. 第一种情形表示没有变形的刚体运动;第二种情形代表气体各向同性地作辐射性的膨胀或压缩. 将(3.6.6)式代入(3.6.5)式得

$$P:S = -p\operatorname{div}\mathbf{v} + \Phi + \mu'(\operatorname{div}\mathbf{v})^2$$

当斯托克斯假设 $\mu' = 0$ 成立时

$$P:S = -p\operatorname{div}\mathbf{v} + \Phi$$

将之代入方程组(3.6.1)式中的能量方程中去得

$$\rho \frac{dU}{dt} + p \operatorname{div} \mathbf{v} = \Phi + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + \rho q$$

利用连续性方程, $p \operatorname{div} \mathbf{v}$ 可写成

$$p \operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \rho p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right)$$

于是

$$\rho \left[\frac{dU}{dt} + p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] = \Phi + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + \rho q \quad (3.6.7)$$

由热力学中得知

$$T ds = dU + p d \left(\frac{1}{\rho} \right) = di - \frac{1}{\rho} dp$$

于是(3.6.7)式可写成

$$\rho \frac{di}{dt} = \frac{dp}{dt} + \Phi + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + \rho q \quad (3.6.8)$$

或

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \Phi + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + \rho q \quad (3.6.9)$$

(3.6.9)式表明,粘性耗损掉的机械能以及由于热交换或其他原因传入的热量使流体内的熵增加。

又考虑到(3.6.3)式及(3.6.9)式后,当 $\mu' = 0$ 时,方程组(3.6.1)可改写成下列形式

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{F} - \operatorname{grad} p + 2 \operatorname{div}(\mu \mathbf{S}) - \frac{2}{3} \operatorname{grad}(\mu \operatorname{div} \mathbf{v}) \\ \quad \quad \quad \underline{\mu = \text{常数}} \rho \mathbf{F} - \operatorname{grad} p + \mu \Delta \mathbf{v} + \frac{\mu}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (3.6.10) \\ \rho T \frac{ds}{dt} = \Phi + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + \rho q \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} p = f(\rho, T) \\ P = -pI + 2\mu \left(S - \frac{1}{3} I \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \end{cases}$$

这就是另一种形式的流体力学基本方程组，其中 Φ 由(3.6.6)式确定。方程(3.6.10)可以分开求解。先解前六个方程，得到 \mathbf{v} , p, ρ, T ，然后将它们代入最后一个张量方程中去即得应力张量各分量。

c) 粘性不可压缩流体情形

流体是不可压缩均质时状态方程为 $\rho = \text{常数}$ ，其次设 $\mu = \text{常数}$ ，于是粘性不可压缩均质流体的基本方程组为

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{F} - \operatorname{grad} p + \mu \Delta \mathbf{v} \\ \rho T \frac{ds}{dt} = \Phi + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + \rho q \\ P = -pI + 2\mu S \end{cases} \quad (3.6.11)$$

d) 理想可压缩流体情形

设气体是理想绝热而且是完全的，此时基本方程组为

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{F} - \operatorname{grad} p \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \end{cases} \quad (3.6.12)$$

e) 理想不可压缩流体情形

如果流体既是理想又是不可压缩均质的，则方程组采取如下形式

$$\begin{cases} \operatorname{div} v = 0 \\ \rho \frac{dv}{dt} = \rho F - \operatorname{grad} p \end{cases} \quad (3.6.13)$$

f) 直角坐标系中的形式

以应力形式为例，矢量形式读者可自行写出。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial \rho}{dt} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \\ & \rho \frac{du}{dt} = \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} \\ & \rho \frac{dv}{dt} = \rho F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} \\ & \rho \frac{dw}{dt} = \rho F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \\ & \rho T \frac{ds}{dt} = \Phi + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \rho q \\ & p = f(\rho, T) \\ & p_{xx} = -p + 2\mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \\ & p_{yy} = -p + 2\mu \left[\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \\ & p_{zz} = -p + 2\mu \left[\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \\ & p_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ & p_{yz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ & p_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.6.14)$$

其中

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} \Phi = & -\frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + 2\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right. \\ & + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

g) 曲线坐标系中的形式

考虑到 (1.11.20), (1.12.13), (2.7.9) 及第一章末的习题 20 有

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial(\rho H_2 H_3 v_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(\rho H_1 H_3 v_2)}{\partial q_2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial(\rho H_1 H_2 v_3)}{\partial q_3} \right] = 0 \\ & \rho \left(\frac{dv_1}{dt} + \frac{v_1 v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{v_1 v_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \frac{v_2^2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right. \\ & \quad \left. - \frac{v_3^2}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \right) \\ & = \rho F_1 + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 p_{11}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 H_3 p_{12}) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 p_{13}) \right] + \frac{p_{12}}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{p_{13}}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \\ & \quad - \frac{p_{22}}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} - \frac{p_{33}}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \\ & \rho \left(\frac{dv_2}{dt} + \frac{v_1 v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{v_2 v_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} - \frac{v_3^2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{v_1^2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \Big) \\
& = \rho F_2 + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 p_{12}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 H_1 p_{22}) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 p_{33}) \right] + \frac{p_{12}}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{p_{23}}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \\
& \quad - \frac{p_{33}}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} - \frac{p_{11}}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \\
& \rho \left(\frac{dv_2}{dt} + \frac{v_3 v_1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \frac{v_2 v_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} - \frac{v_1^2}{H_3 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \right. \\
& \quad \left. - \frac{v_2^2}{H_3 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \right) \tag{3.6.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \rho F_3 + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 H_3 p_{31}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 H_1 p_{13}) \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 H_2 p_{33}) \right] + \frac{p_{31}}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \frac{p_{23}}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \\
& \quad - \frac{p_{11}}{H_3 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \frac{p_{22}}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho T \frac{ds}{dt} = \Phi + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} k \frac{\partial T}{\partial q_1} \right) \right. \\
\left. + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} k \frac{\partial T}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} k \frac{\partial T}{\partial q_3} \right) \right] + \rho q
\end{aligned}$$

$$p = f(\rho, T)$$

$$\begin{aligned}
p_{11} = -p + 2\mu \left[\frac{1}{H_1} \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \right. \\
\left. + \frac{v_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \frac{1}{3} \text{div} \mathbf{v} \right]
\end{aligned}$$

$$p_{22} = -p + 2\mu \left[\frac{1}{H_2} \frac{\partial v_2}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \right. \\ \left. + \frac{v_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} - \frac{1}{3} \operatorname{div} v \right]$$

$$p_{33} = -p + 2\mu \left[\frac{1}{H_3} \frac{\partial v_3}{\partial q_3} + \frac{v_1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \right. \\ \left. + \frac{v_2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} - \frac{1}{3} \operatorname{div} v \right]$$

$$p_{12} = \mu \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial v_1}{\partial q_2} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial v_2}{\partial q_1} - \frac{v_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \right. \\ \left. - \frac{v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right)$$

$$p_{23} = \mu \left(\frac{1}{H_3} \frac{\partial v_2}{\partial q_3} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial v_3}{\partial q_2} - \frac{v_2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \right. \\ \left. - \frac{v_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \right)$$

$$p_{31} = \mu \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial v_3}{\partial q_1} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial v_1}{\partial q_3} - \frac{v_3}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \right. \\ \left. - \frac{v_1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \right)$$

其中

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3}$$

$$\operatorname{div} v = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial(H_2 H_3 v_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(H_3 H_1 v_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(H_1 H_2 v_3)}{\partial q_3} \right]$$

而 Φ 则根据(3.6.6)式及(2.7.9)式决定.

h) 柱坐标系中的形式

超星浏览器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

$$\rho \left(\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = \rho F_r + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r p_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial p_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial(r p_{zr})}{\partial z} \right] - \frac{p_{\theta\theta}}{r}$$

$$\rho \left(\frac{dv_\theta}{dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = \rho F_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r p_{r\theta})}{\partial r} + \frac{\partial p_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial(r p_{\theta z})}{\partial z} \right] + \frac{p_{r\theta}}{r}$$

$$\rho \frac{dv_z}{dt} = \rho F_z + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r p_{zr})}{\partial r} + \frac{\partial p_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial(r p_{zz})}{\partial z} \right]$$

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \Phi + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(k r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] + \rho q$$

(3.6.16)

$$p = f(\rho, T)$$

$$p_{rr} = -p + 2\mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} \right)$$

$$p_{\theta\theta} = -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} \right)$$

$$p_{zz} = -p + 2\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} \right)$$

$$p_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right)$$

$$p_{\theta z} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right)$$

$$p_{zr} = \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)$$

其中

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

而 Φ 则根据(3.6.6)式及(2.7.9)式决定.

i) 球坐标系中的形式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\rho r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho \sin \theta v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho v_\lambda)}{\partial \lambda} = 0$$

$$\rho \left(\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\theta^2 + v_\lambda^2}{r} \right) = \rho F_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial(r^2 \sin \theta p_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial(r \sin \theta p_{\theta r})}{\partial \theta} + \frac{\partial(r p_{\lambda r})}{\partial \lambda} \right] - \frac{p_{\theta\theta} + p_{\lambda\lambda}}{r}$$

$$\rho \left(\frac{dv_\theta}{dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\lambda^2 \cot \theta}{r} \right) = \rho F_\theta + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial(r^2 \sin \theta p_{r\theta})}{\partial r} + \frac{\partial(r \sin \theta p_{\theta\theta})}{\partial \theta} + \frac{\partial p_{\theta\lambda}}{\partial \lambda} \right] + \frac{p_{r\theta}}{r} - \frac{p_{\lambda\lambda} \cot \theta}{r}$$

$$\rho \left(\frac{dv_\lambda}{dt} + \frac{v_r v_\lambda}{r} + \frac{v_\theta v_\lambda \cot \theta}{r} \right) = \rho F_\lambda + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial(r^2 \sin \theta p_{\lambda r})}{\partial r} + \frac{\partial(r \sin \theta p_{\theta\lambda})}{\partial \theta} + \frac{\partial(r p_{\lambda\lambda})}{\partial \lambda} \right] + \frac{p_{\lambda r}}{r} + \frac{p_{\theta\lambda} \cot \theta}{r} \quad (3.6.17)$$

超星浏览器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \Phi + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{\sin \theta} k \frac{\partial T}{\partial \lambda} \right) \right] + \rho q$$

$$p = f(\rho, T)$$

$$p_{rr} = -p + 2\mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} \right)$$

$$p_{\theta\theta} = -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} \right)$$

$$p_{\lambda\lambda} = -p + 2\mu \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{v} \right)$$

$$p_{r\theta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)$$

$$p_{\theta\lambda} = \mu \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \theta} - \frac{v_\lambda \cot \theta}{r} \right)$$

$$p_{\lambda r} = \mu \left(\frac{\partial v_\lambda}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \lambda} - \frac{v_\lambda}{r} \right)$$

其中

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda}$$

而 Φ 则根据(3.6.6)式及(2.7.9)式决定.

(I) 积分形式的流体力学基本方程组

将(3.1.2), (3.2.2), (3.3.2), (3.2.7), (3.4.17)及状态方程联合起来得下列积分形式的流体力学基本方程组:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \int_S \rho v_n dS = 0$$

$$\int_V \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} d\tau + \int_S \rho v_n v dS = \int_V \rho F d\tau + \int_S p_n dS$$

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(U + \frac{V^2}{2} \right) \right] d\tau + \int_S \rho v_n \left(U + \frac{V^2}{2} \right) dS$$

$$= \int_V \rho F \cdot v d\tau + \int_S p_n \cdot v dS + \int_S k \frac{\partial T}{\partial n} dS + \int_V \rho q d\tau \quad (3.6.18)$$

$$\int_V \left[r \times \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} \right] d\tau + \int_S (r \times \rho v_n v) dS$$

$$= \int_V r \times \rho F d\tau + \int_S r \times p_n dS$$

$$P = -pI + 2\mu \left(S - \frac{1}{3} I \operatorname{div} v \right)$$

$$p = f(\rho, T)$$

用理论方法解决流体力学问题最常采用的是微分形式流体力学基本方程组。这些方程成立的条件是流体力学元素具有连续的一级偏导数。如果在流体中某局部面上出现流体力学元素发生间断的现象，那么在间断面上就不能采用微分形式的运动方程。但是在间断面上积分形式的方程组(3.6.18)仍然成立，因为间断并不影响积分的存在及(3.6.18)式的正确性。此外积分形式的动量方程和动量矩方程还常被用来研究流体或流体与固体作用的某些总体性质，关于这一点我们将在第六章中讲述。

3.7 初始条件和边界条件

所有的流体运动都要满足基本方程组，但是满足同一方程组的流体运动仍然千差万别，不可胜数。在通常的条件下只有确定了初始状态和边界状态之后，流体的运动才具有独一无二的形

态。反映在数学上这就是说基本方程组通解中包含的任意函数只有在给定初始条件和边界条件之后才具有唯一确定的解。这就是为什么我们在建立了流体力学基本方程之后还必须着重讨论初始条件和边界条件的道理。

a) 初始条件

所谓初始条件就是初始时刻 $t=t_0$ 时，流体运动应该满足的初始状态。即 $t=t_0$ 时

$$\begin{cases} v(r, t_0) = v_1(r) \\ p(r, t_0) = p_1(r) \\ \rho(r, t_0) = \rho_1(r) \\ T(r, t_0) = T_1(r) \end{cases} \quad (3.7.1)$$

其中 v_1, p_1, ρ_1, T_1 都是给定的已知函数。应该指出，如果研究流体的定常运动，则不须要给出初始条件。

b) 边界条件

所谓边界条件指的是流体运动边界上方程组的解应该满足的条件。它的形式多种多样，需要具体问题具体分析，下面只写出常用的几种。

1) 无穷远处

例如飞机在高空中飞行，辽阔的天空可近似地看作是无边无际的，于是无穷远处是这类问题的边界，那里的边界条件可写为 $r \rightarrow \infty$ 时

$$v = v_\infty, \quad p = p_\infty, \quad \rho = \rho_\infty, \quad T = T_\infty \quad (3.7.2)$$

2) 两介质界面处

两介质的界面可以是气、液、固三相中任取两不同相的界面，也可以是同一相不同组成的界面。例如物体在空气中运动，物面就是气、固两介质的界面，海洋中的水面就是空气和水两相的界面，河流中清水和浊水的界面就是同一水相而密度不同的界面等等。

若界面处两介质互不渗透，而且在运动过程中，原来是两介

质界面的边界在以后时刻永远是两介质的界面，即满足不发生分离的连续条件，则在界面处速度的法向分量应连续，即(图3.7.1)

$$(v_n)_{\text{介质1}} = (v_n)_{\text{介质2}} \quad (3.7.3)$$

因为：

(1) 如果 $(v_n)_{\text{介质1}} < (v_n)_{\text{介质2}}$ ，则介质 1 将穿入介质 2，与不可渗透条件矛盾；

(2) 如果 $(v_n)_{\text{介质1}} > (v_n)_{\text{介质2}}$ ，介质 1 将与介质 2 分离，与连续条件矛盾。

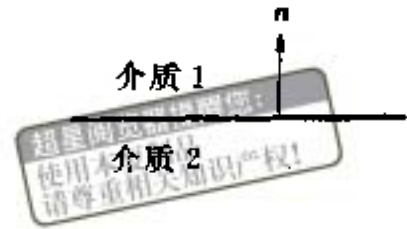


图 3.7.1

现讨论两介质界面处切向速度分量 v_t 和温度 T 应该满足的条件。如果两介质在力学上处于静止状态，在热力学上处于平衡状态，则界面处的 v_t 和 T 应相等，因为如果不等则必然会破坏静止和平衡状态。如果两介质在力学上处于运动状态，在热力学上处于不平衡状态，那么此时界面处的 v_t 和 T 应满足什么关系呢？设想两介质的 v_t 和 T 在界面处不等，即发生了切向速度间断和温度间断，则在界面的法向产生了极大的切向速度梯度和温度梯度。由于流体是有粘性和热传导性的，伴随着极大的切向速度梯度和温度梯度产生了极大的粘性切应力和热流，它们力图抹平两介质在切向速度和温度间的差别。而且间断愈强，这种抹平的趋势也愈加强烈。从分子运动论的观点来看，通过两介质间分子的运动交换了动量和能量，使速度和温度趋于均匀。因此不难想象过了一段时间后 v_t 与 T 将变成连续的。根据上述讨论很自然地假设在真实流体的两介质界面处，切向速度分量 v_t （考虑到(3.7.3)因而也有速度矢量 v ）和温度 T 是连续的，即

$$v_{\text{介质1}} = v_{\text{介质2}}, \quad T_{\text{介质1}} = T_{\text{介质2}} \quad (3.7.4)$$

现有的证据的确证实在通常的条件下，(3.7.4)式是成立的。必须指出，分界面上的条件(3.7.4)仅仅是假设，因此并不排斥在个别的特殊情况下， v 与 T 是间断的(见下面的讨论)。如果考虑理想流体，即忽略分子的输运过程，那么在通常条件下， v_t 和 T 可以是间断的，因为现在不存在抹平间断的机制。

不同于速度及温度，密度在两介质界面上一一般是间断的。由(3.7.3)式得知，介质1和介质2互不相混。如果

$$\rho_{\text{介质1}} \neq \rho_{\text{介质2}}$$

那么在两介质界面处，密度必然是间断的。

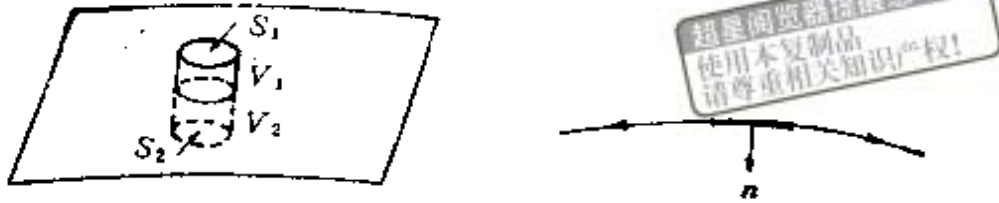


图 3.7.2

现在讨论另一类两介质界面处的边界条件。在分界面两边分别作如图3.7.2所示的两柱体元 V_1 与 V_2 ，母线平行于界面法向单位矢量 n ，其长度远小于另外两个方向的尺度。对 V_1+V_2 应用动量定理和能量守恒定理。先考虑动量定理。因惯性力和体力是高阶小量可不予考虑，于是作用在 V_1+V_2 边界上的面力平衡；又由于母线的尺度远小于 S_1, S_2 的尺度，于是作用在侧面的面力又可不予考虑。这就导致作用在 S_1, S_2 上的面力和表面张力（参阅下册附录2）平衡，写成式子为

$$P^{(1)} \cdot n - P^{(2)} \cdot n = -\gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) n \quad (3.7.5)$$

其中 R_1 与 R_2 是任意两个包含 n 的正交平面和界面交线的曲率半径（如曲率中心在 n 指向的那边，曲率半径取为正值）； $P^{(1)}$ 与 $P^{(2)}$ 分别是介质1和介质2的应力张量； γ 是表面张力。考虑到本构方程(3.4.17)，写出(3.7.5)式在界面法向和切向的分量表达式有

$$\mu_1 s_{ij}^{(1)} t_i n_j = \mu_2 s_{ij}^{(2)} t_i n_j \quad (3.7.6)$$

$$\begin{aligned} p^{(1)} - 2\mu_1 \left(s_{ij}^{(1)} n_i n_j - \frac{1}{3} s_{kk}^{(1)} \right) \\ = p^{(2)} - 2\mu_2 \left(s_{ij}^{(2)} n_i n_j - \frac{1}{3} s_{kk}^{(2)} \right) + \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned} \quad (3.7.7)$$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

此两式在两介质介面上任一点处成立。

现考虑能量守恒定律 (3.3.1)，因 $V_1 + V_2$ 的体积比起 S_1, S_2 是高阶小量。因此， $V_1 + V_2$ 内的 Tds 及 Φ, q 皆可不计，于是通过 $V_1 + V_2$ 表面的热流量相等，又因侧面的热流可忽略，于是有

$$\left(k \frac{\partial T}{\partial n}\right)_{\text{介质}_1} = \left(k \frac{\partial T}{\partial n}\right)_{\text{介质}_2} \quad (3.7.8)$$

归纳所得的结果我们有

$$T_{\text{介质}_1} = T_{\text{介质}_2}, \quad \left(k \frac{\partial T}{\partial n}\right)_{\text{介质}_1} = \left(k \frac{\partial T}{\partial n}\right)_{\text{介质}_2} \quad (3.7.9)$$

及

$$\left\{ \begin{aligned} v_{\text{介质}_1} &= v_{\text{介质}_2} \\ \mu_1 s_{ij}^{(1)} t_{ij} n_l &= \mu_2 s_{ij}^{(2)} t_{ij} n_l \\ p^{(1)} - 2\mu_1 \left(s_{ij}^{(1)} n_i n_j - \frac{1}{3} s_{kk}^{(1)} \right) &= p^{(2)} - 2\mu_2 \left(s_{ij}^{(2)} n_i n_j - \frac{1}{3} s_{kk}^{(2)} \right) + \nu \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned} \right. \quad (3.7.10)$$

3) 固壁处

固壁处边界条件是两介质界面处边界条件的重要特例，此时两介质中有一个是固体，另一个是流体（可以是气体或液体）。由于边界条件 (3.7.6) 与 (3.7.7) 中涉及到固相的那些项是未知的，因此通常不用这两个条件。于是固壁处的条件为

$$v_{\text{流}} = v_{\text{固}}, \quad T_{\text{介质}_1} = T_{\text{介质}_2}, \quad \left(k \frac{\partial T}{\partial n}\right)_{\text{介质}_1} = \left(k \frac{\partial T}{\partial n}\right)_{\text{介质}_2} \quad (3.7.11)$$

特别地，当固壁是静止时有

$$v = 0, \quad T_{\text{介质}_1} = T_{\text{介质}_2}, \quad \left(k \frac{\partial T}{\partial n}\right)_{\text{介质}_1} = \left(k \frac{\partial T}{\partial n}\right)_{\text{介质}_2} \quad (3.7.12)$$

$v_{\text{介质}_1} = v_{\text{介质}_2}$ 或 $v = 0$ 称为粘附条件或称无滑移条件。这是粘性流体重要假设之一。上世纪有人对固壁处粘附条件的正确性提出过



怀疑. 流体和固体接触面之间的分子动量交换是不是和流体内部某一面上的动量交换具有相同的性质? 通过实验直接检验粘附条件是困难的. 因为, 要达到这个目的必须在固体表面测量流体的速度, 而离表面太近必然对仪器有干扰, 这在流动缓慢的条件下是不许可的. 近代很精细的热丝技术能测到不小于离表面0.01厘米处的速度, 从测出的0.01厘米以外的速度分布曲线的趋势来看, 不滑动的假设和直接观测并不矛盾, 但这毕竟不能作为实验检验的科学根据. 粘附条件正确性的重要根据是在连续介质假设成立的条件下, 大量理论结果和实验观测一致. 最早的一个例子是粘性流体在圆管内流动, 根据粘附条件得到的结果诸如流量、压力梯度和管子半径的关系与实验符合得很好, 这就间接地证明了粘附条件的合理性. 另一个有力的依据来自分子运动论. 当气体的密度很小, 分子自由程大于仪器的尺寸, 连续介质假设不再成立时, 分子与固体表面作用就具有方向性. 当分子在表面上反射时, 它们不完全遵守平衡规律, 这样, 气体在物体表面上出现了滑动(温度也可以间断). 滑移速度是分子自由程的数量阶. 因此只要不考虑稀薄气体, 在连续介质假设成立的条件下, 壁面滑移速度是可以忽略的. 也就是说, 对宏观运动而言不滑移条件可以认为是足够精确的近似.

如果流体是理想的, 此时(3.7.11)和(3.7.12)变为

$$(v_n)_{流} = (v_n)_{固} \quad (3.7.13)$$

和

$$(v_n)_{流} = 0 \quad (3.7.14)$$

4) 自由面处

另一重要特例是正常条件下气-液界面处的边界条件, 即自由面处的边界条件. 例如河流海洋的水面就是一例. 此时气相(如空气)不一定处于静止状态. 只要它的运动不太强于液体的运动, 则由于气体的密度和粘性大大地小于液体的值, 因此由于惯性力和粘性力引起的压力及应力变化和液体相比可忽略不计. 由此我

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

们可以近似地认为气相在界面处的应力张量为 $-p_0\delta_{ij}$ ，其中 p_0 是气相的常压（例如可以是大气压力）。于是条件(3.7.6), (3.7.7)变为（忽略表面张力）：

$$s_{ij}t_j n_i = 0 \quad (3.7.15)$$

$$p - 2\mu \left(s_{ij}n_i n_j - \frac{1}{3} s_{kk} \right) = p_0 \quad (3.7.16)$$

条件 $v_{介质1} = v_{介质2}$ ，因气相中的速度未知，故常不采用。

在理想流体特殊情况下，(3.7.15)与(3.7.16)变为条件（忽略表面张力）

$$p = p_0 \quad (3.7.17)$$

习 题

1. 分别在定常及不定常流动的流体中，考虑一个由流体质点组成的流管元，两端的横截面分别为 $d\sigma_1$ 和 $d\sigma_2$ （如图所示）。设 φ ， \mathbf{a} 分别是定义在流管无中的标量函数和矢量函数，求它们在上述体积上的体积分的随体导数。



题 1

2. 试用拉格朗日观点推导拉格朗日变数下的连续性方程。
3. 设有一流体的流动。试用欧拉观点对下述各种坐标系求出连续性方程的一般表达式：
 - (1) 曲线坐标系中的连续性方程；
 - (2) 球坐标系中的连续性方程；
 - (3) 柱坐标系中的连续性方程；
 - (4) 极坐标系中的连续性方程（对平面流动情况）。
4. 试用欧拉观点对下述各种流动情况推导连续性方程：
 - (1) 平面辐射性流动；
 - (2) 空间辐射性流动；
 - (3) 流点都在通过某一直线的平面上流动；



(4) 流点做垂直于某固定直线的圆流动, 圆心都位于该直线上;

(5) 流点在共轴线的圆柱面上流动;

(6) 流点在共轴并有共同顶点的锥面上流动.

5. 在流动的流体中, 取一流管, 流管的两个不同横截面为 S_1 和 S_2 , 位于 S_1 和 S_2 间的流管的侧面为 S . 设由 S_1, S_2 与 S 三面所包围的流体体积为 V , 对 V 运用质量守恒定律, 求:

(1) 一般情况下的质量守恒定律的数学表达式;

(2) 可压缩流体定常流动下的质量守恒定律的数学表达式;

(3) 不可压缩流体流动的质量守恒定律的数学表达式.

6. 一不可压缩流体的流动, x 方向的速度分量是

$$u = ax^2 + by$$

z 方向的速度分量为零, 求 y 方向的速度分量 v , 其中 a 与 b 为常数. 已知 $y=0$ 时 $v=0$.

7. 二维、定常不可压缩流动, x 方向的速度分量为

$$u = e^{-x} \cosh y + 1$$

求 y 方向的速度分量 v . 设 $y=0$ 时, $v=0$.

8. 试证下述不可压缩流体的运动不可能存在

$$u = x, \quad v = y, \quad w = z$$

9. 试证下述不可压缩流体的运动是可能存在的:

$$(1) u = 2x^2 + y, \quad v = 2y^2 + z, \quad w = -4(x+y)z + xy;$$

$$(2) u = -\frac{2xyz}{(x^2+y^2)^2}, \quad v = \frac{(x^2-y^2)z}{(x^2+y^2)^2}, \quad w = \frac{y}{x^2+y^2};$$

$$(3) u = yzt, \quad v = xzt, \quad w = xyf.$$

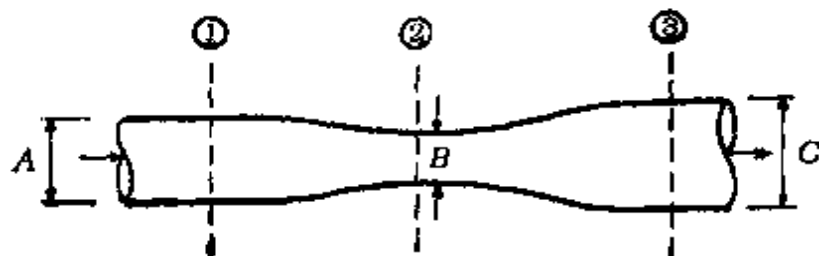
10. 已知流体质点在坐标系原点上的速度为 0, 且速度分量为

$$u = 5x, \quad v = -3y$$

问能构成不可压缩流体可能运动的第三个分量 w 应该是什么?

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请注明知识版权！

11. 如图所示的一不可压缩流体通过圆管的流动，体积流量为 Q 米³/秒，流动是定常的。



题 11

(1) 假定截面 1, 2 和 3 上的速度是均匀分布的，在三个截面处圆管的直径分别为 A, B, C 米，求三个截面上的速度。当 $Q=0.4$ 米³/秒, $A=0.4$ 米, $B=0.2$ 米, $C=0.6$ 米时计算速度值。

(2) 若截面 1 处的流量为 $Q=0.4$ 米³/秒，但密度按以下规律变化：

$$\rho_2 = 0.6\rho_1, \quad \rho_3 = 1.2\rho_1$$

求三个截面上的速度值。

12. 可压缩流体通过等直径的管道流动，沿轴向的速度为

$$u = \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_2 - u_1}{2} \tanh x$$

其中 u_1 与 u_2 分别是 x 为负无穷大和正无穷大时的速度。若在任一点上的密度都不随时间而变，在 $x = -\infty$ 处密度 $\rho = \rho_1$ 。求沿管道密度的分布。

13. 求下列速度场成为不可压缩流体可能流动的条件

(1) $u = a_1x + b_1y + c_1z, \quad v = a_2x + b_2y + c_2z, \quad w = a_3x + b_3y + c_3z;$

(2) $u = axy, \quad v = byz, \quad w = cyz + dz^2;$

(3) $u = kxyzt, \quad v = -kxyzt^2, \quad w = k\frac{z^2}{2}(xt^2 - yt).$

14. 试证在不可压缩流体的流动中，流管具有下列性质

(1) 各截面上流量相同;

(2) 流管不会在流体中产生和消失.

15. 假定流管形状不随时间变化, 设 A 为流管的横截面积, 且在 A 断面上的流动物理量是均匀的. 试证明连续方程具有下述形式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A) + \frac{\partial}{\partial s}(\rho Au) = 0$$

式中 u 是速度, ds 是流动方向的微元弧长.

16. 设有一流动存在, 运用拉格朗日观点采用流体体积元的方法, 推导运动方程 (矢量形式).

17. 设有一流动存在, 运用欧拉观点采用取有限体积的方法, 推导运动方程 (矢量形式).

18. 设有一流动存在, 运用欧拉观点分别在下述坐标系中, 采用体积元的方法, 推导运动方程.

(1) 直角坐标系; (2) 球坐标系; (3) 柱坐标系;

*(4) 曲线坐标系; *(5) 自然坐标系.

19. 用拉格朗日观点推导理想流体的拉格朗日型运动方程.

20. 对一流速为 v 的流动, 如果选用的参考系是以常角速度 ω 转动, 同时又以常速度 u 前进, 试证其运动方程为

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \omega \times v + \left(\frac{d' r'}{dt} \cdot \nabla' \right) v = F + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot P$$

式中

$$\frac{d' r'}{dt} = v - u - \omega \times r'$$

带“'”的量表示动参考系中的量.

21. 设某一流体流动为 $u = 2y + 3z, v = 3z + x, w = 2x + 4y$. 该流体的粘性系数 $\mu = 0.008$ 牛顿·秒/米², 求其切应力.

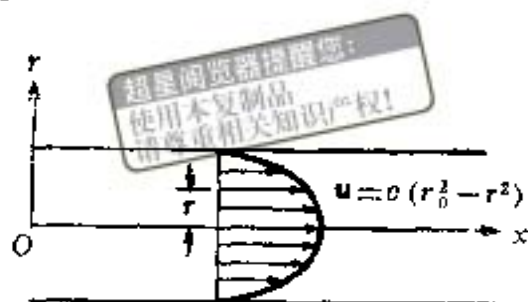
22. 已知粘性流体在圆管中作层流流动时的速度分布为

$$u = c(r_0^2 - r^2)$$

其中 c 为常数, r_0 是圆管半径, 求:

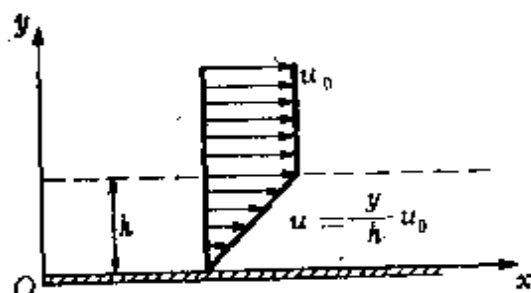
(1) 单位长度圆管对流体的阻力;

(2) 在管内 $r=r_0/2$ 处沿圆管每单位长流体的内摩擦.



题 22

23. 一长为 l , 宽为 b 的平板, 完全浸没于粘性系数为 μ 的流体中, 流体以速度 u_0 沿平板平行流过. 假定流体质点在平板两



题 23

面上任何一点的速度分布情况如左图所示.

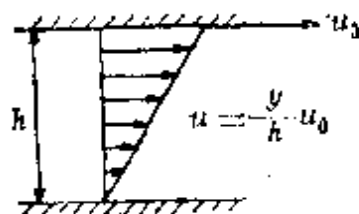
求: (1) 平板上的总阻力;

(2) $y=h/2$ 处的流体内摩擦力;

(3) $y=3h/2$ 处的流体内摩擦力.

24. 设有一流动存在. 运用欧拉观点, 分别采用取有限体积的方法和取体积元的方法, 推导能量方程.

25. 两个无限的平行平板间, 充满着不可压缩的绝热粘性流体, 粘性系数为 μ , 密度为 ρ , 下面板固定不动, 上面板以速度 15 厘米/秒沿水平方向移动. 设 $\mu=0.01$ 达因·秒/厘米², $h=25$ 厘米, 求流场中每单位体积的内能增加.



题 25

26. 证明在封闭容器中不可压缩流体的能量耗损率为

$$\int_V \Phi d\tau = \mu \int_V (\text{rot } \mathbf{v})^2 d\tau$$

式中 Φ 为耗损函数.

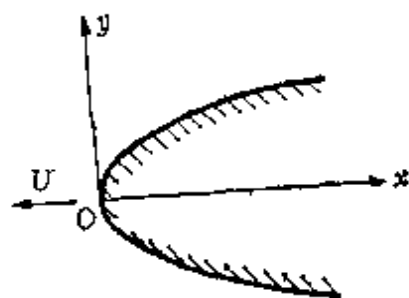
27. 一半径为 R 的实心圆柱 (无限长) 在充满着不可压缩的粘性流体空间中以等角速度 ω 转动, 流场的速度分布为

$$u = -R^2\omega \frac{y}{r^2}, \quad v = R^2\omega \frac{x}{r^2}$$

计算 $\rho \int_V \frac{dU}{dt} d\tau$, 并证明其等于 $L \cdot \omega$ (忽略热传导), 其中 L 为作用在圆柱体上的力矩.

28. 在静止的流体中, 设有一剖面 $y = kx^{1/2}$, 以常速度 U 沿水平方向运动. 若 u 与 v 表示边界上的速度分量, 证明:

$$\frac{v}{u-U} = \frac{k^2}{2y}$$



题 28

29. 在一静止的流体中, 设有一半半径为 a 的球以速度 U, V, W 运动. 假设 u, v, w 表示流体在边界面上的速度的三个分量. U, V, W 为常数.

(1) 写出任一时间 t 球面的数学表达式 (设 $t=0$ 时球心位于坐标原点);

(2) 证明: 流体边界面上的速度分量满足方程式

$$(x-Ut)(u-U) + (y-Vt)(v-V) + (z-Wt)(w-W) = 0$$

30. 若可变椭球

$$\frac{x^2}{a^2 k^2 t^4} + k t^2 \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) = 1$$

是一个流体在 t 时可能的边界面, 设 u, v, w 是边界面上的速度分量. 试决定 u, v, w ; 并说明满足连续性要求.

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

第四章 流体的涡旋运动

4.1 引言

至少在一部分区域中 $\text{rot} \mathbf{v} \neq 0$ 的流体运动称为有旋运动，若在整个流动区域中 $\text{rot} \mathbf{v} = 0$ ，则称此流体运动为无旋运动。

自然界出现的流体运动绝大多数都是有旋运动。这些有旋运动有时以明显可见的涡旋形式表现出来，例如桥墩后的涡旋区，船只运动时船尾后面形成的涡旋，大气中的龙卷风等等。但在更多的情况下流体运动的涡旋性并不是一眼能够看出来的。例如当物体运动时，在物体表面形成一层很薄的边界层，在此薄剪切层中每一点都是涡旋，而这些涡旋肉眼却是观察不到的。至于自然界大量存在着的湍流运动更是充满着尺度不同的大小涡旋。

研究涡旋运动具有实际和理论两方面的意义。

先从实际意义谈起。涡旋的产生和变化对于流体运动有着重要的影响，例如在气象学中，气旋的形成和变化常常决定了气象条件的变化。涡旋的影响有时有利于生产实际，有时却不利于生产实际。当飞机与船只在流体中运动时，尾部所产生的涡旋消耗着动能，从而形成了飞机或船只航行时的阻力；另一方面，涡旋的产生也将降底旋转机械（水轮机、汽轮机等）的功率。这些都是不利于生产实际的。但是，有时流体的涡旋运动也有其有利于生产实践的一面。例如在大型水坝建筑物中，为了保护坝基不被急泻而下的水流冲坏，通常采用消能设备，人为地制造涡旋运动以消耗水流的动能。由此可见研究涡旋运动具有明显的实际意义。

研究涡旋运动也具有重要的理论意义。不用很久，我们就会看

到，无旋运动比有旋运动容易处理，因为它在数学上有着重要的简化。因此我们对于在什么条件下流体运动可以近似地看成是无旋运动的问题十分感兴趣，而这个问题的解决也有赖于涡旋运动的研究。

本章研究涡旋运动的规律，通过涡旋的运动学性质和动力学性质的研究，揭示涡旋的产生、发展和消亡的规律。最后两节我们还将研究给定涡旋场和散度场求速度场的问题。

4.2 涡旋的运动学性质

因为

$$\operatorname{div} \Omega = \nabla \cdot (\nabla \times v) = 0$$

所以涡旋场是无源场，根据场论中无源场的性质，涡旋的运动学性质可叙述如下：

1) 涡管中任一横截面上的涡通量保持同一常数值。由于涡通量在涡管的每一个横截面上都相等，因此可以用它来表征涡管内涡旋的强弱，称之为涡管强度。显见， $\Omega_i \sigma_i$ 是涡管元的强度，其中 σ_i 是任一与 Ω 垂直的涡管元的横截面的面积， Ω_i 是其上的涡旋值。

2) 涡管不能在流体中产生或消失。

涡管只可能在两种情形下在流体中产生或消失。第一种情形

是涡管的截面积在流体中趋于零，此时涡量将趋于无穷。这在物理上显然是不可能的

(图4.2.1)；第二种情形是涡管在流体中突然中断或发生。现在我们证明这种情形也是不可能发生的。为此，我们在流体中作一封闭曲面，将涡管在流体中发生的管头或中止的管尾包在其中。易见，此时进入此封闭曲面的涡通量将不等于流出此封闭曲面的涡通量，于是通过整个封闭曲面的涡通量将不为

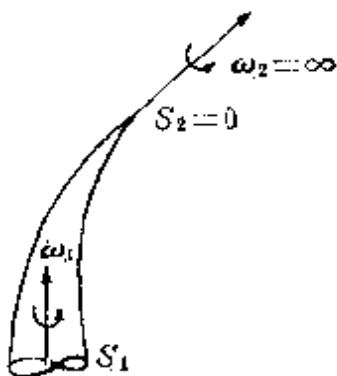


图 4.2.1

零。这显然与涡旋场是无源场的事实矛盾。此矛盾证明，涡管不能突然在流体中中断或发生。

既然涡管不能在流体中产生或消失，因此一般说来它只能在流体中自行封闭，

形成涡环，或将其头尾搭在固壁或自由面上，或延伸至无穷远处（参看图 4.2.2）。

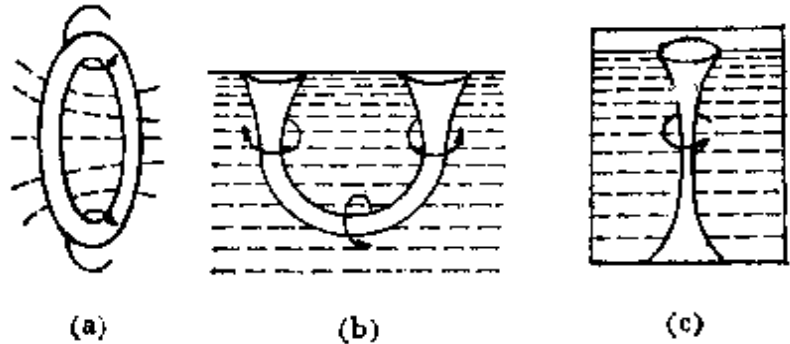


图 4.2.2

最后应该强调指出，上述有关涡管的运动学性质不

牵涉到应力，因此它们既适用于理想流体，也适用于粘性流体。

4.3 亥姆霍兹方程

研究涡旋的动力学性质即涡旋的随体变化规律存在着两条途径。第一条途径是直接研究涡通量的随体变化规律；第二条途径是间接研究速度环量的随体变化规律，然后通过斯托克斯定理再求出涡旋的随体变化规律。这两种方法都能得到相同的结果。为了对涡旋的动力学性质了解得更深入些，我们同时介绍这两种方法。第一种方法要用到速度矢量满足的运动方程，已在 3.6 节中导出；第二种方法则要用到涡旋矢量满足的涡量方程。这个方程还未推导过，所以需要在研究涡通量和速度环量的随体导数之前把它推导出来并阐明它的物理意义。

写出 $\mu = \text{常数}$ 时兰勃-葛罗米柯形式的运动方程

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} + \Omega \times v = F - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta v + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot v) \quad (4.3.1)$$

对此式的两边取旋度得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \nabla \times (\Omega \times v) \\ = \nabla \times F - \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) + \nabla \times (v \Delta v) + \frac{1}{3} \nabla \times (v \nabla (\nabla \cdot v)) \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

利用场论中基本运算公式 9，上式左边可改写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \nabla \times (\Omega \times v) &= \frac{\partial \Omega}{\partial t} + (v \cdot \nabla) \Omega - (\Omega \cdot \nabla) v + \Omega (\nabla \cdot v) - v (\nabla \cdot \Omega) \\ &= \frac{d\Omega}{dt} - (\Omega \cdot \nabla) v + \Omega (\nabla \cdot v) \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

这里已考虑到 $\nabla \cdot \Omega = 0$ 的事实。将(4.3.3)式代入(4.3.2)式得

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} - (\Omega \cdot \nabla) v + \Omega (\nabla \cdot v) \\ = \nabla \times F - \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) + \nabla \times (v \Delta v) + \frac{1}{3} \nabla \times (v \nabla (\nabla \cdot v)) \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

这就是 $\mu = \text{常数}$ 时，涡旋矢量应该满足的微分方程。

若流体是理想正压的且外力有势，则

$$\mu = 0, \quad F = -\nabla \bar{V}, \quad \frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \Pi$$

其中 \bar{V} 是力势函数，

$$\Pi = \int \frac{dp}{\rho}$$

于是(4.3.4)右边各项皆为零。涡量方程变为

$$\frac{d\Omega}{dt} - (\Omega \cdot \nabla) v + \Omega (\nabla \cdot v) = 0 \quad (4.3.5)$$

(4.3.5)式称为亥姆霍兹方程。

不可压缩粘性流体在有势外力作用下，其涡旋矢量满足下列

方程

$$\frac{d\Omega}{dt} - (\Omega \cdot \nabla)v = \nu \Delta \Omega \quad (4.3.6)$$

现在考察涡量方程 (4.3.4) 各项的物理意义. 让我们首先阐明运动方程 (4.3.1) 各项的物理意义. v 可理解为速度, 也可理解为单位质量上的动量. (4.3.4) 式说明, 在随体运动过程中引起单位质量上的动量发生变化的因素一共有三种: (1) 外力 F ;

(2) 压力梯度 $-\frac{1}{\rho} \nabla p$; (3) 粘性应力 $\nu \left(\Delta v + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot v) \right)$. 完全

类似地可以考察 (4.3.4) 各项物理意义. 首先说明 $\Omega/2$ 除了将它看成涡旋矢量一半外, 还可将它理解为单位转动惯量上的动量矩. 考虑球心在 O 点, 半径为 r 的无限小球形微团. 对于通过球心的任一轴线, 此球形微团的动量矩为

$$L = \int (r \times v) \rho d\tau$$

利用速度分解定理, 将 v 在 O 点附近分解为平动速度 v_k , 转动速度 $\frac{1}{2} \varepsilon_{klm} \Omega_l x_m$ 及变形速度 $s_{kn} x_n$ 之和, 并用 ρ 在 O 点的值 ρ_0

代替 ρ , 我们有

$$\begin{aligned} L_i &= \int (r \times v)_i \rho d\tau \\ &= \int \varepsilon_{ijk} x_j \left(v_k + \frac{1}{2} \varepsilon_{klm} \Omega_l x_m + s_{kn} x_n \right) \rho_0 d\tau \end{aligned}$$

考虑到 v_k, Ω_l, s_{kn} 都是在 O 点取值, 因而是常数, 故得

$$\begin{aligned} L_i &= \varepsilon_{ijk} v_k \rho_0 \int x_j d\tau + \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \frac{1}{2} \Omega_l \int x_j x_m \rho_0 d\tau \\ &\quad + \varepsilon_{ijk} s_{kn} \int x_j x_n \rho_0 d\tau \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

由于球体的对称性, 我们有

超星浏览器提醒您：
使用本文制品
请尊重相关知识产权！

$$\int x_j d\tau = 0$$

$$\int x_j x_m \rho_0 d\tau = 0 \quad (\text{当 } j \neq m \text{ 时}), \quad \int x_j x_m \rho_0 d\tau = J/2 \quad (\text{当 } j = m \text{ 时})$$

其中 J 是相对于通过圆心的任意轴线的转动惯量，于是 (4.3.7) 式变为

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{4} (\delta_{ij} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jj}) J \delta_{jm} \Omega_i + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} s_{kn} J \delta_{jn} \\ &= (3J - J) \frac{1}{4} \Omega_i + \epsilon_{ijk} \delta_{kj} J \end{aligned}$$

即

$$L = \frac{J}{2} \Omega \tag{4.3.8}$$

(4.3.8) 表明： $\Omega/2$ 可理解为单位转动惯量上的动量矩。

和动量相比，在随体运动过程中引起动量矩发生变化的因素要复杂些。从 (4.3.4) 式我们看到，外力、压力梯度及粘性应力的旋度仍然是使动量矩发生变化的因素。但是和动量变化不同的是，当外力有势流体正压时，外力和压力梯度对动量矩变化没有贡献，而它们在运动方程中对动量的变化却仍起作用。除了以上共同的因素外还有两项是动量方程中没有的，这就是 $-\Omega(\nabla \cdot v)$

和 $(\Omega \cdot \nabla)v$ ， $(\Omega \cdot \nabla)v$ 的物理意义比较清楚，例如当流体有压缩时

$-\Omega(\nabla \cdot v)$

有 $\nabla \cdot v < 0$ 。它将使转动惯性减少，从而使动量矩发生变化。 $(\Omega \cdot \nabla)v$ 的物理意义不是一眼能看清的，需要作进一步分析。写出等式

$$(\Omega \cdot \nabla)v = |\Omega| \lim_{PQ \rightarrow 0} \frac{\delta v}{PQ}$$

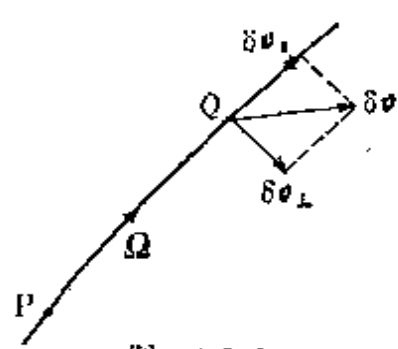


图 4.3.1

其中 P 与 Q 是涡线上的两相邻点(图4.3.1)，而 δv 是相对 P 点上的速度而言的 Q 点上的相对速度。将 δv 分成垂直于涡线的分量 δv_{\perp}

和平行于涡线的分量 δv_{\parallel} , 则我们看到

$$\lim_{PQ \rightarrow 0} \frac{\delta \Omega_{\perp}}{PQ}$$

使涡线扭曲, 而

$$\lim_{PQ \rightarrow 0} \frac{\delta v_{\parallel}}{PQ}$$

将使涡线拉伸或压缩, 结果都使转动惯性发生变化, 从而引起转动惯量的改变.

总结以上所说, 影响动量矩发生变化的因素有: (1)外力; (2)压力梯度; (3)粘性应力; (4)流体的压缩或膨胀; (5)涡线的拉伸、压缩和扭曲.

4.4 凯尔文(Kelvin)定理

设在 $t=t_0$ 时刻, 在流体中取出一条由流体质点组成的物质线 L , 任取一个张在其上的物质面 S , 于是沿物质线 L 的速度环量 Γ 和通过物质面 S 的涡通量 I 分别为

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{r}, \quad I = \int_S \boldsymbol{\Omega} \cdot \delta \mathbf{S} \quad (4.4.1)$$

根据斯托克斯定理有

$$\Gamma = I \quad (4.4.2)$$

现研究速度环量的随体导数 $\frac{d\Gamma}{dt}$ 和涡通量的随体导数 $\frac{dI}{dt}$. 根据

(2.12.5)与(2.12.6)式, 并考虑到(4.3.1)及(4.3.4)式我们有

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= \oint_L \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta \mathbf{r} = \oint_L \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} - \oint_L \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot \delta \mathbf{r} \\ &\parallel + \oint_L \mathbf{v} \left(\Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) \cdot \delta \mathbf{r} \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

$$\frac{dI}{dt} = \int_S \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) \cdot \delta \mathbf{S}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{S} - \int_S \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) \cdot \delta \mathbf{S} \\
 &\quad + \int_S \nabla \times \left(\nu \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) \cdot \delta \mathbf{S} \quad (4.4.4)
 \end{aligned}$$

(4.4.3)和(4.4.4)式表明：外力、压力梯度及粘性力沿封闭回线 L 的环量是引起 Γ 和 I 随体发生变化的三大因素。

如果我们考虑的是理想流体，则粘性力等于零。于是粘性力沿封闭曲线的环量

$$\begin{aligned}
 &\oint_L \nu \left(\Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) \cdot \delta \mathbf{r} \\
 &= \int_S \nabla \times \left(\nu \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right) \cdot \delta \mathbf{S}
 \end{aligned}$$

亦为零，此时，导致速度环量和涡通量发生变化的粘性力的因素不起作用。

其次，如果外力有势，即

$$\mathbf{F} = -\text{grad} \mathcal{V}$$

其中 \mathcal{V} 是力势函数。此时，外力沿封闭曲线 L 的环量

$$\begin{aligned}
 \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \delta \mathbf{S} &= \oint_L \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} = \int_L -\text{grad} \mathcal{V} \cdot \delta \mathbf{r} \\
 &= -\oint_L \delta \mathcal{V} = 0
 \end{aligned}$$

等于零。由此可见，有势的外力亦不会引起速度环量和涡通量发生变化。

最后，如果流体是正压的，即

$$\frac{1}{\rho} \text{grad} p = \text{grad} \Pi \left(\text{其中 } \Pi = \int \frac{dp}{\rho} \right)$$

则压力梯度沿封闭曲线 L 的环量

$$\int_S \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) \cdot \delta S$$

$$= \oint_L \frac{1}{\rho} \text{grad } p \cdot \delta r = \oint_L \text{grad } \Pi \cdot \delta r = \oint_L \delta \Pi = 0$$

亦为零，这样正压流体亦不会引起速度环量和涡通量发生变化。

从以上的分析可以看出，粘性、斜压与外力无势是引起速度环量和涡通量发生变化的三大因素。如果这三个因素都不存在，亦即如果我们考虑的是理想正压流体，且外力有势，则

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0, \quad \frac{dI}{dt} = 0$$

积分之得

$$\Gamma = \text{常数}, \quad I = \text{常数}$$

即沿任一封闭物质线的速度环量和通过任一物质面的涡通量在运动过程中守恒。这样我们得到了著名的凯尔文定理。

凯尔文定理 如果我们考虑的是理想正压流体，且外力有势，则沿任一封闭物质线的速度环量和通过任一物质面的涡通量在运动过程中恒不变。

现在我们利用凯尔文定理来证明理想正压流体在有势外力作用下，涡旋的某些动力学性质。

4.5 涡旋不生不灭定理（拉格朗日(Langrange)定理）

涡旋不生不灭定理（拉格朗日定理） 若流体理想、正压，且外力有势。如果初始时刻在某部分流体内无旋，则以前或以后任一时刻中这部分流体皆无旋。反之，若初始时刻该部分流体有旋，则以前或以后的任何时刻中这一部分流体皆为有旋。

证明 设初始时刻在所考虑的那部分流体 C 中，运动无旋，则在这部分流体中有

$$\Omega = 0$$

于是矢量 Ω 通过 C 内任一物质面 S 的涡通量

$$\int_S \boldsymbol{\Omega} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

根据凯尔文定理，在以前或以后任一时刻，涡通量 $\int_{S'} \boldsymbol{\Omega} \cdot d\mathbf{S}$ 皆为零，其中 S' 是组成 S 的流体质点在该时刻组成的曲面。由于 S 面是任意的，因而 S' 面也是任意选取的，故得 $\boldsymbol{\Omega} = 0$ ，这样我们便证明了在以前或以后的任一时刻内这部分流体永远是无旋的。

现在我们证明定理的后一部分。设初始时刻该部分流体有旋，则以前或以后的任何时刻中这部分流体皆为有旋。今用反证法证明之。设在初始时刻以前或以后的某一时刻中这部分流体无旋，则根据刚才证明的定理的前一部分内容，立即推出，在任一时刻特别地在初始时刻流体是无旋的，这个结论显然与初始时刻流体是有旋的假定矛盾。此矛盾证明了定理的后一部分内容是正确的。

上面我们证明了在理想、正压及外力有势的三个假定下，无旋则永远无旋，有旋则永远有旋的事实。下面我们进一步研究如果运动是有旋的，则涡旋的随体变化规律如何。这些规律总结起来体现在下述亥姆霍兹的两个定理上。

4.6 涡线及涡管强度保持定理（亥姆霍兹定理）

a) 涡线保持定理（亥姆霍兹第一定理）

我们先证涡面保持定理。

涡面保持定理 如果理想流体是正压的，且外力有势，则在某一时刻组成涡面的流体质点在以前或以后任一时刻也永远组成涡面。

证明 设初始时刻 $t = t_0$ 时，流体中有一涡面 Σ ，则根据涡面的定义，涡旋矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 在涡面法线单位矢量 \mathbf{n} 上的投影等于零，即

$$\boldsymbol{\Omega}_n = 0$$

今在涡面上任取一面积 S ，则通过 S 的涡通量为零

$$\int_S \Omega_n dS = 0$$

设在以前或以后的某一时刻，组成涡面 Σ 的流体质点组成新的曲面 Σ' ，而 S 面变成 Σ' 上的 S' 面。现证 Σ' 必为涡面。根据凯尔文定理，我们有

$$\int_{S'} \Omega_n dS = \int_S \Omega_n dS = 0$$

因 S' 是任意选取的，由此推出

$$\Omega_n = 0$$

根据定义， S' 是一涡面。定理证毕。



涡管是涡面的一种特殊情况，因此由涡面保持定理立即推得下列涡管保持定理。

涡管保持定理 如果理想流体是正压的，且外力有势，则在某时刻组成涡管的流体质点在以前或以后任一时刻也永远组成涡管。

现在证明涡线保持定理。

涡线保持定理（亥姆霍兹第一定理） 如果理想流体是正压的，且外力有势，则在某时刻组成涡线的流体质点在前一或后一时刻也永远组成涡线。

证明 设初始时刻 $t=t_0$ 时，流体中有一条由流体质点组成的涡线 L ，满足

$$\delta r \times \frac{\Omega}{\rho} = 0$$

今设以前和以后任一时刻，这些流体质点组成曲线 L' (图4.6.1)，现欲证 L' 也是涡线，即欲证

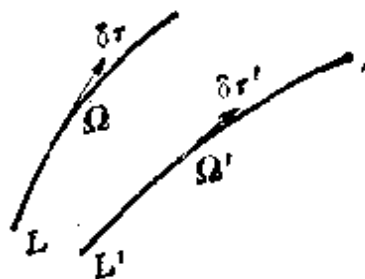


图 4.6.1

$$\delta r' \times \frac{\Omega'}{\rho} = 0 \quad (4.6.1)$$

仍成立。显然，如果我们能证明

$$\frac{d}{dt} \left(\delta r \times \frac{\Omega}{\rho} \right) = 0 \quad (4.6.2)$$

则(4.6.1)就是(4.6.2)式的自然推论。

理想正压流体且外力有势时，涡旋矢量 Ω 满足亥姆霍兹方程

$$\frac{d\Omega}{dt} - (\Omega \cdot \nabla)v + \Omega(\nabla \cdot v) = 0 \quad (4.6.3)$$

考虑到连续性方程

$$\nabla \cdot v = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$



后，(4.6.3)式可改写为

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\Omega}{dt} - \frac{\Omega}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} - \left(\frac{\Omega}{\rho} \cdot \nabla \right) v = \frac{d}{dt} \left(\frac{\Omega}{\rho} \right) - \left(\frac{\Omega}{\rho} \cdot \nabla \right) v = 0 \quad (4.6.4)$$

现在利用(4.6.4)式证明(4.6.2)。显然

$$\frac{d}{dt} \left(\delta r \times \frac{\Omega}{\rho} \right) = \delta r \times \frac{d}{dt} \left(\frac{\Omega}{\rho} \right) + \frac{\Omega}{\rho} \times \frac{d(\delta r)}{dt}$$

考虑到

$$\frac{d(\delta r)}{dt} = \delta v = (\delta r \cdot \nabla)v$$

及(4.6.4)式，上式可写为

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\delta r \times \frac{\Omega}{\rho} \right) &= \left(\delta r \times \frac{\Omega}{\rho} \cdot \nabla \right) v + \left(\frac{\Omega}{\rho} \times \delta r \cdot \nabla \right) v \\ &= - \left(\frac{\Omega}{\rho} \times \delta r \cdot \nabla \right) v + \left(\frac{\Omega}{\rho} \times \delta r \cdot \nabla \right) v = 0 \end{aligned}$$

此即(4.6.2)式。于是我们证明了涡线保持定理。

既然组成涡管的流体质点在任何时刻都组成涡管，因此研究涡管强度的随体变化规律是有意义的。由于涡管强度等于通过任一横截面的涡通量，根据凯尔文定理在理想正压流体且外力有势的条件下，涡通量在运动过程中是不变的，由此推出涡管强度守

恒。

b) 涡管强度保持定理 (亥姆霍兹第二定理)

涡管强度保持定理 如果流体是理想正压, 且外力有势, 则涡管的强度在运动过程中恒不变。

上面我们证明了理想正压流体在有势外力作用下涡旋随体变化的几个主要定理, 即涡旋不生不灭定理, 涡线保持定理及涡管强度保持定理。这几个定理全面地描述了在上述条件下涡旋的随体变化规律。首先我们看到流体运动的涡旋性是保持的, 即某时刻无旋则永远无旋; 某时刻有旋则永远有旋。其次对于有旋运动, 涡线、涡管保持定理成立, 即组成涡线、涡管的流体质点永远组成涡线、涡管。好象流体质点冻结在涡线上随涡线一起运动。同时在运动过程中涡管强度也保持不变。总结上面所说的可以看到理想正压流体在有势外力作用下, 涡旋随体变化的最主要性质是保持性或谓冻结性。

例 1 对于在重力场作用下的理想不可压缩流体, 考察均匀来流定常绕流的涡旋性问题。显然, 理想、正压、质量力有势这三个条件现在都满足。在不脱体绕流情况下, 流场中任一点的流体质点都来自无穷远处, 因无穷远处运动无旋, 所以根据涡旋不生不灭定理, 整个流场都是无旋的。

例 2 考虑理想不可压缩流体在重力场作用下从静止状态开始的任何运动。由于静止状态是无旋的, 根据涡旋不生不灭定理, 这类运动在任何时刻都是无旋的。

在自然界中可以经常观察到涡旋的产生和消失。例如船舶运行时, 船尾后面不断产生的强烈涡旋; 划船时产生的涡旋随着时间的推移逐渐消失等等。这些都是粘性引起的, 它破坏了涡旋不生不灭性质。除此之外, 流体的斜压、质量力无势也可以产生环流。下面我们举例说明粘性、不正压、外力无势是怎么破坏涡旋守恒性的。

4.7 流体不正压及外力无势时涡旋的产生

粘性、不正压、外力无势是产生涡旋运动的三个要素。本节将通过具体例子说明流体不正压及外力无势时涡旋是如何产生的。先讲流体不正压的情形，设流体是理想的，且外力有势。此时，根据公式(4.4.3)环量的随体变化公式是

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \oint_L \frac{1}{\rho} \text{grad } p \cdot \delta r$$



其中 L 是由流体质点组成的封闭回线，设逆时针方向是其正方向。利用斯托克斯公式上式可写成

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= - \int_S \text{rot} \left[\frac{1}{\rho} \text{grad } p \right] \cdot dS \\ &= \int_S \frac{1}{\rho^2} (\text{grad } \rho \times \text{grad } p) \cdot dS \end{aligned} \quad (4.7.1)$$

其中 dS 是张于 L 上的面积矢量，其法线方向 n 与 L 的正方向构成右手螺旋。如果我们考虑的流体是正压的，即密度只是压力的函数

$$\rho = \Phi(p)$$

则

$$\text{grad } \rho \times \text{grad } p = \Phi'(p) \text{grad } p \times \text{grad } p = 0$$

于是

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0$$

这就是凯尔文定理的速度环量守恒的结果。若流体是斜压的，即密度不仅仅是压力的函数，而且还和其他变数如温度、湿度等有关，此时

$$\text{grad } \rho \times \text{grad } p \neq 0$$

因此一般说来

$$\frac{d\Gamma}{dt} \neq 0$$

此时，随着时间的推移，速度环量将发生变化，也就是说产生或消灭了涡旋。当 $\frac{d\Gamma}{dt} > 0$ 时， Γ 增加，涡通量是增加的；当 $\frac{d\Gamma}{dt} <$

0 时 Γ 减少，涡通量减少。现在用几何方法研究 $\frac{d\Gamma}{dt}$ 大于或小于零的问题。 $p = \text{常数}$ 和 $\rho = \text{常数}$ 的曲面分别称为等压面和等密度面。当流体是正压时，显然此时等压面和等密度面重合，它们的法线方向 $\text{grad } p$ 及 $\text{grad } \rho$ 当然也重合，于是

$$\text{grad } \rho \times \text{grad } p = 0$$

如果流体是斜压，等压面和等密度面将相交，于是

$$\text{grad } \rho \times \text{grad } p \neq 0$$

若在 S 上 $\text{grad } \rho \times \text{grad } p$ 的方向与 dS 的方向成锐角，则 $\frac{d\Gamma}{dt} >$

0。若 $\text{grad } \rho \times \text{grad } p$ 与 dS 成钝角，则 $\frac{d\Gamma}{dt} < 0$ ，这样我们可以从 $\text{grad } \rho, \text{grad } p, dS$ 这三个矢量的相互位置来判断随着时间推移 Γ 是增加或减少的。下面我们以气象学中赤道国家的贸易风为例说明上述几何方法的应用。

考虑环绕地球的大气层，设大气是干燥的。则压力 p ，密度 ρ ，温度 T 以克拉珀龙方程联系起来

$$p = \rho RT \quad (4.7.2)$$

其中 R 是气体常数。假定地球是圆球，高度相同的地方压力相同，于是等压面是以地心为中心的球面。其次作等密度面。由于太阳照射强度不同，同一个高度，赤道要比北极温度高，因此沿球面从北极向赤道温度逐渐增高。根据 (4.7.2) 式考虑到在同一高度 p 不变，我们得到密度由北极向赤道逐渐减少。其次在同一

地点,高度愈大,空气愈稀薄,

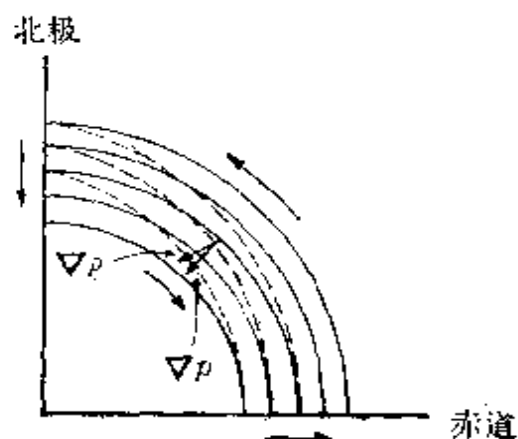


图 4.7.1

即密度愈小,因此随着高度的增加密度将逐渐减小.从上面的讨论不难看出等密度面将自赤道开始向上倾斜直至北极(如图4.7.1中虚线所示).这样等密度面便和等压面相交.作等压面和等密度面的法向矢量 $\text{grad } p$, 与 $\text{grad } \rho$, 因为它们都是向着 p 和 ρ 的增加方向, 所以箭头都向球心方向(如图所示).于是易见 $\text{grad } \rho \times \text{grad } p$ 的方向将与 dS 的方向一致. 即

$$\frac{d\Gamma}{dt} > 0$$

这点从(4.7.1)式可以立即看出.此式表明,随着时间的推移将产生涡旋,伴随着涡旋有下列形式向逆时针方向流动的环量:空气从底层由北纬流至南纬,在赤道处上升,然后再从上层流回北纬,由那里再流下来.这种环量就是气象学中在赤道国家出现的贸易风.

现在我们来考虑外力无势时涡旋的产生.设流体理想且不正压.还是以地球上的大气运动为例.假设我们考虑地球的自转,此时在运动坐标系中流体的相对运动方程是

$$\frac{dv_r}{dt} = F - \frac{1}{\rho} \text{grad } p - w_e - 2(\omega \times v_r)$$

其中 v_r 是相对速度, w_e 是牵连加速度, ω 是地球的自转角速度.

设大气质点只受地心的吸力,则外力有势.于是

$$F = -\text{grad } \tilde{V}$$

其次显然有

$$w_e = -\omega^2 R = -\text{grad} \left(\frac{\omega^2 R^2}{2} \right)$$

其中 R 是质点到地球自转轴线的距离，于是

$$\frac{dv_r}{dt} = -\text{grad} \left(\bar{V} - \frac{\omega^2 R^2}{2} \right) - \frac{1}{\rho} \text{grad} p - 2(\omega \times v_r)$$

将它代入 (4.4.3) 式得

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_S \frac{1}{\rho^2} (\text{grad} \rho \times \text{grad} p) \cdot d\mathbf{S} - 2 \oint_L (\omega \times v_r) \cdot dr \quad (4.7.3)$$

右边第一项对速度环量变化的影响已在上面讲过，由于它的存在将产生贸易风。现在我们研究由于科氏力出现外力无势时对 Γ 变化的影响。在地球层以位于旋转轴上某点为心作一垂直于地球自转轴线的圆。将此圆取作 L ，令逆时针是正方向。则由于贸易风，在圆上每一点将有自北纬到南纬的速度，于是从图 4.7.2 不难看出

$$(\omega \times v_r) \cdot dr = (v_r \times dr) \cdot \omega$$

将是正的量。由 (4.7.3) 式得

$$\frac{d\Gamma}{dt} < 0$$

这就是说随着时间增加， Γ 将减少。于是产生如图所示顺时针方向由东向西的风。因此贸易风将不是严格地自北向南吹，而是自东北向西南吹(参阅图4.7.2)。这个结果是和实际情况相吻合的。

上面我们讨论了流体不正压、外力无势时涡旋的产生问题。下一节转来研究粘性对涡旋影响问题。

4.8 粘性流体中涡旋的扩散性

粘性是促使涡旋产生、发展、消失的最经常也是最重要的因素。绝大多数粘性流体运动都是有旋运动，因此研究涡旋在粘性

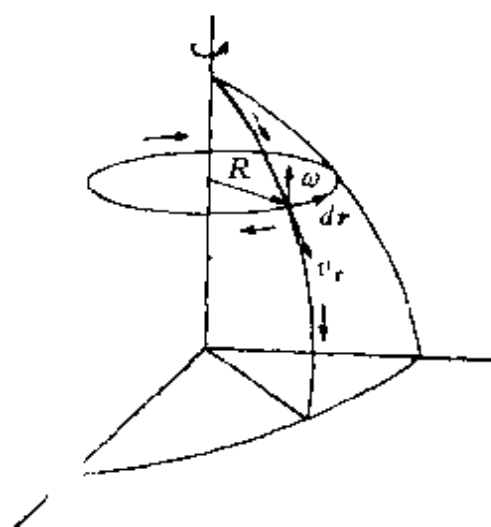


图 4.7.2

流体中的运动规律具有重大意义。涡旋在粘性流体中的运动规律与理想正压流体在有势外力作用下的情况很不相同。如前所述，当流体是理想、正压、且外力有势时，无旋则永远无旋，有旋则永远有旋。此外，流体质点及涡量好似冻结在涡线及涡管上随之一起运动互不传递。由此可见，在理想正压流体外力有势的假定下，涡旋变化的最主要性质是保持性或谓冻结性。与此相反，在粘性流体中，由于粘性作用，涡旋强的地方将向涡旋弱的地方输送涡旋，直至涡旋强度相等为止。因此保持性不复存在，出现的是涡旋扩散现象。现在我们以不可压缩粘性流体平面运动为例，说明涡旋的扩散性。

由(4.3.6)式我们知道，不可压缩粘性流体的涡旋矢量应该满足下列方程

$$\frac{d\Omega}{dt} - (\Omega \cdot \nabla)v = \nu \Delta \Omega \quad (4.8.1)$$

因为我们考虑的是平面运动，此时

$$w = 0, \quad \Omega_x = \Omega_y = 0$$

令

$$\Omega = \Omega_z$$

于是(4.8.1)式化为

$$\frac{d\Omega}{dt} = \nu \Delta \Omega \quad (4.8.2)$$

在场内任取一点 M ，在 M 点邻域内取一小面积 S ，其周界为封闭曲线 L ，应用场论基本运算公式(22)得

$$\int_S \Delta \Omega dS = \int_L \frac{\partial \Omega}{\partial n} dL$$

其中 n 是 L 的外法线单位矢量的方向。

根据中值公式

$$\int_S \Delta \Omega dS = (\Delta \Omega)_M \cdot S$$

于是

$$(\Delta\Omega)_M = \frac{1}{S} \int_L \frac{\partial\Omega}{\partial n} dL \quad (4.8.3)$$

设 M 点的涡量比周围的都大, 此时

$$\frac{\partial\Omega}{\partial n} < 0$$

由 (4.8.3) 式得

$$(\Delta\Omega)_M < 0$$

于是根据 (4.8.2) 式我们有

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_M < 0$$

此式说明下一时刻 M 点上的涡量 Ω 将减小。同理, 若 M 点的涡量 Ω 比周围的都小, 此时

$$\frac{\partial\Omega}{\partial n} > 0$$

由 (4.8.3) 式得

$$(\Delta\Omega)_M > 0$$

于是根据 (4.8.2) 式我们有

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_M > 0$$

此式说明下一时刻 M 点的涡量 Ω 将增加。这样我们从涡旋所满足的微分方程出发说明了平面运动涡旋的扩散性。

4.9 涡旋场和散度场所感应的速度场

在流体力学的各种实际问题中常常在流动区域内出现涡旋。这些涡旋感生速度场使整个流动状态发生变化。例如大气中出现的旋风, 圆柱绕流问题中圆柱后面呈现的涡对、涡街, 有限翼展后缘延伸出去的自由涡旋等等。为了解决上述各种类型的问题需要根据涡旋场的强度确定速度场。另一方面在某些绕流问题中,



虽然整个流场都是无旋的，但物体对流体的扰动可用一奇点分布（例如涡层分布）来替代，这时亦需要根据强度已知的涡旋场确定出感生的速度场。

实际上涡旋多出现在一定的体积内，若单位体积内强度分布为 $\Omega(x, y, z)$ 则 $d\tau$ 体积内的涡旋强度为 $\Omega d\tau$ ，但有时也局限在很薄一层曲面上，此时将曲面看成无限薄的涡层，并引进涡层的强度分布是方便的（图



图 4.9.1

4.9.1). 设高为 l ，面积为 $d\sigma$ 的体积 $d\tau$ 内涡旋强度为 Ω ，则总强度为

$$\Omega d\tau = l\Omega d\sigma$$

若令 $\lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ d\sigma \rightarrow \infty}} l\Omega = \pi$ ，并称 π 为涡层强度分布，则

$$\Omega d\tau = \pi d\sigma$$

有时涡旋也可能集中在很细的一根涡管上。此时可近似地将此涡管看成是几何上的一条线，称之为涡丝。下面引进涡丝强度的概念。考虑面积为 σ ，长为 dl 的体积 $d\tau$ ，其中涡旋强度分布为 Ω ，则

$$\Omega d\tau = \Omega \sigma dl = \Omega \sigma dl$$

其中 Ω 为涡旋矢量的大小， dl 为线段元矢量，其大小为 dl ，方向为涡线矢量的方向。令

$$\lim_{\substack{\sigma \rightarrow 0 \\ \Omega \rightarrow \infty}} \sigma \Omega = \Gamma$$

并称 Γ 为涡丝强度，则得 $\Omega d\tau = \Gamma dl$ 。

下面我们将一般地解决体涡旋分布感生速度场的问题，而把面涡旋分布，线涡旋分布作为一般结果的特例导出。

为了更加普遍起见，我们假定在涡旋场内还可以有散度分布。

设在有限体积 τ 内给定涡旋场和散度场，而 τ 以外的区域内既无旋亦无散度，于是

$$\begin{cases} \tau \text{内: } \operatorname{div} \mathbf{v} = \Theta, \operatorname{rot} \mathbf{v} = \Omega \\ \tau \text{外: } \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0 \end{cases} \quad (4.9.1)$$

其中 Θ 与 Ω 分别是已知的速度散度及涡旋函数。现欲求上述涡旋场和散度场所感应的速度场 \mathbf{v} 。

本问题是线性的，所以可以拆成下列两个问题。令

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

其中 \mathbf{v}_1 满足

$$\begin{cases} \tau \text{内: } \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = \Theta, \operatorname{rot} \mathbf{v}_1 = 0 \\ \tau \text{外: } \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0, \operatorname{rot} \mathbf{v}_1 = 0 \end{cases} \quad (4.9.2)$$

\mathbf{v}_2 满足

$$\begin{cases} \tau \text{内: } \operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 0, \operatorname{rot} \mathbf{v}_2 = \Omega \\ \tau \text{外: } \operatorname{div} \mathbf{v}_2 = 0, \operatorname{rot} \mathbf{v}_2 = 0 \end{cases} \quad (4.9.3)$$

\mathbf{v}_1 代表无旋散度场所感生的速度， \mathbf{v}_2 代表有旋无散度场所感生的速度。容易验证， \mathbf{v}_1 及 \mathbf{v}_2 的矢量和就是有旋散度场所感生的速度 \mathbf{v} 。现在先来确定 \mathbf{v}_1 ，由 $\operatorname{rot} \mathbf{v}_1 = 0$ ，根据无旋场性质推出

$$\mathbf{v}_1 = \operatorname{grad} \varphi \quad (4.9.4)$$

其中 φ 是速度势函数，将之代入 $\operatorname{div} \mathbf{v}_1 = \Theta$ ，得

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Theta$$

即

$$\Delta \varphi = \Theta \quad (4.9.5)$$

这就是数理方程中著名的泊桑方程，其解为

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\Theta(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\tau \quad (4.9.6)$$

(4.9.6) 式可以很容易地采用流体力学直观的方法求出。将 τ 内整个散度场分成许多个流体微团，每个流体微团可看作点源，其强度为 $\Theta d\tau$ 。由于本问题是线性的，整个散度场感生的速度场可以看成是所有点源感生的速度场之和。这样一来问题便归结为求

强度为 $\Theta d\tau$ 的点源所感生的速度场. 设点源所在点 M 的坐标为 (ξ, η, ζ) , 其强度为 $\Theta d\tau$, 欲求它对 M 外任一点 $P(x, y, z)$ 感生的速度势(见图4.9.2). 令

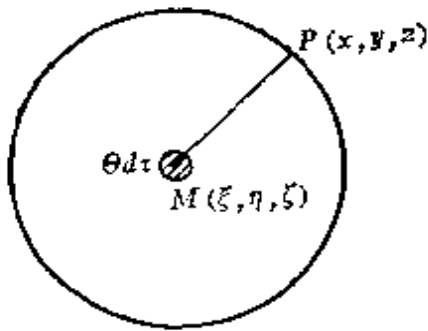


图 4.9.2

对 M 外任一点 $P(x, y, z)$ 感生的速度势(见图4.9.2). 令

$$r = MP = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$$

以 M 为心, r 为半径作一圆球. 由于对称性, 球上任一点上的速度 v , 都是相等的, 根据质量守恒定律, 写出通过球面的流量得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = v_r = \frac{\Theta(\xi, \eta, \zeta) d\tau}{4\pi r^2}$$

积分之得

$$\varphi = -\frac{\Theta(\xi, \eta, \zeta)}{4\pi r} d\tau \quad (4.9.7)$$

这就是 M 点的点源对 P 点感生的速度势. 对整个 τ 积分(4.9.7)式, 即得泊桑方程的解(4.9.6)式. 注意(4.9.6)式中 ξ, η, ζ 是变动点, 它经过 τ 内所有的点. 将(4.9.6)式代入(4.9.4)式得

$$v_1 = \text{grad} \left[-\frac{1}{4\pi} \int \frac{\Theta(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\tau \right] \quad (4.9.8)$$

现在再来确定 v_2 . 由 $\text{div} v_2 = 0$, 推出

$$v_2 = \text{rot} A \quad (4.9.9)$$

A 称为矢势, 将之代入 $\text{rot} v_2 = Q$, 并利用场论中基本运算公式15得

$$\text{rot rot} A = \text{grad div} A - \Delta A = Q \quad (4.9.10)$$

现在我们寻求既满足

$$\Delta A = -Q \quad (4.9.11)$$

又满足

$$\text{div} A = 0 \quad (4.9.12)$$

的解。显然这样解一定是(4.9.10)式的解，但是(4.9.10)的解不一定能同时满足(4.9.11)和(4.9.12)。下面我们求出(4.9.11)的解，最后验证它同时也满足(4.9.12)式。(4.9.11)是矢量方程，其三个分量方程相当于三个泊桑方程，因此其解为

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\boldsymbol{\Omega}}{r} d\tau \quad (4.9.13)$$

现证由(4.9.13)式确定的 \mathbf{A} 满足(4.9.12)式。显然

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \boldsymbol{\Omega} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} d\tau$$

考虑到

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

而

$$\operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\operatorname{grad}' \frac{1}{r}$$

其中“ $'$ ”代表对 ξ, η, ζ 的微分，于是

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \boldsymbol{\Omega} \cdot \operatorname{grad}' \frac{1}{r} d\tau$$

因为

$$\operatorname{div}' \frac{\boldsymbol{\Omega}(\xi, \eta, \zeta)}{r} = \frac{1}{r} \operatorname{div}' \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \operatorname{grad}' \frac{1}{r} = \boldsymbol{\Omega} \cdot \operatorname{grad}' \frac{1}{r}$$

于是

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \operatorname{div}' \frac{\boldsymbol{\Omega}}{r} d\tau = \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \frac{\boldsymbol{\Omega}_n}{r} dS \quad (4.9.14)$$

S' 是 τ 的界面，因 S' 上 $\boldsymbol{\Omega}_n = 0$ （因为不然的话，它就和涡旋的运动学性质 $\operatorname{div} \boldsymbol{\Omega} = 0$ 矛盾），于是

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$$

即得证明。通过上面的分析可以确信，(4.9.13)式所确定的 \mathbf{A} 是(4.9.10)式的解，将(4.9.13)代入(4.9.9)式得

$$v_2 = \text{rot} \left[\frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\Omega(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\tau \right] \quad (4.9.15)$$

将(4.9.8)及(4.9.15)式相加起来, 即得有旋散度场(4.9.1)的解

$$\begin{aligned} v &= v_1 + v_2 \\ &= \text{grad} \left[-\frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\Theta(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\tau \right] \\ &\quad + \text{rot} \left[\frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\Omega(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\tau \right] \end{aligned} \quad (4.9.16)$$

可以将解(4.9.16)推广到整个无界区域 τ 中去, 这只要对 Θ 与 Ω

再作某些限制即可. 例如要求 Θ 及 Ω 在无穷远处的阶次是 $\frac{1}{R^3}$.

如果只考虑涡旋场, 则(4.9.16)式变为

$$v = \text{rot} \left[\frac{1}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\Omega(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\tau \right] \quad (4.9.17)$$

下面将(4.9.17)式用于涡面和曲线涡丝两种特殊情形. 在涡面情形有

$$\Omega d\tau = \pi dS$$

于是(4.9.17)变成

$$v = \frac{1}{4\pi} \text{rot} \int_S \frac{\pi}{r} dS \quad (4.9.18)$$

在曲线涡丝情形则有

$$\Omega d\tau = \Gamma dl$$

于是

$$v = \frac{1}{4\pi} \text{rot} \int_L \frac{\Gamma}{r} dl \quad (4.9.19)$$

由于 Γ 是常量, rot 是对 x, y, z 微分的, 而 dl 是 ξ, η, ζ 的函数, 因此

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \times dl = - \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{r \times dl}{r^3} \quad (4.9.20)$$

注意这里 dl 与 Ω 相同, (4.9.20) 式代表整个曲线涡丝所感生的速度, 而 dl 一段涡丝元所感生的速度则为

$$dv = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{dl \times r}{r^3} \quad (4.9.21)$$

其大小为

$$|dv| = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\sin \alpha dl}{r^2} \quad (4.9.22)$$

这里 α 是矢量 r 与 dl 的夹角, (4.9.21) 与 (4.9.22) 式就是著名的皮握-萨瓦(Biot-Savart)公式, 它告诉我们曲线涡丝段 dl 所感生的速度 dv , 其方向是 dl 与 r 两矢量的叉乘, 即垂直于 dl 及 r ; 其大小则与距离 r 的平方成反比, 而与 dl 及 dl 与 r 的夹角 α 的正弦成正比(图4.9.3).

考虑曲线涡丝, O 是涡丝上一点, 现推导 AB 对 O 点邻域内流体质点 P 的诱导速度, 取自然坐标系 $Ox_1x_2x_3$, O 点为坐标原点, t, n, b 分别为切线, 主法线和付法线方向的单位矢量(图4.9.4). 设 P 点在过 O 点的涡丝法平面内, 则

$$r_p = x_2 n + x_3 b$$

涡丝元 AB 上动点 M 的坐标矢量近似为

$$r_M \approx l \cos \alpha t + l \sin \alpha n \approx l t + \frac{1}{2} \kappa l^2 n$$

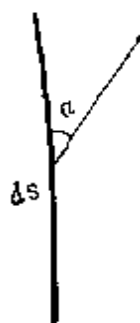


图 4.9.3

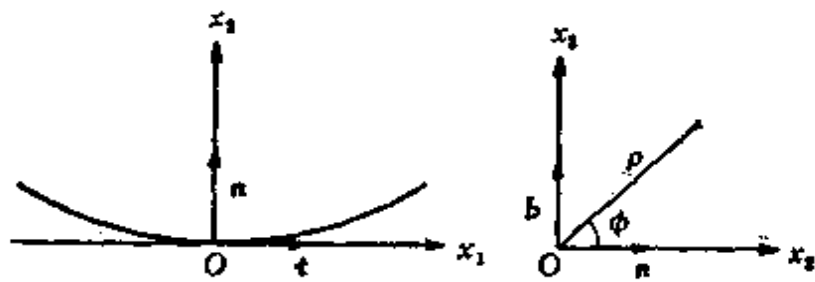


图 4.9.4

其中 κ 是曲线涡丝在 O 点的曲率. 由此得

$$dl \approx (t + \kappa l n) dl$$

$$r = r_p - r_M = -lt + \left(x_2 - \frac{1}{2} \kappa l^2\right) n + x_3 b$$

代入(4.9.20)式得

$$dv = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{x_3 \kappa l t - x_3 n + \left(x_2 + \frac{1}{2} \kappa l^2\right) b}{\left[x_2^2 + x_3^2 + l^2(1 - x_2 \kappa) + \frac{1}{4} \kappa^2 l^4\right]^{3/2}} dl$$

将曲线涡丝分成两部分, 一部分在 AB ; $-L \leq l \leq L$ 内, 另一部分在 AB 外. 令 $x_2^2 + x_3^2 = \rho^2$, $m = \frac{l}{\rho}$, 并考虑到 $x_2 = \rho \cos \phi$, $x_3 = \rho \sin \phi$, 则 AB 的贡献为:

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\frac{L}{\rho}}^{+\frac{L}{\rho}} \frac{\kappa m \sin \phi t - \rho^{-1} \sin \phi n + \rho^{-1} \cos \phi b + \frac{1}{2} \kappa m^2 b}{\left[1 + m^2(1 - \kappa \rho \cos \phi) + \frac{1}{4} \kappa^2 \rho^2 m^4\right]^{3/2}} dm$$

当 $\rho \rightarrow 0$ 时, 分母趋于 $(1 + m^2)^{3/2}$. 积分之得 $\rho \rightarrow 0$ 时 v 的渐近表达式为

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi} \left[-(1 + m^2)^{-1/2} \kappa \sin \phi t + \rho^{-1} m (1 + m^2)^{-1/2} (b \cos \phi - n \sin \phi) + \frac{1}{2} \kappa b \{-m(1 + m^2)^{-1/2} + \ln[m + (1 + m^2)^{1/2}]\} \right]_{-\frac{L}{\rho}}^{+\frac{L}{\rho}}$$

考虑到

$$\ln(m + \sqrt{1 + m^2}) \Big|_{-L/\rho}^{+L/\rho} \approx \ln\left(2\frac{L}{\rho}\right)^2 = 2\ln\frac{L}{\rho} + \text{常数}$$

有

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi\rho} (b \cos \phi - n \sin \phi) + \frac{\Gamma\kappa}{4\pi} b \ln \frac{L}{\rho} + \text{常数}$$

超星阅读器水印：
四川 (4.9.23)

显然 AB 外涡丝段对速度的贡献总是有限的，因此比起 AB 段是次要的，可不予考虑。

O 点邻域内流体速度由两部分组成。第一部分是(4.9.23)式中右边第一项，这部分是 O 点处涡旋旋转运动引起的，当 $\rho \rightarrow 0$ 时，它趋于无穷。这是因为涡丝的强度有限，而截面积无限小，因此涡旋强度无限大，从而导致无限大速度。必须指出，这部分速度是绕 O 点旋转的，因此并不引起 O 点处涡丝运动。第二部分是(4.9.23)式中右边第二项，这是 O 点附近涡丝诱导引起的，与曲率半径有关，当 $\rho \rightarrow 0$ 时它也趋于无穷，但奇性较弱是对数型的。这部分速度不是使流体质点绕涡丝打转，而是使 O 点处涡丝运动，且运动速度为无限大。实际问题中涡管总是有限粗的，所以自感引起的涡管运动速度也是有限的，涡丝运动速度无限大是一种理想的极限情形。由于第二项与曲率 κ 有关，所以对变曲率涡管而言，各点运动速度不同，因此涡管在运动过程中将发生变形。只有在曲率相同的圆形涡管时，自感引起的涡管运动速度才是到处一样的，涡管以垂直于涡管所在平面的方向，且以常速向前运动，在运动过程中涡管不变形。其次，当 $\kappa = 0$ ，即考虑直线涡丝，涡丝本身不运动。

总结起来我们看到，变曲率孤立的曲线涡丝由于自身诱导作用（与曲率有关）将在流体中运动，并在运动中不断地改变自己的形状。

4.10 直线涡丝. 圆形涡丝. 涡层

a) 直线涡丝

给定一无穷长直线涡丝；涡丝的强度是 Γ ，方向垂直向上；涡丝外的流体皆无旋。求此直线涡丝所感生的速度场。

取柱坐标, z 轴与涡丝方向重合, 且其正方向与涡旋方向重合 (图4.10.1).

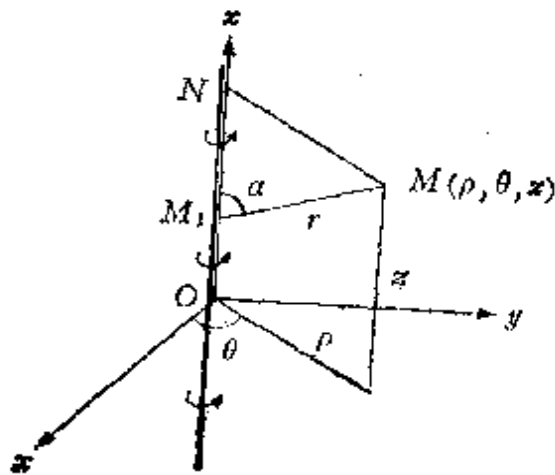


图 4.10.1

用 $M(\rho, \theta, z)$ 表涡丝外一点的坐标, 则 M 点上感应速度 v 根据皮握-萨瓦公式为

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{dl \times r}{r^3}$$

这里 dl 是弧元素矢量, 它的方向与涡旋方向重合, 积分路线由下至上; r 是涡丝点到 M 点的距离; 注意, 现在 ρ, θ, z 是不变点, 而涡丝上的点 $M_1(\xi,$

$\eta, \zeta)$ 是变动点.

显然, v 的方向与 $dl \times r$ 重合, 而 $dl \times r$ 与 θ_0 同向, 于是

$$v = \left[\frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha}{r^2} d\xi \right] \theta_0 \quad (4.10.1)$$

其中 α 是 r 与 dl 两矢量的夹角. 因为 L 是由下而上的, 所以积分限应从 $-\infty$ 到 $+\infty$.

从图 4.10.1 中可见

$$r = \rho \csc \alpha, \quad M, N = z - \zeta = \rho \cotg \alpha$$

于是

$$-d\xi = -\rho \csc^2 \alpha d\alpha$$

将上两式代入(4.10.1)式, 我们便将变数 ξ 换成 α

$$\begin{aligned} v &= \left[\frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\rho \sin \alpha \csc^2 \alpha}{\rho^2 \csc^2 \alpha} d\alpha \right] \theta_0 \\ &= \frac{\Gamma}{4\pi \rho} [-\cos \alpha]_0^\pi \theta_0 = \frac{\Gamma}{2\pi \rho} \theta_0 \end{aligned} \quad (4.10.2)$$

若涡旋的方向由上而下, 则上式 + 号应换成 - 号

$$v = -\frac{\Gamma}{2\pi\rho} \theta_0 \quad (4.10.3)$$

从(4.9.2)或(4.10.3)都可看出, 速度 v 与 z 无关. 即在平行 z 轴的直线上, 各点的速度完全相同, 因此无穷长直线涡丝感生的是平面运动. 我们只需考虑一个垂直 z 轴的平面即可, 此时涡丝在此平面上表现为一个点涡. 由此可见(4.10.3)也可看成平面上的点涡所感应的速度场.

最后, 我们考虑一段直线涡丝 AB 对空间任一点 M 所感应的速度. 设 A, B 点的 α 分别为 β 与 $\pi - \gamma$, 则根据(4.10.2)式得

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi\rho} (\cos\beta + \cos\gamma)\theta_0$$

若 AB 是一根半无穷长直线涡丝, 即令 B 点趋于无穷, $\alpha \rightarrow \pi$, $\gamma \rightarrow 0$, 而 A 点处的 $\beta = \frac{\pi}{2}$, 即得

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi\rho} \theta_0 \quad (4.10.4)$$

由此可见, 半无穷长涡丝对空间任一点感应的速度恰好是无穷长涡丝所感应速度的一半.

b) 圆形涡丝

考虑半径为 a 的圆形涡丝, 取直角坐标系 $Oxyz$, 涡丝所在的平面为 $x-y$ 平面, z 轴通过圆心 O , 同时我们取柱坐标系 (ρ, θ, z) (图 4.10.2). 两坐标系之间的关系为

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta$$

由于轴对称性, 通过 Oz 轴的所有平面上的运动都是一样的, 因此不失普遍性可考察平面 $\theta = 0$ 处

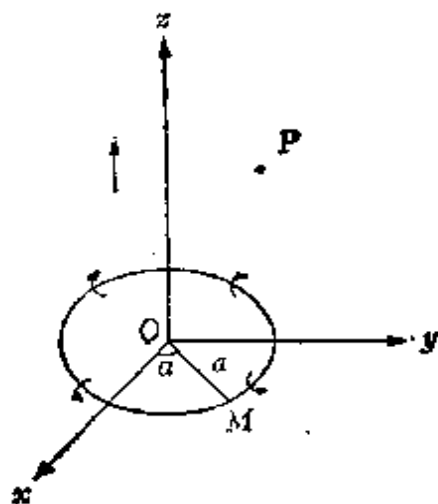


图 4.10.2

的流体运动. 根据(4.9.19)式, 圆形涡丝对 $\theta=0$ 平面上任一点 $(\rho, 0, z)$ 所诱导的速度为

$$v = \text{rot} A, \quad A = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{dl}{r} \quad (4.10.5)$$

设涡丝上动点 M 的坐标为 ξ, η, ζ , OM 与 Ox 轴的夹角为 α , 则

$$\xi = a \cos \alpha, \quad \eta = a \sin \alpha, \quad \zeta = 0$$

于是

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(\rho - a \cos \alpha)^2 + (-a \sin \alpha)^2 + z^2} \\ &= \sqrt{\rho^2 + a^2 + z^2 - 2a\rho \cos \alpha} \end{aligned}$$

而

$$dl = (-a \sin \alpha d\alpha, a \cos \alpha d\alpha, 0)$$

于是 A 在直角坐标系的三个分量为

$$A_x = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-a \sin \alpha d\alpha}{r} = 0$$

$$A_y = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a \cos \alpha d\alpha}{r} = A(\rho, z)$$

$$A_z = 0$$

这里我们已考虑到 A_x 表达式中的被积函数是 α 的奇函数, 因而积分为零. 现转到柱坐标中, 考虑到 $\theta=0$ 平面上有,

$$A_\rho = A_x, \quad A_\theta = A_y$$

于是有

$$\begin{cases} A_\rho = A_z = 0 \\ A_\theta = A(\rho, z) = \frac{\Gamma a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sqrt{\rho^2 + a^2 + z^2 - 2a\rho \cos \alpha}} \end{cases} \quad (4.10.6)$$

而根据(4.10.5)

$$v_\rho = -\frac{\partial A}{\partial z}, \quad v_\theta = 0, \quad v_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A)}{\partial \rho} \quad (4.10.7)$$

下面将 A 的表达式转换一下, 令 $\alpha = \pi + 2\beta$, 并引进

$$k^2 = \frac{4\rho a}{z^2 + (\rho + a)^2} \quad (4.10.8)$$

于是

$$\begin{aligned} A(\rho, z) &= \frac{\Gamma a}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{-2 \cos 2\beta d\beta}{\sqrt{a^2 + \rho^2 + z^2 + 2a\rho(1 - 2 \sin^2 \beta)}} \\ &= -\frac{\Gamma a}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - 2 \sin^2 \beta) d\beta}{\sqrt{z^2 + (a + \rho)^2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} \\ A(\rho, z) &= \frac{\Gamma}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{\rho}} \left\{ \left(\frac{2}{k} - k \right) \kappa(k) - \frac{2}{k} E(k) \right\} \quad (4.10.9) \end{aligned}$$

其中

$$\kappa(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}}, \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} d\beta \quad (4.10.10)$$

是第一类和第二类完全椭圆积分，有表可查。

现在分析所得结果，容易验证，在涡丝所在平面上 $v_\rho = 0$ ，其速度方向平行 Oz 轴。根据上节(4.9.23)式涡丝附近的质点速度以 $1/\rho$ 阶次趋于无穷，而圆形涡丝本身则以 $\ln \rho$ 阶次的无穷大速度向前运动。根据(4.10.7)及(4.10.9)式画出的流线图如图4.10.3所示。奇怪的是虽然涡丝以无穷大速度向前运动，而涡丝附近的流线仍为封闭曲线。这大概是因为，涡丝附近旋转运动的速度以 $1/\rho$ 阶次趋于无穷，而涡丝本身的运动速度则是 $\ln \rho$ 阶次的无穷大，与 $1/\rho$ 相比是高阶小量，因此起主要作用的仍为旋转运动，流线呈封闭形。

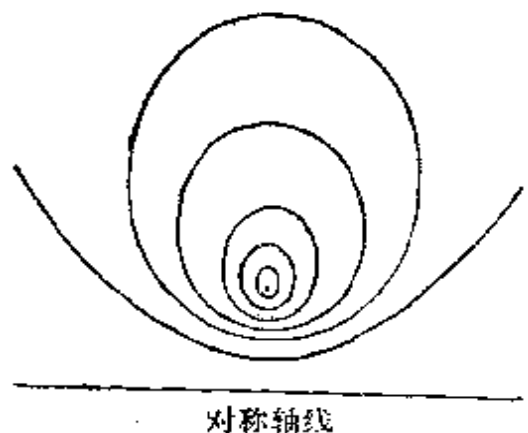


图 4.10.3

实际上遇到的涡环，其横截面都是有限的。吸烟者从圆形嘴唇中可吹出涡环来，此涡环因涡核内充满烟气而变得明显可见，一离开嘴唇它很快地以定常的速度向前运动，与圆形涡丝的结果定性地符合。实验室中经常采用下述装置产生涡环，做一个方形箱子，后壁做成有弹性的，前壁开一圆形孔道。在箱子内事先盛满烟气，轻轻敲打后壁就会有涡环逸出，半径为 ϵ 的有限粗涡环的前进速度可由(4.9.23)式略做修改得到，它为

$$\frac{\Gamma}{4\pi a} \ln \frac{a}{\epsilon} \quad (4.10.11)$$

可见随着涡环半径 a 的增长，涡环前进速度减少。利用这个性质可解释著名的两涡环穿行的游戏。设利用前述装置产生了两个具有相同对称轴线的涡环，一前一后，后涡环产生的速度场在前涡环上产生向外的径向速度分量，使前涡环的半径不断增大 (Γ 不变)。

根据(4.10.11)式，前进速度逐渐减少。与之同时，前涡环产生的速度场在后涡环上产生向里的径向速度分量，使后涡环的半径不断减小，从而使它的前进速度不断加快，最终穿过前涡环，于是前后涡环易位。上述过程可以一直重复下去直到涡环能量耗散完为止。在实验室里通常能看到一到两次穿行

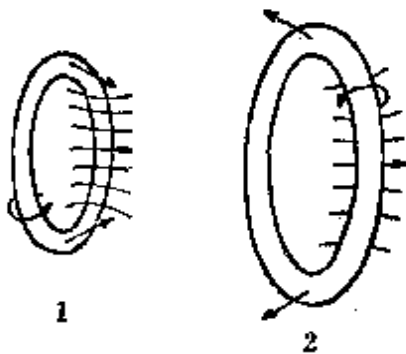


图 4.10.4

(图4.10.4).

c) 涡层

在流体力学中经常遇到切向速度在很薄一层里发生剧烈变化的现象。例如冷热空气接触面就是切向风速发生剧烈变化的地方。平板在自己的平面里突然在流体中起动的时(图4.10.5),在平板附近形成很薄的一层,在此薄层中,速度很快从起动速度 U 降为0。在流体力学中这类切向速度剧烈变化的薄层经常抽象为几

何上的一个面，在这个面上切向速度发生间断，这样的面称为切向速度间断面。切向速度间断面是和涡层等价的。切向速度间断面实际上是具有很强剪切速度的薄层，显然此层内点点有旋，因此它是涡层。反过来，一个涡层可以看成是由无限的涡丝系列组成(图4.10.6)，涡层上下的流体在此涡丝系列综合作用下产生了如图所示的切向速度间断，所以涡层也是切向速度间断面。

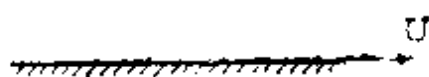


图 4.10.5



图 4.10.6

现在我们从公式(4.9.18)出发证明涡层是切向速度间断面，同时建立涡层强度和切向速度间断值之间的关系。

为了简单起见考虑常强度 π 的无界平板涡层，涡层外的流体处处无旋。根据公式(4.9.18)，涡层对流体任一点 P 的诱导速度为

$$\begin{aligned} v &= \nabla \times \left[\int_S \frac{\pi}{4\pi r} dS \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{r \times \pi}{r^3} dS \\ &= -\frac{1}{4\pi} \pi \times \int_S \frac{r}{r^3} dS \end{aligned}$$

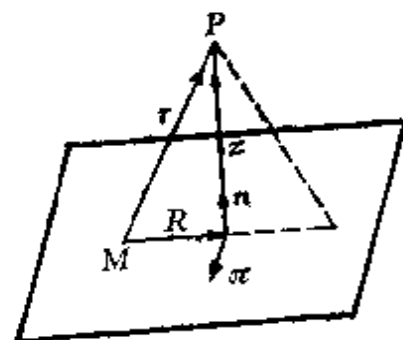


图 4.10.7

将 r 分成法向部分 $(n \cdot r)n$ 和切向部分之和，其中 n 是涡层的法向单位矢量(图4.10.7)。切向部分由于正负成对出现积分后得零，故可不必考虑。于是

$$v = \frac{1}{2} \pi \times n \left[\frac{1}{2\pi} \int_S \frac{n \cdot r}{r^3} dS \right]$$

由于

$$\frac{1}{2\pi} \int_S \frac{n \cdot r}{r^3} dS = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} R dR d\theta$$

$$= \frac{z}{2} \int_0^{\infty} \frac{d(R^2+z^2)}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \frac{z}{2} \left[-\frac{2}{(R^2+z^2)^{1/2}} \right]_0^{\infty} = 1$$

所以

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\pi} \times \mathbf{n} \quad (4.10.12)$$

(4.10.12) 式表明涡层两边的流体速度到处都是均匀的，它平行于涡层且和 $\boldsymbol{\pi}$ 垂直，但走向不同，上半平面向左而下半平面则向右。因此涡层是切向速度间断面。间断值 $[\mathbf{v}]$ 与 $\boldsymbol{\pi}$ 的关系为

$$[\mathbf{v}] = \boldsymbol{\pi} \times \mathbf{n} \quad (4.10.13)$$

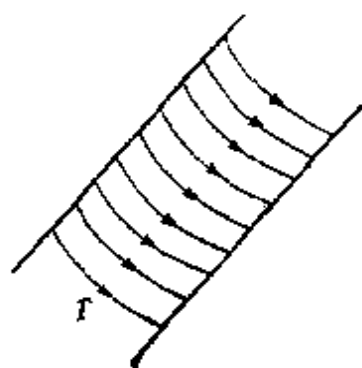


图 4.10.8

考虑具有任意横截面的柱形涡层， $|\boldsymbol{\pi}|$ 是常数，且 $\boldsymbol{\pi}$ 处处与柱体母线垂直。于是所有的涡线都是具有同一形状的平面曲线(图4.10.8)。现在(4.9.18)式给出

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{r} \times \boldsymbol{\pi}}{r^3} dS \\ &= -\frac{|\boldsymbol{\pi}|}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\oint_L \frac{\mathbf{r} \times d\mathbf{l}}{r^3} \right] dm \end{aligned}$$

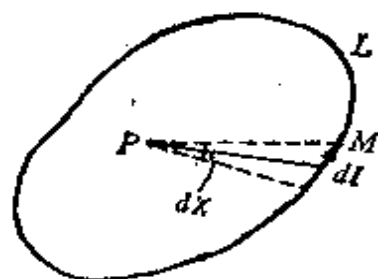


图 4.10.9

其中 dm 是母线的线段元， $d\mathbf{l}$ 是涡线的弧元素矢量。 \mathbf{r} 在平行母线方向上的投影由于被积函数的反对称性对 m 的积分无贡献，令 \mathbf{r} 在包含 P 点的横截面上的投影为 \mathbf{t} 。于是

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -\frac{|\boldsymbol{\pi}|}{4\pi} \oint_L \mathbf{t} \times d\mathbf{l} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dm}{(t^2+m^2)^{3/2}} \right] \\ &= -\frac{|\boldsymbol{\pi}|}{4\pi} \oint_L \frac{\mathbf{t} \times d\mathbf{l}}{t^2} \left[\frac{m}{\sqrt{t^2+m^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= -\frac{|\boldsymbol{\pi}|}{2\pi} \oint_L \frac{\mathbf{t} \times d\mathbf{l}}{t^2} = -\frac{|\boldsymbol{\pi}| m_0}{2\pi} \oint_L \frac{|\mathbf{t} \times d\mathbf{l}|}{t^2} \end{aligned}$$

其中 m_0 是柱体母线方向的单位矢量, 其正向同 $t \times dl$ 方向. 易

证 $\frac{|t \times dl|}{l^2}$ 是 dl 在 P 点所张的平面角 $d\alpha$, 于是

$$v = -\frac{|\pi| m_0}{2\pi} \oint_L d\alpha$$

由此式立见当 P 点在柱体内时,

$$v = -|\pi| m_0$$

当 P 点在柱体外时

$$v = 0$$

柱形涡层是母线方向速度分量的间断面(参看图4.10.9).

习 题

1. 给出下列各个流场的速度分布:

(1) $u=c, v=w=0, c$ 是常数;

(2) $u=-cy, v=cx, w=0, c$ 是常数;

(3) $u = \frac{cx}{x^2+y^2}, v = \frac{cy}{x^2+y^2}, w=0, c$ 是常数;

(4) $v_r = \frac{\cos \theta}{r^2}, v_\theta = \frac{\sin \theta}{r^2}, v_z=0$ (柱坐标).

试求: (1) 它们的流动图案如何(流线、速度方向、 $|v|$ 的分布)?

(2) 运动是有旋的还是无旋的?

(3) 用求速度环量的办法来检验(2)的结果;

(4) 用观察面积元运动的情况来检验(2)的结果.

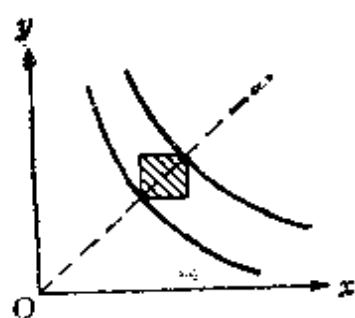
2. 给定流场为:

$$u = -\frac{cy}{x^2+y^2}, v = \frac{cx}{x^2+y^2}, w=0 \quad (c \text{ 是常数})$$

(1) 试用速度环量来说明运动是否有旋;

(2) 作一个围绕 Oz 轴的任意封闭回线, 试用斯托克斯

定理求此封闭周线的速度环量，并说明此环量值与所取封闭周线的形状无关。



3. 给定流场 $u = -x$, $v = y$, 判别是否有旋? 并通过流管的一个流体方形微元 (其各边平行坐标轴) 的运动来证明。

4. 假定流体理想、不可压缩、外力有势，判断下列运动是有旋还是无旋：

(1) 无穷远处有一剪切流流过一静止物体；

题 3

(2) 无穷远均匀来流绕一旋转的圆柱体的流动。

5. 判断下列情形会不会产生涡旋：

(1) 一桶水，下面装盐水，上面装淡水，桶从静止往上作加速运动；

(2) 一长水槽下层装盐水，上层装淡水，在水槽一端放一平板，今推动平板沿水槽运动。

6. 求下列流场的涡量场及涡线：

(1) 流体质点的速度与质点到 Ox 轴的距离成正比，并与 Ox 轴平行，即 $u = c\sqrt{y^2 + z^2}$, $v = w = 0$, c 常数；

(2) 给定流场 $v = xyzr$, $r = xi + yj + zk$ ；

(3) 如果流体绕固定轴像刚体一样作旋转运动。

7. 速度场为

$$u = y + 2z, v = z + 2x, w = x + 2y$$

(1) 求涡量及涡线；

(2) 求在 $x + y + z = 1$ 平面上横截面为 $dS = 0.0001$ 米² 的涡管强度；

(3) 求在 $z = 0$ 平面上 $dS = 0.0001$ 米² 的面积上的涡通量。

8. 设不可压流体的速度场为

$$u = ax + by, v = cx + dy, w = 0$$

a, b, c, d 为常数. 在下列两种情况下求 a, b, c, d 必须满足的条件及这两种情况下流线的形状.

- (1) 运动是可能存在的;
- (2) 运动不仅是可能存在的, 而且是无旋的.

9. 若每一个流体质点都绕一固定轴旋转, 此圆周运动的角速度大小 ω 为到转轴距离的 n 次幂, 证明:

- (1) 当 $n+2=0$ 时, 运动是无旋的;
- (2) 如果一个非常小的球形流体部分突然固化, 则它将

开始围绕小球的某一直径以 $\frac{n+2}{2}\omega$ 的角速度旋转.

10. 平面运动的速度分布在极坐标系中为

$$v_\theta = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} (1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}), \quad v_r = 0$$

其中 Γ_0, ν 为常数. 求涡量 Ω 的分布, 沿任一圆周 $r=R$ 的速度环量 Γ 及通过全平面的涡通量, 并分析 Ω 和 Γ 随 r, t 的变化规律.

11. 试以流线法向, 切向坐标来表示平面运动的涡量, 并说明表达式中各量的含义.

12. 设不可压缩流体平面运动的流线方程是 $\theta = \theta(r)$, 速度只是 r 的函数, 试证涡量为:

$$\Omega = -\frac{k}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\theta}{dr} \right)$$

其中 k 为常数.

13. 已知流体通过漏斗时旋转的速度分布可表为柱坐标形式

$$\begin{cases} v_r = 0, \quad v_\theta = \frac{1}{2}\omega r, \quad v_z = 0, \quad 0 \leq r \leq a \\ v_r = 0, \quad v_\theta = \frac{1}{2}\omega \frac{a^2}{r}, \quad v_z = 0, \quad r \geq a \end{cases}$$

试求涡量. 并说明在什么区域是有旋的? 在什么区域是无旋的? 其中旋转角速度 ω 为常数.

14. 流体在平面环形区域 $a_1 < r < a_2$ 中涡旋等于一个常数, 而在 $r < a_1, r > a_2$ 的区域中流体是静止的. 设圆 $r = a_1, r = a_2$ 是流线, 且 $r = a_1$ 上流体速度为 $V, r = a_2$ 上流体速度趋于零, 试证涡量值为

$$\Omega = \frac{2a_1 V}{a_1^2 - a_2^2}$$

15. 试证在理想、正压、质量力有势的条件下, 由静止开始起动的流体运动一定是无旋运动.

16. 证明在理想不可压流体的平面运动中, 若质量力有势, 则沿轨迹有 $\frac{d\Omega}{dt} = 0$, 而且在定常运动中, 沿流线涡量 Ω 保持常值.

17. 如果 Γ 是沿理想流体的某一定的质点所组成的封闭回线的速度环量, 试证在外力有势的条件下, 有

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint p d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

18. 试由推导 $\frac{d}{dt} \oint_S \Omega_n dS$ (涡通量的随体导数) 出发, 证明拉格朗日涡旋不生不灭定理.

19. 试说明海陆风的形成及白天与黑夜的风向.

20. 取以常角速 ω 旋转同时以常速度 u 平移的运动坐标系, 证明理想不可压缩流体在质量力有势时, 涡矢量满足下列方程:

$$\frac{\partial' \Omega}{\partial t} + \omega \times \Omega + \left(\frac{d' r'}{dt} \cdot \nabla' \right) \Omega = (\Omega \cdot \nabla) v$$

其中 $\frac{d' r'}{dt} = v - u - \omega \times r', v$ 是运动的绝对速度.

21. 在一封闭圆柱内, 不可压均质流体在外力作用下从静

止开始作绕柱轴 (z 轴) 的旋转运动, 若外力

$$F = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y, 0)$$

试写出运动方程, 并证明:

(1) $\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}(\gamma - \beta)$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 为常数, ω 为旋转角速度.

(2) 压力满足

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 + \frac{1}{2} [\alpha x^2 + (\beta + \gamma)xy + \delta y^2]$$

其中 r 是到 z 轴的距离.

22. 设在理想流体中受有势力的作用, 流体的密度只是压力的函数. 求在何种条件下, 在所有各点任一时刻涡矢量具有和速度矢量相同的方向. 并证明平面运动中永远不可能出现这种情况.

23. 证明以下速度场

$$u = -ky, \quad v = kx, \quad w = \sqrt{c - 2k^2(x^2 + y^2)}$$

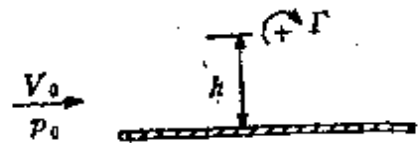
所确定的运动中, 涡矢量与速度矢量的方向相同, 并求出涡量与速度之间的数量关系, 其中 k, c 为常量.

24. 一不可压缩无粘性流体从静止开始运动, 若流体是不均匀的, 证明垂直于任一等密度面的旋度分量为零. 涡线位于什么面? (提示: 在等密度面上取一回路, 并对它应用环量的凯尔文定理.)

25. 考虑下列情况下点涡怎样运动:

- (1) 两个强度相等的平面点涡, 其旋转方向相反;
- (2) 两个强度不等的平面点涡, 其旋转方向相反;
- (3) 两个强度相等的平面点涡, 其旋转方向相同;
- (4) 两个强度不等的平面点涡, 其旋转方向相同.

26. 一个二维自由涡位于无限平板上方 h 处, 在无穷远处压力为 p_0 , 速度为 V_0 , 且平行于平板. 若平板的背面压力为 p_0 , 求单位厚度平板上受到



题 26

的总的力。设涡旋强度是 Γ ，流体是理想不可压的。当 h 趋向无穷大时，力简化成什么表达式。

27. 已知半径为 a ，强度为 Γ 的圆周形线涡，试求过此圆心的对称轴线 (z 轴) 上的速度分布。

28. 给定柱坐标系下的平面流动：

$$v_r = V_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \cos \theta, \quad v_\theta = -V_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \sin \theta + \frac{k}{r}$$

式中 a, k, V_∞ 均为常数，试求包含 $r=a$ 的任一封闭曲线的速度环量。

29. 给定不定常运动速度场

$$u = u_0 \left[1 - \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \right], \quad v = 0$$

$\eta = \frac{y}{(2\sqrt{\nu t})}$ ，其中 ν 是运动学粘性系数(常数)， u_0 为常数。求涡量场。

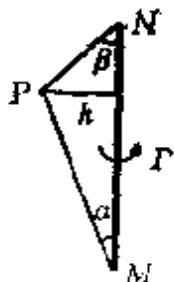
30. 在原静止不可压无界流场中给定涡量分布：

$$\begin{cases} \Omega = 2\omega k, & r \leq a \\ \Omega = 0, & r > a \end{cases}$$

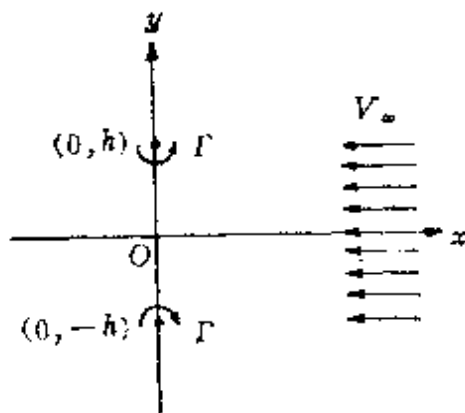
式中 a, ω 为常数， k 为柱坐标中 z 方向的单位向量。求速度分布。

31. 试证有限长度的直线涡丝段对空间任一点的诱导速度为

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi h} (\cos \alpha + \cos \beta)$$



题 31



题 32

其中 Γ 为涡丝的强度, h 为该点到涡丝的距离, α 和 β 为该点到涡丝两端连线与涡丝的夹角(见图示).

32. 不可压无界流场中有一对等强度 Γ 的线涡, 方向相反, 分别放在 $(0, h)$ 和 $(0, -h)$ 点上, 无穷远处有一股来流速度为 V_∞ , 恰好使这两个涡线停留不动, 求流线方程.

超星图书馆
使用本复制品
请尊重相关知识产权!

第五章 流体静力学

超星阅读器提醒您：
使用本双制品
请尊重相关知识产权！

流体静力学是研究流体在外力作用下静止（绝对静止或相对静止）时的状态。流体静力学可以分为液体静力学和气体静力学。液体静力学是研究不可压缩流体（主要是水）在静止时的情形。气体静力学是研究可压缩流体（主要是空气）在静止时的情形。流体静力学在工程实践中有着广泛的用途，水压机、液体压力机、虹吸管及其他许多机器及仪器就是根据流体静力学原理制造出来的。知道静止流体的压力分布，我们可以计算浮在液体中或沉入液体中的物体所受的浮力及浮力矩（阿基米得原理），并且也可以研究该物体的稳定性。这方面的知识在造船学方面特别重要。气体静力学知识有助于计算不同高度下静止大气的压力、密度和温度值，计算处于平衡状态的气状星球的压力分布和密度分布。它们在航空和天文中有其应用。

5.1 基本方程组，自由面的形状，外力限制条件

当流体静止时， $v=0$ ，应力张量为 $P=-pI$ ，其中 p 是静力学压力函数。假设除了热传导外，没有其他方式传入热量，根据 (3.6.1) 式，静力学的基本方程组为

$$\begin{cases} \rho F = \text{grad } p [\text{或 } \rho F - \rho \omega \times (\omega \times r) = \text{grad } p] \\ p = f(\rho, T) \\ \rho \frac{dU}{dt} = \text{div}(k \text{ grad } T) \end{cases} \quad (5.1.1)$$

其中 ω 是运动坐标系的旋转角速度矢量。内能 U 和 ρ, T 的关系由 (3.5.34) 式决定。应该指出，(5.1.1) 中 p, ρ, T 是耦合的，它们需要一起从方程组中解出。设流体是均质的或正压的，状态方

程变为 $\rho = \text{常数}$, 及 $\rho = \Phi(p)$, 此时压力、密度和温度可以分开求. 先由(5.1.1)中前二式求出 p, ρ , 然后代入第三式即可求出 T . 如果只对 p, ρ 有兴趣, 那么在绝对静止情况下, 静力学方程组为:

$$\text{均质流体 } \rho F = \text{grad } p \quad (5.1.2)$$

$$\text{正压流体 } \rho F = \text{grad } p, \rho = \Phi(p) \quad (5.1.3)$$

现考虑边界条件. 固壁上的条件 $v=0$ 自动满足, 因静止流体处处满足 $v=0$. 若静止流体有自由面, 则在自由面上应满足

$$p = p_0 \quad (5.1.4)$$

的条件, 其中 p_0 是给定的已知压力 (例如可以是大气压). (5.1.4) 式说明自由面也是等压面. 流体静止时, 等压面的形状不能随便选取, 由(5.1.2)式或(5.1.3)式我们看到, 等压面必须和 F 垂直. 当外力有势时, 等压面和等势面重合. 下面我们证明, 当外力有势时, 在等势面上, 压力密度和温度都等于常数. 换言之, 等势面同时也是等压面、等密度面与等温度面.

因为外力有势, 所以 $F = -\nabla \bar{V}$, 其中 \bar{V} 是力势函数, 代入(5.1.1)中第一式有

$$-\rho \nabla \bar{V} = \nabla p \quad (5.1.5)$$

两边取旋度得

$$\nabla \rho \times \nabla \bar{V} = 0 \quad (5.1.6)$$

其次由(5.1.5)立得

$$\nabla p \times \nabla \bar{V} = 0 \quad (5.1.7)$$

(5.1.6) 式和 (5.1.7) 式表明, 等势面和等压力面、等密度面重合. 由状态方程立即推出, 等势面也和等温度面重合.

因为在自由面上 $p = p_0$, 所以自由面就是等压面, 根据刚才证明的事实, 它一定也是等势面. 于是自由面的形状由方程 $\bar{V} = \text{常数}$ 确定. 当外力是重力时

$$\bar{V} = gz$$

自由面的方程为 $z = \text{常数}$, 由此可见重流体在静止时, 其自由面

一定是平面。

当流体静止时，外力必须满足一定的条件。换句话说，只有外力满足一定条件下，流体才可能平衡，这样的条件称为外力限制条件。

由(5.1.1)第一式得

$$\mathbf{F} \cdot \text{rot} \mathbf{F} = -\frac{1}{\rho^3} \nabla p \cdot (\nabla \rho \times \nabla p)$$

于是

$$\mathbf{F} \cdot \text{rot} \mathbf{F} = 0 \quad (5.1.8)$$

这就是外力限制条件。显然有势外力满足这个条件，由此可见流体在有势外力场作用下有可能静止。实际问题中遇到的外力绝大部分有势，例如在重力场中

$$\mathbf{F} = -\nabla(gz), \quad \bar{V} = gz$$

引力场中

$$\mathbf{F} = -\nabla\left(\frac{1}{r}\right), \quad \bar{V} = \frac{1}{r}$$

因此，在重力场或引力场中流体有可能静止。

5.2 液体静力学规律

现在考虑均质流体情形。设外力有势，

$$\mathbf{F} = -\nabla \bar{V}$$

则(5.1.2)式可写成

$$\nabla(p + \rho \bar{V}) = 0$$

积分之得压力分布为

$$p + \rho \bar{V} = \text{常数} \quad (5.2.1)$$

当外力是重力时，取自由面为 $x-y$ 平面， z 轴垂直向下，则

$$\bar{V} = -gz \quad (5.2.2)$$

(5.2.1)式变为

$$p - \rho gz = \text{常数} \quad (5.2.3)$$

考虑到边界条件 $z=0$ 处 $p=p_0$, 得常数 $=p_0$, 于是 (5.2.3) 式采取下列形式

$$p = p_0 + \rho g z \quad (5.2.4)$$

这就是著名的液体静力学规律. 它表明液体在深度为 z 处的压力等于自由面上的压力与高为 z 底为 1 的液柱的重量之和.

(5.2.4) 式还可改写为

$$p = \rho g \left(z + \frac{p_0}{\rho g} \right) = \rho g z' \quad (5.2.5)$$

其中

$$z' = z + \frac{p_0}{\rho g}$$

$z'=0$ 的平面称为等效自由面. 如果深度从等效自由面算起, 则压力的公式采取 (5.2.5) 式这一更简单的形式.

举几个例子说明液体静力学规律的应用.

a) 巴斯噶定理

设在静止流体的某一点, 例如自由面上压力有 δp_0 的改变, 则对 (5.2.5) 式两边取微分运算 δ 后得

$$\delta p = \delta p_0$$

即静止流体各点上的压力也发生了 δp_0 的改变, δp_0 的压力变化瞬间传至静止流体各点. 这就是巴斯噶定理.

水压机就是根据巴斯噶原理制成的. 它能用较小的力将较大的物体举起来. 水压机的示意图如图 5.2.1 所示. 有两个互相联通的水槽, 截面积分别为 A_1 及 A_2 . 设在 A_1 面的活塞上加一力 P , 则单位面积的力即压力为

$$p = \frac{P}{A_1}$$

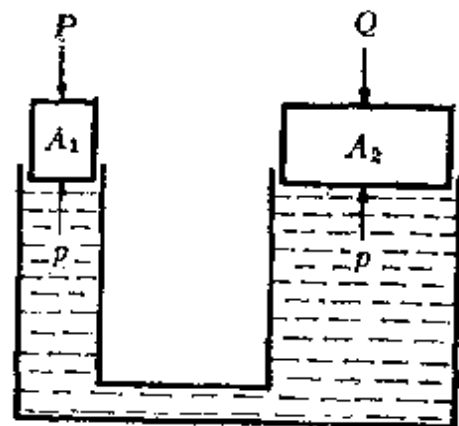


图 5.2.1

根据巴斯噶定理，此压力立即传至流体各点，特别地，截面 A_2 各点上所受到的压力也为 p ，于是截面 A_2 上受到的总力是

$$Q = pA_2 = P \frac{A_2}{A_1}$$

由此可见， A_2 上所受到的力 Q 是 A_1 上所受到的力 P 的 A_2/A_1 倍，截面积之比 A_2/A_1 愈大，两截面受力之比 Q/P 也愈大，亦即在截面 A_2 上可推动更重的物体。这就是水压机的工作原理。

b) 流体静力学矛盾

设有图 5.2.2 所示的四个容器，这四个容器的底面积都是 A ，容器中液体的水位一般高，试问哪一个容器的底面积受到的总压力最大？

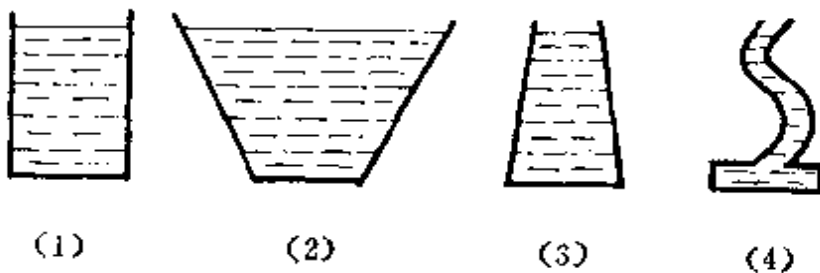


图 5.2.2

也许有人会说，容器(2)的底面受到的压力最大，因为它最大，液体最多。这样一个直观看来似乎有理的答案实际上是错误的。根据(5.2.5)式，底面积所受到的总压力为

$$P = (p_0 + \rho gh)A$$

此式表明总压 P 只依赖于 p_0 ， A ， h ，而和容器的形状无关。上述四个容器的 A 和 h 都相同，而大气压 p_0 也相等，因此它们的底面所受到的总压力也应该相等，这就是著名的流体静力学矛盾。

5.3 阿基米德定律. 平面壁上和曲面壁上的压力

本节继续讨论液体静力学规律的应用。

a) 阿基米德定律

设物体 A 全部沉入液体中. 求物体 A 所受的浮力及浮力矩 (图5.3.1).

若物体 A 的表面为 S , 体积为 τ , n 为 S 面外法线单位矢量. 则物体 A 所受的总压力为

$$\begin{aligned} R &= -\int_S p n dS = -\int_{\tau} \nabla p d\tau \\ &= -\left[\int_{\tau} \rho g d\tau \right] k = -\rho g \tau k \\ &= -Gk \end{aligned} \quad (5.3.1)$$



其中 $G = \rho g \tau$ 是被物体 A 排挤出来的液体的重量. 在推导中考虑到 $\nabla p = +\rho g k$ 的事实. (5.3.1) 式说明, 物体 A 所受到的浮力, 其大小等于被物体 A 所排挤出来的液体的重量, 而方向则与 z 轴的负方向重合.

现在我们计算浮力矩. 显然, 它是

$$\begin{aligned} L &= -\int_S r \times p n dS = \int_S n \times p r dS = \int_{\tau} \nabla \times (p r) d\tau \\ &= \int_{\tau} \nabla p \times r d\tau = -\rho g \int_{\tau} r \times k d\tau = -\left[\frac{1}{\tau} \int_{\tau} r d\tau \right] \times Gk \\ &= -r_c \times Gk = r_c \times R \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

其中

$$r_c = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} r d\tau$$

是被物体 A 排挤出去的液体的重心的矢径, 在推导中考虑到了 $\nabla \times r = 0$ 及 $\nabla p = +\rho g k$ 的事实.

设 r 是浮力作用点的矢径, 则根据理论力学中的法利农定理

$$L = r \times R \quad (5.3.3)$$

易证

$$R \cdot L = R \cdot r \times R = 0$$

于是整个作用力可化为一个单力（没有力偶），比较(5.3.2)和(5.3.3)得

$$r = r_c \times \lambda k$$

其中 λ 是任意常数，可见此单力通过被物体 A 排挤出去的液体的重心 C 。

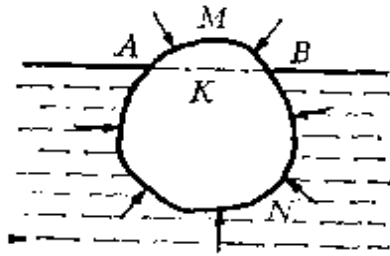


图 5.3.2

于是我们得到了著名的**阿基米德原理**：沉入水中的物体上所受到的浮力其大小等于被物体 A 所排挤出去的液体的重量，方向是重力的负向，而且浮力的作用线通过被 A 所排挤出来的液体的重心 C 。

阿基米德定律也适用于半沉入水中的物体。此时，物体所受到的浮力为（参看图5.3.2）

$$\begin{aligned} R &= - \int_{ANB} p n dS - \int_{AMB} p_0 n dS \\ &= - \int_{ANB} p n dS - \int_{AKB} p_0 n dS = - \int_{AKBN} p n dS \end{aligned}$$

此式说明，当我们求浮力时，可以想象自由面透过物体，那里的压力取自由面上的值。重复前面对全沉入水中物体的讨论我们得出结论，阿基米德原理同样适用于半沉入水中的物体。

利用阿基米德定律可以研究浮体的平衡问题。

设物体半浮在水面上，被物体排挤出去的液体的重心是 C ，而物体的重心则在 C_1 上，这两个重心一般说来是不重合的。我们知道物体平衡的必要及充分条件是合力及合力矩等于零。即要求：（1）浮力 R 与重力 G 相等；（2）浮力 R 的作用线与 G 的作用线重合。

若 C 在 C_1 上，则平衡是稳定的，因为物体受力稍倾时， R 和 G 所构成的力偶力图恢复平衡位置。若 C 在 C_1 下，则平衡是不稳定的。因为 R 和 G 构成的力偶将物体倾翻（参看图 5.3.3）。

平衡的稳定性问题在造船学上有着重要的应用。

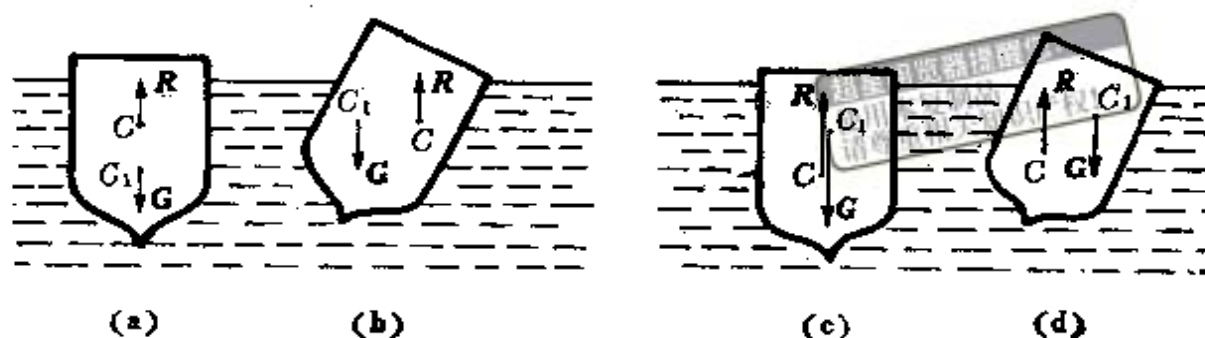


图 5.3.3

b) 平面壁上的压力

考虑面积为 S 的平面壁 W 。平面壁所在的平面 P 与等效自由面成 θ 角，其交线取作 y 轴， x 轴取在 P 平面上， z 轴向下(见图 5.3.4)。于是作用在 S 面的合力为

$$R = k \int_S p dS$$

$$= \left[\rho g \int_S z' dS \right] k$$

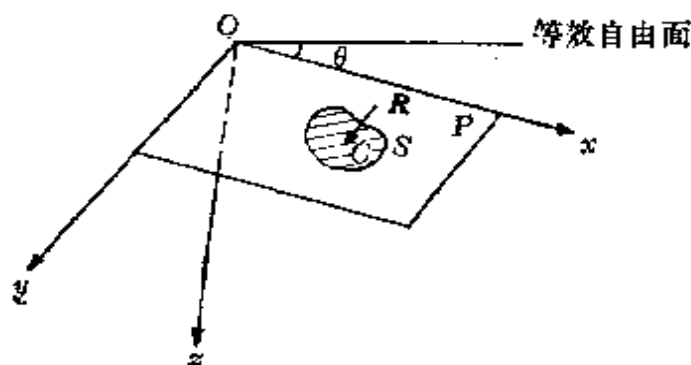


图 5.3.4

易知

$$z' = x \sin \theta$$

代入上式并引进 W 的重心

$$x_c = \frac{1}{S} \int_S x dS$$

后有

$$R = \rho g S x_c \sin \theta k = \rho g S z'_c k \quad (5.3.4)$$

其中 z'_c 是平面壁 W 的重心距等效自由面的深度。(5.3.4) 式表明，作用在平面壁 W 上的合力，其大小等于高为 z'_c 与底面积为 S 的液柱重，其方向垂直壁面向下。

现求合力作用点即压力中心 C 的位置。合力矩为

$$L = \int_S r \times p k dS = \left(\int_S y p dS \right) i - \left(\int_S x p dS \right) j \quad (5.3.5)$$

显然

$$L \cdot R = 0$$

整个作用力可化为一个单力，设 r_c 是压力中心的矢径，则

$$L = r_c \times R$$

将此式及

$$p = \rho g x \sin \theta$$

代入(5.3.5)，并考虑到(5.3.4)后得

$$x_c = \frac{\int_S x^2 dS}{x_c S}, \quad y_c = \frac{\int_S x y dS}{x_c S}, \quad z_c = 0$$

由此可见压力中心的位置和所在平面的倾角 θ 无关，式中

$$\int_S x^2 dS, \quad \int_S x y dS$$

分别是面积 S 相对于 Oy 轴的惯性矩和离心矩。

c) 曲面壁上的压力

一般说来，作用在曲面壁上的压力不能归结为一个单力，下面我们介绍一种求合力及合力矩的方法。

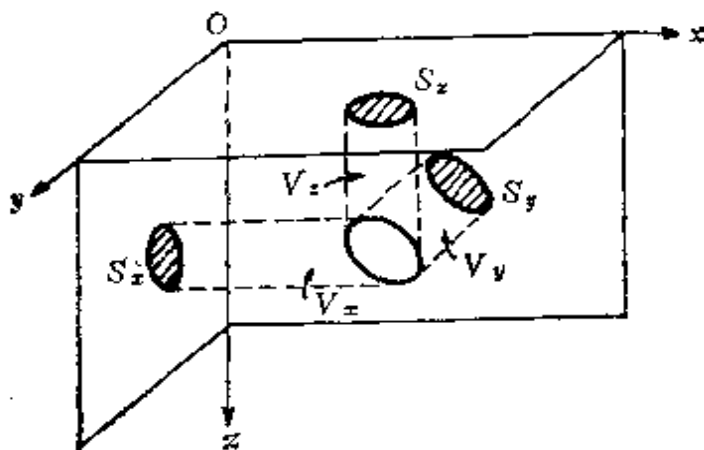


图 5.3.5

取等效自由面为 Oxy 平面， z 轴铅垂向下，设 S 面在 x, y, z 坐标面上的投影分别为 S_x, S_y, S_z ，投影柱体分别为 V_x, V_y, V_z (参看图 5.3.5)。写出液柱 V_x, V_y, V_z 分别在 x 方

向， y 方向和 z 方向的平衡方程

$$\begin{cases} R_x = \rho g S_x z'_c \\ R_y = \rho g S_y z'_c \\ R_z = \text{液柱 } V_z \text{ 的重量} \end{cases} \quad (5.3.6)$$

(5.3.6)中 z'_c 是重心距等效自由面的深度. 在推导方程(5.3.6)时已注意到 V_x, V_y 的侧面作用力及重力对 R_x 和 R_y 无贡献, V_z 的侧面作用力对 z 方向的力亦无贡献.

现推导 L_z 的表达式. 为此将 S 绕 Oz 轴旋转一圈. 考虑由 S , 子午横截面 σ (是平面) 及侧面 Σ 组成的体积 V , 写出作用在液柱 V 上的力对 Oz 取矩的平衡方程(参看图 5.3.6). 由于 V 的重力与 Oz 平行, 所以对 Oz 取矩为零; 其次作用在 Σ 上的力与 Oz 相交, 对 Oz 取矩也等于零. 于是作用在 σ 上的力对 Oz 取的矩 L'_z 应等于作用在 S 上的力对 Oz 取的矩 L_z , 即

$$L_z = L'_z \quad (5.3.7)$$

根据 b),

$$L'_z = \rho g \sigma z'_c r_c$$

其中 z'_c 是 σ 的重心距等效自由面的深度; r_c 是 σ 的压力中心到 Oz 轴的距离. 代入(5.3.7)式得

$$L_z = \rho g \sigma z'_c r_c \quad (5.3.8)$$

5.4 气体的平衡. 国际标准大气

大气层中的压力、密度与温度随高度的变化规律和不同经纬度、季节、气候等因素有关. 对飞行器进行计算和实验时, 如果各国都按当时当地的大气参数作为初始数据, 那么各个国家的实验和计算结果就无法进行对比交流. 为了解决这一矛盾, 根据平均纬度多年来气象观察的统计数据国际上约定了一种统一的压力、密度与温度随高度的变化规律, 这种规律被下述约定的国际标准

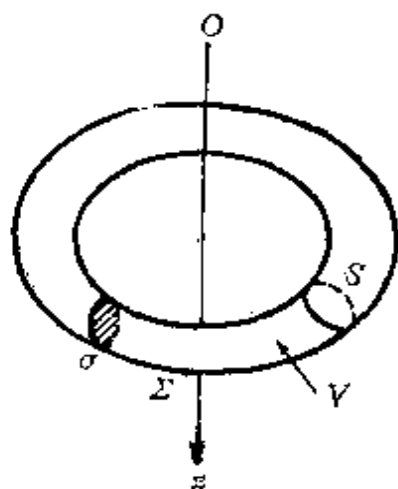


图 5.3.6

大气所规定。

国际标准大气取海平面为基准平面($z=0$)。基准平面上的物理量取为:

$$t_0 = 15^\circ\text{C} (T_0 = 288^\circ\text{K})$$

$$p_0 = 10330 \text{ 千克/米}^2$$

$$\rho_0 = 0.125 \text{ 千克} \cdot \text{秒}^2 / \text{米}^4 (\nu_0 = 1.225 \text{ 千克/米}^3)$$

从海平面一直到11公里的高空是对流层。那里的温度随高度线性地减少,用公式表之为

$$T = T_0 - \beta z \quad (5.4.1)$$

其中 $T_0 = 288^\circ\text{K}$, $\beta = 0.0065$ 度/米。根据(5.4.1)易算出 $z = 11$ 公里处的温度为 $T_{11} = 216.5^\circ\text{K}$ 。11公里以上认为是温度不变的同温层,温度处处等于 216.5°K 。

下面利用静力学方程(5.1.1)分别求出对流层及同温层内压力、密度和高度的依赖关系。

对流层

设大气是完全气体,其状态方程为

$$p = \rho RT$$

考虑到(5.4.1)式后可写成

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T} = \frac{\rho_0}{p_0} \frac{p}{1 - \frac{\beta}{T_0} z} \quad (5.4.2)$$

将其代入(5.1.1)中第一式得

$$g dz + \frac{p_0}{\rho_0} \left(1 - \frac{\beta}{T_0} z \right) \frac{dp}{p} = 0$$

积分之得

$$\frac{p_0}{\nu_0} \ln p = \frac{T_0}{\beta} \ln \left(1 - \frac{\beta}{T_0} z \right) + \text{常数}$$

考虑到初始条件 $z=0, p=p_0$ 时得

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{\beta}{T_0} z\right)^{\frac{T_0}{\beta} \frac{\gamma_0}{p_0}} \quad (5.4.3)$$

代入(5.4.2)式得

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{\beta}{T_0} z\right)^{\frac{T_0}{\beta} \frac{\gamma_0}{p_0} - 1} \quad (5.4.4)$$

将 $T_0, p_0, \rho_0, \gamma_0$ 的数据代入(5.4.3)式及(5.4.4)式后,得对流层内压力分布和温度分布为

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{z}{44300}\right)^{5.256}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{z}{44300}\right)^{4.256} \quad (5.4.5)$$

根据(5.4.5)式可算出 $z=11$ 公里处的 $p_{11}=2301$ 千克/米², $\rho_{11}=0.3636$ 千克/米³.

同温层

此时状态方程为

$$\frac{p}{p_{11}} = \frac{\rho}{\rho_{11}}$$

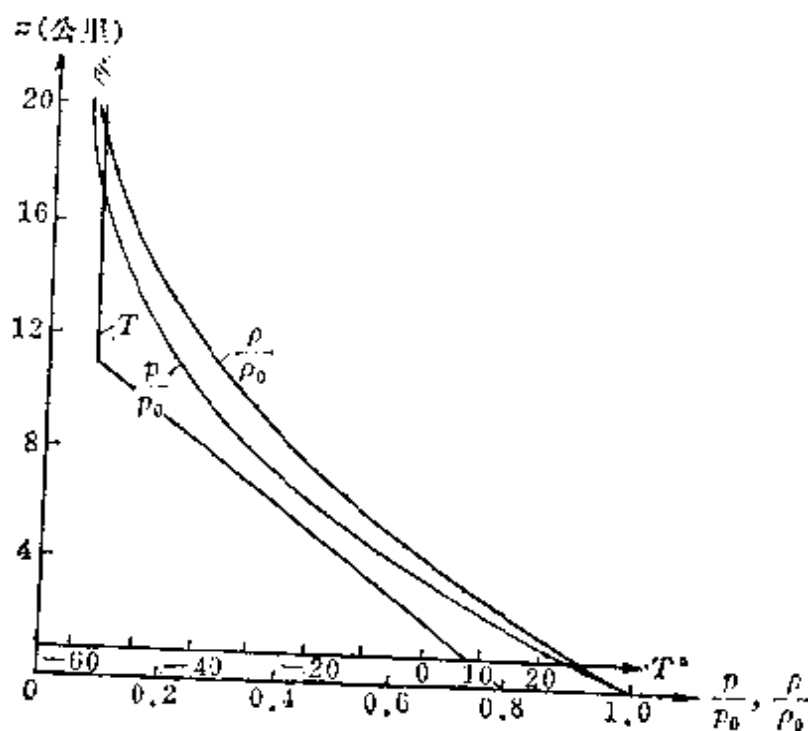


图 5.4.1

代入静力学方程得

$$\frac{p_{11}}{\rho_{11}} \frac{dp}{p} = -gdz$$

积分之，并考虑到 $z=11$ 公里处 $p=p_{11}$ 后得

$$\frac{p}{p_{11}} = \frac{\rho}{\rho_{11}} = \exp\left(-\frac{z-11000}{6340}\right) \quad (5.4.6)$$

根据国际标准大气公式(5.4.5)与(5.4.6)计算出来的不同高度上的压力、密度、温度值已作成表格和图形(参看5.4.1).

*5.5 气状星球的平衡

考虑具有巨大质量的气体星球在自引力作用下的平衡问题。因为引力 F 有势，所以

$$F = -\nabla\Psi$$

其中引力势 Ψ 根据引力理论满足泊桑方程

$$\nabla^2\Psi = 4\pi G\rho \quad (5.5.1)$$

式中 G 是引力常数。假设气体是正压的，满足下列形式的状态方程

$$p = C\rho^{1+(1/n)} \quad (n \geq 0)$$

其中 C 和 n 都是常数，则

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla\Pi$$

其中

$$\Pi = \int \frac{dp}{\rho} = C(1+n)\rho^{1/n} \quad (5.5.2)$$

现在气状星球的平衡方程

$$F = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

变为

$$\nabla(\Psi + \Pi) = 0$$

即

$$\Psi + H = \text{常数}$$

代入(5.5.1)式得 ρ 满足的方程

$$\nabla^2 \rho^{1/n} = \frac{4\pi G}{C(1+n)} \rho \quad (5.5.3)$$

下面限于考虑等势面是球面的特殊情形。由于等势面与等密度面、等压力面重合，所以 ρ ， p 都只是 r 的函数，此时(5.5.3)简化为

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \rho^{1/n} \right) = - \frac{4\pi G}{C(1+n)} \rho r^2 \quad (5.5.4)$$

$$\left(\text{或} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \right) = -4\pi G r^2 \rho \right)$$

(5.5.4)是非线性二阶常微分方程，不管 n 取什么值都可用数值方法求解。但在下列两个特殊情况下有分析解。

(1) $n \rightarrow \infty$, $\rho = \rho_0 = \text{常数}$ ，此时(5.5.4)采取下列形式

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\rho}{dr} \right) = -4\pi G \rho_0^2 r^2$$

积分之得

$$p = \frac{2}{3} \pi G \rho_0^2 (a^2 - r^2) \quad (5.5.5)$$

其中 a 是积分常数，可视为星球的外边界。

(2) $n=5$ ，容易验证此时(5.5.4)的解为

$$p = C \rho^{6/5} = \frac{27 a^2 C^{5/2}}{(2\pi G)^{3/2} (a^2 + r^2)^3} \quad (5.5.6)$$

其中 a 是积分常数。(5.5.6)表明，密度对所有 r 都取非零值，即气状星球无确定外边界。但星体的总质量是有限的，它等于

$$M = 4\pi \int_0^\infty \rho r^2 dr = \frac{4\pi}{3a^2} \left[\frac{27 a^3 C^{3/2}}{(2\pi G)^{3/2}} \right]^{5/6}$$

于是积分常数 a 可通过总质量 M 表出。

5.6 旋转液体的平衡

在半径为 a 的柱形圆筒中盛有高为 h_0 的液体。设圆筒绕对称轴线以 ω 的常角速度旋转，试求圆柱中旋转液体自由面的形状，以及最高液面和最低液面差与 ω 的关系。

取如图5.6.1所示的柱坐标 r, θ, z ；原点取在底面的轴线上。

于是根据(5.1.1)式相对平衡方程为

$$\rho \mathbf{F} - \rho \omega^2 \mathbf{r} = \nabla p$$

考虑到在重力场中

$$\mathbf{F} = -\nabla(gz)$$

$$-\rho \omega^2 \mathbf{r} = \nabla \left(\frac{1}{2} \omega^2 r^2 \right)$$

于是有

$$p + \rho gz - \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 = \text{常数} \quad (5.6.1)$$

在自由面上 $p = \text{常数}$ 。于是它的形状由下式决定

$$z - z_0 = \frac{\omega^2}{2g} r^2 \quad (5.6.2)$$

这里已考虑到 $r=0$ 时 $z=z_0$ 的条件， z_0 是自由面与 z 轴交点的坐标。(5.6.2) 说明自由面是抛物旋转面， ω 愈大，抛物旋转面弯得越厉害。

考虑到 $r=a$ 时 $z=h_{\max}$ 及 $z_0=h_{\min}$ ，由(5.6.2)式得

$$h_{\max} - h_{\min} = \frac{\omega^2 a^2}{2g}$$

借助于此式可根据液面差 $h_{\max} - h_{\min}$ 确定旋转角速度 ω 。因此盛有液体的旋转圆筒可用作测量角速度的仪器。

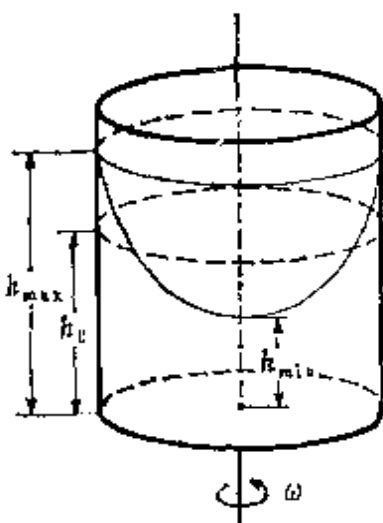


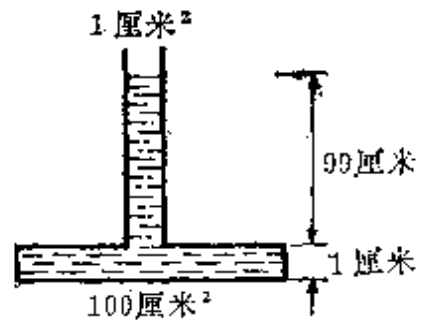
图 5.6.1

习 题

1. 一个潜水员，打算戴上一个连接有“通气管”的面具，只要把通气管的上端露出水面，就能在水下任一深度处得到呼吸所需的空气，这样做是否可能？为什么？

2. 假定把屋子的门关闭时是密不漏气的，而且门框没有摩擦。如果门外的压力是一个标准大气压，门内的压力比标准大气压小1%，你能把门打开吗？

3. 一根横截面积为 1 厘米^2 的管子连在一个容器的上面。容器的高度为 1 厘米 ，横截面积为 100 厘米^2 。今把水注入，使水到容器底部的深度为 100 厘米 。



题 3

(1) 水对容器底面的作用力是多少？

(2) 系统内水的重量是多少？

(3) 解释(1)与(2)求得的数值为何不同。

4. 设有一质量力场

$$F_x = y^2 + 2\lambda yz + z^2, \quad F_y = z^2 + 2\mu zx + x^2, \quad F_z = x^2 + 2\nu xy + y^2$$

其中 λ, μ, ν 均为参数，问 λ, μ, ν 为何数值时，在上述力场作用下的流体才有可能达到平衡。

5. 设一流体在质量力 $F = -\mu r$ 作用下，其中 μ 为一常数，问这一流体有无可能达到平衡？

6. 设一盛着水的水箱以与水平面夹角为 α 的加速度 a 往与水平面倾角为 θ 的斜面上拉，求箱中水的自由面形状。

7. 一个盛着液体的杯子，在重力作用下从一个与水平面成 α 角的板上滑下来，问杯子中液体自由面是什么形状。

8. 一盛有均匀流体的圆桶以等角速度 ω 绕其轴转动，求流体的自由面。

9. 一个充满水的密闭容器，以等角速度 ω 绕一水平轴旋转。证明它的等压面为圆柱面，且该圆柱面的轴线比转动轴高 g/ω^2 。

10. 不可压缩流体的质点遵循牛顿引力定律被吸引向一个固定中心，假如流体体积为 τ ，距中心单位距离处的引力为 μ ，求流体处于平衡时自由面的形状（假定流体边界外的压力为零）和 $p=1$ 的等压面的方程式。

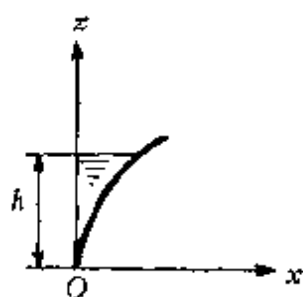
11. 设地球是由密度为 ρ 的不可压流体构成的半径为 R 的球体。在地球表面上单位质量的重力为 g ，且向地心而渐减，与至地心的距离成正比例。假定地面上压力为 p_0 。求地心的压力。

12. 设水深为 h ，试对下述几种剖面形状的柱形水坝，计算水对单位长度水坝的作用力及合力作用点。

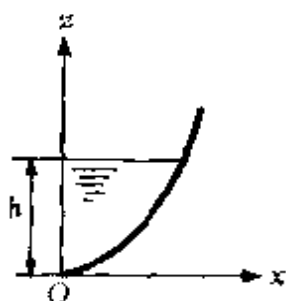
(1) 半径为 R 的圆弧： $x^2 + z^2 = 2Rx$;

(2) 抛物线： $z = ax^2$;

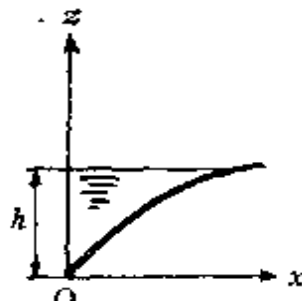
(3) 正弦曲线： $z = a \sin bx$ 。



(1)



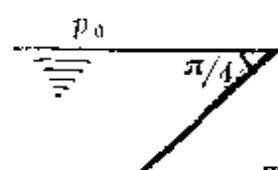
(2)



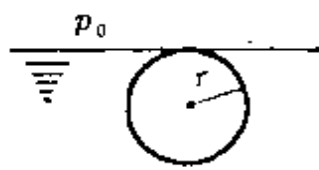
(3)

题 12

13. 假定在静水下有一平直的墙，它与水面之间的夹角为



题 13

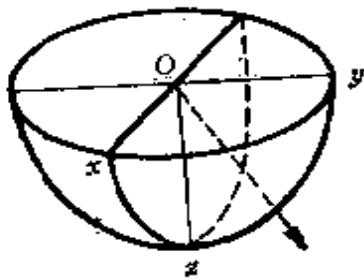


$\frac{\pi}{4}$ ，求水给予墙上一个半径为 r 的圆区域的静水压力。假定圆周与水面相切。

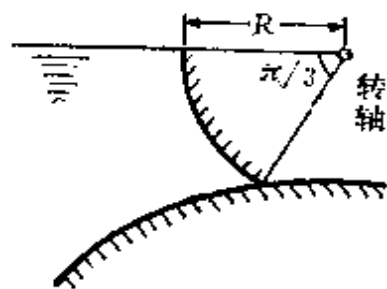
水密度为 ρ ，大气压为 p_0 。

14. 半径为 r 具有垂直轴的半球内盛满液体，求被两个互相正交垂直平面所切出的四分之一球面上压力的合力及作用线，自由面上压力为 0。

15. 圆缺形的闸门，其圆心角 $\alpha=60^\circ$ ，且具有一转轴位于水的自由面上，试决定作用于闸上的液体总压力及该力与水面的交角。设闸门宽度 $B=6$ 米，半径 $R=2$ 米，求液体总压力绕闸门转轴的力矩。



题 14

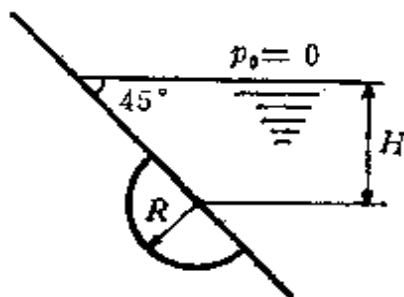


题 15

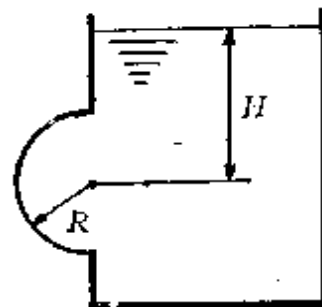
16. 证明任意曲面在静止的重力流体中所受的总压力的水平分量等于该曲面在垂直面上的投影面积上所受的总压力。

17. 一直径为 $2R$ 的圆孔位于一容器的斜壁(倾角 45°)上，半径为 R 的球形盖子密封住此圆孔。试以液体重度 γ 分别表示出盖子在垂直于壁面方向上的液体压力和平行于壁面的液体压力；求出总压力及其作用点。

18. 决定作用在半球形盖子上液体总压力，此盖子用以封闭垂直壁上半径为 R 的圆孔，孔中心处的液体压力头为 H ，求



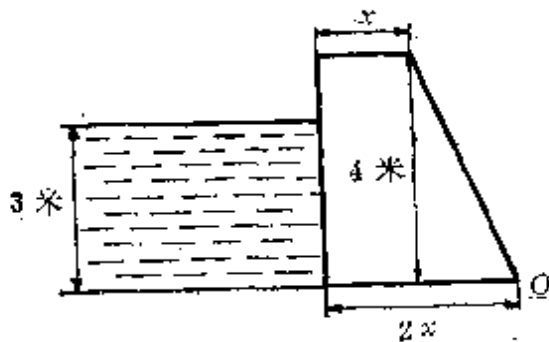
题 17



题 18

盖子上总压力的作用点。

19. 图中表示一用水泥建筑的水坝的侧面剖视图。坝长与图



题 19

面垂直，长为 30 米，坝高 4 米，坝后水深 3 米。建筑所用的水泥材料每立方米重 2 吨。

(1) 如果坝的重量为水对坝的水平作用力的 10 倍；求 x 的大小？

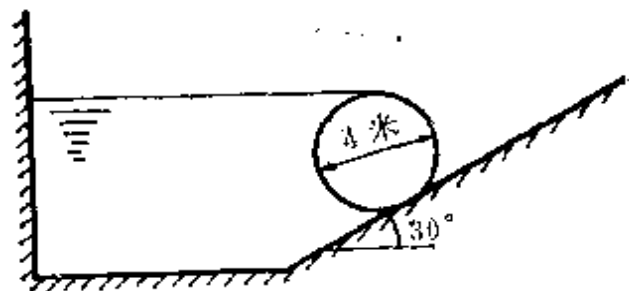
(2) 对经过 O 点的边线的倾覆转矩来说，坝是否稳固。

20. 一质量为 1500 千克的圆柱体竖直浮在海水上，浮体的直径为 1 米，计算：

(1) 当质量为 100 千克的人站在浮体顶上时，该浮体沉入水里的附加距离；

(2) 当人潜水而离开浮体时，求该浮体在竖直方向作简谐运动的周期。

21. 如图示，求流体作用在水平圆柱上作用力的水平分量和垂直分量。圆柱直径为 4 米。



题 21

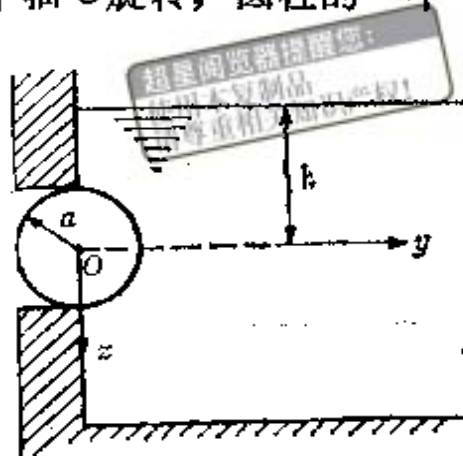
(1) 如果圆柱左边是气体，气体装在压力为 35 千牛顿/米² 的密闭容器中。

(2) 若圆柱左边是水，且自由面高度与圆柱最高顶一致。

设两种情形中，圆柱右边都接大气，大气压为常数。

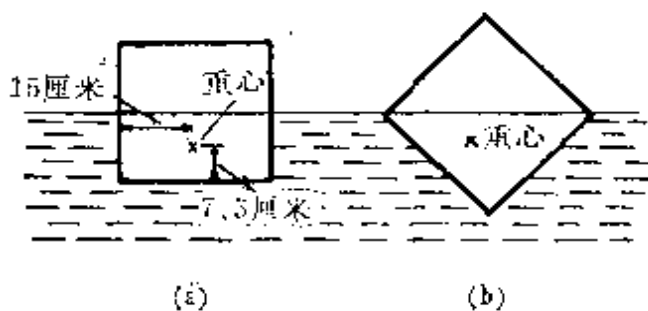
22. 茹柯夫斯基疑题。一盛满液体的容器的垂直壁面上装

置一均匀的圆柱，可以无摩擦地绕水平轴 O 旋转，圆柱的一半一直保持沉没在液体内。由阿基米德原理知，似乎圆柱受到一个向上的力可以迫使圆柱旋转，这样一来似乎不要消耗能量便可以得到功，即永动机可以实现了。试说明为何圆柱不会旋转？求液体作用的合力及压力中心位置。



题 22

23. 一正方形木块，边长为 0.3 米，加上一重物后使其重心位置如图 (a) 所示，并且仅有一半浸入水中，当木块被转动 45° 角时，如图 (b) 所示，求木块的恢复力矩。



题 23

24. 设大气是均匀的，在重力场作用下，大气处于静止状态，求压力随高度变化公式。由此计算出均匀大气静止时可达到的最大高度和温度随高度变化公式。

假设 $R=287 \text{米}^2/\text{秒}^2 \cdot \text{度}$ ， $g=9.8 \text{米}/\text{秒}^2$ ， $T_0=273^\circ \text{K}(0^\circ \text{C})$ 它表示地面上的绝对温度。

25. 假定空气层与外界无热量交换，即设空气层是绝热的，在重力场作用下求空气处于静止状态压力公式，并由此再写出它的温度随高度的分布公式。假设地面上 ρ_0, p_0, T_0 均为已知。

26. 自引力场中的质量力有势 $F = -\nabla V$ ，引力势满足

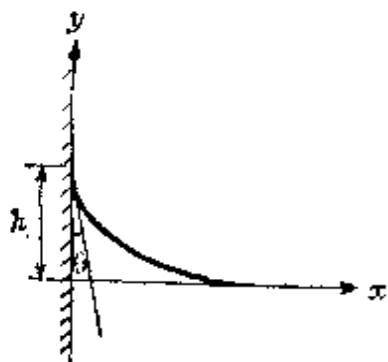
$$\nabla^2 V = 4\pi G \rho$$

这里 G 为引力常数， ρ 为密度。现有处于自引力场中静止的一团球形气体，设

$$\rho = \rho_0(1 - \beta R^2)$$

这里 ρ_0 为球心处密度, R 为离球心的距离, β 为常数. 如球体半径为 a , 球面压力为零, 求球心处压力 p_0 .

27. 如另有一团球形气体, 也处于上题所述的自引力场中, 该团气体具有 (与上题中) 相同质量和相同体积, 但密度是均匀的, 其值为上题中球形气体表面密度的两倍. 证明: 二者中心压力之比为 $13/8$.



题 28

28. 水与某一垂直平面相接触, 考虑表面张力, 求水表面的形状和最大高度 h . 已知水与墙的接触角为 θ , 表面张力为 σ . 假定表面倾斜很小, 曲率可近似表为

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

超星浏览器提醒您：
使用本产品
请遵守相关知识产权！

第六章 伯努利积分和动量定理

本章前两节介绍运动方程在特殊条件下的两个第一积分及其应用，然后讲述动量定理及动量矩定理在流体力学中的应用。

6.1 伯努利积分和拉格朗日积分

理想正压流体在有势质量力作用下，其运动方程在定常及无旋两特殊情形下可以积分出来，运动方程的这两个第一积分分别称为伯努利（Bernoulli）积分和拉格朗日积分。

写出理想流体兰勃-葛罗米柯形式的运动方程

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{V^2}{2} + \text{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p$$

如果流体是正压的且质量力有势，则

$$\frac{1}{\rho} \text{grad} p = \text{grad} \Pi, \quad \mathbf{F} = -\text{grad} \tilde{V}$$

其中

$$\Pi = \int \frac{dp}{\rho(p)}$$

\tilde{V} 是质量力势。于是理想正压流体在有势外力作用下的运动方程具有下列形式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{V^2}{2} + \Pi + \tilde{V} \right) + \text{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0 \quad (6.1.1)$$

a) 伯努利积分

除理想、正压、质量力有势这些条件外，如果运动还是定常的，则

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$$

于是 (6.1.1) 变为

$$\text{grad}\left(\frac{V^2}{2} + \Pi + \tilde{V}\right) + \text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0 \quad (6.1.2)$$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

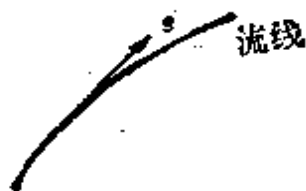


图 6.1.1

将此式两边点乘流线的切线单位向量 $\mathbf{s} = \frac{\mathbf{v}}{V}$ (图6.1.1), 得

$$\mathbf{s} \cdot \text{grad}\left(\frac{V^2}{2} + \Pi + \tilde{V}\right) + \frac{\mathbf{v}}{V} \cdot \text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$$

即

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{V^2}{2} + \Pi + \tilde{V}\right) = 0$$

积分之得

$$\frac{V^2}{2} + \tilde{V} + \Pi = C(\psi) \quad (6.1.3)$$

其中 C 是积分常数, 它沿同一条流线取同一常数值. 在不同流线上可以取不同的值. 因此, 一般说来, C 是流线号码 ψ 的函数, 以 $C(\psi)$ 表之.

(6.1.3) 首先由伯努利在1738年导出称为伯努利积分, $C(\psi)$ 称为伯努利常数.

(1) 不可压缩重流体情形: 此时

$$\Pi = \int \frac{dp}{\rho(p)} = \frac{p}{\rho}, \quad \tilde{V} = gz$$

伯努利积分可写成

$$\frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = C(\psi) \quad (6.1.4)$$

它是水力学中最重要的关系式之一, 在整个流体力学中也占据重要的地位. (6.1.4) 实质上是能量守恒的数学表达. 左边各项分别代表单位质量内的动能, 势能和压力能. 于是根据伯努利积分 (6.1.4) 式推出单位质量内的总能量, 即动能、势能和压力能的总

和在流线上守恒。常数 $C(\psi)$ 的物理意义是不同流线上的总能量。

以重力加速度 g 除(6.1.4)中各项得

$$\frac{V^2}{2g} + z + \frac{p}{\gamma} = C_1(\psi) \quad (6.1.5)$$

式中各项都是长度量纲。(6.1.5)的几何意义是：第一项代表流体质点在真空中以初速 V 铅直向上运动能达到的高度，称为速度高度或速度头；第二项代表流体质点在流线上所在的位置称为几何高度或位势头；第三项相当于液柱底面上压力为 p 时液柱的高度称为压力高度或压力头。于是，按照伯努利积分，速度头、位势头和压力头之和沿流线不变。若在流场中取一流线（图6.1.2），它距参考水平面的高度为 z ，从流线开始竖直向上截取长为 $\frac{p}{\gamma}$ 的线段，联接线段的上端得一曲线，称为压力线。若从压力线开始，再向上截取长为 $\frac{V^2}{2g}$ 的线段，将上端点连接起来，就得到能线，或称总水头线。(6.1.5)说明总水头线是一水平直线。

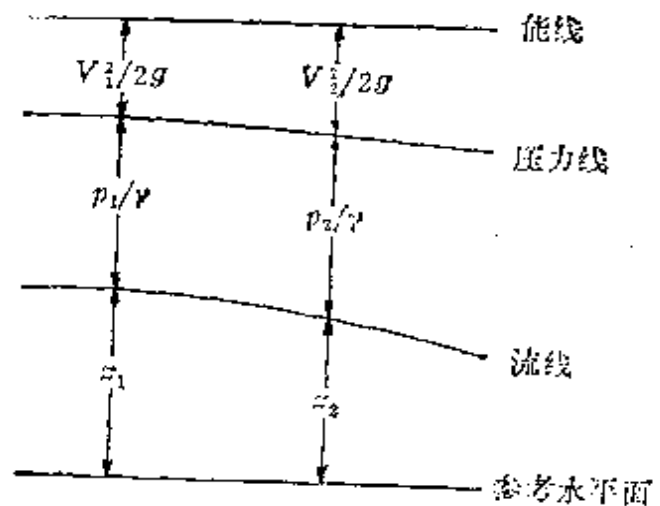


图 6.1.2

按照伯努利积分，速度头、位势头和压力头之和沿流线不变。若在流场中取一流线（图6.1.2），它距参考水平面的高度为 z ，从流线开始竖直向上截取长为 $\frac{p}{\gamma}$ 的线段，联接线段的上端得一曲线，称为压力线。若从压力线开始，再向上截取长为 $\frac{V^2}{2g}$ 的线段，将上端点连接起来，就得到能线，或称总水头线。(6.1.5)说明总水头线是一水平直线。

如果重力可以忽略，(6.1.4)简化为

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C(\psi) \quad (6.1.6)$$

此式给出了速度和压力之间的关系。流速大的地方压力小，流速小的地方压力大。利用(6.1.6)式可以解释一些现象。例如两船

在行驶时，如果靠得太近就会互相碰撞。这是因为靠近时两船间流道变窄，流速增大。根据伯努利定理，压力比周围的小，在压差作用下使两船互相碰撞。

(6.1.6) 式可以通过下述水管试验清楚地演示出来。

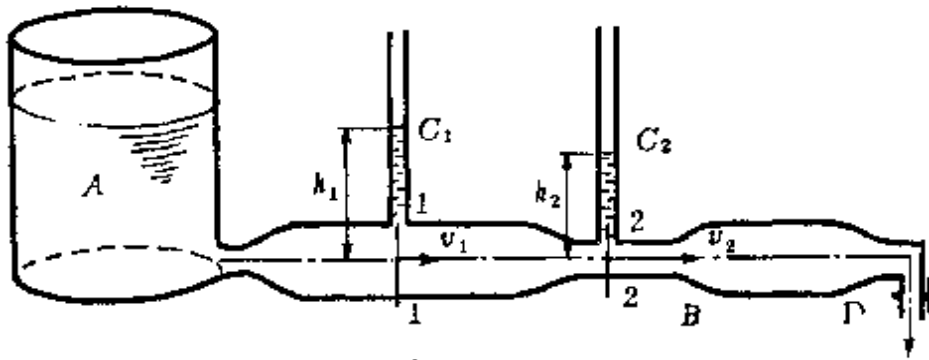


图 6.1.3

如图6.1.3， A 为一大水箱，它的下端与一变截面小管 B 相连。在大截面1-1和小截面2-2处都分别装有细玻璃管 C_1 和 C_2 。当开关 D 关闭时，管 B 内的水不流动，这时细玻璃管 C_1 与 C_2 中的水面和 A 的水面在同一高度，说明 1-1 和 2-2 处的压力是一样的。打开开关 D ，并不断地向大小箱注水使 A 的水面高度维持不变，则水箱内的水经过短一段时间后定常地流过 B 管，这时 C_2 的水柱高 h_2 小于 C_1 的水柱高度 h_1 ，说明小截面 2-2 处的压力较大截面 1-1 处的压力为小。这就清楚地演示了：运动的流体在流速快的地方的压力要较流速慢的地方的压力为小。

(2) 理想绝热的可压缩流体情形：此时压力和密度的关系为

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \beta^r(\psi)$$

于是

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\beta}{p^{1/\gamma}}$$

压力函数为

$$\Pi = \int \frac{dp}{\rho} = \int \frac{\vartheta(\psi) dp}{p^{\frac{1}{\gamma}}} = \vartheta(\psi) \frac{p^{1-\frac{1}{\gamma}}}{1-\frac{1}{\gamma}} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}$$

将压力函数的表达式代入(6.1.3)式得

$$\frac{V^2}{2} + \bar{V} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = C(\psi) \quad (6.1.7)$$

这就是绝热过程中理想可压缩流体的伯努利积分。

若外力可忽略，则(6.1.7)式可写成

$$\frac{V^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = C(\psi) \quad (6.1.8)$$

此式将压力、密度和速度联系起来。

b) 拉格朗日积分

除理想、正压、质量力有势这些假设外，如果在整个流场中运动还是无旋的，即

$$\text{rot } \mathbf{v} = 0$$

则根据无旋场和位势场的等价性得知，存在着速度势 φ ，使得

$$\mathbf{v} = \text{grad } \varphi \quad (6.1.9)$$

考虑到 $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ 及(6.1.9)式，(6.1.1)式变为

$$\frac{\partial \text{grad } \varphi}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{V^2}{2} + \Pi + \bar{V} \right) = 0 \quad (6.1.10)$$

梯度是对空间坐标的导数， $\frac{\partial}{\partial t}$ 是对时间的导数，由于空间和时间是相互独立的变数，因此微分号可以对调，即

$$\frac{\partial \text{grad } \varphi}{\partial t} = \text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

考虑到这一点，(6.1.10)式变成

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \Pi + \bar{V} \right) = 0$$

此式表明，圆括号内的函数与 x, y, z 无关，因此它只是 t 的函

数，积分之得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \Pi + \bar{V} = f(t) \quad (6.1.11)$$

其中 $f(t)$ 是 t 的任意函数，由边界条件确定。对于某一固定时刻而言， $f(t)$ 在整个流场中采取同一常数值，这和伯努利积分只是在流线上才取同一数值显然是不一样的。积分 (6.1.11) 称为拉格朗日积分。

在不可压缩重流体和理想绝热可压缩流体两种情形下，(6.1.11) 式采取下列形式

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = f(t) \quad (6.1.12)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \bar{V} = f(t) \quad (6.1.13)$$

c) 伯努利-拉格朗日积分

如果流体是理想、正压的、质量力有势，流体的运动是定常而且无旋的，则 (6.1.11) 中

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

并且 $f(t)$ 只能是常数。于是 (6.1.11) 式变成

$$\frac{V^2}{2} + \Pi + \bar{V} = C \quad (6.1.14)$$

其中 C 在流场内各点和各个时刻均取同一常数值，(6.1.14) 称伯努利-拉格朗日积分。它和伯努利积分且有相同的形式，但其中的积分常数 C 和伯努利积分中的 $C(\psi)$ 很不相同。 $C(\psi)$ 只在一根流线上取相同的值，不同的流线上可以取不同的值。而 (6.1.14) 中的 C 是在整个流场上取同一值的。

对于不可压缩重流体及可压缩均熵流体，(6.1.14) 式在外力可忽略时变成

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C \quad (6.1.15)$$

及

$$\frac{V^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = C \quad (6.1.16)$$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识

无论在理论力学中或是在流体力学中第一积分总是很有用的，因为有限关系式远比微分方程容易处理。因此当运动是定常和无旋时，人们常常采用伯努利积分或拉格朗日积分代替运动方程。在某些特殊情况下，例如理想不可压缩流体在外力可忽略时作定常无旋运动，伯努利积分(6.1.15)将速度 V 和压力 p 以十分简单的形式联系起来。利用它知道速度可以求出压力，或者反过来知道压力可以求出速度。正是由于这些原因，伯努利积分及拉格朗日积分，特别是伯努利积分在实际问题中有着广泛的应用。

说明 1 伯努利积分是沿流线成立的。在工程应用中常常对流管中的平均速度及平均压力应用伯努利积分。这样做当然是近似的，但是如果流管的截面积沿流动方向缓变，那么采用准一维近似引进平均运动，并对平均运动应用伯努利积分及连续性方程(3.1.13)常常能够非常简单得到近似程度比较好的结果。

说明 2 从(6.1.2)出发可以对伯努利积分和伯努利-拉格朗日积分成立的条件作更全面的讨论。

我们在理想正压、质量力有势及定常这些条件成立的前提下讨论问题。

易见，当 $\text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$ 时，伯努利-拉格朗日积分成立。

$$\text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$$

只有在以下三种情形下才能满足：(1) $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ ；(2) $\mathbf{v} = 0$ ；(3) $\text{rot } \mathbf{v} \parallel \mathbf{v}$ ，即涡线与流线重合，流体质点沿流线运动时同时绕流线旋转，也就是说流场中点点是螺旋运动。静止状态已在第五章讨论过，螺旋运动太特殊了在实际运动中很少遇到，所以真正感兴趣的情形只有无旋运动这一种。

若 $\text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v} \neq 0$ ，已证伯努利积分沿流线成立，完全同样地从(6.1.2)出发可以证明伯努利积分沿涡线成立。取一条流线，通

过其上所有点作涡线, 则所有涡线组成平面 PSV (参看图 6.1.4).

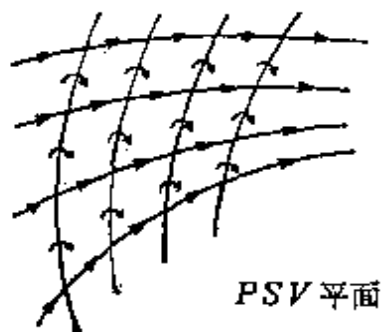


图 6.1.4

在平面 PSV 上伯努利常数即总能量取同一常数. 一般说来不同 PSV 平面, 伯努利常数取不同的值.

说明 3 如前所述, 伯努利积分的物理意义是总能量守恒, 因此可以预料它一定能从流体运动的能量方程中导出. 下面我们从能量方程出发推

导伯努利积分. 通过这样的推导加深了对伯努利积分物理含意的理解, 并且对影响总能量守恒的诸因素有了进一步的认识.

考虑总能量守恒方程(3.3.7)

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{V^2}{2} + U \right) = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \text{div} P + P:S + \text{div}(k \text{grad} T) + \rho q \quad (6.1.17)$$

右边前二项引起单位体积内动能的增加, 右边后三项则导致单位体积内内能的增加. 假设质量力有势 $\mathbf{F} = -\nabla \tilde{V}$, 且势函数 \tilde{V} 与时间 t 无关, 则

$$\rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{V} = -\rho \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{V} \right) = -\rho \frac{d\tilde{V}}{dt} \quad (6.1.18)$$

考虑到(3.4.7)式

$$P = -pI + P'$$

及

$$P:S = -p \text{div} \mathbf{v} + \Phi + \mu' (\text{div} \mathbf{v})^2$$

我们有

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \text{div} P + P:S &= -\mathbf{v} \cdot \nabla p - p \text{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \text{div} P' + \Phi \\ &\quad + \mu' (\text{div} \mathbf{v})^2 \\ &= -\frac{dp}{dt} + \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \mathbf{v} \cdot \text{div} P' + \Phi \\ &\quad + \mu' (\text{div} \mathbf{v})^2 \end{aligned}$$

$$= -\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{div} P' + \Phi + \mu' (\text{div} \mathbf{v})^2 \quad (6.1.19)$$

将(6.1.18)及(6.1.19)式代入(6.1.17)得

$$\begin{aligned} & \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{V^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} + \bar{V} \right) \\ &= \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{div} P' + \Phi + \mu' (\text{div} \mathbf{v})^2 + \text{div}(k \text{grad} T) + \rho q \end{aligned} \quad (6.1.20)$$

(6.1.20)表明引起总能量

$$E = \frac{V^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} + \bar{V}$$

发生变化的因素有： Ξ ：

(1) 作用在微团边界上的粘性偏应力做的功

$$\mathbf{v} \cdot \text{div} P' + \Phi + \mu' (\text{div} \mathbf{v})^2$$

它使微团加速部分 $\mathbf{v} \cdot \text{div} P'$ 引起动能增加，使微团变形部分 $\Phi + \mu' (\text{div} \mathbf{v})^2$ 导致内能增加；

(2) 由于热传导或其他因素传入的热量 $\text{div}(k \text{grad} T) + \rho q$ ；

(3) 压力场的不定常性引起的量 $\frac{\partial p}{\partial t}$ 。

如果考虑的是理想无热传导的流体，而且运动定常，则(6.1.20)式右边各项皆为0，于是得总能量沿流线守恒的结果

$$\frac{V^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} + \bar{V} = C(\psi) \quad (6.1.21)$$

当流体是不可压缩重流体时，根据(3.5.10)式有

$$dU = \delta Q$$

在无热传导条件下有 $dU = 0$ ，于是得

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = C(\psi) \quad (6.1.22)$$

当流体是可压缩时，根据(3.5.18)式有

$$i = U + \frac{p}{\rho}$$

于是

$$\frac{V^2}{2} + i + \mathcal{V} = C(\psi) \quad (6.1.23)$$

当可压缩流体是完全气体时

$$i = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}$$

于是我们又一次得到伯努利积分(6.1.3)及其特殊形式(6.1.7)与(6.1.4).

6.2 伯努利积分和拉格朗日积分的应用

a) 小孔出流

有一很大的容器盛满着水，在容器侧面距水面 h 的器壁上开一小孔，水从小孔流入大气，求小孔射流的流速 V_B .

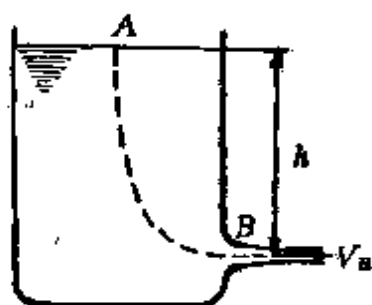


图 6.2.1

如果我们从出口 B 处追溯容器中的流线，就会发现它们都通到自由面 A 。图 6.2.1 画出其中的一条；当水外泻时自由面就慢慢下降。如果自由面的面积 S_A 比小孔的面积 S_B 大得多，那么根据

不可压缩流体的连续性方程

$$S_A V_A = S_B V_B, \quad \frac{V_A}{V_B} = \frac{S_B}{S_A} \ll 1$$

即 V_A 比 V_B 小得很多，可近似地认为 $V_A \approx 0$ ，液面 A 静止不动（注意 V_A 与 V_B 都是平均速度）。这样，不同时刻容器内水流的情况应该是一样的，也就是说运动是定常的。对如图所示的流线应用伯努利积分(6.1.4)，并考虑到自由面 A 处和射流出口 B 处的压力都是大气压 p_0 ，有



$$\frac{V_B^2}{2} + gz_B + \frac{p_0}{\rho} = gz_A + \frac{p_0}{\rho}$$

于是

$$\frac{V_B^2}{2} = g(z_A - z_B) = gh$$

或

$$V_B = \sqrt{2gh} \quad (6.2.1)$$

即小孔处流速与质点自液面 A 自由下落到达小孔时的速度相同。(6.2.1) 通常称为托里切利公式。注意(6.2.1)是按照理想流体计算的，在实际流体中由于粘性阻力，射流的速度要小一些。如果管嘴是圆形的，则射流速度为理想流体射流速度的0.98左右。

在实际的射流中，射流截面积自孔口起不断收缩，到某距离后才形成几乎平行的流线。于是射流截面积 $S_1 = \alpha S_B$ ， α 称为收缩系数。对于圆孔来说，一般取0.61到0.64间的一个数值。考虑到收缩后，每秒流出截面积为 S_B 的孔口的流量为

$$Q = \alpha S_B \sqrt{2gh}$$

对于非圆形的薄壁孔口， α 的数值和圆形很接近，但是射流形状相当复杂。例如，从方形孔口流出来的射流就变成一个窄十字形截面的射流，从长方形孔口流出来的就变成一个垂直于较长边的扁条。

b) 驻点压力

假如一均匀气流从等速 V_∞ 定常地绕过某物体流动。气流受阻后在前缘中心 O 处滞止为零， O 点叫做驻点，该点压力 p_0 称为驻点压力。设远前方未受扰动气流的压力和速度分别为 p_∞ 与 V_∞ (图6.2.2)，对通过驻点的流线 O_∞ 应用伯努利定理 (忽略重力) 有

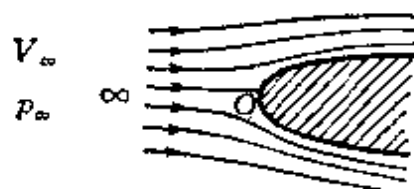


图 6.2.2

$$\frac{p_0}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{1}{2} V_\infty^2$$

即

$$p_0 = p_\infty + \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \quad (6.2.2)$$

p_∞ 称为静压, $\frac{1}{2} \rho V_\infty^2$ 称为动压, 驻点压力 p_0 称为总压, (6.2.2)

表明, 总压刚好等于静压和动压之和.

c) 风速管

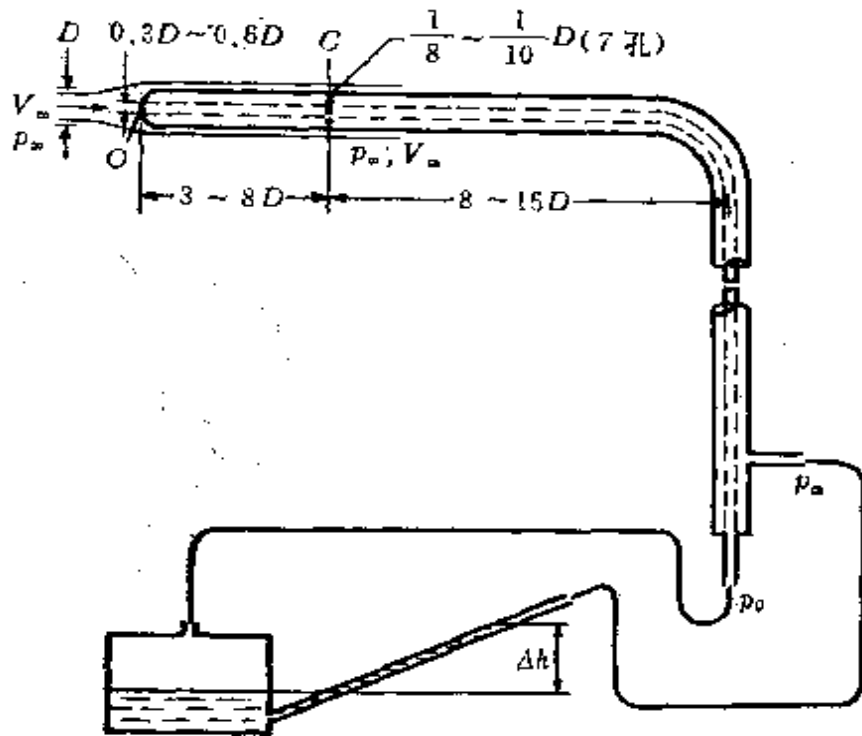


图 6.2.3

用实验方法直接测量气流的速度是比较困难的, 但是气流的压力可以用测压计容易地测出, 因此通常利用伯努利积分通过测量压力的办法间接地测出气流的速度. 这样的实验仪器叫做风速管或称皮托(Pitot)管. 风速管的示意图画在图 6.2.3 上. 它是由一个圆头的双层套管组成. 在圆头中心 O 处开一与内套管相连的小孔, 联接测压计的一头, 孔的直径为 $0.5 \sim 0.6D$, D 为风速

管外径。在外套管侧表面距 O 约 $3 \sim 8D$ 处沿周向均匀地开一排与外管壁垂直的静压孔，联接测压计的另一头。

将风速管安放在欲测速度的定常气流中，使管轴与气流的方向一致，管头对着来流。当气流以欲测的速度向风速管流来时，它的速度在接近 O 点时逐渐减低，流至 O 点便滞止为零。所以 O 点是总压孔，内套管测出的是总压。气流在 O 点分叉后沿管壁向下流流去，所以管壁 OC 是一条流线。由于管子很细， C 点处的流速和压力已经基本上恢复到与来流速度 V_{∞} 和压力 p_{∞} 相等的数值。由此可见 C 点是静压孔，外套管测出的是静压。根据 (6.2.2) 式有

$$V_{\infty} = \frac{2(p_0 - p_{\infty})}{\rho}$$

即

$$V_{\infty} = \sqrt{\frac{2(p_0 - p_{\infty})}{\rho}} \quad (6.2.3)$$

总压和静压差 $p_0 - p_{\infty}$ 由测压计中水银柱的高度求出。根据测压计测出的 $p_0 - p_{\infty}$ ，就可按上式求出气流的速度。

严格说来，风速管前端总压孔所反映的总压，应该是速度为零的那一点的压力，但总压孔总有一定的面积，所以它反映的总压是这部分面积的平均压力，比总压 p_0 稍小。另一方面，静压孔处于半圆球头部的后面，静压还未完全恢复到和前方来流一样，会稍高于 p_{∞} ，同时由于风速管后部支杆对气流的阻滞，会使静压 p_{∞} 略有升高，这些综合因素使测得的压差不正好是 $p_0 - p_{\infty}$ ，而要乘上一个很接近 1 的修正系数 ξ （在 $0.98 \sim 1.05$ 之间），即

$$V_{\infty} = \sqrt{\frac{2\xi(p_0 - p_{\infty})}{\rho}} \quad (6.2.4)$$

这个 ξ 值要通过精确的校正才能求得。在一般要求不严的实验情况下可当作等于 1。

d) 文托利管

文托利 (Venturi) 管是管流中测量流量的一种简便装置。

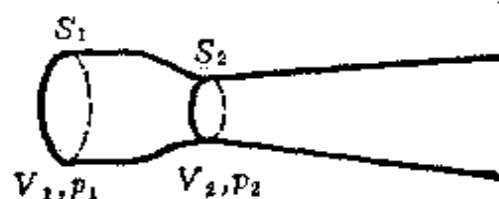


图 6.2.4

它是先收缩而后逐渐扩大的管道，如图 6.2.4 所示。设最大截面 1 处和最小截面 2 处的平均速度、平均压力和截面积分别为 V_1, p_1, S_1 和 V_2, p_2, S_2 。如测出压差 $p_1 - p_2$ ，

则根据伯努利积分，即可求出体积流量 Q 。

设理想不可压缩流体在重力场作用下在文托利管内流动，对文托利管内的平均运动运用伯努利积分及连续性方程，注意到平均运动的流线是等高后有

$$S_1 V_1 = S_2 V_2 = Q$$

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho}$$

由此得

$$\begin{aligned} \Delta p = p_1 - p_2 &= \frac{\rho}{2} (V_2^2 - V_1^2) = \frac{\rho}{2} V_2^2 \left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right] \\ &= \frac{\rho}{2} \frac{Q^2}{S_2^2} \left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

于是流量 Q 的公式为

$$Q = S_2 \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho \left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right]}} \quad (6.2.5)$$

知道 ρ, S_1, S_2 及 Δp 后，可以根据 (6.2.5) 式求出流量 Q 。

(6.2.5) 式是利用文托利管测流量的基本计算公式。

e) 过堰水流

水利工程师常常需要知道水流过明渠时流量的大小。估测流量最简单的方法是在明渠中放置障碍物——堰，然后让水漫过障碍物，测量出障碍物最高点 A 到水面的距离 d_A 。利用伯努利定理，连续性方程及 A 点处极值条件可以很容易地根据 d_A 算出流量 Q 。

堰的形状如图 6.2.5 所示, 它有一最高点 A , 假设堰和自由面的坡度都很小, 堰上水流到处是均匀的, 其速度为 V . 若 d 为水流的深度, h 为该点水面到上游远处水面的距离, 则根据理想不可压缩重流体作定常运动时的连续性方程及自由面 B, C 两点处的伯努利积分我们有

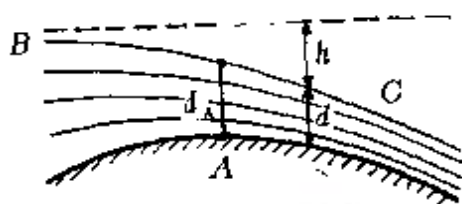


图 6.2.5

$$Q = Vd \quad (6.2.6)$$

$$\frac{V^2}{2} - gh = 0 \quad (6.2.7)$$

这里已考虑到 B 点的速度为 0, 高度为 0, 以及 B, C 两点压力相同的事实. 利用 (6.2.6) 及 (6.2.7) 式作

$$d + h = \frac{Q}{V} + \frac{V^2}{2g}$$

它是 V 的函数, 根据函数 $d + h$ 在 A 点处取极小值的特性

$$\left. \frac{d(d+h)}{dV} \right|_{V=V_A} = -\frac{Q}{V_A^2} + \frac{V_A}{g} = 0$$

可求出 A 处的速度 V_A 为

$$V_A = (gQ)^{1/3} \quad (6.2.8)$$

代入 (6.2.6) 得

$$Q = \sqrt{gd_A^3} \quad (6.2.9)$$

测得 d_A 后可以很容易地根据 (6.2.9) 式求出流量 Q .

f) 关于压缩性忽略的问题

气体都是可以压缩的, 但是当气流的速度不大时, 利用密度 ρ 和速度 V 的关系可以证明实际产生的压缩即密度的变化很小. 因此处理低速气流完全可以忽略压缩性效应将气体近似地看作是

不可压缩的. 下面利用理想绝热完全气体作定常运动时的伯努利积分, 能量方程及状态方程

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{V^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = C(\psi) \end{array} \right. \quad (6.2.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{p}{\rho^\gamma} = \vartheta^\gamma(\psi) \end{array} \right. \quad (6.2.11)$$

$$p = \rho RT \quad (6.2.12)$$

求出 ρ 和 V 的关系。在每一条流线上取驻点处的 p_0, ρ_0, T_0 为参考值，于是由(6.2.11)与(6.2.12)得

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad \frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{T}{T_0}$$

经过简单的运算后得

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (6.2.13)$$

这就是热力学函数 p, ρ, T 之间的关系。有了这样的关系式后，只要建立其中的一个函数和速度之间的关系就可以将所有的热力学函数和速度之间的关系找出来。 $\frac{T}{T_0}$ 和无量纲速度的关系是最容易建立的，因此我们选它作为中间桥梁，再利用(6.2.13)式求 $\frac{p}{\rho_0}$ 和 V 的关系。取音速为速度参考值。考虑到(6.2.11)及(6.2.12)后有

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} = \vartheta^\gamma \gamma \rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma RT$$

于是伯努利积分(6.2.10)可写成

$$\frac{V^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} RT = \frac{\gamma}{\gamma-1} RT_0$$

用 $\frac{a^2}{\gamma-1}$ 除第一项，用与之相等的 $\frac{\gamma}{\gamma-1} RT$ 除第二、第三项得

$$1 + \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{V}{a} \right)^2 = \frac{T_0}{T} \quad (6.2.14)$$

引进 $M = \frac{V}{a}$ ，它是可压缩气体中的一个非常重要的无量纲数，常称为马赫数，于是(6.2.14)式可写成

$$\frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-1} \quad (6.2.15)$$

代入(6.2.13)式得

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (6.2.16)$$

这就是无量纲形式的热力学函数和马赫数之间的关系。

当 M 很小时，将 $\frac{\rho}{\rho_0}$ 和 M 的关系

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}$$

对 M 展开得

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \frac{1}{2} M^2 + \frac{\gamma}{8} M^4 - \dots$$

经过简单计算容易看出，当 $\frac{\rho}{\rho_0}$ 发生 1% 的变化，即

$$\frac{1}{2} M^2 \approx 0.1$$

时，对应的气流速度约为

$$V \approx 0.14a = 0.14 \times 340 \text{ 米/秒} = 48 \text{ 米/秒}$$

由此可见，当气流的速度约为 48 米/秒时实际产生的密度改变率只有 1%。因此处理低速气流（一般认为小于 100 米/秒）可以忽略压缩性效应，视气体为不可压缩的。但是当速度接近或超过音速时，此时密度改变率可以达到很高的数值，例如当 $M = 0.8$ 时，

密度改变率 $1 - \frac{\rho}{\rho_0} \approx 0.32$ 高达 30% 左右。显然此时压缩性起主要作用，再也不能将气体看成是不可压缩的了。

g) 旁管出流的不定常过程

理想不可压缩流体在重力作用下从大容器的一个水平旁管里

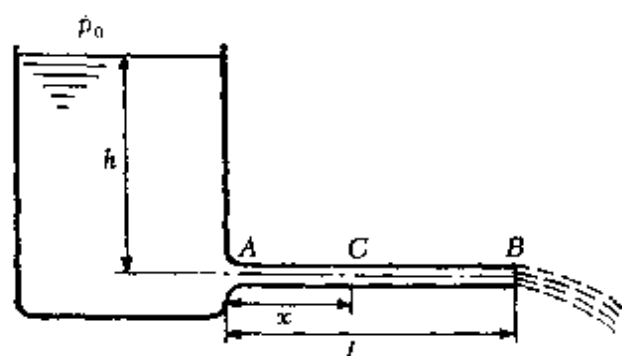


图 6.2.6

流出，参数如图 6.2.6 所示。因容器很大，所以大容器中水面的高度 h 可近似地认为不变。现研究出流一开始到出现定常状态这一段时间内的速度随时间的变化。写出理想不可压缩重流体下的拉格朗日

积分

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = f(t) \quad (6.2.17)$$

取水平旁管中一条流线 AB ，则

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0^x V dx$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \int_0^x \frac{\partial V}{\partial t} dx$$

x 为从旁管入口 A 到管内任一点 C 的距离。因旁管是等截面的直管，所以速度对所有的 x 都是相同的，即 $V = V(t)$ 只是时间的函数，于是

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left. \frac{dV}{dt} \right|_0^x dx = \frac{dV}{dt} \cdot x$$

代入(6.2.17)有

$$\frac{dV}{dt} \cdot x + \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = f(t)$$

在同一时刻对 A, B 两点写出上式，考虑到容器内速度 $V_A \approx 0$ ，有

$$\frac{dV}{dt} l + \frac{V^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} + gh$$

其中 p_0 为大气压. 于是

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{l} \left(gh - \frac{V^2}{2} \right)$$

解此微分方程, 并运用初条件 $t=0$ 时, $V=0$, 得

$$V = \sqrt{2gh} \operatorname{th} \frac{\sqrt{2gh}}{2l} t$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$V \rightarrow \sqrt{2gh}$$

运动变成定常的. 实际上, 当

$$t = t_1 = 1.5 \frac{2l}{\sqrt{2gh}}$$

时

$$V \approx 0.9 \sqrt{2gh}$$

已和定常状态相差不远. 如取 $h=70$ 米, $l=10$ 米, 则 $t_1=0.08$ 秒, 可见由开始流动到定常运动的不定常过程是极短暂的.

6.3 动量定理. 动量矩定理及其应用

为了了解整个流场的情形, 并求出问题中感兴趣的特征量, 对大部分流体力学问题来说需要在一定的初始条件及边界条件下解微分形式流体力学基本方程组. 但是如果我们只需要知道某些边界上属于整体性的特征量, 例如流体对于在其中运动着的物体的反作用力等, 那么有时可以利用积分形式方程组中的整体性定理——动量定理和动量矩定理根据边界上给定的流动参数直接求出感兴趣的特征量来, 而不需要求助于解微分方程. 由于利用动量定理及动量矩定理求某些整体性的特征量十分简便快速, 而且物理意义鲜明, 因此它们不仅在理论力学中占有重要的地位, 而且在流体力学中也有着广泛的应用.

根据(3.6.18)式积分形式的动量方程及动量矩方程具有下列形式:

$$\int_{\tau} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} d\tau + \int_S \rho v_n v dS = \int_{\tau} \rho F d\tau + \int_S p_n dS \quad (6.3.1)$$

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \left[r \times \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} \right] d\tau + \int_S r \times (\rho v_n v) dS \\ = \int_{\tau} r \times \rho F d\tau + \int_S r \times p_n dS \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

由于外力 F 是已知的, 所以(6.3.1)与(6.3.2)中的体积分

$$\int_{\tau} \rho F d\tau \quad \text{及} \quad \int_{\tau} r \times \rho F d\tau$$

总可以算出来. 特别地, 当 $\rho = \text{常数}$, F 有势 ($F = -\nabla V$) 时

$$\int_{\tau} \rho F d\tau = -\rho \int_{\tau} \nabla V d\tau = -\rho \int_S V n dS$$

体积分 $\int_{\tau} \rho F d\tau$ 可以通过面积分 $-\rho \int_S V n dS$ 更容易地计算出来.

如果外力可以忽略或吸收到压力中去, 那么(6.3.1)与(6.3.2)右边第一项自动消失, 情况就更简单了. 阻碍人们顺利地应用动量方程和动量矩方程的项主要是不定常运动时的体积分

$$\int_{\tau} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} d\tau \quad \text{及} \quad \int_{\tau} \left[r \times \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} \right] d\tau$$

因为要求出这些体积分的值必须知道 τ 内流动的详细情形, 而这只有在解出微分形式流体力学基本方程组后才能知道. 这就是为什么在不定常运动时通常不应用动量方程和动量矩方程的原因. 当运动是定常的时候, 影响动量方程和动量矩方程顺利使用的项自动消失, (6.3.1)和(6.3.2)式变为

$$\int_S \rho v_n v dS = \int_{\tau} \rho F d\tau + \int_S p_n dS \quad (6.3.3)$$

$$\int_S r \times (\rho v_n v) dS = \int_{\tau} r \times \rho F d\tau + \int_S r \times p_n dS \quad (6.3.4)$$

式中控制面 S 可自由选取. 控制面取得好, 利用(6.3.3), (6.3.4)式及边界上的流动参数, 常常可以得到有关整体性特征量方面意想不到的好结果, 这样的结果利用别的方法往往很难得出.

上面我们阐述了动量方程和动量矩方程只适用于定常运动的道理。定常运动时的动量方程 (6.3.3) 和动量矩方程 (6.3.4) 常被称为动量定理和动量矩定理。它们既适用于理想流体也适用于粘性流体，下面举例详细地说明动量定理和动量矩定理的应用。

a) 小孔出流的反推力及收缩比

继续考虑 6.2 节的第一个例子小孔出流。我们应用动量定理求射流的收缩比 α 以及流体自小孔射出后对容器的反作用力。假设流体是理想不可压缩的，运动定常，外力只有重力。

写出理想流体情形下的动量定理

$$\int_S \rho v_n v dS = \int_V \rho F d\tau - \int_S p n dS \quad (6.3.5)$$

其中 p 是理想流体的压力函数。取图 6.3.1 中标出的封闭虚线为控制面 S 。由于流体是从水平方向自小孔射出，所以它对容器的反作用力亦将是水平的，因此我们只须考虑 (6.3.5) 式在水平方向上的分量。先考虑动量流的水平分量

$$\left(\int_S \rho v_n v dS \right)_x$$

容易看到，在整个控制面上只有射流最小截面 S_i 上才有流体流出，因此，通过 S 面的动量等于通过最小截面 S' 的动量，于是

$$\left(\int_S \rho v_n v dS \right)_x = \rho V' S_i x = 2\alpha \rho g h S_B x \quad (6.3.6)$$

其中 ρ ， V 分别是 S_i 上的平均密度和平均速度， x 是水平方向单位矢量，约定取自左向右的方向为正方向。在上式中我们已用到托里切利公式 (6.2.1) 及收缩系数的定义 $\alpha = S_i/S_B$ 。其次考虑外力 $\int \rho F d\tau$ 。由于外力只有铅直向下的重力，因此在水平方向上的分量为零。最后考虑作用在 S 面上的面力在 x 方向的分量

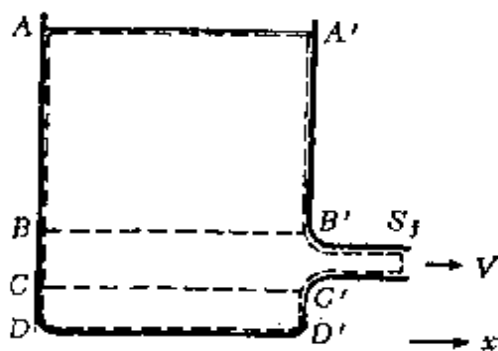


图 6.3.1

$$\left(-\int_S p n dS\right)_x = \left(-\int_S (p-p_0) n dS\right)_x \quad (6.3.7)$$

式中 p_0 是大气压。在写出(6.3.7)时我们利用了

$$\int_S p_0 n dS = \int_V \nabla p_0 d\tau = 0$$

的事实。将控制面 S 分为与器壁接触的湿润面 S' 和不与器壁接触的非湿润面 S'' 两部分。 S'' 上的压力处处等于大气压 p_0 ，于是 S'' 对(6.3.7)式的积分无贡献。其次 S' 中底面 DD' 上的压力积分只对垂直分量有贡献，于是

$$\left(-\int_S (p-p_0) n dS\right)_x = -\int_{AB+BC+CD+A'B'+C'D'} (p-p_0) n dS \quad (6.3.8)$$

注意到容器侧面外有大气压 p_0 作用，侧面内有压力 p 作用，不难理解，流体对容器的反作用力为

$$(R)_x = \int_{AB+BC+CD+A'B'+C'D'} (p-p_0) n dS \quad (6.3.9)$$

容器中的流体除小孔附近很小区域而外，速度几乎为零，压力几乎是静压分布。因而可以近似地认为

$$\begin{cases} \int_{AB+A'B'} (p-p_0) n dS = 0 \\ \int_{CD+C'D'} (p-p_0) n dS = 0 \\ \int_{BC} (p-p_0) n dS = -\rho g h S_{Bx} \end{cases} \quad (6.3.10)$$

其中 h 是小孔中心至水面的距离。公式(6.3.10)的准确程度与小孔的形状密切相关。如果小孔采取波耳特(Borda)喷嘴的形状(图6.3.2)，则

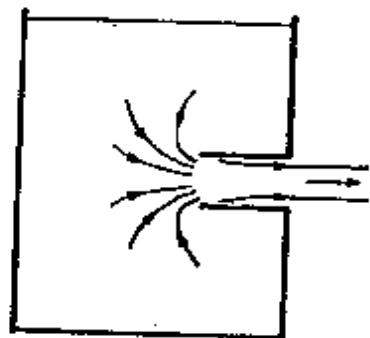


图 6.3.2

则(6.3.10)式的近似程度最好，几乎准确地成立。将(6.3.6)，(6.3.7)，(6.3.8)，(6.3.9)与(6.3.10)代入(6.3.5)式得

$$R_x = -\rho g h S_{Bx} = -2\rho g h S_{Bx} \quad (6.3.11)$$

由此得收缩系数为

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad (6.3.12)$$

这个结果对于波耳特喷嘴而言与实验结果基本符合(图6.3.2), 但是对于其他形状的孔口, 就不那么准确了. 例如对于圆形孔口(图6.3.1) 实验结果在 0.61~0.64 之间, 与理论结果约有 20% 的误差. 这是由于公式(6.3.10)不是准确成立所引起的.

从(6.3.11)式还可看出反作用力的大小为 $\rho gh S_0$ 方向与 x 相反.

泽格纳 (Segner) 水轮就是利用小孔出流的反作用力(图 6.3.3). 利用它可以举起重物或作别的用途. 现在的草地喷水器边洒水边旋转就是利用这个原理.

b) 火箭发动机的工作原理

图6.3.4画出了火箭发动机构造简图(剖面图). 它由圆柱形

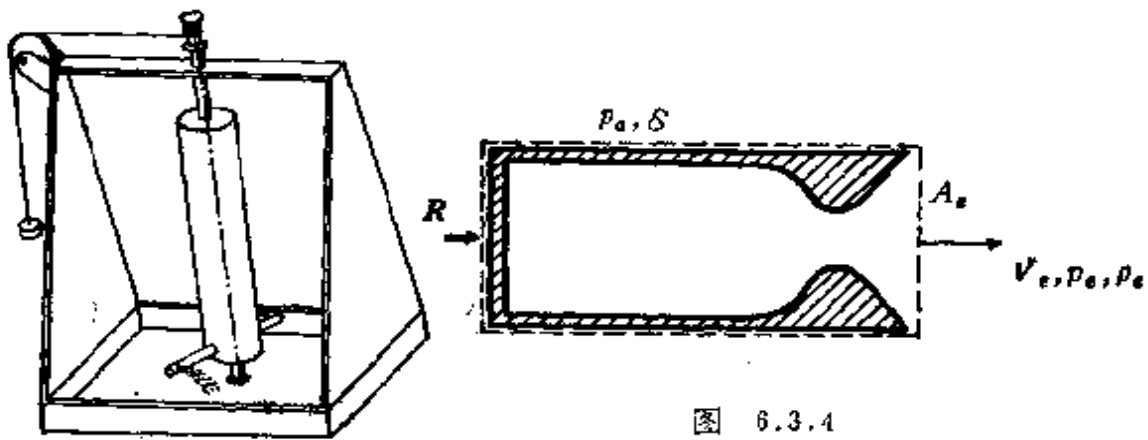


图 6.3.3

图 6.3.4

燃烧室, 与先是收缩后又扩张的尾喷管组成. 燃烧室内装有火药(固体燃料发动机)或安装有喷嘴, 分别通过管道与燃料和氧化剂的供给系统连接(液体燃料发动机). 燃气经过尾喷管加速后以很高的速度均匀地喷出, 从而产生推力推动火箭前进. 为了说明火箭发动机的工作原理, 设想将发动机固定在试验台上. 周围压力为大气压 p_a , 尾部喷射出来的燃气其速度、压力、密度、气流

横截面积分别为 V_e , p_e , ρ_e , A_e . 作如图所示的控制面 S 包围发动机, 将整个发动机作为一个系统运用动量定理. 因流动仅在轴向进行, 所以只需在这个方向考虑问题. 设气体是理想的、运动定常且重力可忽略. 单位时间内流出 S 面的动量为 $\rho_e V_e^2 A_e$, 它的方向与 V_e 相同. 在这个方向发动机所受的力有支架的作用力 R , 大气压 $p_o A_e$ (与 V_e 同向) 和作用在 S 上燃气的压力 $p_e A_e$ (与 V_e 反向), 于是由动量定理得

$$\rho V_e^2 A_e = R - A_e(p_e - p_o)$$

即

$$R = \rho_e V_e^2 A_e + A_e(p_e - p_o) \quad (6.3.13)$$

根据作用与反作用原理, 发动机对支架的作用力与 R 相等, 方向相反, 这个力就是发动机的推力. 把发动机装在火箭上, 它所产生的推力就可以推动火箭前进.

c) 作用在翼栅上的力

为了研究涡轮机或螺旋桨的叶片对流过它们的流体的反作用力, 通常先考虑比较简单的等栅距直线翼栅, 它由一排完全相同的, 互相平行的, 无穷多个叶片组成. 取固定在叶片上的直角坐标系 Oxy ,

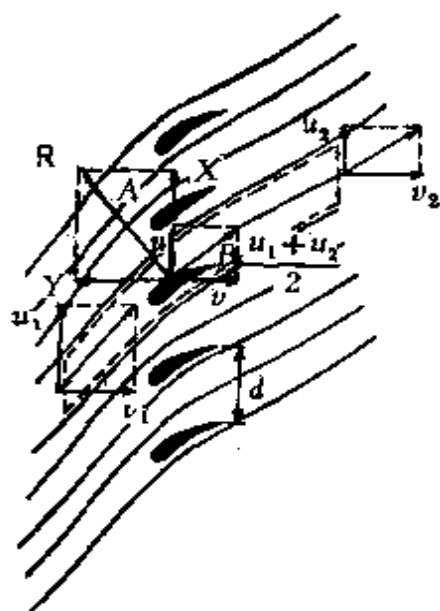


图 6.3.5

则翼栅定常绕流图案如图 6.3.5 所示. 设速度分量为 u, v , 作用在叶片上的力在 x, y 轴上的投影为 X, Y . 下标 1 和 2 分别指入流和出流. d 表示两叶片间的距离——栅距.

考虑理想不可压缩流体, 设重力可忽略. 取如图 6.3.5 点线所示的控制面, 它是由两条地位相似的

流线和两条与 x 轴平行, 长度为 d 的直线组成. 写出动量定理 (6.3.5) 在 x, y 方向的投影. 因为没有流体流过流线, 并且由

于两流线的地位完全相同，它们上面的压力分布相同，因此它们对于动量和合压力都没有贡献。我们只要计算平行于 x 轴的两直线上的贡献就行了。根据连续性方程，单位时间流过这两条线的质量是

$$Q = \rho v_1 d = \rho v_2 d$$

由此推出 $v_1 = v_2$ 。于是

$$\begin{cases} X = 0 + \rho v d (u_1 - u_2) \\ Y = d(p_2 - p_1) + 0 \end{cases} \quad (6.3.14)$$

翼栅的均匀绕流问题是无旋的(参看4.6的例1)，根据伯努利-拉格朗日积分有

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho (u_1^2 + v_1^2) = p_2 + \frac{1}{2} \rho (u_2^2 + v_2^2)$$

或

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho (u_1^2 - u_2^2) = \frac{1}{2} \rho (u_1 - u_2)(u_1 + u_2) \quad (6.3.15)$$

现在我们计算沿控制面的环量。首先，沿两根流线作环量积分时因走向相反，所以它们的贡献彼此抵消，两直线段的贡献分别为 $u_1 d$ 和 $-u_2 d$ ，于是

$$\Gamma = d(u_1 - u_2) \quad (6.3.16)$$

考虑到(6.3.16)及(6.3.15)，(6.3.14)可写为

$$X = \rho \Gamma v, \quad Y = \rho \Gamma \frac{u_1 + u_2}{2} \quad (6.3.17)$$

比值 $\frac{Y}{X}$ 等于 $\frac{(u_1 + u_2)}{2v}$ ，于是三角形 A 和 B 相似(参阅图6.3.5)。由

此推出， X 和 Y 的合力 R 与 $\frac{(u_1 + u_2)}{2}$ 和 v 的合速度 V_m 相垂直。

设合力的大小为 R ，合平均速度的大小为

$$V_m = \sqrt{\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right)^2 + v^2}$$

则由(6.3.17)得

$$R = \rho \Gamma V_m \quad (6.3.18)$$

此式说明, 流体对叶片的作用力大小 R 和环量 Γ 成正比, 此外还和流体密度 ρ 以及合平均速度大小 V_m 成正比.

d) 喷注冲击平板问题

喷注冲击平板多为轴对称问题, 由于轴对称问题较难处理, 我们先研究平面问题.

一宽为 a 的平面喷注以匀速 V 向无穷长平板斜向地射来, 接触平板后分成两支沿平板方向流动. 至远处变为宽为 a_1, a_2 的两喷注. 设流体是理想不可压缩, 流动是定常的, V 很大可忽略重力. 求喷注对平板的压力及压力作用点.

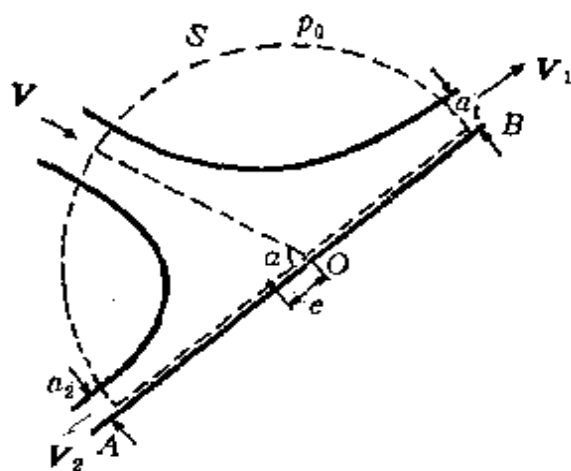


图 6.3.6

设入射喷注的中心轴线与平板的交点为 O , 夹角为 α . 三支喷注在很远处速度都是均匀的, 且自由面上的压力皆为大气压 p_0 . 根据4.6的例1,

流动是无旋的. 写出定常无旋运动质量力可以忽略时的伯努利-拉格朗日积分

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C$$

易证远处三支喷注其速度及压力处处取同一常数值 V 及 p_0 .

取包括无穷远处三喷注横截面在内的封闭曲线 S (如图6.3.6所示). 现分别计算通过 S 面的流量及作用在 S 面上的压力, 通过 S 面的动量为

$$-\rho a V V + \rho a_1 V V_1 + \rho a_2 V V_2 \quad (6.3.19)$$

其中 $a, a_1, a_2; V, V_1, V_2$ 分别为三喷注在远处的横截面面积

和速度矢量.

作用在 S 面上的力为

$$-\int_S p n dS = -\int_S (p - p_0) n dS = -\int_{ADB} (p - p_0) n dS$$

它等于负的流体作用在平板上的力 P , 于是

$$-\int_S p n dS = -P \quad (6.3.20)$$

根据理想流体的动量定理(6.3.5), 令(6.3.19)及(6.3.20)式相等得

$$-P = -\rho a V V + \rho a_1 V V_1 + \rho a_2 V V_2$$

分别在垂直平板的方向及平行平板的方向投影得

$$P = \rho a V^2 \sin \alpha \quad (6.3.21)$$

$$0 = \rho a_1 V^2 - \rho a_2 V^2 - \rho a V^2 \cos \alpha \quad (6.3.22)$$

(6.3.21) 给出喷注对平板的压力公式. 说明压力与 ρV^2 , a , $\sin \alpha$ 成正比. 垂直冲击, 作用力最小; 平行冲击, 作用力为零. 由(6.3.22)式有

$$a_1 - a_2 = a \cos \alpha$$

和连续性方程

$$a_1 + a_2 = a$$

联合起来可解出 a_1 , a_2 , 它们是

$$a_1 = \frac{1 + \cos \alpha}{2} a, \quad a_2 = \frac{1 - \cos \alpha}{2} a \quad (6.3.23)$$

$\alpha = \pi/2$ 时, $a_1 = a_2 = \frac{a}{2}$; $\alpha = 0$ 时 $a_1 = a$, $a_2 = 0$; 当 α 由 $\pi/2$ 趋于 0

时, a_1 由 $\frac{a}{2}$ 趋于 a , a_2 由 $\frac{a}{2}$ 趋于零.

现利用动量矩定理求合力作用点. 取 O 点为参考点, 由动量矩定理得

$$\rho a_1 V^2 \frac{a_1}{2} - \rho a_2 V^2 \frac{a_2}{2} = p e$$

其中 e 是压力作用点到 O 点的距离，将 (6.3.23) 及 (6.3.21) 式代入上式得

$$e = \frac{1}{2} a \cot \alpha \quad (6.3.24)$$

(6.3.24) 式说明压力作用点的位置 e 和喷注宽 a 以及喷注与平板的夹角 α 有关。当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时， $e = 0$ ，压力通过 O 点；当 α 由 $\frac{\pi}{2}$ 减至 0 时， e 由 0 趋于 $-\infty$ 。总之，喷注偏离垂直方向时会产生一力矩，此力矩力图使平板逆时针方向地绕 O 点旋转，回复到与喷注垂直的位置。而且倾斜得越厉害，回复的力矩也越大。

第二次世界大战发展起来的反坦克穿甲弹的工作原理可以用上述喷注理论阐明。典型的穿甲弹是由中空的金属锥体组成，炸药充填在锥体的外部（参看图 6.3.7 (a)）。当爆炸发生时金属锥

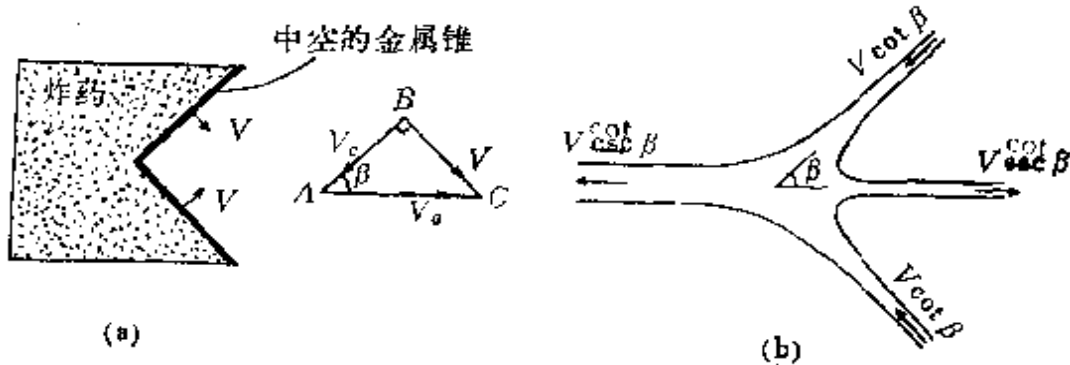


图 6.3.7

壁由于受到极大的应力作用变成粘塑性流体。它在巨大压力的作用下向内以 V 的速度沿锥壁的法线方向运动，于是金属层继续保持锥体形状，但是在运动着的锥顶处有金属的积累，然后向两边流去形成两股射流。如果在和锥顶一起运动的坐标系中考虑相对运动，那么情况变得更为清楚。金属层以喷注的形式沿锥线向锥顶流来，在顶点处形成两股圆截面的射流，然后离开锥顶沿锥轴向相反的方向流去。这样的问题本质上是轴对称的，但是我们可以应用上面已经研究过的二维喷注理论的结果定性地进行说明。

锥顶沿锥轴方向和锥体方向的运动速度 V_o, V_c 可以很容易根据三棱角形 ABC 求出, 即

$$V_c = \text{喷注速度} = V \cot \beta, \quad V_o = V \csc \beta$$

根据(6.3.23)式较细那股射流的面积为

$$a_2 = \frac{1}{2} a (1 - \cos \beta),$$

相对于未爆炸前的穿甲弹的速度为 $V(\csc \beta + \cot \beta)$. 由于爆炸后 V 可以达到极大的数值, 加上 a 很小, 因此通过中空锥体以巨大速度喷射出来的细长射流具有极大的穿过性能, 能钻透很厚的钢板.

e) 圆管突然扩大的能量损失

截面积为 S_1 的小管逐渐扩大到截面积为 S_2 的大管(图6.3.8).

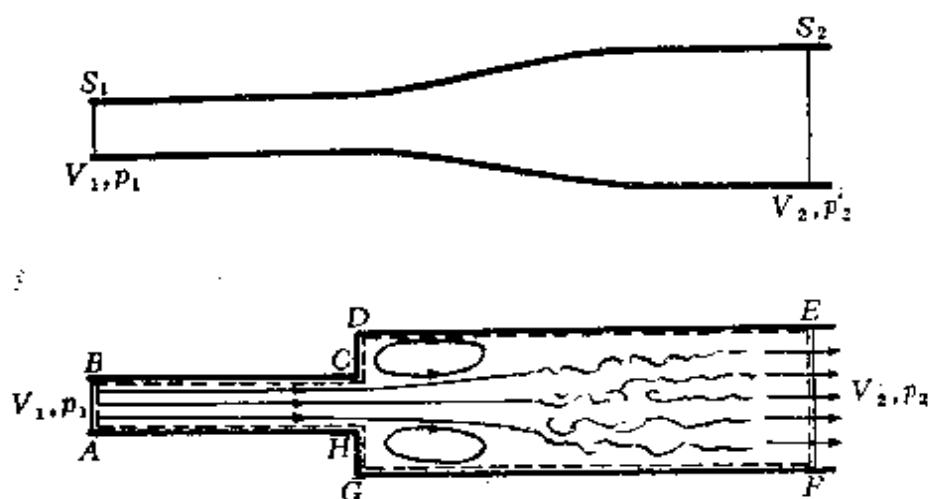


图 6.3.8

若流体是不可压缩的, 粘性的作用很小可忽略, 流动是定常的. 则根据伯努利定理, 大管内平均运动的总机械能等于小管内平均运动的总机械能, 即总机械能守恒. 也就是说下式成立

$$p'_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho (V_1^2 - V_2^2) \quad (6.3.25)$$

其中 $p_1, V_1; p'_2, V_2$ 分别为小管和大管内的压力及速度.

现在考虑截面积为 S_1 的小管突然扩大到截面积为 S_2 的大管

中去的情形。射流从小管中涌出，在它的边线附近产生了不规则的涡旋，使射流与周围的流体不断地掺混，混合之后以几乎是均匀的平均速度 V_2 继续在大管内流动。涡旋的产生与掺混过程将伴随着机械能的损失。大管中的总机械能将小于小管内的总机械能，因为突然扩大时大管中的动能和逐渐扩大时大管中的动能相等（速度相等），所以机械能的损失主要体现在突然扩大时大管内的压力 p_2 将小于 p'_2 。 $p'_2 - p_2$ 表征机械能损失的程度。一般说来，要计算 $p'_2 - p_2$ ，必须知道突然扩大区掺混过程的详细情况，而要获得这方面的数据是非常困难的。利用定常运动的动量定理使我们有可能根据大小管内的流动参数求出压力损失，而不必追究管内详细过程。

取如图6.3.8所示的虚线 $ABCDEFGH$ 为控制面。通过控制面流出的动量流为

$$\rho V_2^2 S_2 - \rho V_1^2 S_1 = \rho V_2 S_2 (V_2 - V_1) \quad (6.3.26)$$

这里利用了连续性方程 $V_1 S_1 = V_2 S_2$ 。我们认为 V_1 很大时壁面 $BCDE$ 和 $AHGF$ 上的粘性应力比起惯性力小得很多，可以忽略不计；其次认为 CD ， HG 上的压力和 CH 上的一样，都是 p_1 。于是作用在控制面的面力为

$$(p_1 - p_2) S_2 \quad (6.3.27)$$

根据动量定理令(6.3.26)和(6.3.27)相等得

$$p_2 = p_1 + \rho V_2 (V_2 - V_1) \quad (6.3.28)$$

根据(6.3.25)，(6.3.28)得

$$p'_2 - p_2 = \frac{\rho}{2} (V_1 - V_2)^2 \quad (6.3.29)$$

这个公式和两个非弹性体碰撞后的动能损失公式完全一样，由于此，突然扩大的能量损失常称为“碰撞损失”。考虑到连续性方程后(6.3.29)式还可写成

$$p'_2 - p_2 = \frac{1}{2} \rho V_1^2 \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2$$

上式说明 $\frac{S_1}{S_2}$ 越小，压力损失愈大，但压力损失有一上界，它不

会超过 $\frac{1}{2} \rho V_1^2$ 。

f) 作用在物体栅上的力

考虑阻尼网的绕流问题。阻尼网可简化为圆柱形物体组成的物体栅。设来流和物体栅所在的平面垂直，则当速度为 V 的均匀来流流过圆柱形物体组成的物体栅时，在圆柱后面产生涡旋运动从而耗散能量引起阻力。使远后方再度均匀的流动，具有较 p_1 为低的压力 p_2 。现利用理想不可压缩流体定常运动重力可忽略时的动量定理求流体作用在物体栅上的力。

取虚线所示的曲线为控制面，它由内边界 S_1 和外边界 S_2 组成（见图6.3.9）。显然，通过 S_1 、 AB 及 CD 的动量流为零。其

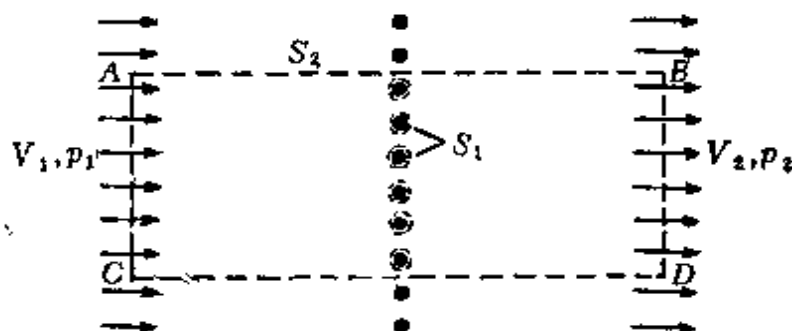


图 6.3.9

次根据质量守恒定律，远前方 AC 和远后方 BD 上的速度是一样的，都是 V 。于是流进 AC 的动量流等于流出 BD 的动量流。考虑到所有这些，可以断言，通过 $S_1 + S_2$ 的动量流等于零。现考虑作用在 $S_1 + S_2$ 上的面力

$$\int_{S_1} p_n dS + \int_{S_2} p_n dS$$

显然

$$\int_{S_1} p_n dS = -\bar{R}$$

其中 \bar{R} 是流体作用在包在 S_2 内的物体栅上的力。其次, AC, BD 上只有压力作用。若忽略 AB, CD 上切应力的作用 (V 很大, 相对惯性力与 AB, CD 上的粘性力都可忽略), 则写出沿来流方向的动量定理后我们有

$$\bar{R} = (p_1 - p_2)AC$$

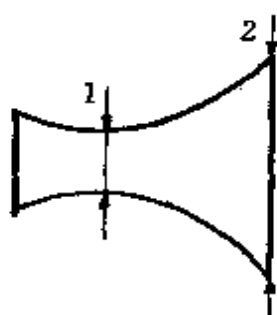
引进流体作用在单位长度物体栅上的力 $R = \frac{\bar{R}}{AC}$ 后上式可写为

$$R = p_1 - p_2 \quad (6.3.30)$$

测出远前方和远后方的压力 p_1, p_2 后即可按 (6.3.30) 求出 R 。由 (6.3.30) 可以看到: 如果没有能量损失, 即 $R=0$ 时 $p_1 = p_2$; 如有损失, 则 p_2 一定小于 p_1 , 而且两者的差值就是流体作用在物体栅上的力。

习 题

1. 密度为 ρ 的不可压缩理想流体流经一收缩的管道, 假定流动是定常的, 且质量力作用不计, 试证明此管道的流量 Q 是



题 1

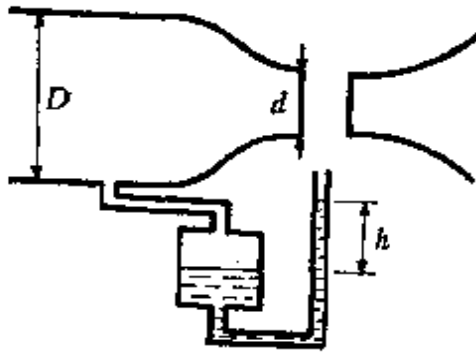
$$Q = \frac{S_1 S_2}{\sqrt{S_2^2 - S_1^2}} \sqrt{2(p_2 - p_1)} \rho$$

其中 S_1, S_2, p_1, p_2 分别为断面 1 和 2 处的面积和压力。

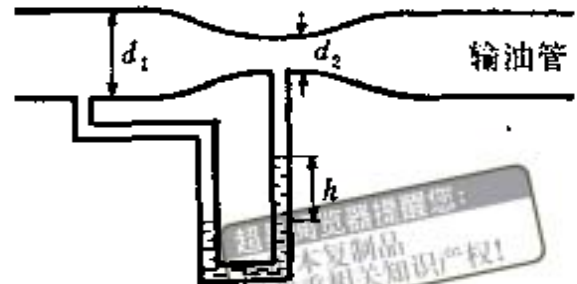
2. 一低速风洞具有开口式的试验段, 其断面直径为 d , 一杯式酒精压力计连接于风洞较粗段上, 此处断面的直径为 D . 当理想不可压重力作用下的流体流过时, 压力计的高度读数为 h . 如果运动是定常的, 试决定试验段流体的速度. 大气压力设为 p_0 .

3. 为测定汽油沿油管流过的流量, 使油管有一段制成收缩的, 水银压力计的两端分别连结油管的两处 (如图示). 当汽油流过管子时压力计高度差为 h , 求汽油的流量大小. 假定汽油为理想不可压缩流体, 流动是定常的, 油管的直径为 d , 收缩处的直

径是 d_2 .

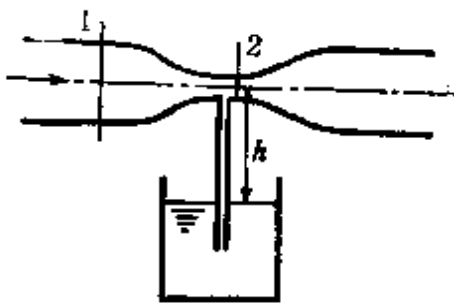


题 2

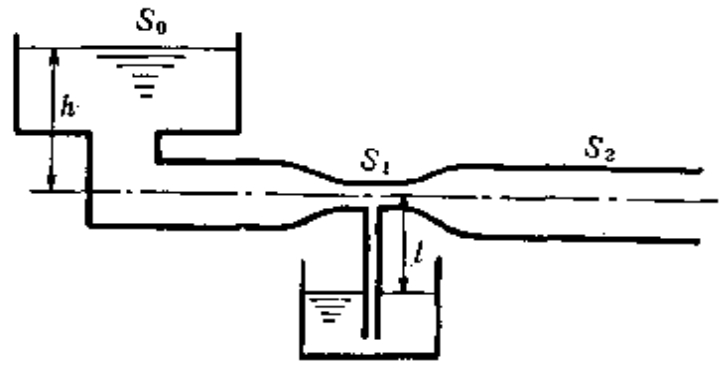


题 3

4. 设空气在一收缩管道中流过，管道收缩处有一毛细管与下方一容器中的水相接，水面与收缩处的距离为 h ，收缩管截面 1 和 2 处的断面积为 S_1 和 S_2 。如果把空气看为理想的，不可压缩的，它的运动是定常的且只有重力作用。试问空气在入口处的流速多大时管道能将容器中的水吸到管道中来？



题 4

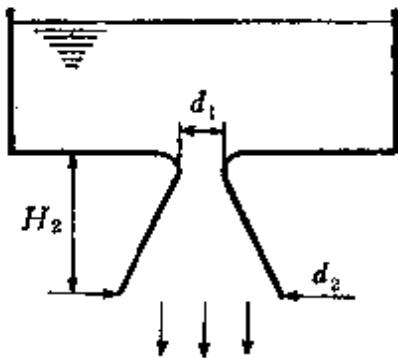


题 5

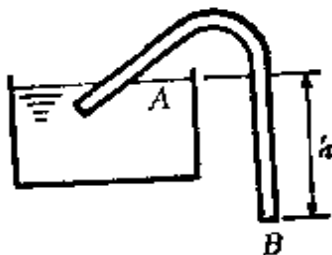
5. 一大容器与一收缩管道相连，管道收缩处有一小管与下方容器中的液体相通。设大容器中装有同样的液体，液面距管道的高度为 l ，管道收缩处和出口处的断面积分别为 S_1 与 S_2 。问下方容器中的液面到管道收缩处的距离多高时，下方容器中的液体能被吸上管道？设液体是理想，不可压缩，受重力作用，运动是定常的。

6. 水沿着一扩大管自上方容器流向下，扩大管是一具有圆形进口及小圆锥角扩张的导管。设管的收缩处和出口处的断面

直径分别为 d_1 和 d_2 ，管长为 H_2 。问上方容器水位多高时，扩大管道收缩处的压力为零。



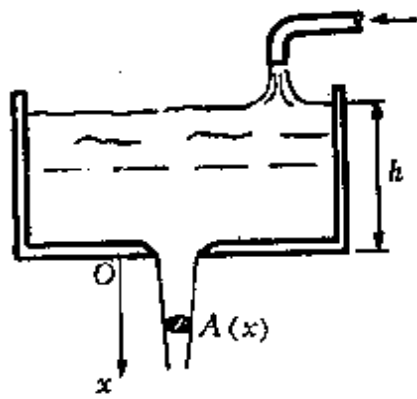
题 6



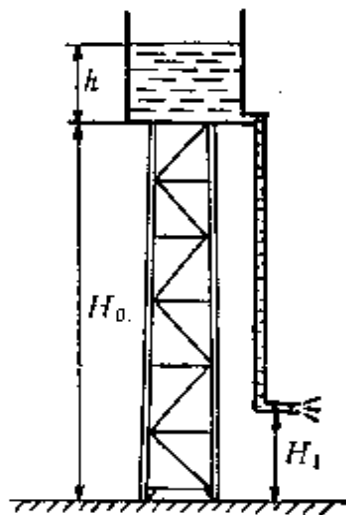
题 7

7. 一吸虹管放于水桶中，其位置如图所示。如果水桶及吸虹管的截面积分别为 A 和 B ，且 $A \gg B$ ，试计算吸虹管的流量。水看作是理想不可压缩的，且受重力作用，运动是定常的。

8. 一水箱底部有一小孔，射流的截面积为 $A(x)$ ，在小孔处 $x=0$ ，截面积为 A_0 。通过不断注水使水箱中水高 h 保持常数，水箱的横截面远比小孔的大。设流体是理想、不可压缩的，求射流截面积随 x 的变化规律 $A(x)$ 。



题 8

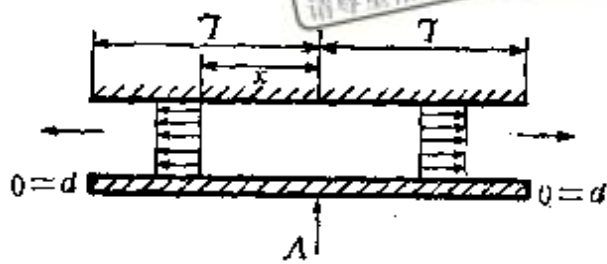


题 9

9. 一水塔的蓄水箱底离地面的高度 $H_0=20$ 米，其横断面为半径 $R=2$ 米的圆，储水深 $h=1$ 米。如果用装在高 $H_1=5$ 米处截面积为 2 厘米² 的水龙头放水，问需多久才能将水放完？

10. 两个宽为 $2L$ 的很长的平行平板相距为 b ，上面的板以常速率 V 向下移动。密度为 ρ 的理想不可压缩流体充满两板间的

縫隙，流体在板间挤出，因流动是对称的，故速度平行于平板，在中心速度为零。设 $b \ll L$ ，平行于板的速度 u 在縫隙的横截面上处处相等。又设流动是一维的，且平行于 x 轴。



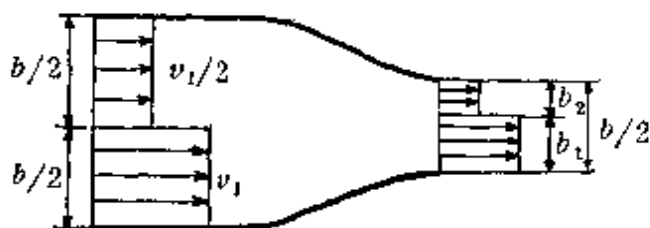
题 10

(1) 证明在离中心

x 处的速度近似地等于 $u = \frac{Vx}{b}$;

(2) 注意到 b 随时间变化，设板外压力为零，求沿板任取一点 x 处的压力 p 。设重力可忽略。

11. 二维导管入口处宽为 b ，并装有常密度 ρ 的无粘性流体，导管一半速度为 v_1 ，



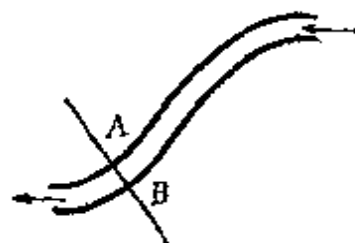
题 11

另一半速度为 $\frac{v_1}{2}$ ，两层流线不混合。导管出口处宽度为 $b/2$ ，导管入口处和出口

处流动是平行的，因此这两个截面上压力分布是均匀的。求通过收缩段后的压力差 $p_1 - p_2$ ；并求出口截面上两层流体的宽度 b_1 与 b_2 。

12. 有一大桶内装液体，液面距离底高为 h 。问在桶侧壁什么地方开出流小孔口，流出的液柱射得最远？

13. 证明河流拐弯处，内侧岸边 A 处的水流速度大于外侧岸边 B 处的水流速度，而 A 处的水面则低于 B 处。假设流动定常、无旋，河水是不可压缩的。



题 13

14. 证明在不可压缩流体的平面、定常、无旋运动中，流线的曲率 κ 由下面公式表示

超星浏览器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

$$\kappa = \frac{1}{v^2} \frac{d\left(\frac{p}{\rho} + \tilde{V}\right)}{dn}$$

式中 p 为压力； ρ 为密度； \tilde{V} 为质量力势； dn 为流线的法线单位元素，其方向取离开曲率中心的方向。

15. 证明理想不可压缩均质流体作定常无旋运动，在重力作用下，压力 p 满足不等式

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} < 0$$

16. 在圆锥形细管的气体定常出流中，质点的迹线是会集于圆锥顶点的直线。设运动为等温运动，求任意两断面上速度之间的关系为

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1} e^{\frac{v_1^2 - v_2^2}{2RT}}$$

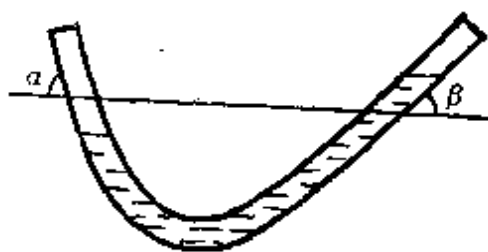
式中 v_1, v_2 和 S_1, S_2 分别为两个断面上的速度和面积， RT 是常数。设气体是理想的，质量力作用忽略不计。

17. 理想不可压重流体做无旋运动，已知速度势为

$$\varphi = -\frac{2t}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

如果在运动过程中，点 $(1, 1, 1)$ 上压力总是 $p_1 = 1.2$ 公斤/厘米²，求运动开始 20 秒后，点 $(4, 4, 2)$ 的压力（令 $\rho g = 1$ ）。

18. 求理想不可压重力作用下的流体，在开口曲管中的振动



题 18

规律。假定管为等截面的，管中流柱长为 l ， α, β 为曲管与水平线间的夹角，运动的初始条件是由平衡位置开始振动。

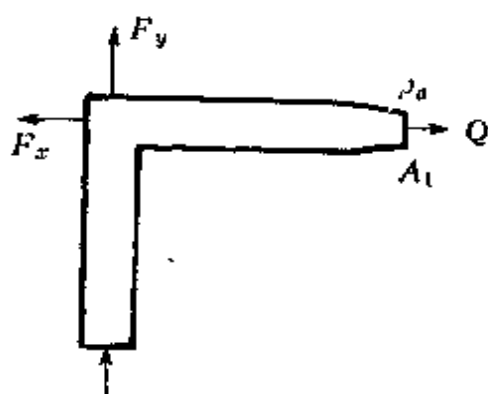
19. 有一锥形容容器，高为 h ，底面圆的半径为 r/h ，顶圆的半径为 r 。设容器中盛满了水，设想底面打开，则水自容器内流下来。

计算使容器内水降至 $h/2$ 高度时需要的时间。

20. 从充满空间的理想不可压缩流体中突然取出半径为 c 的球状体积，设在无穷远处各点作用着压力 p （常数），无外力作用，求流体的运动规律。

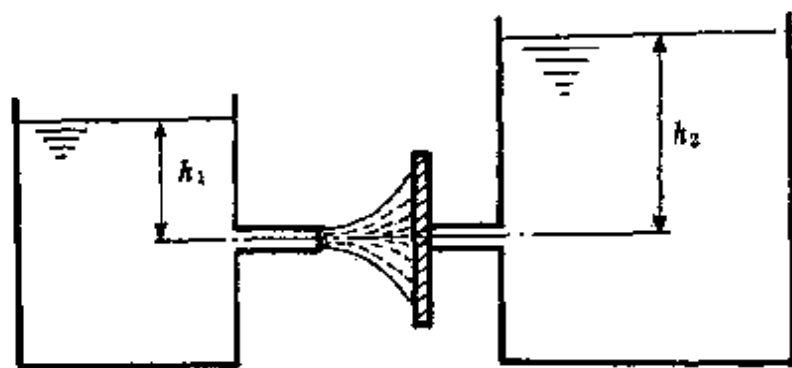
21. 当球形炸弹在不可压、理想流体内爆炸时，如果运动是无旋的，且不考虑外力影响，求直接位于炸弹表面上的流点的压力。无穷远处压力为 p_0 ，爆炸的规律是 $r = r(t)$ 。

22. 截面积为 A_2 的 90° 弯管和一截面积为 A_1 的喷管相连。设水以流量 Q 从喷管射向压力为 p_0 的大气。求作用在弯管上的力 F_x 和 F_y 。设流体是理想不可压缩的，重力可以忽略，流动是定常的。



题 22

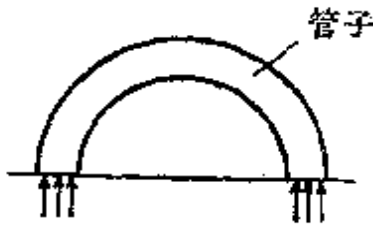
23. 水从水头为 h_1 的大容器通过小孔流出（大容器中的水位可以认为是不变的），射流冲击在一块大平板上，它盖住了第二个大容器的小孔，该容器水平面到小孔的距离为 h_2 ，设两个小孔的面积都一样。若 h_2 给定，求射流作用在平板上的力刚好与板后的力平衡时 h_1 为多少？



题 23

24. 有一半环形的等断面的弯曲圆管，圆断面的半径为 a ，以速度大小为 V ，方向垂直于断面的速度吹进压力为 p_1 的空气。

如果空气是不可压的、理想的、运动是定常的，且质量力忽略不计，求管子所受的总压力。



题 24

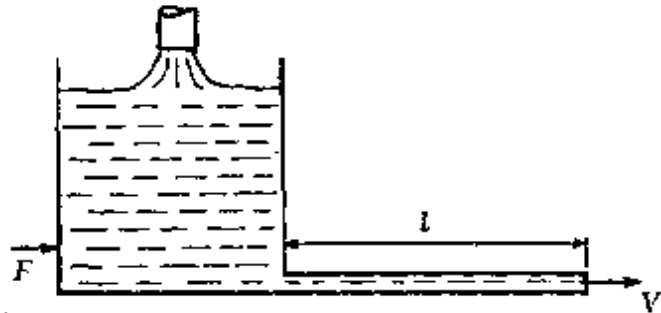
25. 宽为 b 的二维理想不可压缩流体喷注，正击于一静止的平板后，向两边分流。设来流速度为 v ，密度为 ρ 。如果不考虑重力影响，试求平板所受的冲击力。

26. 一装有喷气发动机的火箭，燃料经过燃烧后变成高压气体由尾部喷管射出来。假若出流气体的速度是 v ，密度是 ρ ，喷管管口面积为 F ，问火箭受到多大推力。

27. 不可压流体从一水箱流过很长的管子，管子的截面积为 A ，长为 l 。控制流入水箱的水流使得出流速度可以表示为

$$V = V_0 - at$$

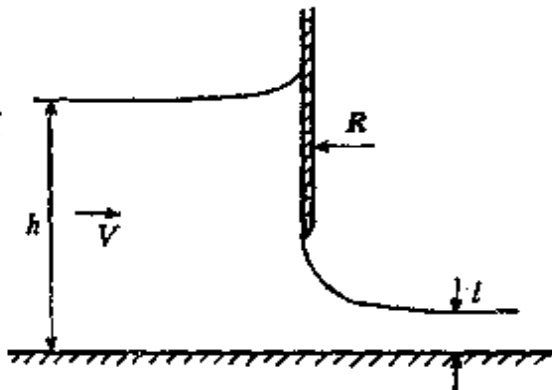
其中 V_0 、 a 为常数， t 为出流过程中任一时刻。在管道截面上速度认为是相



题 27

等的，流量输出系数 $c_d = 1.0$ ，问要固定水箱需加多大的水平力？

28. 设流体是理想不可压缩的，流动是定常的，流体高度为 h ，流速为 V ，在重力作用下流过闸门（如图）。闸门下游流体深为 l 。要固定闸门，求闸门单位宽度上所需的力 R ，用 ρ 、 g 、 h 和 l 表示。

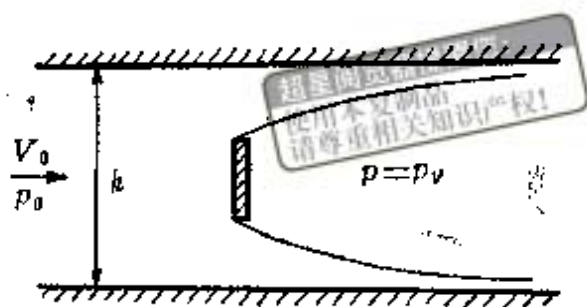


题 28

29. 一个二维物体放在宽为 h 的二维水洞中，上游远前方的水流速度 V_0 为常数。当

上游的压力 p_0 低于某一数值时，物体后的液体会汽化并形成一个

很长的蒸汽空腔区，那里压力为 p_v ($p_v < p_0$)。设下游远处空腔边界和洞壁之间射流速度沿截面是常数。又设没有摩擦，蒸汽的密度和重力影响不计，求作用在物体上（每单位厚度）的阻力。用 V_0 ， p_0 ， p_v ， h 和常密度 ρ 表示。



题 29

30. 如果流速为 v_1 ，压力为 p_1 的水流，从一圆管流到一个较粗的圆管中，由于管的突然扩大使水流发生紊乱的运动，过一段距离后水流又重新达到稳定状态，此时流速为 v_2 。求经过这一混乱后引起水流的压力增加，并和逐渐扩大管的情况做比较，求其压力损失。流体是理想不可压缩的，水流紊乱的不定常性引起的动量变化认为是可忽略的。

31 在不可压理想流体的平行流中对称地放一椭圆形柱体。试证其体积所受的阻力为零。讨论对于任意截面形状 的物体而言，结论将如何？

习题答案

第二章

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

二、1. (1) 流线

$$\frac{x}{C_{1x} \cos \omega t + C_{2x} \sin \omega t} - \frac{y}{C_{1y} \cos \omega t + C_{2y} \sin \omega t} = \text{常数},$$

$$\text{迹线} \begin{cases} x = -\frac{C_{1x}}{\omega} \sin \omega t + \frac{C_{2x}}{\omega} \cos \omega t + \text{常数}, \\ y = -\frac{C_{1y}}{\omega} \sin \omega t + \frac{C_{2y}}{\omega} \cos \omega t + \text{常数}, \end{cases}$$

(2) $y = Ax, z = B$, 其中 A, B 为常数;

(3) $x^2 + y^2 = \text{常数}$;

(4) $r = c_1 \sin \theta, z = c_2$, 其中 c_1, c_2 为常数;

(5) 在球坐标中 $\theta = \text{常数}, \varphi = \text{常数}$;

(6) $r = c_1 \sin^2 \theta, \varphi = c_2$, 其中 c_1, c_2 为常数;

(7) $\frac{y^2}{c_1^2} + \frac{x^2}{(c_1/a)^2} = 1, z = c_2$, 其中 c_1, c_2 为常数;

(8) $y^3 - 3x^2y = \text{常数}, y^3 - 3x^2y + 2 = 0$;

(9) $\frac{r^2 - a^2}{r} \sin \theta = \text{常数}, z = \text{常数}$;

(10) $\frac{r^2 - a^2}{r^2} \sin \theta = \text{常数}, \varphi = \text{常数}$;

(11) 流线 $\begin{cases} xy + yt - xt - 1 = 0, \\ z = \text{常数}, \end{cases}$

$$\text{迹线} \begin{cases} x+y+2=0, \\ z=\text{常数}; \end{cases}$$

$$(12) \text{ 流线} \begin{cases} (ax+t^2)(ay+t^2)=\text{常数}, \\ z=\text{常数}, \end{cases}$$

$$\text{迹线} \begin{cases} x=c_1 e^{at} - \frac{1}{a} t^2 - \frac{1}{a^2} t - \frac{1}{a^3}, \\ y=c_2 e^{-at} - \frac{1}{a} t^2 + \frac{1}{a^2} t - \frac{1}{a^3}, \\ z=c_3; \end{cases}$$

$$(13) u=(a+1)e^t-1, \quad v=(b+1)e^t-1.$$

$$4. (1) x=0.133, \quad y=0.133, \quad z=0;$$

$$(2) u=1815, \quad v=4506, \quad w=0.$$

- 三、1. (1) 有旋; (2) 无旋;
(3) 有旋; (4) 有旋.

2. (1) 有旋, 定常, 一维;
(2) 有旋, 定常, 二维;
(3) 有旋, 不定常, 三维;
(4) 无旋, 不定常, 三维;
(5) 无旋, 定常, 一维;
(6) 有旋, 不定常, 二维;
(7) 无旋, 不定常, 二维.

3. (1) 定常, 不可压, 无旋;
(2) 不定常, 不可压, 无旋.

4. (1) 不定常; (2) 定常.

$$\text{五、2. (1) } Q=\frac{4\pi}{R}; \quad (2) Q=0.$$

$$3. \quad 1 \text{ 个大气压} \approx 1.033 \text{ 公斤/厘米}^2 \approx 14.748 \text{ 磅/吋}^2.$$

$$4. \quad W_{\text{空}} \approx 1.225 \text{ 公斤}, \quad W_{\text{水}} \approx 1000 \text{ 公斤}.$$

第三章

4. (1) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \rho v_r = 0;$

(2) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\rho v_r r^2)}{\partial r} = 0;$

(3) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0;$

(4) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} = 0;$

(5) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0;$

(6) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\rho r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho v_\varphi)}{\partial \varphi} = 0.$

5. (2) $\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2;$ (3) $v_1 S_1 = v_2 S_2.$

6. $v = -2axy.$

7. $v = e^{-x} \sinh y;$ $\psi = e^{-x} \sinh y + y.$

10. $w = -2z.$

11. (1) $v_1 = 3.18$ 米/秒, $v_2 = 12.74$ 米/秒, $v_3 = 1.42$ 米/秒.

(2) $v_1 = 3.18$ 米/秒, $v_2 = 21.23$ 米/秒, $v_3 = 1.18$ 米/秒.

12. $\rho = \rho_1 u_1 / u.$

13. (1) $a_1 + b_2 + c_3 = 0;$

(2) $(a+c)y + (b+2d)z = 0;$

(3) 无条件.

21. $p_{xy} = p_{yx} = 0.024$ 牛顿/米², $p_{xz} = p_{zx} = 0.04$ 牛顿/米²,
 $p_{yz} = p_{zy} = 0.056$ 牛顿/米².

22. (1) $4\pi\mu cr_0^2.$

(2) $\pi\mu cr_0^2.$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

23. (1) $2\mu b l \frac{\mu_0}{h}$; (2) $\frac{\mu_0 \mu_0}{h}$; (3) 0

25. $\frac{9}{2500}$ 达因/厘米²·秒.

29. (1) $(x-Ut)^2 + (y-Vt)^2 + (z-Wt)^2 = a^2$.

第 四 章

1. (1) 无旋; (2) 无旋; (3) 无旋; (4) 无旋.

2. (1) 除原点外无旋. (2) $\Gamma = 2\pi c$.

3. 无旋.

6. (1) $\Omega = \frac{cz}{\sqrt{y^2+z^2}}j - \frac{cy}{\sqrt{y^2+z^2}}k$;

(2) $\Omega = x(z^2 - y^2)i + y(x^2 - z^2)j + z(y^2 - x^2)k$;

(3) $\Omega = 2\omega k$

7. (1) $\Omega = i + j + k$; 涡线: $y - x = \text{常数}$, $y - z = \text{常数}$;

(2) 涡管强度为 $\sqrt{3} \times 10^{-4}$ 米²/秒;

(3) 涡通量为 10^{-4} 米²/秒.

8. (1) $a = -d, b, c$ 任意, 流线: $by^2 + 2axy - cx^2 = \text{常数}$;

(2) $a = -d, b = c$, 流线: $by^2 + 2axy - bx^2 = \text{常数}$;

10. $\Omega = \frac{\Gamma_0}{4\pi vt} e^{-\frac{r^2}{4vt}}$; $\Gamma = \Gamma_0(1 - e^{-\frac{r^2}{4vt}})$; Γ_0

11. $\Omega = \frac{v}{R} - \frac{\partial v}{\partial n}$, R ——流线的曲率半径, n ——流线的法向.

13. $0 \leq r \leq a$ 时有旋, $r \geq a$ 时无旋.

22. 无旋或定常.

23. $|\Omega| = \frac{2k}{\sqrt{c - 2k^2(x^2 + y^2)}} |v|$.

26. $-\rho V_0 \Gamma - \frac{\rho \Gamma^2}{4\pi h}$; $-\rho V_0 \Gamma$.

27. $v = \frac{\Gamma}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} k$, k 为 z 方向的单位向量.

28. $2\pi k$.

32. 当 $V_{\infty} = \frac{\Gamma}{4\pi h}$ 时流线方程为

$$\frac{y}{h} + \log \frac{x^2 + (y-h)^2}{x^2 + (y+h)^2} = \text{常数}$$

第 五 章

3. (1) 98 牛顿. (2) 1.95 牛顿.

4. $\lambda = \mu = \nu = \frac{1}{2}$.

5. 有可能平衡.

6. $[g \sin \theta + a \cos(\alpha - \theta)]x + [g \cos \theta + a \sin(\alpha - \theta)]y = 0$.

x 轴, y 轴分别平行和垂直于斜面.

7. 平行于斜面的平面.

8. 是一旋转抛物面.

10. 自由面为 $r = \sqrt[3]{\frac{3\tau}{4\pi}}$; $p=1$ 的等压面为 $r = \frac{\rho\mu}{1 + \rho\mu\sqrt[3]{\frac{4\pi}{3\tau}}}$ 的球面.

11. $p_0 + \frac{1}{2}\rho gR$.

13. $\frac{\pi r^2}{2} (2p_0 + \sqrt{2}\rho gr)$.

14. $\frac{1}{6}\rho gr^3 \sqrt{\pi^2 + 8}$; $x = y = \frac{2}{\pi}z$.

15. $P = 11.6$ 吨, 合力与水平面夹角为 $39^\circ 21'$; 总力矩为 0.

19. (1) $x = 3.8$ 米. (2) 稳固.

20. (1) 0.124 米. (2) 2.73 秒.

21. (1) $F_x=130.5$ 千牛顿, $F_z=35$ 千牛顿.
 (2) $F_x=68.1$ 千牛顿, $F_z=100.5$ 千牛顿.

$$22. P = \frac{1}{2} \rho g a \sqrt{\pi^2 a^2 + 16h^2}; \quad y = \frac{4}{3} \frac{a}{\pi}, \quad z = \frac{a^2}{3h}.$$

23. 7.47牛顿·米.

$$25. T = T_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho_0}{p_0} g z \right).$$

$$28. y = h \exp\left(-\sqrt{\frac{\rho g}{\sigma}} x\right), \quad h = \frac{\cot \theta}{\sqrt{\rho g / \sigma}}, \quad \sigma \text{ 为表面张力}.$$

第 六 章

2. $v = \frac{D^2}{\sqrt{D^4 - d^4}} \sqrt{\frac{2\rho_1 g h}{\rho}}$, ρ, ρ_1 分别为气体和酒精的密度.

3. $Q = \frac{\pi d_1^2 d_2^2}{4\sqrt{d_1^4 - d_2^4}} \sqrt{\frac{2\rho_1 g h}{\rho}}$, ρ, ρ_1 分别是汽油和水银的密度.

4. $v = \frac{S_2}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho} 2gh}$, ρ, ρ_1 分别是气和水的密度.

5. $l = \frac{S_2^2 - S_1^2}{S_1^2} h.$

6. $H = \frac{d_1^4}{d_2^4 - d_1^4} \left[\frac{p_0}{\rho g} - \frac{d_2^4}{d_1^4} H_2 \right].$

7. $Q = B \sqrt{2gh}.$

8. $A(x) = A_0 \sqrt{\frac{h}{h+x}}.$

9. $t = 3.69 \times 10^3$ 秒.

10. (2) $p = \rho \left(\frac{V}{b} \right)^2 (L^2 - x^2).$

超星浏览器提醒您：
使用本复制品
请尊重知识产权！

11. $p_1 - p_2 = 1.545 \frac{\rho v_1^2}{2}$; $b_1 = 0.314b$; $b_2 = 0.186b$.

12. 小孔位于离桶底 $\frac{h}{2}$ 处.

17. $P = 0.286$ 公斤/厘米².

18. 振动周期为 $2\pi \sqrt{\frac{l}{g(\sin\alpha + \sin\beta)}}$.

20. $\frac{dr}{dt} = -\sqrt{\frac{2p}{3\rho} \left(\frac{c^3}{r^3} - 1 \right)}$.

21. $p = p_0 + \frac{\rho}{2} \left[\frac{d^2(r^2)}{dt^2} + \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right]$.

22. $F_x = p_0 A_1 + \rho \frac{Q^2}{A_1}$, $F_y = \left[\frac{\rho Q^2 (A_1^2 + A_2^2)}{2 A_1^2 A_2} + p_0 A_2 \right]$.

23. $h_1 = h_2/2$.

25. $b(\rho v^2 + p)$, p 为喷注端部处的压力.

26. $F(\rho v^2 + p^*)$, p^* 为气体出口处压力与外界压力的差.

27. $F = \rho a A l + \rho (V_0 - at)^2 A$.

28. $R = \rho g (h-l)^3 / 2(h+l)$.

29. $(p_0 - p_v)h + \rho V_0^2 h - \rho h V_0 \sqrt{V_0^2 + \frac{2}{\rho_1} (p_0 - p_v)}$.

30. $\frac{\rho}{2} (v_1 - v_2)^2$.