

20444/13

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

下册目录

第七章 理想不可压缩流体无旋运动	1
(A) 方程组及其基本性质	1
7.1 引言. 基本方程组	1
7.2 速度势函数及无旋运动的性质	5
*7.3 有界区域的唯一性定理	12
*7.4 势函数 φ 在无穷远处的渐近展式	14
*7.5 无界区域的唯一性定理	21
(B) 理想不可压缩流体平面定常无旋运动.....	24
7.6 平面运动及其流函数	24
7.7 复位势及复速度	30
7.8 理想不可压缩流体平面定常无旋运动问题的数学提法	31
7.9 基本流动	33
7.10 圆柱的无环量绕流问题	42
7.11 圆柱的有环量绕流问题	48
7.12 虚像法. 映射定理和圆周定理	52
7.13 机翼的几何参数及空气动力特性曲线	56
7.14 保角映射方法. 任意物体绕流问题. 复位势的一般表达式. 环量的确定	61
7.15 举力和力矩公式. 茹柯夫斯基定理	69
7.16 椭圆和平板的绕流问题	75
7.17 茹柯夫斯基剖面	86
7.18 薄翼	93
7.19 具有自由流线的绕流和射流. 对数速度平面	105
(C) 理想不可压缩流体定常无旋轴对称运动.....	117
7.20 轴对称运动及其流函数	117
7.21 轴对称流动问题的数学提法	122

7.22	圆球绕流问题	124
7.23	回转体的绕流问题	127
(D)	理想不可压缩流体定常空间运动	136
7.24	有限翼展机翼理论	136
(E)	理想不可压缩流体不定常无旋运动	154
7.25	附加质量和不定常阻力	154
	习题	166
第八章	理想不可压缩流体波浪运动	179
8.1	基本方程组, 边界条件及初始条件	179
8.2	平面波的周期解, 驻波, 进波	185
8.3	群速	196
8.4	波能, 波能转移, 波阻	199
8.5	长波理论	204
	习题	209
第九章	粘性不可压缩流体运动	212
(A)	基本理论	213
9.1	粘性不可压缩流体的运动方程组	213
9.2	粘性流体运动的一般性质	223
9.3	相似律	230
9.4	层流和湍流	238
(B)	层流运动	239
9.5	粘性不可压缩流体方程组的讨论, 解题的几种途径	240
9.6	准确解	241
9.7	小雷诺数情形的近似解法, 粘性流体绕圆球的运动	255
9.8	普朗特边界层方程	267
9.9	半无穷长平板的层流边界层	295
9.10	动量积分关系式方法	311
9.11	润滑理论	338
(C)	湍流运动	345
9.12	雷诺方程	345
9.13	普朗特混合长理论, 无界固壁上的湍流运动	353

9.14	圆管内的湍流运动	360
9.15	平板湍流边界层	370
9.16	层流向湍流的过渡	377
	习题	386
第十章	气体动力学基础	391
10.1	气体动力学基本方程组	392
10.2	无量纲热力学元素和无量纲速度之间的关系	399
10.3	小扰动在可压缩流体中的传播, 音速	414
10.4	马赫数、亚音速和超音速的原则差别	429
10.5	有限振幅波的传播, 激波的产生	433
10.6	正激波理论	440
10.7	管道中的拟一维定常运动	457
	习题	472
	附录一	478
	附录二	479
	附录三	485
	习题答案	487
	上册勘误表	494

第七章 理想不可压缩流体无旋运动

(A) 方程组及其基本性质

7.1 引言. 基本方程组

本章研究流体力学中比较简单的一类问题——理想不可压缩流体无旋运动。这是一种理想化了的近似模型，比真实流体的运动要容易处理得多。但是在具体研究这类问题以前首先必须回答这样的问题，研究理想不可压缩流体无旋运动有没有实际意义？下面以绕流问题为例加以探讨。所谓绕流问题通常指流体绕过物体时，在物体外部形成的流动，例如飞机、火车、汽车及建筑物外部的 airflow，潜水艇周围的水流等都是绕流问题。考虑一架飞机在静止空气中常速飞行，坐在飞机上的人看，前方有均匀气流驶来，掠过飞机流向后方，这时飞机主要部件机翼和机身都是均匀气流的绕流问题。如果要求计算空气对飞机的作用力，那么就需要流体力学知识来解决机翼和机身的绕流问题。这类问题就其本来面貌而言是相当复杂的，空气是有粘性并且是可压缩的，机翼和机身的形状又很复杂，因此如果在理论上把这些因素通通考虑进去，其结果必然是“如堕烟海，找不到解决矛盾的方法”。正确的方法应该是具体问题具体分析，在复杂的问题中抓主要矛盾，略去次要因素。例如在绕流问题中，粘性与压缩性等因素对于流动会有这样或那样的影响，但是对某一具体问题来说，它们不会是同等重要的。我们在分析问题时，可以先忽略次要因素，只考虑主要因素。次要因素可以作为修正因子另作考虑。这样做了之后，就可以将问题大大简化，得出许多有用的结果，同时还为今

后研究更复杂的流动奠定了必不可少的基础。这种抓主要矛盾的科学方法是具有普遍意义的。实验表明，当物体被绕流时，在其表面附近很薄的边界层内，空气粘性有显著影响，而在边界层外的绝大部分区域内，粘性的影响很小，可以忽略不计。所以，如果仅研究飞机表面在不脱体绕流时的压力分布和所受的升力，而不研究与粘性有关的飞机的阻力问题，我们就可以忽略粘性这一次要因素而把流体近似地看作是理想的。其次，当飞机的飞行速度小于 100 米/秒时，压缩性的影响可以忽略，流体可以近似地看作是不可压缩的。因此，如果我们研究的是低速飞机（或高速飞机的起飞、着陆阶段）的压力分布和升力问题，我们就可以采用流体是理想、不可压缩的这一近似模型。此时方程组和初始条件、边界条件为

$$\begin{cases} \operatorname{div} v = 0 \\ \frac{dv}{dt} = F - \frac{1}{\rho} \nabla p \end{cases} \quad (7.1.1)$$

在 $t=t_0$ 时 $v=v(r), p=p(r)$

在翼表面上 $v_n=0$ ；在无穷远处 $v=V_\infty$

方程组(7.1.1)是非线性的，而且 v 和 p 相互影响，需要一并求出。因此虽然问题已有了相当大的简化，但要解出这组方程仍然是很困难的。进一步研究表明(4.6 的例 1)对于在重力场作用下的理想不可压缩流体而言，均匀来流的绕流运动一定是无旋的。方程组(7.1.1)在无旋运动时将有重大的简化。

若运动是无旋的，则 $\operatorname{rot} v=0$ ，即存在速度势 φ ，使得

$$v = \operatorname{grad} \varphi \quad (7.1.2)$$

于是一个位势函数 $\varphi(x, y, z, t)$ 就可以代替三个速度分量函数。

将(7.1.2)式代入(7.1.1)中的连续性方程后得

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = 0$$

即

$$\Delta \varphi = 0 \quad (7.1.3)$$

在直角坐标系中有

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

这是一个线性的二阶偏微分方程，通常称为拉普拉斯方程。线性方程的一个突出优点就是解的可叠加性，即如果 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 是 (7.1.3) 的解，则这些解的任一线性组合

$$\varphi = C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 + \dots + C_n \varphi_n$$

也是 (7.1.3) 的解。(上式中的 C_1, C_2, \dots, C_n 是一组不全为零的任意常数。) 这样就给解决问题带来很多方便。必须指出，对于不定常运动来说，时间 t 在方程 (7.1.3) 中是作为参数出现的。

因为流体是理想不可压缩的，重力有势，且运动无旋，所以 (7.1.1) 式中的运动方程可积分出来，我们得拉格朗日积分

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = f(t) \quad (7.1.4)$$

于是，当速度势 φ 求出后，可按 (7.1.2) 式求出速度 v 。再将它代入 (7.1.4) 式后就可求出压力分布 p 。至此问题全部解决。

综上所述，对于理想不可压缩流体无旋运动，方程组和初边条件化为

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \nabla = f(t) \end{cases} \quad (7.1.5)$$

$$t = t_0 \text{ 时 } \text{grad} \varphi = v_0(r), p = p_0(r) \quad (7.1.6)$$

$$\begin{cases} \text{在静止固壁上} & \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \\ \text{在自由面上} & p = p_0 \\ \text{在无穷远处} & \nabla \varphi = V_\infty \end{cases} \quad (7.1.7)$$

方程组 (7.1.5) 由一个二阶线性偏微分方程和一个有限关系式组成，用来确定两个未知函数 $\varphi(x, y, z, t)$ 及 $p(x, y, z, t)$ 。与方程组 (7.1.1) 相比，方程组 (7.1.5) 在数学上有了重大的简化。

数学简化主要体现在下列几点：(1) 方程组的未知函数由四个降低到两个，方程组的数目也随之由四个降低至两个；(2) 原来的四个方程中一个是线性方程三个是非线性方程，现在变成了一个线性方程和一个非线性有限关系式，而且这个线性方程还是经典的拉氏方程，对于它的性质及解已经研究得很清楚了；(3) 原来 v 与 p 相互影响，须要一起解出，现在运动学函数 v ，和动力学函数 p 已可分开求出，先从 $\Delta\varphi=0$ 解出 φ ，然后再代入拉格朗日积分求出 p 。归根结底，主要的简化来自于在理想不可压缩流体无旋运动时，非线性的运动方程可以用它的第一积分，即非线性的拉格朗日积分代替；而原来确定速度矢量 v 的线性连续性方程 $\nabla \cdot v=0$ ，加上了无旋条件后变成了确定调和函数 φ 的线性拉普拉斯方程。必须指出，方程(7.1.1)中运动方程的非线性并没有消失，也没有转化为线性，因为与之等价的拉格朗日积分仍然是非线性的，只不过因为它是有限关系式较易处理罢了。

现在我们讨论理想不可压缩流体无旋运动的适用范围。理想流体的模型主要适用于粘性力比其他类型的力小得多的流动区域，对于某些问题如机翼剖面上的压力分布、速度分布及其所受的举力等比较符合，而对于粘性起主导作用的有关摩阻、传热、扩散与衰减等问题则得不到符合实际的结果。不可压缩流体的模型对于在通常条件下运动的液体以及低速运动的气体而言都是适用的。对于高速运动的气体以及液体中压缩性起主导作用的某些问题如水击与水中爆炸等，不可压缩流体的假设必须抛弃。在涡旋运动这一章中我们已看到在理想正压流体、外力有势的条件下，从静止或无旋状态起动的不定常运动及无穷远处均匀来流的定常连续绕流问题都是无旋运动。因此对于这些运动可以采用无旋运动的假设。通过上面的讨论可以明白，理想不可压缩流体无旋运动只适用于一定条件下的一定问题。因此在实际应用上述模型解决问题时必须注意分析所处的条件及所需解决的问题。

尽管理想不可压缩流体无旋运动具有一定局限性，但是它除

了具有确定无疑的实际意义外，还提供了有关流动性质的许多有益的资料，积累了处理问题的各种方法，因此它在流体力学中占有重要地位，是进一步处理更复杂流动的必不可少的基础。

7.2 速度势函数及无旋运动的性质

本节研究速度势函数及无旋运动的性质。速度势函数 φ 在定常场中是 x, y, z, t 的函数，在定常场中是 x, y, z 的函数，它与速度矢量 v 的关系由下式决定

$$v = \text{grad}\varphi \quad (7.2.1)$$

如果已知速度势 φ ，根据(7.2.1)式通过微分的方法可以求出速度 v 。反过来，如果已知速度矢量 v ，我们来看，如何由(7.2.1)式求出 φ 。将(7.2.1)式两边点乘曲线 MM_0 的弧元素 dr

$$v \cdot dr = \text{grad}\varphi \cdot dr = d\varphi$$

并沿曲线 MM_0 积分之得

$$\varphi(M) = \varphi(M_0) + \int_{M_0}^M v \cdot dr \quad (7.2.2)$$

这就是已知 v 确定 φ 的公式。

(7.2.2)式中的 $\varphi(M_0)$ 可以任意选择，因此速度势函数 φ 在不同 $\varphi(M_0)$ 的选取下可以差一常数，但是这并不对流动本质有所影响，因为当我们求流动特征量 v 等时，常数的差别便消失不见，所得的结果完全一样。

现在讨论速度势函数单值和多值的问题。它和所考虑的区域是单连通区域或多连通区域密切相关。首先我们回顾一下有关连通、单连通和多连通的概念。如果区域内任两点都可用区域内一连续曲线连接，则这样的区域称为连通的。如果区域内任一封闭曲线可以不出边界地连续地收缩到一点，则此连通区域称为单连通区域。例如球内、外区域，两同心球之间的区域等都是单连通区域。为了定义多连通区域须要引进分隔面的概念。分隔面是这样的曲面，它整个地处于区域内部，而且它和区域边界的交线是

一条封闭曲线。能作一个分隔面而不破坏区域连通性的称为双连通区域，能作 $n-1$ 个分隔面而不破坏区域连通性的称为 n 连通区域。例如，圆环内部区域是双连通区域，因为可以作一个分隔面 ab 而不破坏连通性(图 7.2.1(a))。又如钻了两个圆孔的矩形板内区域是三连通区域，因为在区域内可以作二个分隔面 $abcd$ 和 $efgh$ 而不破坏区域的连通性(图 7.2.1(b))。在双连通区域内引进分隔面后，如果将分隔面的两边看作是区域的新边界，则产生了一个新的区域，它的连通度减少一个变成了单连通区域。

超星数字图书馆
使用本复制品
请尊重相关知识产权!

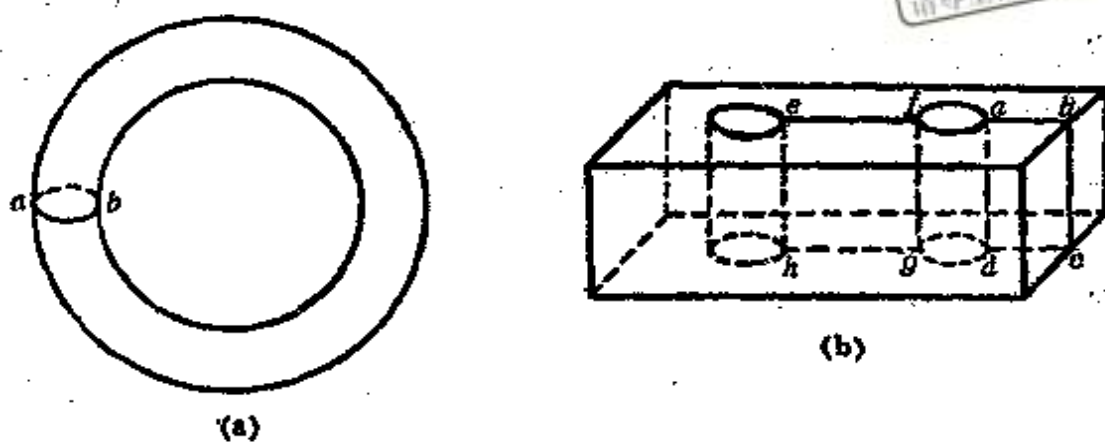


图 7.2.1

双连通区域在流体力学中经常遇到，因此具有重要意义。例如圆柱外的流动区域，烟环外的流动区域等都是双连通的。超过 2 的多连通区域在流体力学中不多见，而且即便出现也可以很容易地将双连通区域的结果推广到那里去，正因为如此以下的讨论主要是针对双连通区域而言的。

从(7.2.2)式可以很清楚地看出， φ 的单值或多值取决于线积分 $\int_{M_0}^M \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ 是否和积分路线有关。若所考虑的流动区域是单连通区域，则在单连通区域内沿任一封闭回线 L 的速度环量皆等于零

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

据此不难证明线积分 $\int_{M_0}^M \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ 与积分路线无关, 而只与起点 M_0 及终点 M 的位置有关. 由此可见, 在单连通区域内, 速度势函数 φ 是单值函数. 设流动区域是双联通区域, L 是其中一封闭回线. 若 L 能不碰边界地收缩为一点, 则显然有

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

若 L 不能不碰边界地收缩为一点, 则一般说来有

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = k_1 \Gamma \quad (7.2.3)$$

其中 k_1 是封闭回线 L 绕某一点的圈数. Γ 称为环量 (Γ 可以等于零, 也可以不等于零). 积分 (7.2.3) 不一定等于零, 这可以通过下面一个例子看出, 设流动区域内有一个两头展伸至无穷的孤立涡管, 孤立涡管外的流体运动都是无旋的. 显然涡管外的无旋区域是双联通区域. 若在双联通区域内围绕涡管作一封闭回线 L , 这个封闭回线 L 一定不能不碰边界地连续地收缩成一点. 沿此 L 作速度环量, 根据斯托克斯定理它显然等于孤立涡管的强度, 由此可见

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$$

在这个情形 (7.2.3) 式中的 Γ 相当于涡管强度. 这样, 在双联通区域内线积分 $\int_{M_0}^M \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ 与路线有关, 因此速度势函数是多值函数. 各值之间相差 $k_1 \Gamma$. 由此出发可以讨论多联通区域内速度势的多值性问题.

下面我们证明速度势函数及无旋运动的某些性质.

1) 速度势函数在流体内部不能有极大值或极小值.

我们首先证明

$$\int_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = 0 \quad (7.2.4)$$

其中 S 是流体内任一封闭曲面, n 是 S 面的外法线方向. 证明是很容易的, 显然, 根据奥高公式有

$$\int_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \int_V \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi d\tau = \int_V \Delta \varphi d\tau$$

因 φ 满足拉氏方程, 故 $\Delta \varphi = 0$. 由此推出(7.2.4)式.

现在利用(7.2.4)式证明上述结论. 设速度势 φ 在流体内某点上有极大值, 围绕此点作一全部位于流体内的无限小封闭曲面

S . 考虑 $\int_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$. 因 $\frac{\partial \varphi}{\partial n} < 0$, 由此推出

$$\int_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS < 0$$

这显然与(7.2.4)式矛盾. 此矛盾证明上述定理的正确性.

2) 速度 v 的大小在流体内不能达到极大值, 也就是说速度大小的极大值位于流动区域的边界上.

设速度大小 V 在流动区域中某点 A 上达到极大值 V_A , 现在证明这是不可能的. 取速度 v 的方向为 x 轴的方向, 我们有

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_A = V_A$$

容易证明 $\partial \varphi / \partial x$ 满足拉普拉斯方程, 亦即 $\partial \varphi / \partial x$ 是调和函数. 根据第一个性质 $(\partial \varphi / \partial x)_A$ 不是极大值, 亦即在 A 点邻域内一定可以找到这样的点, 使得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} > \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_A = V_A$$

由此有

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 > V_A^2$$

自然更有

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 = V^2 > V_A^2$$

即

$$V > V_A$$

这显然与 V_A 是极大的假设相矛盾，此矛盾证明速度大小 V 不能在流体内达到极大值。

上述结论并不适用于极小值。仿照上述证明方法，设速度大小 V 在流动区域内某点 A 上达到极小值，取速度方向为 x 轴，则虽然我们能证明

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} < V_A, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 < V_A^2$$

但不能推出

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 = V^2 < V_A^2$$

事实上在无旋运动的流体内可以有 $V=0$ 的点，例如两射流对碰时出现的驻点就是一例。

3) 在流体内部压力 p 不能达到极小值。

先证 $\int_S \frac{\partial p}{\partial n} dS < 0$ ，其中 S 是任一完全位于流动区域内的封闭

曲面。根据拉格朗日积分(7.1.4)易得

$$\Delta p = -\frac{1}{2} \rho \Delta V^2$$

于是

$$\int_V \Delta p d\tau = \int_S \frac{\partial p}{\partial n} dS = -\frac{1}{2} \rho \int_V \Delta V^2 d\tau \quad (7.2.5)$$

易证

$$\Delta v_x^2 = 2v_x \Delta v_x + 2(\nabla v_x)^2 = 2(\nabla v_x)^2$$

同理

$$\Delta v_y^2 = 2(\nabla v_y)^2, \quad \Delta v_z^2 = 2(\nabla v_z)^2$$

于是

$$\Delta V^2 = 2\{(\nabla v_x)^2 + (\nabla v_y)^2 + (\nabla v_z)^2\}$$

将之代入(7.2.5)式得

$$\int_S \frac{\partial p}{\partial n} dS = -\rho \int_{\tau} [(\nabla v_x)^2 + (\nabla v_y)^2 + (\nabla v_z)^2] d\tau < 0 \quad (7.2.6)$$

若压力 p 在流体内某点 A 达到极小值，围绕 A 点作一完全位于流体内部的封闭曲面 S ，则

$$\int_S \frac{\partial p}{\partial n} dS > 0$$

这显然与(7.2.6)式矛盾，此矛盾证明压力 p 不可能在流体内部达到极小值，即压力极小值只可能发生在边界点上。

一般说来压力极小点的位置和速度极大点的位置并不重合。只有当流动是定常，重力可忽略时两者才完全相同。

4) 动能的表达式：

(1) 有界单连通区域

考虑到第一章场论中的基本运算公式(26)，动能的表达式为

$$\begin{aligned} T &= \frac{\rho}{2} \int_{\tau} V^2 d\tau = \frac{\rho}{2} \int_{\tau} (\nabla \varphi)^2 d\tau \\ &= \frac{\rho}{2} \int_{S_2} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS + \frac{\rho}{2} \int_{S_1} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \end{aligned}$$

其中 n 是 S_1 与 S_2 的外法线方向。如果 S_1 取内法线方向，则上式为

$$\begin{aligned} T &= \frac{\rho}{2} \int_{S_2} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS - \frac{\rho}{2} \int_{S_1} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \\ &= \frac{\rho}{2} \int_{S_2} \varphi v_n dS - \frac{\rho}{2} \int_{S_1} \varphi v_n dS \end{aligned} \quad (7.2.7)$$

容易看到，区域内的动能 T 只依赖于边界上的 φ 及 $\partial\varphi/\partial n$ 。若在边界上 $v_n=0$ (固壁) 或 $\varphi=$ 常数，则 $T=0, V=0$ ，即体积 τ 内的动能为零，流体是静止的。

(2) 有界双连通区域

作分隔面 AB ，上下两面分别表为 S_3 与 S_4 ，则 S_1, S_2, S_3, S_4

所围的区域是单连通区域，对它可应用(7.2.7)式，于是我们有

$$T = \frac{\rho}{2} \left(\int_{S_2} \varphi v_n dS - \int_{S_1} \varphi v_n dS + \int_{S_4} \varphi_- v_n dS - \int_{S_3} \varphi_+ v_n dS \right) \quad (7.2.8)$$

其中 S_3 与 S_4 取的法线方向都为 n ，如图 7.2.2 所示，考虑到

$$\varphi_- - \varphi_+ = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \Gamma$$

(7.2.8)式可改写为

$$T = \frac{\rho}{2} \left(\int_{S_2} \varphi v_n dS - \int_{S_1} \varphi v_n dS + \Gamma \int_{S_3} v_n dS \right) \quad (7.2.9)$$

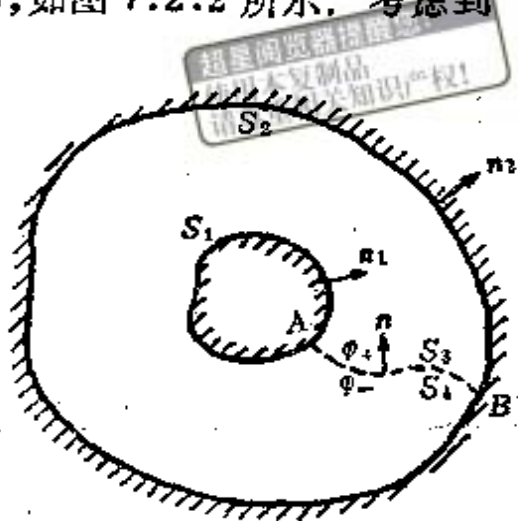


图 7.2.2

(3) 无界单连通区域或双连通区域

对于 S_1 外的无界区域我们仍然可应用(7.2.9)式，只要把 S_2 理解为半径趋于无限的大球就行了，注意 $\Gamma = 0$ 就得单连通区域的结果。

5) 若在边界 S 上，无旋运动和有旋运动具有相同的边界条件，则单连通区域内无旋运动的动能小于有旋运动的动能。

设有旋运动的速度矢量为 \mathbf{v} ，无旋运动的速度矢量为 $\nabla\varphi$ ，于是有旋运动的动能 T' 和无旋运动的动能 T 之差为

$$\begin{aligned} T' - T &= \frac{\rho}{2} \int_V (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi) d\tau \\ &= \frac{\rho}{2} \int_V (\mathbf{v} - \nabla\varphi) \cdot (\mathbf{v} - \nabla\varphi) d\tau \end{aligned}$$

$$+ \rho \int_V (\mathbf{v} - \nabla\varphi) \cdot \nabla\varphi d\tau \quad (7.2.10)$$

因

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [\varphi(\mathbf{v} - \nabla\varphi)] \\ = \varphi \nabla \cdot (\mathbf{v} - \nabla\varphi) + (\mathbf{v} - \nabla\varphi) \cdot \nabla\varphi \end{aligned}$$

而

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \nabla \cdot \nabla\varphi = \Delta\varphi = 0$$

于是

$$(\mathbf{v} - \nabla\varphi) \cdot \nabla\varphi = \nabla \cdot [\varphi(\mathbf{v} - \nabla\varphi)]$$

将此式代入(7.2.10)式, 并利用奥高定理得

$$T' - T = \frac{\rho}{2} \int_V (\mathbf{v} - \nabla\varphi)^2 d\tau + \rho \int_S \varphi \left(v_n - \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) dS$$

因在边界 S 上, 无旋运动和有旋运动的边界条件相同, 亦即

$$v_n = \frac{\partial\varphi}{\partial n}$$

于是

$$\int_S \varphi \left(v_n - \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) dS = 0$$

由此得

$$T' - T = \frac{\rho}{2} \int_V (\mathbf{v} - \nabla\varphi)^2 d\tau \geq 0$$

等号只能在 $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ 的情形下成立, 而这是不可能的, 因为 \mathbf{v} 是有旋运动的速度矢量, 它不应等于 $\nabla\varphi$. 由此推出 $T' - T > 0$, 即无旋运动的动能 T' 小于有旋运动的动能 T'' .

*7.3 有界区域的唯一性定理

a) 单连通区域

在以下三种情形下, 理想不可压缩流体无旋运动的解 $\nabla\varphi$ 是唯一的: (1) 在边界上给定 v_n ; (2) 在边界上给定 φ ; (3) 在一



部分边界上给定 v_n , 在另一部分边界上给定 φ .

证 设存在着满足同一边界条件的两组解 φ_1, v_1 及 φ_2, v_2 . 作 $\varphi_1 - \varphi_2$ 及 $v_1 - v_2$, 对之应用公式(7.2.7)有

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{\rho}{2} \int_{\tau} (v_1 - v_2)^2 d\tau \\
 &= \frac{\rho}{2} \left[\int_{S_2} (\varphi_1 - \varphi_2)(v_{n_1} - v_{n_2}) dS \right. \\
 &\quad \left. - \int_{S_1} (\varphi_1 - \varphi_2)(v_{n_1} - v_{n_2}) dS \right] \quad (7.3.1)
 \end{aligned}$$

因为这两组解满足同一边界条件, 容易看出, 在(1),(2),(3)类边界条件下得 $T=0$. 由此推出 $v_1=v_2$, 即解是唯一的.

b) 双连通区域

为了考察在双连通区域内, 除了(1),(2),(3)外, 还须要增加什么条件才能保证解是唯一的. 让我们应用公式(7.2.9), 并遵循处理单连通区域时同一思路. 于是

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{\rho}{2} \int_{\tau} (v_1 - v_2)^2 d\tau \\
 &= \frac{\rho}{2} \left[\int_{S_2} (\varphi_1 - \varphi_2)(v_{n_1} - v_{n_2}) dS \right. \\
 &\quad \left. - \int_{S_1} (\varphi_1 - \varphi_2)(v_{n_1} - v_{n_2}) dS \right. \\
 &\quad \left. + (\Gamma_1 - \Gamma_2) \int_{S_3} (v_{n_1} - v_{n_2}) dS \right] \quad (7.3.2)
 \end{aligned}$$

显然, 在(1),(2),(3)类边界条件下, 如果还给定环量 Γ 或给定通过分隔面的流量 $\int_{S_3} v_n dS$, 则解是唯一的. 当然在具体问题中给定环量 Γ 比给定分隔面的流量更有实际背景.

*7.4 势函数 φ 在无穷远处的渐近展式

为了研究无界区域的唯一性定理，必须处理半径趋于无穷时大球上的积分 $\int_{S_2} \varphi v_n dS$ ，这就要求我们弄清楚 φ 在无穷远处的渐近展式及其渐近行为。本节的目的就是要解决这个问题从而为研究无界区域内唯一性定理作好准备。

a) 三维情形

考虑边界 S_1 外的无界区域，设 $r \rightarrow \infty$ 时， $v \rightarrow 0$ ，且区域是单连通的。欲求 φ 与 v 在无穷远处的渐近展式及它们在无穷远处的渐近行为。

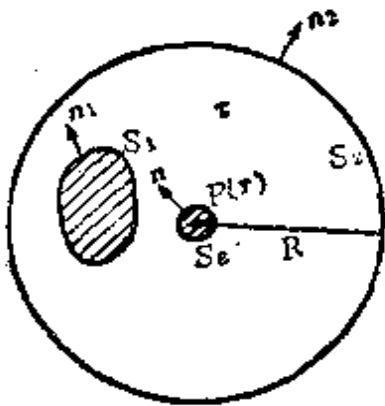


图 7.4.1

以 S_2 表之，其外法线为 n_2 (参看图 7.4.1)。

应用场论中的基本运算公式(25)，即格林第二公式有

$$\int_{\tau} (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) d\tau = \int_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS \quad (7.4.1)$$

此公式要求 φ, ψ 及其空间导数在 $\tau + S$ 上有限、单值、连续。取欲研究的调和函数为 $\varphi, \psi = 1/r_1$ ，其中 $r_1 = |r - r'|$ 是定点 $P(r)$ 和积分元所在的动点 r' 之间的距离， φ 满足所要求的有限、单值、连续的条件。 $1/r_1$ 除 P 点外也满足上述条件。为了能够采用(7.4.1)式我们必须作半径 R_0 任意小的球 τ_0 ，将 P 点包在其中。从 τ 中除去体积 τ_0 ，并将球面 S_0 取成内边界一部分，其内法线为 n 。

对以 S_1, S_2, S_0 为界的区域 $\tau - \tau_0$ 应用(7.4.1)式，并考虑到

$$\Delta\varphi=0, \quad \Delta\left(\frac{1}{r_1}\right)=0$$

后我们有

$$\begin{aligned} & \int_{S_2} \left[\varphi' \nabla' \left(\frac{1}{r_1} \right) - \frac{1}{r_1} \nabla' \varphi' \right] \cdot n_2 dS \\ & - \int_{S_1} \left[\varphi' \nabla' \left(\frac{1}{r_1} \right) - \frac{1}{r_1} \nabla' \varphi' \right] \cdot n_1 dS \\ & - \int_{S_0} \left[\varphi' \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r_1} \right) - \frac{1}{r_1} \frac{\partial \varphi'}{\partial r_1} \right]_{r=R_0} dS = 0 \quad (7.4.2) \end{aligned}$$

其中 $\varphi' = \varphi(r')$, ∇' 表示对动点 r' 的导数, 易见

$$\begin{aligned} - \int_{S_0} & = - \int_{S_0} \left(-\frac{\varphi'}{r_1^2} - \frac{1}{r_1} \frac{\partial \varphi'}{\partial r_1} \right)_{r=R_0} R_0^2 d\Omega \\ & = 4\pi\varphi(r) + O(\epsilon) \end{aligned}$$

这里 $d\Omega$ 是张在 P 点上的立体角元, 于是

$$\begin{aligned} \varphi(r) & = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \left[\varphi' \nabla' \left(\frac{1}{r_1} \right) - \frac{1}{r_1} \nabla' \varphi' \right] \cdot n_1 dS \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_{S_2} \left[\varphi' \nabla' \left(\frac{1}{r_1} \right) - \frac{1}{r_1} \nabla' \varphi' \right] \cdot n_2 dS \\ & = I_1 + I_2 \quad (7.4.3) \end{aligned}$$

容易得到

$$I_2 = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_2} \varphi' dS + \frac{1}{4\pi R} \int_{S_2} n_2 \cdot \nabla' \varphi' dS \quad (7.4.4)$$

因流体是不可压缩的, 所以

$$\int_{S_2} n_2 \cdot \nabla' \varphi' dS = \int_{S_1} n_1 \cdot \nabla' \varphi' dS = Q$$

其中 Q 是通过内边界 S_1 的体积流量. 其次引入 φ 在球面 S_2 上的平均值

$$\bar{\varphi}(r, R) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_2} \varphi' dS$$

则(7.4.4)式可改写为

$$I_2 = \bar{\varphi}(r, R) + \frac{Q}{4\pi R}$$

现证 I_2 是一个既与 R 无关也与 r 无关的常数. 因

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识版权！

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_2}{\partial R} &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_2} \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial r_i} \right)_{r_i=R} d\Omega - \frac{Q}{4\pi R^2} \\ &= \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_2} v_n dS - \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{Q}{4\pi R^2} - \frac{Q}{4\pi R^2} = 0 \end{aligned}$$

故 I_2 与 R 无关. 同样地我们作 $\partial I_2 / \partial x_i$, 并证明它等于零. $\partial I_2 / \partial x_i$ 的意思是 R 不变, 微分 x_i 于是

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_2}{\partial x_i} &= \frac{\partial \bar{\varphi}(r, R)}{\partial x_i} \\ &= \frac{1}{4\pi R^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{S_2} \varphi' dS \end{aligned} \quad (7.4.5)$$

$\int_{S_2} \varphi' dS$ 是以 O 为心的球面 S_2 上 φ' 的积分. 当 R 不变, 原点的

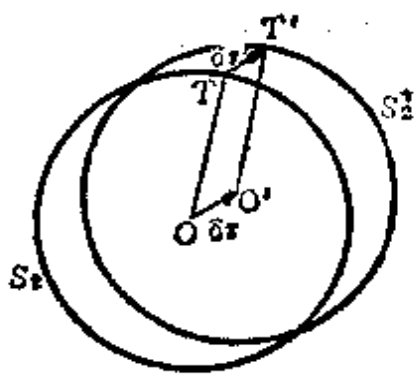


图 7.4.2

的坐标 r 改变时, 球心移动 δr 的距离到达 O' 点, 球面变为 S'_2 (如图 7.4.2 所示), 但因 R 一样, 所以 $dS = dS'$. 容易看到当 O 移动 δr 到达 O' 点时, 球面上任一点 T 也移动 $\delta r'$ 到达 T' 点, 而且

$$\delta r' = \delta r \quad (\delta x'_i = \delta x_i)$$

考虑到这些(7.4.5)可写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_2}{\partial x_i} &= \frac{1}{4\pi R^2} \left[\int_{S_2} \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi' dS + \int_{S_2} \varphi' \frac{\partial}{\partial x_i} (dS) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_2} \frac{\partial \varphi'}{\partial x_i} dS \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_2} v_i dS = \frac{1}{4\pi} \int_{S_2} v_i d\Omega$$

根据假设当 $r_i \rightarrow \infty$ 时 $v_i \rightarrow 0$ 。于是当大球半径趋于无穷时

$$\int_{S_2} v_i d\Omega = 0$$

由此我们得到 $\partial I_2 / \partial x_i = 0$, 即 I_2 与 r 无关。到此我们证明了 I_2 是一个与 R, r 都无关的常数, 此常数以 D 表之。考虑到 $I_2 = D$ 以及 $\nabla'(1/r_i) = -\nabla(1/r_i)$ 的事实, (7.4.3) 可写成

$$\varphi(r) = D - \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \left[\varphi' \nabla \left(\frac{1}{r_i} \right) + \frac{1}{r_i} \nabla' \varphi' \right] \cdot n_i dS \quad (7.4.6)$$

(7.4.6) 式表明, 无界区内的 φ 可通过边界 S_1 上的 φ 与 $\partial\varphi/\partial n$ 值表示出来, 现利用(7.4.6)式求出 φ 以 $1/r$ 展开的幂级数。将

$$\frac{1}{r_i} = |r - r'|^{-1}$$

看成是 r' 的函数, 在 x_i 点上展成 r' 的泰勒级数有

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_i} &= \frac{1}{r} - x'_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} x'_i x'_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{1}{r} \right) + \dots \end{aligned} \quad (7.4.7)$$

其中 $r = |r|$, 将(7.4.7)代入(7.4.6)式, 逐项积分后得

$$\varphi(r) = D + \frac{C}{r} + C_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) + C_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{1}{r} \right) + \dots \quad (7.4.8)$$

其中

$$\begin{cases} C = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_1} n \cdot \nabla \varphi dS = -\frac{Q}{4\pi} \\ C_i = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} (x_i n \cdot \nabla \varphi - n_i \varphi) dS \\ C_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \left(-\frac{1}{2} x_i x_j n \cdot \nabla \varphi + x_i n_j \varphi \right) dS \end{cases} \quad (7.4.9)$$

积分在内边界 S_1 上进行, 符号 “'” 现在是多余的, 故省去不写.

(7.4.8) 是很有用的级数展式. 由于 $1/r$ 及其各阶空间导数都是拉普拉斯方程的基本解, 它们的流体力学意义是原点处的点源及各阶偶极子, 所以 φ 的级数展式(7.4.8) 可以看成是点源和各阶偶极子的线性组合. 当流体静止时 $\varphi = \text{常数} = D$. 当一物体在静止流体中运动时, 它对流体的扰动相当于在坐标原点放置适当强度的点源及各阶偶极子(参看 7.23 节). 从(7.4.8) 可以看出, 当 $r \rightarrow \infty$ 时, 速度是以 $1/r^2$ 的量阶趋于零. 特别地, 如果物体是由固壁组成, 则显然有

$$Q = \int_{S_1} n \cdot \nabla \varphi dS = 0$$

于是速度在无穷远处以更高的阶次 $1/r^3$ 趋于零.

无论从(7.4.6)式或(7.4.8)式都可看出, 当 $r \rightarrow \infty$ 时

$$\varphi(r) \rightarrow D \quad (7.4.10)$$

附注 (7.4.8) 式是区域 S_1 外 φ_1 的展式, 为了得出区域 S_1 内

φ_2 的展式, 我们考虑与基本解 $\frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right), \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{1}{r} \right), \dots$ (亦称

$-1, -2, -3$ 阶球立体谐函数) 对应的区域 S_1 内的 $\Delta \varphi = 0$ 的基本解. 为此引进整数阶面谐函数, 它的定义为

$$H_n = r^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial x_i \partial x_j \dots} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (7.4.11)$$

它只和矢径 r 的方向有关, 而与其大小无关, 于是

$$\frac{\partial H_n}{\partial r} = 0$$

利用球坐标系中拉氏方程的表达式 (1.11.29) 及 $\partial H_n / \partial r = 0$ 和 $r^{-n-1} H_n$ 是基本解的事实, 不难证明

$$\varphi(r) = r^n H_n \quad (7.4.12)$$

是区域 S_1 内无奇性的基本解. 利用它们可以得出 φ 在区域 S_1 中的展式.

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

b) 平面情形

考虑边界 S_1 外的无界区域. 设 $r \rightarrow \infty$ 时, $v \rightarrow 0$. 现在 φ 可以是单值函数, 也可以是多值函数(因区域是双连通的). 下面考虑 φ 是单值的情形, 将单值时的结果略加修改就可以得到多值时的结果. 推导平面情形下 φ 在无穷远处的渐近展式其过程几乎和三维情形完全平行. 不同的是现在 φ 应取基本解 $\ln r_1$, 球要用圆代替. 为了避免繁琐, 我们只将推导过程中的主要步骤写出. 对 φ 及 $\psi = \log r_1$, 运用(7.4.1)式后得

$$\begin{aligned} & \int_{S_2} (\varphi' \nabla' \ln r_1 - \ln r_1 \nabla' \varphi') \cdot n_2 dS \\ & - \int_{S_1} (\varphi' \nabla' \ln r_1 - \ln r_1 \nabla' \varphi') \cdot n_1 dS \\ & - \int_{S_0} \left[\varphi' \frac{\partial}{\partial r} \ln r_1 - \ln r_1 \frac{\partial \varphi'}{\partial r} \right]_{r=R_0} R_0 d\theta = 0 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_{S_2} (\varphi' \nabla' \ln r_1 - \ln r_1 \nabla' \varphi') \cdot n_2 dS \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{S_1} (\varphi' \nabla' \ln r_1 - \ln r_1 \nabla' \varphi') \cdot n_1 dS \\ & = I_2 + I_1 \end{aligned} \tag{7.4.13}$$

显然

$$I_2 = \bar{\varphi}(r, R) - \frac{Q}{2\pi} \ln R$$

其中

$$Q = \int_{S_2} n_2 \cdot \nabla' \varphi' dS = \int_{S_1} n_1 \cdot \nabla' \varphi' dS$$

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{2\pi R} \int_{S_2} \varphi' dS$$

易证

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_2}{\partial R} &= \frac{1}{2\pi} \int_{S_2} \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial r} \right)_{r=R} d\theta = \frac{Q}{2\pi R} \\ &= \frac{Q}{2\pi R} - \frac{Q}{2\pi R} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_2}{\partial x_i} &= \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i} = \frac{1}{2\pi R} \int_{S_2} \frac{\partial \varphi'}{\partial x_i} dS \\ &= \frac{1}{2\pi R} \int_{S_2} v_i dS = 0 \end{aligned}$$

于是 I_2 是一个与 R 及 r 都无关的常数, 以 D 表之. 现在(7.4.13)取下列形式

$$\varphi(r) = D + \frac{1}{2\pi} \int_{S_1} (\varphi' \nabla \ln r_i + \ln r_i \nabla \varphi') \cdot n_i dS \quad (7.4.14)$$

将 $\ln r_i$ 在 x_i 点上展成 r' 的泰勒级数有

$$\begin{aligned} \ln r_i &= \ln r - x'_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\ln r) \\ &\quad + \frac{1}{2} x'_i x'_i \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) + \dots \end{aligned} \quad (7.4.15)$$

代入(7.4.14)式, 并逐项积分后得

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= D + C \ln r + C_i \frac{\partial}{\partial x_i} \ln r \\ &\quad + C_{ii} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} (\ln r) + \dots \end{aligned} \quad (7.4.16)$$

其中

$$\begin{cases} C = \frac{1}{2\pi} \int_{S_1} n \cdot \nabla \varphi dS = \frac{Q}{2\pi} \\ C_i = \frac{1}{2\pi} \int_{S_1} (-x_i n \cdot \nabla \varphi + n_i \varphi) dS \\ C_{ii} = \frac{1}{2\pi} \int_{S_1} \left(\frac{1}{2} x_i x_i n \cdot \nabla \varphi - x_i n_i \varphi \right) dS \end{cases} \quad (7.4.17)$$

积分在内边界 S_1 上进行, 符号 “ r ” 现在已多余, 省去不写。
现在圆周谐函数

$$\ln r, \frac{\partial}{\partial x_i}(\ln r), \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\ln r), \dots$$

完全代替了三维情形的球立体谐函数, 它们都是二维拉氏方程线性无关的基本解, 其流体力学的意义是平面运动的点源和各阶偶极子(参看7.9节)。(7.4.16)表明, 物体在静止流体中运动时, 它对流体产生的扰势相当于在坐标原点放置适当强度的点源及各阶偶极子的组合。当 $r \rightarrow \infty$, 速度以 $1/r$ 的量阶趋于零, 当物体由固壁组成时 $Q=0$, 于是速度在无穷远处以 $1/r^2$ 的量阶趋于零。

无论从(7.4.14)式或(7.4.16)式都可看出, 当 $r \rightarrow \infty$ 时

$$\varphi(r) - C \ln r \rightarrow D$$

和三维情形不一样, φ 在无穷远处并不趋向于常数, 而是以 $\ln r$ 的阶次增长。这是因为三维情形的点源项 $Q/(4\pi r)$ 当 $r \rightarrow \infty$ 时是趋于零的。与此相反, 平面情形下的点源项 $(Q/2\pi) \ln r$ 随着 r 的增长并不减少, 而是以 $\ln r$ 的阶次增长。

附注

$$H_n = r^n \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots} \ln r$$

只依赖于矢径 r 的方向而与其大小无关。根据这个性质及 $r^{-n} H_n$ 是基本解的事实, 从极坐标系中的拉普拉斯方程出发易证 $r^n H_n$ 也是基本解。由此可组成区域 S 内的展式。

*7.5 无界区域的唯一性定理

a) 三维情形

利用(7.4.10)及(7.2.7)式可以建立 $\nabla\varphi$ 的唯一性定理。取半径趋于无限的大球 S_2 , 写出(7.2.7)式, 并利用(7.4.10)后有

超星阅读器提醒：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{\rho}{2} \int_V \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} d\tau \\
 &= \frac{\rho}{2} \left[\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{S_h} \varphi v_n dS - \int_{S_1} \varphi v_n dS \right] \\
 &= \frac{\rho}{2} \left[DQ - \int_{S_1} \varphi v_n dS \right] \quad (7.5.1)
 \end{aligned}$$

设有两组解 $\varphi_1, \mathbf{v}_1, D_1, Q_1$ 及 $\varphi_2, \mathbf{v}_2, D_2, Q_2$. 对两组解的差应用 (7.5.1) 式得

$$\begin{aligned}
 &\int_V (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) d\tau \\
 &= (D_1 - D_2)(Q_1 - Q_2) - \int_{S_1} (\varphi_1 - \varphi_2)(v_{n_1} - v_{n_2}) dS \quad (7.5.2)
 \end{aligned}$$

如果两组解满足同一边界条件 $v_{n_1} = v_{n_2}$ (或 $\varphi_1 = \varphi_2$), 并且具有同一流量值 $Q_1 = Q_2$ (或同一常数值 $D_1 = D_2$), 则得 (7.5.2) 左边为零, 由此推出

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$$

即解是唯一的. 这样我们证明了如下三维无界区域情形的唯一性定理.

在下列条件下方程 $\Delta\varphi = 0$ 的解是唯一的: (1) 在边界 S_1 上给定 v_n (或给定 φ ; 或部分边界给出 v_n , 另一部分给定 φ); (2) 给定 Q (或给定 D); (3) φ 是单值的.

推论 一个三维物体在静止流体中运动. 由于 $Q = 0$, 物体上 v_n 是已知的, 于是根据上述唯一性定理, 理想不可压缩流体无旋运动的速度函数是唯一的.

b) 二维情形

1) φ 是单值函数情形

方程 $\Delta\varphi = 0$ 的解在下述条件下是唯一的: (1) 在边界 S_1 上给定 v_n (或给定 φ ; 或部分边界上给定 v_n , 另一部分边界上给定 φ); (2) 给定 Q .

证 为了建立二维情形下 $\nabla\varphi$ 的唯一性定理, 我们应对函数 $\varphi - \frac{Q}{2\pi} \ln r$ 而不是 φ 采用三维情形的推导过程, 因为当 $r \rightarrow \infty$

时 φ 是以 $\ln r$ 的阶次趋于无穷, 而 $\varphi - \frac{Q}{2\pi} \ln r$ 则是趋于常数 D

的. 容易看出, $\varphi - \frac{Q}{2\pi} \ln r$ 满足拉氏方程, 而且由于 φ 满足条件

(1)与(2), 所以 $\varphi - \frac{Q}{2\pi} \ln r$ 也满足条件(1)与(2). 重复三维情形

的推导过程我们可证

$$\nabla \left(\varphi - \frac{Q}{2\pi} \ln r \right)$$

是唯一确定的. 因 $\frac{Q}{2\pi} \nabla \ln r$ 是唯一的, 由此推出 $\nabla\varphi$ 唯一确定.

2) φ 是多值函数情形 (双连通区域)

除条件(1)与(2)外再加上给定环量 Γ , 解 $\nabla\varphi$ 就是唯一的. 证明过程同 7.3 的 b) 中所述.

现构造双连通区域内多值函数 φ 的展式. 取物体内某点为原点, θ 是极角, 则易证 $\Gamma\theta/(2\pi)$ 是调和函数, 且环量为 Γ . 因 φ 的环量亦为 Γ , 于是

$$\varphi(r) - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

是单值函数. 对它展式(7.4.16)成立. 由此我们得

$$\begin{aligned} \varphi(r) = & D + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta + \frac{Q}{2\pi} \ln r \\ & + C_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \ln r + C_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} \ln r + \dots \end{aligned} \quad (7.5.3)$$

其中

$$\begin{cases}
 C_i = \frac{1}{2\pi} \int_{s_2} \left[-x_i n \cdot \nabla \left(\varphi - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \right) \right. \\
 \qquad \qquad \qquad \left. + n_i \left(\varphi - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \right) \right] dS \\
 C_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{s_1} \left[\frac{1}{2} x_i x_j n \cdot \nabla \left(\varphi - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \right) \right. \\
 \qquad \qquad \qquad \left. - x_i n_j \left(\varphi - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \right) \right] dS
 \end{cases} \quad (7.5.4)$$

推论 一个二维物体在静止流体中运动，只要 Γ 给定，它的 $\nabla\varphi$ 是唯一确定的 ($Q=0$, v_n 已知)。

(B) 理想不可压缩流体平面定常无旋运动

7.6 平面运动及其流函数

在工程实践中常会碰到这样的物体，它的一个方向的尺度比另外两个方向的尺度大得多。比如我们常见的烟囱与电线杆，又如有的铁路桥桥墩有十五、六层楼那么高，高度比横向尺寸大得多；低速飞机机翼的长度与宽度之比，即展弦比可达到 8 左右。

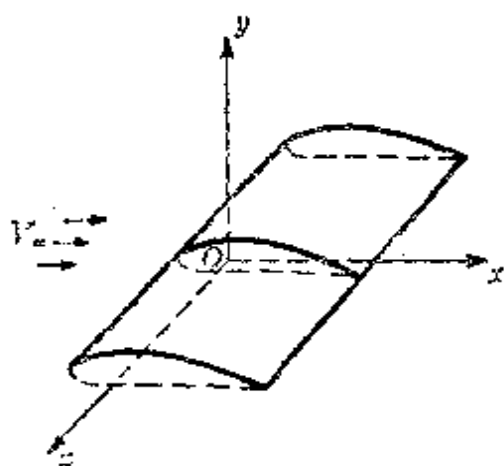


图 7.6.1

虽然这些物体一般都有一定的锥度或尖削比（机翼根部和翼尖处宽度不同），但是都比较小，所以可以近似地看作横截面形状不变的柱体。我们取如图 7.6.1 所示的坐标系，与母线垂直的某平面（横截面）取作 Oxy 平面， z 轴与母线平行。对于这样物体的绕流问题，如

以外，在柱体周围的大部分区域，流体在柱体母线方向只有微弱的流动，即 z 轴方向的速度分量 w 很小，沿这个方向，其它物理量如压力、密度等也只有很小的变化。这样我们可以近似地认为：

1) 流体运动只是在与 Oxy 平面平行的平面内进行，即

$$w=0 \quad (7.6.1)$$

2) 在与 Oz 轴平行的直线上所有物理量都相等，即它们对 z 的偏导数为零

$$\frac{\partial}{\partial z}=0 \quad (7.6.2)$$

如果这两条满足，就可得如下结论：垂直于 Oz 轴的各平面上的流体运动完全一样，我们只要考虑其中任一平面上的流体运动就可以了，通常取 Oxy 平面为这样的平面。显然，这一平面上的运动分析清楚了，则整个柱体（两端附近除外）的绕流问题也就解决了。但是必须指出，以后我们谈到 Oxy 平面上某一条曲线时，实际上它代表的是以该曲线为底，以高度为 1 的垂线为母线的圆柱面。通过该曲线的流量实际上是通过上述圆柱面的流量。满足 1) 与 2) 两条性质的流体运动就称为平面运动。当然，平面运动的理论严格说来只有对无限长柱体，且毫无锥度与尖削比的情况才完全适用。对一般的细长柱体，平面运动所得的结果只能是近似值，柱体越细长，所得的结果越与实际接近（两端附近除外）。

根据性质 1) 与 2)，平面运动的速度向量 v 只有两个分量 u ，与 v ，而且所有的物理量都只是 x, y 的函数，和空间运动相比，数学上显然有了相当的简化。

平面流动的计算方法在工程实际中得到广泛的应用。例如低速机翼表面的压力分布，升阻力的理论计算和实验研究就是采用平面流动近似模型。所得结果经过一定修正就可在设计中应用。

研究平面运动，还具有重要的理论意义。通过它的研究可以对流动的性质有更多的了解，以及积累处理问题的方法等。所有这些都是解决更复杂流动问题所必需的。

现在我们研究平面无旋运动。在平面运动中，涡旋矢量 Ω 的三个分量为

$$\Omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$\Omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$



可见 Ω 只有 z 方向的分量 Ω_z 。今运动是无旋的，此时

$$\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (7.6.3)$$

由此推出存在着速度势函数 $\varphi(x, y, t)$ ，使得

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (7.6.4)$$

(7.6.4)式建立了速度势 φ 和速度分量 u, v 之间的关系。设 φ 已知，按(7.6.4)式可求得 u, v 。反之，若 u, v 已知，则 φ 由下式定出

$$\varphi(M) = \varphi(M_0) + \int_{M_0}^M u dx + v dy \quad (7.6.5)$$

速度势函数具有下列性质：

1) 速度势函数可允许相差一任意常数，而不影响流体的运动；

2) $\varphi(x, y) = \text{常数}$ 是等势线，它的法线方向和速度矢量的方向重合；

3) 沿曲线 M_0M 的速度环量等于 M 点上 φ 值和 M_0 点上 φ 值之差

$$\Gamma = \int_{M_0}^M u dx + v dy = \varphi(M) - \varphi(M_0) \quad (7.6.6)$$

4) 若我们所考虑的区域是单连通区域，则由于封闭回线的速

度环量

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

因此速度势函数将是单值函数。若我们所考虑的区域是双连通区域，则速度环量 Γ 可以不等于零，因此 φ 可以是多值函数，它们之间的关系是

$$\varphi(M) = \varphi(M_0) + k_1 \Gamma \quad (7.6.7)$$

其中 k_1 是封闭回线的圈数。

在平面运动时，不可压缩流体的连续性方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (7.6.8)$$

将(7.6.4)式代入(7.6.8)式得

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (7.6.9)$$

此式表明速度势 φ 满足二维情形下的拉氏方程。

下面我们引进一个在流体力学中占有重要地位的新函数。由连续性方程(7.6.8)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

推出，存在着函数 $\psi(x, y, t)$ ，使得

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7.6.10)$$

ψ 称为流函数。(7.6.10)式建立了流函数和 u, v 之间的关系。设 ψ 已知，由(7.6.10)式可求出 u, v 。反之，若 u, v 已知，则由

$$\begin{aligned} \psi(M) - \psi(M_0) &= \int_{M_0}^M d\psi \\ &= \int_{M_0}^M \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \\ &= \int_{M_0}^M -v dx + u dy \end{aligned}$$

或

$$\psi(M) = \psi(M_0) + \int_{M_0}^M -v dx + u dy \quad (7.6.11)$$

可求出流函数 ψ 。

流函数 ψ 具有下列性质：

1) ψ 可以差一任意常数，而不影响流体的运动。

2) $\psi(x, y) = \text{常数}$ 是流线，亦即它的切线方向与速度矢量的方向重合。

现证明之，确定流线的方程为

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

或

$$-v dx + u dy = 0$$

将(7.6.10)式代入得

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$$

即

$$d\psi = 0$$

积分之得

$$\psi(x, y) = \text{常数}$$

说明 $\psi(x, y) = \text{常数}$ 是流线，不同常数对应于不同的流线。由于函数 ψ 与流线之间有这样的关系，故称 ψ 为流函数。

3) 通过曲线 M_0M 的流量等于 M 点和 M_0 点上流函数之差，以公式表之为

$$Q = \psi(M) - \psi(M_0) \quad (7.6.12)$$

其中 Q 为通过 M_0M 的流量。

现证明之，根据流量的定义

$$Q = \int_{M_0}^M v_n ds$$

$$= \int_{M_0}^M [u \cos(n, x) + v \cos(n, y)] ds$$

容易看出(参看图7.6.2)

$$\begin{cases} \cos(n, x) ds = dy \\ \cos(n, y) ds = -dx \end{cases} \quad (7.6.13)$$

代入上式得

$$Q = \int_{M_0}^M -v dx + u dy$$

考虑到(7.6.11)我们有

$$Q = \psi(M) - \psi(M_0)$$

即得证明。

4) 在单联通区域内若不存在源汇, 则由

$$Q = \oint v_n ds = 0$$

推出流函数 ψ 是单值函数。若单联通区域内有源汇或在双联通区域内, 则一般说来

$$Q = \oint v_n ds \neq 0$$

由此推出, 流函数 ψ 一般说来是多值函数, 且各值之间的关系为

$$\psi(M) = \psi(M_0) + k_1 Q \quad (7.6.14)$$

k_1 是封闭回线的圈数。

上面我们在导出流函数时, 只假定流体是不可压缩, 运动是平面的, 此外没有任何其他限制, 因此流函数可以存在于粘性、有旋、不定常等情形。流函数的存在在数学上带来某些简化, 因为我们可以以一个函数 ψ 来代替两个速度分量 u 和 v , 从而减少未知函数的个数。由于这个原因流函数在流体力学中有着广泛的应用。

下面我们讨论无旋运动情形, 此时

$$\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

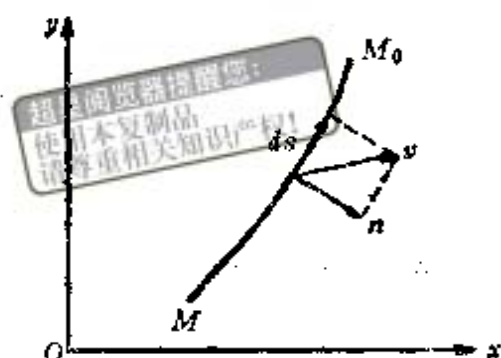


图 7.6.2

将(7.6.10)式代入上式得

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (7.6.15)$$

我们看到, 在平面上旋问题中, 流函数 ψ 也满足拉氏方程。

7.7 复位势及复速度

由(7.6.4)式及(7.6.10)式我们得到

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (7.7.1)$$

这是联系 φ 和 ψ 的关系式, 称为哥西-黎曼条件. 流函数和速度势函数中有一个已知, 另一个就可以从(7.7.1)式求出. 从(7.7.1)式很容易证明流线和等势线正交, 这是因为

$$\text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \psi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

此式表明等势线 $\varphi = \text{常数}$ 和流线 $\psi = \text{常数}$ 正交.

作复函数

$$w(z) = \varphi + i\psi \quad (7.7.2)$$

它的实数部分是速度势函数 φ , 虚数部分是流函数. 由于 φ 和 ψ 之间存在着哥西-黎曼条件(7.7.1), 因此根据复变函数理论推出 $w(z)$ 是解析函数. 由(7.7.2)式决定的解析函数 $w(z)$ 称为复位势. 现在我们建立复位势 $w(z)$ 和速度矢量的关系. 作复位势的导数

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - iv \quad (7.7.3)$$

引进复速度

$$V = u + iv = |V| e^{i\theta}$$

的概念, 其中 θ 是复速度的幅角, 则 $u - iv$ 是复速度的共轭, 以 \bar{V} 表之, 称为共轭复速度(参看图7.7.1). 现在(7.7.3)可写成

$$\frac{dw}{dz} = \bar{V} = |V|e^{-i\theta} \quad (7.7.4)$$

根据速度的物理意义，它是单值函数，因此复位势的导数 dw/dz 亦是单值函数。(7.7.4)式建立了复位势和复速度之间的关系。若已知 $w(z)$ ，则按(7.7.4)式可求出共轭复速度。反之，若已知 \bar{V} ，则

$$w(z) = w(z_0) + \int_{z_0}^z \bar{V} dz$$

给出确定 $w(z)$ 的公式。下面讨论复位势的几个性质。

1) $w(z)$ 可以差一任意常数而不影响流体运动。

2) $w(z) = \text{常数}$ 等价于 $\varphi(x, y) = \text{常数}$, $\psi(x, y) = \text{常数}$ 。它们分别代表等势线及流线，而且等势线和流线正交。

$$3) \Gamma + iQ = \oint_C d\varphi + id\psi = \oint_C dw = \oint_C \frac{dw}{dz} dz. \text{ 由此可见}$$

共轭复速度沿封闭回线 C 的积分，其实数部分为沿该封闭回线的速度环量，而虚数部分则为通过封闭回线 C 的流量。

4) 在无源无涡的单连通区域内， $w(z)$ 是单值函数。在双连通区域内或有源或涡的单连通区域内， $w(z)$ 一般说来是多值函数。

7.8 理想不可压缩流体平面定常无旋运动问题的数学提法

平面定常无旋运动问题的数学提法共有三种，现以绕流问题为例分别说明之。

给定一平面物体 C 。设无穷远处有一速度为 V_∞ 的均匀来流不脱体地流过此物体(如图7.8.1)，求此绕流问题的解。



图 7.8.1

超星网版权所有
使用本网制品
请尊重相关知识产权!

现在对于这个问题写出数学提法:

1) 以速度势函数 φ 为未知函数

寻找物体 C 外无界区域内的速度势函数 φ , 它满足拉氏方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$



及下列两个边界条件:

(1) 在物体 C 上: $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$;

(2) 在无穷远处: $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u_\infty$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_\infty$, 其中 u_∞, v_∞ 是无穷

远处速度的两个分量.

2) 以流函数 ψ 为未知函数

求 C 外无界区域内的流函数 ψ , 它满足拉氏方程

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

及下列边界条件:

(1) 在物体 C 上: $\psi = \text{常数}$;

(2) 在无穷远处: $\frac{\partial \psi}{\partial y} = u_\infty$, $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_\infty$.

3) 以复位势 $w(z)$ 为未知函数

求 C 外无界区域 D 内的解析函数 $w(z)$, 它在 $D+C$ 上连续且满足:

(1) 在 C 上: $\text{Im}w(z) = \psi = \text{常数}$;

(2) 在无穷远处: $\frac{dw}{dz} = V_\infty$, 其中 V_∞ 是无穷远处的共轭复

速度.

在上述三种数学提法中, 第一与第二种是属于数理方程中解偏微分方程的范畴, 第一种是拉氏方程的涅曼问题, 第二种是拉氏方程的狄氏问题; 第三种则是属于复变函数求解析函数的范畴.

超星阅读器提醒您：
请尊重版权！
未经许可，不得转载！

复变函数的工具要比解拉氏方程强有力得多。解拉氏方程只是在一些边界比较简单的问题中才得到成功，而利用复变函数则可以解决比较复杂的边界问题，由于这个原因，我们在平面运动中主要利用第三种数学提法解决实际问题。

7.9 基本流动

从这一节开始，我们利用复变函数的问题提法，即复变函数方法解决平面无旋运动问题。复变函数方法本身又包含两种方法：奇点法和保角映射方法。我们先来介绍物理概念清晰，比较直观，便于掌握的奇点法。

平面无旋运动和具有单值导数的解析函数之间存在着对应关系。对于任何一个平面无旋运动都存在着相应的速度势函数 φ 和流函数 ψ 。也就是说存在着一个复位势 $w(z) = \varphi + i\psi$ 与之对应。而且根据速度本身的物理性质，复位势的导数函数即共轭复速度必须是单值函数。反过来，给定一个具有单值导数的解析函数 $w = w(z)$ ，将其实数部分 φ 和虚数部分 ψ 分别看成是某平面无旋运动的速度势函数和流函数，我们就可以得到一个平面无旋运动与 $w(z)$ 对应。由此可见，平面无旋运动和具有单值导数的解析函数之间的确存在着上述的一一对应关系。奇点法的基本精神就是：首先研究某些简单的具有基本意义的解析函数以及它们所对应的基本流动，而后将这些基本的解析函数以各种方式叠加起来。根据解析函数的性质，解析函数之和仍为解析函数，这样我们便得到了许多新的解析函数。根据上述对应关系，它们分别代表各种平面无旋运动。利用这些新得到的解析函数及复合流动可以解决下面两类问题。第一类称为正问题，所谓正问题就是给定物体求该物体绕流问题的复位势。为此目的，我们只要适当地选择基本流动组合，使得所得的解析函数满足给定的边界条件。如此复合的解析函数便给出正问题的解。利用奇点法解决正问题原则上虽然没有困难，但是实际上做起来并不容易。第二类称为反

超星阅读器提醒您：
请妥善保管好您的书籍！

问题，所谓反问题指的是给出复位势，反过来研究什么样的平面无旋运动与之对应。当我们利用奇点法解决这类问题时，只须根据一定的考虑将基本流动叠加起来，然后研究并确定复合解析函数代表的是什么样的平面无旋运动就可以了。这种办法的最大优点在于它十分简便，而且也确实可以利用它得到许多有用的平面无旋运动的解。但是由于它是凑合的，不能解决正问题，所以有局限性。

通过上面的讨论可以看到，奇点法包含两个主要步骤：

- (1) 基本解析函数及基本流动的研究；
- (2) 基本流动的叠加。

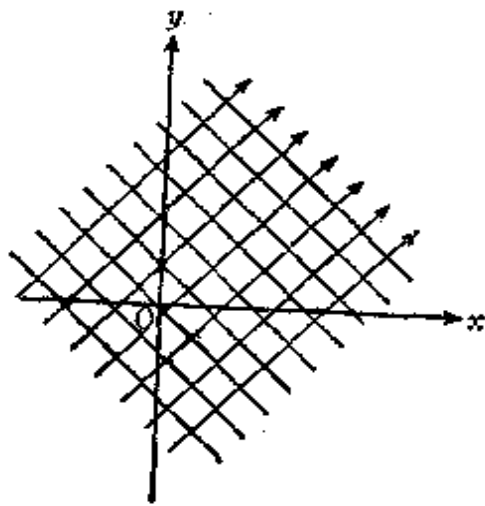


图 7.9.1

下面我们首先研究基本流动，而后在几节中再研究它们的叠加。

1) 线性函数 $w = az$ ，其中 a 是一复数。

将 $w = az$ 写成

$$\varphi + i\psi = (a_1 + ia_2)(x + iy)$$

其中 a_1, a_2 分别是复数 a 的实部和虚部。由此得

$$\varphi = a_1 x - a_2 y,$$

$$\psi = a_2 x + a_1 y,$$

令 $\varphi = \text{常数}$ 和 $\psi = \text{常数}$ 我们得到等势线和流线。它们都是直线，流线的斜率为 $\tan^{-1}[-(a_2/a_1)]$ ，等势线的斜率为 $\tan^{-1}(a_1/a_2)$ 。由此推出流线和等势线是正交的两族曲线（如图7.9.1）。由 $w = az$ 求出共轭复速度为

$$\bar{v} = \frac{dw}{dz} = a \tag{7.9.1}$$

由此可见，速度处处是常数。

由流线的形状及速度分布可以确定，线性函数 $w = az$ 代表的是共轭复速度为 a 的均匀直线流动。考虑到(7.9.1)式后，均匀直线流动的复位势 $w = az$ 亦可写成

超星浏览器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

$$w = \bar{V}_\infty z \quad (7.9.2)$$

$\bar{V}_\infty = u_\infty - iv_\infty$ 是无穷远处的共轭复速度（它与 V 相等），若 $v_\infty = 0$ ， $w = u_\infty z$ ，我们得到的是平行 x 轴的统一直线流动；若 $u_\infty = 0$ ， $w = -iv_\infty z$ ，我们得到的是平行 y 轴的统一直线流动。

2) 对数函数 $w = a \ln z$ ，其中 a 是实数。

先求 φ 及 ψ 。为此写出

$$w = \varphi + i\psi = a \ln r + ia\theta$$

于是

$$\varphi = a \ln r, \quad \psi = a\theta$$

流线 $a\theta = \text{常数}$ 是从原点发出的射线族。等势线 $a \ln r = \text{常数}$ ，即 $r = \text{常数}$ 是以原点为心的圆族。显然这两族曲线是正交的（见图 7.9.2）。

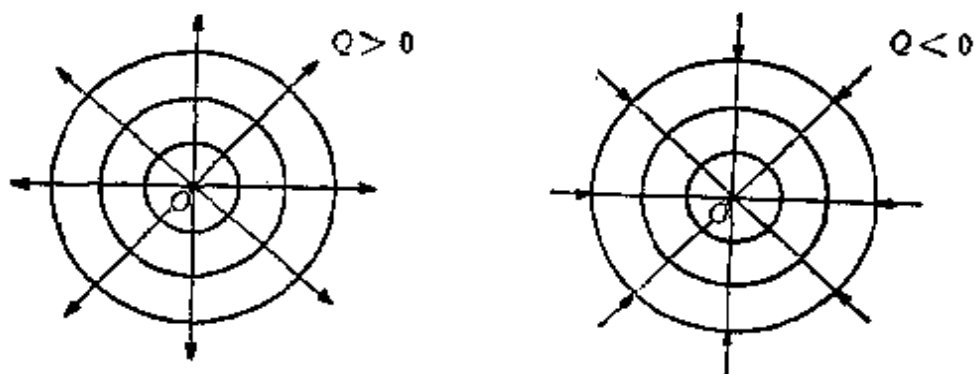


图 7.9.2

现在我们求通过围绕原点 O 的任意封闭回线 C 的流量 Q ，由公式

$$\Gamma + iQ = \oint_C \frac{dw}{dz} dz = \oint_C \frac{a}{z} dz = 2\pi ia$$

得

$$\Gamma = 0, \quad Q = 2\pi a \quad (7.9.3)$$

此式表明通过围绕 O 点的任意封闭回线 C 的流量 Q 等于 $2\pi a$ 。由此可见，单位时间内从原点 O 有 $2\pi a$ 的流体体积流出。又由 (7.9.3) 得

$$\alpha = \frac{Q}{2\pi}$$

将之代入复位势的表达式中得

$$w = \frac{Q}{2\pi} \ln z \quad (7.9.4)$$

其中 Q 为单位时间内自 O 点流出的流体体积。

最后求共轭复速度：

$$V = \frac{dw}{dz} = \frac{Q}{2\pi z} = \frac{Q}{2\pi r} e^{-i\theta}$$

其中 θ 为 z 点的幅角，于是复速度为

$$V = \frac{Q}{2\pi r} e^{i\theta}$$

此式表明，当 $Q > 0$ 时，速度矢量 v 与 r 同向，流体由原点向外流出；当 $Q < 0$ 时，速度矢量 v 与 r 异向，流体由原点向内流入。

此外速度方向与所在点幅角相同，大小为

$$|V| = \left| \frac{Q}{2\pi r} \right|$$

当 $r=0$ 时 $|V| \rightarrow \infty$ ，随着 r 增加， $|V|$ 以 $1/r$ 的阶次逐渐减小，到无穷远处则趋于零。

通过上面的讨论可以肯定，当 $Q > 0$ 时，复位势

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z$$

代表的是原点处有一流量为 Q 的点源流动；而当 $Q < 0$ 时，复位势

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z$$

代表的则是原点处有一流量为 Q 的点汇流动。

如果点源不在坐标原点而在 z_0 点，则复位势为

超星浏览器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

$$w(z) = -\frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_0)$$

3) 对数函数 $w = ib \ln z$, 其中 b 是实数.

$$w = \varphi + i\psi = -b\theta + ib \ln r$$

于是

$$\varphi = -b\theta, \quad \psi = b \ln r$$

流线 $r = \text{常数}$ 是以 O 点为心的圆族, 等势线 $\theta = \text{常数}$ 是从 O 点出发的射线族 (参看图 7.9.3).

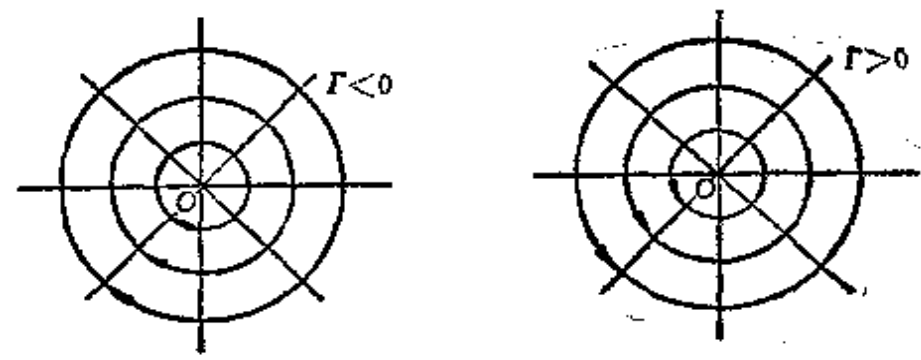


图 7.9.3

现在求围绕 O 点的任意封闭回线 C 上的速度环量 Γ . 由公式

$$\Gamma + iQ = \oint_C \frac{dw}{dz} dz = \oint_C \frac{ib}{z} dz = 2\pi i(ib) = -2\pi b$$

得

$$\Gamma = -2\pi b, \quad Q = 0 \tag{7.9.5}$$

此式表明, 原点 O 处必有一强度为 Γ 的点涡.

由(7.9.5)式有

$$b = -\frac{\Gamma}{2\pi}$$

将之代入复位势表达式中有

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z \tag{7.9.6}$$

现求此流动的速度分布, 由

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

得

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (7.9.7)$$

由此亦可看出速度是沿以 O 点为心的圆周方向. 当 $\Gamma > 0$ 时 $v_\theta > 0$, 流动为逆时针方向; 当 $\Gamma < 0$ 时 $v_\theta < 0$, 流动则是顺时针方向. 其次速度的大小为 $|\Gamma/(2\pi r)|$, 在原点 O 处速度为无穷大, 随着 r 的增大, 速度的大小以 $1/r$ 的阶次逐渐减小, 到达无穷远时则趋于零.

通过上面的讨论可以肯定, 复位势

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$$

代表原点处有一强度为 Γ 的点涡流动. $\Gamma > 0$ 时得到的是逆时针方向旋转的点涡运动; $\Gamma < 0$ 时得到的是顺时针方向旋转的点涡运动.

如果点涡不在坐标原点而在 z_0 点, 则复位势为

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0)$$

4) 倒数函数 $w = c/z$, 其中 c 为复数.

首先我们证明复位势 $w = c/z$ 代表偶极子流动.

设在 B, A 处分别放置强度皆为 Q 的点源和点汇 (如图 7.9.

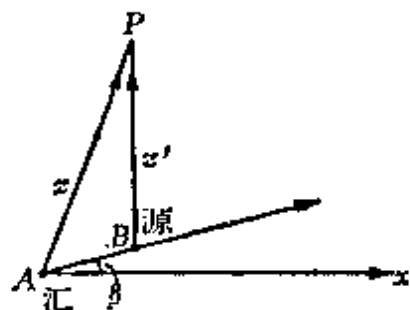


图 7.9.4

4), 于是由点源和点汇所产生的复位势为

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{Q}{2\pi} \ln z' - \frac{Q}{2\pi} \ln z \\ &= \frac{Q}{2\pi} (z' - z) \frac{\ln z' - \ln z}{z' - z} \end{aligned}$$

令

$$z' - z = AB e^{i(\pi + \theta)} = -AB e^{i\theta}$$

其中 AB 是 $z' - z$ 的长度, θ 是 AB 与 x 轴的夹角, 于是

$$w(z) = -\frac{Q \cdot AB}{2\pi} e^{i\theta} \frac{\ln z' - \ln z}{z' - z} \quad (7.9.8)$$

令 B 点沿 AB 方向趋于 A (此时 θ 角不变), 同时要求点源和点汇的强度这样地趋于无穷, 使得

$$\lim_{\substack{AB \rightarrow 0 \\ Q \rightarrow \infty}} Q \cdot AB = m \quad (7.9.9)$$

仍为有限值, 于是复位势变成

$$\begin{aligned} w(z) &= -\lim_{\substack{AB \rightarrow 0 \\ Q \rightarrow \infty}} \frac{Q \cdot AB}{2\pi} e^{i\theta} \lim_{\dots} \frac{\ln z' - \ln z}{z' - z} \\ &= -\frac{m e^{i\theta}}{2\pi} \frac{1}{z} \end{aligned} \quad (7.9.10)$$

引进复数 M , 其大小为 m , 方向为由汇 A 到源 B , 即

$$M = m e^{i\theta}$$

这样, (7.9.10) 式可写成

$$w(z) = -\frac{M}{2\pi} \frac{1}{z} \quad (7.9.11)$$

满足条件(7.9.9)且无限邻近的一组点源和点汇称为偶极子, M 称为偶极子的矩. 由此可见, 倒数函数 c/z 代表偶极子产生的流动, 其中 $c = -M/(2\pi)$.

现在我们研究复位势(7.9.11)的流线、等势线及速度分布. 为了简单起见, 令 $\theta = \pi$, 偶极子轴线为负 x 轴向. 于是(7.9.11)式采取下列形式

$$w(z) = \frac{m}{2\pi} \frac{1}{z} \quad (7.9.12)$$

写出实部和虚部

$$\varphi + i\psi = \frac{m}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{m}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

于是

$$\varphi = \frac{m}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \psi = -\frac{m}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

流线 $x^2 + y^2 + Cy = 0$ 代表圆心在 y 轴且通过原点的圆族, 等势线

$x^2 + y^2 - Cx = 0$ 代表圆心在 x 轴且通过原点的圆族, 这两个圆族显然是正交的 (参看图 7.9.5).

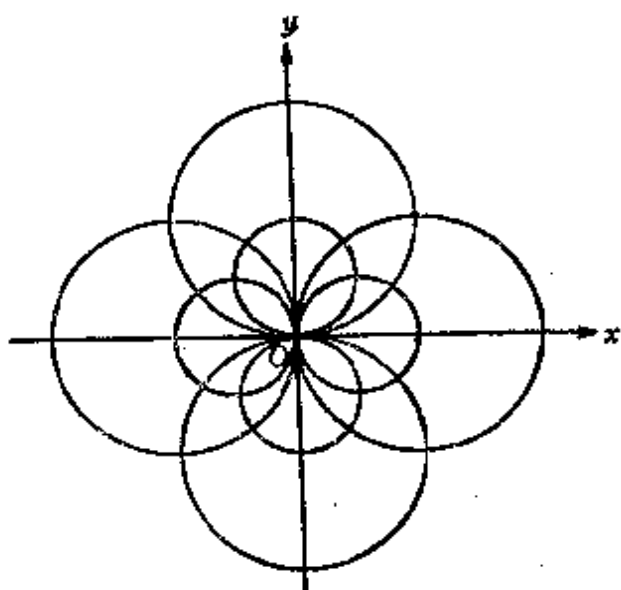


图 7.9.5

共轭复速度为

$$\begin{aligned} V &= \frac{dw}{dz} = -\frac{m}{2\pi} \frac{1}{z^2} \\ &= -\frac{m}{2\pi r^2} e^{-2i\theta} \end{aligned}$$

速度大小是

$$|V| = \left| \frac{m}{2\pi r^2} \right|$$

当 $r=0$ 时 V 以 $1/r^2$ 的阶次趋于无穷, 随着 r 的增加, V 逐渐减小, 至无穷远则趋于零. 其次

$$\begin{aligned} \Gamma + iQ &= \oint_C \frac{dw}{dz} dz \\ &= \oint_C -\frac{m}{2\pi} \frac{1}{z^2} dz = 0 \end{aligned}$$

由此得 $\Gamma=0, Q=0$. 此式表明沿绕 O 点的任一封闭回线 C 其速度环量为零, 流量亦为零. 这是十分自然的, 因为 C 内无涡, 所以沿 C 的环量为零. 此外, 自点源流出的流体全部流入点汇, 因此沿 C 的流量亦为零.

如果偶极子不在坐标原点 O 而在 z_0 点, 则复位势为

$$w(z) = -\frac{M}{2\pi} \frac{1}{z-z_0}$$

5) 幂次函数 $w(z) = Az^n$, 其中 A 与 n 皆为实数.

令 $z = re^{i\theta}$. 于是

$$\varphi = Ar^n \cos n\theta, \quad \psi = Ar^n \sin n\theta \quad (7.9.13)$$

零流线为

$$\theta = 0 \quad \text{及} \quad \theta = \pi/n$$

这是两条自原点发出的射线, 它们构成夹角为 π/n 的角形区域.

$n=1, n>1, n<1$ 分别是夹角为 $\pi, <\pi, >\pi$ 的角形区域, 图 7.9.6 画出了六个不同 n 的区域, 对应的角度在图中标出. 不难

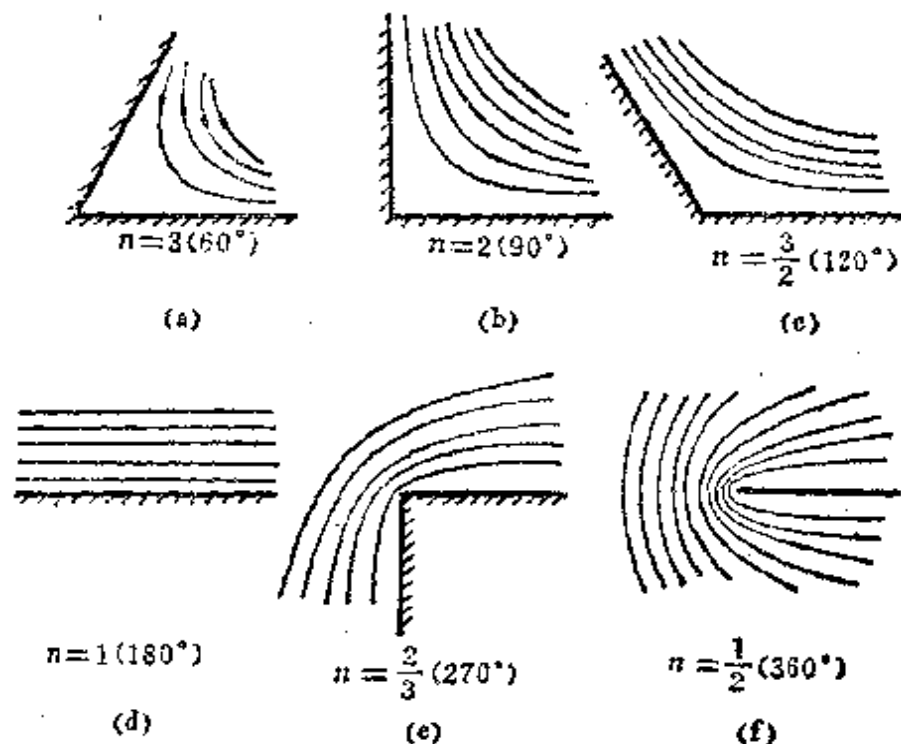


图 7.9.6

看出 n 应大于 $1/2$, 否则得到大于 2π 角的区域, 这显然是不可能的. 为了考察在角形区域内产生的是什么样的流体运动, 我们在图 7.9.6 中画出了流线图案. 并根据 (7.9.13) 计算出

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = nAr^{n-1} \cos n\theta$$

$$v_{\theta} = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = -nAr^{n-1} \sin n\theta \quad (7.9.14)$$

显然

$$(v_r)_{\theta=\frac{\pi}{n}} = -nAr^{n-1}, \quad (v_r)_{\theta=0} = nAr^{n-1}$$

$$(v_{\theta})_{\theta=\frac{\pi}{n}} = 0, \quad (v_{\theta})_{\theta=0} = 0$$

于是当 $A > 0$ 时, 流动方向如图 7.9.6(a) 中箭头所示. 根据流线图形及流动方向可以肯定 $w(z) = Az^n$ 代表的是绕 π/n 角的流动. 当 $n > 1$ 时得到的是绕小于 π 角的流动; 当 $1/2 \leq n < 1$ 时, 得到的是绕大于 π 角的流动.

现在我们考察角点处速度大小. 由(7.9.14)得

$$V = \sqrt{v_r^2 + v_{\theta}^2} = n|A|r^{n-1} \quad (7.9.15)$$

当 $r \rightarrow 0$ 时有

$$V = \begin{cases} 0, & n > 1 \\ |A|, & n = 1 \\ \infty, & n < 1 \end{cases} \quad (7.9.16)$$

(7.9.16)清楚地说明, 角点处流速在 $n > 1$ 和 $n < 1$ 时具有截然不同的特性, 小于 π 角的绕流角点处流速为零; 大于 π 角的绕流角点处流速趋于无穷大, 根据伯努利积分那里的压力趋于负无穷; 等于 π 角的直线流动介乎两者之间, 此时角点处速度取有限值.

根据(7.9.15)式我们看出, 当 $n > 1$, $r \rightarrow \infty$ 时 $V \rightarrow \infty$, 远方的流体沿某边线以无穷大的速度流来, 然后沿另一条边线以无穷大的速度流去. 这样的流动在实际上当然是不可能存在的. 绕角流之所以具有普遍性是因为角点附近的流动反映了物体绕流问题中角点附近的流场, 因此可以用它来分析被绕流物体角点附近的流动特性.

7.10 圆柱的无环量绕流问题

基本流动的威力主要体现在联合应用上. 下面我们将基本流

动按一定物理考虑叠加起来，解决平面无旋运动的反问题。解决反问题的主要步骤是：(1) 利用复合解析函数的流函数确定它代表的是什么样的平面无旋运动；(2) 求出该平面无旋运动的特征量。

圆柱定常绕流问题是平面绕流问题中最简单的情形，它在实际中经常遇到。例如气流绕过电线的流动，河水绕圆形桥墩的流动。此外，圆柱定常绕流问题在二维机翼理论中具有基本的重要性，因为利用它可以解决任意翼型绕流问题。由于理论和实际的重要性，所以我们对圆柱绕流问题进行比较仔细的研究。

首先从物理直观上分析一下，为了得到圆柱绕流问题的解需要哪些基本流动叠加起来。设一细长物体沿长轴方向以等速 v 运动，在物体的前端，流体不断地受挤压，而在尾后让出来的空间里又汇合起来（参看图7.10.1）。

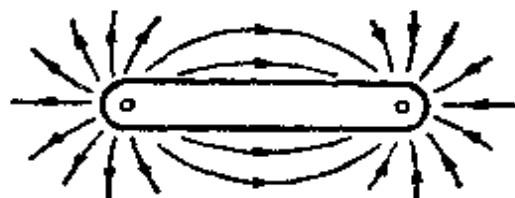


图 7.10.1

这样，物体的运动状态就类似于前端有个点源，后端有个点汇。如果取随物体一起移动的坐标系作为考察这个运动的参考系，我们便得到一个定常运动。其中物体是静止的，而流体绕着它流过。描写它的流动应当是平行流和源与汇组合的叠加。现在让细长体前缘的曲率中心逐渐靠近后缘的曲率中心，当两者重合时就得到圆柱体，这时前端的点源和后端的点汇也应重合在一起变成偶极子（注意偶极子的轴线方向恰好和来流方向相反）。因此我们估计，圆柱定常绕流问题的解应当由下列两个基本流动叠加起来得到：

- (1) 速度为 V_0 （实数）的平行流；
- (2) 矩为 m ，轴线方向与来流相对的偶极子。

取这样的坐标系，原点 O 放在偶极子处， Ox 轴沿均匀平行流方向（如图7.10.2）。于是，根据(7.9.2)和(7.9.12)复合流动的复位势为

超星浏览器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

$$w = V_{\infty}z + \frac{m}{2\pi} \frac{1}{z} \quad (7.10.1)$$

为了研究上述复位势代表什么平面的无旋运动，由(7.10.1)分出虚数部分，得到流函数的方程为

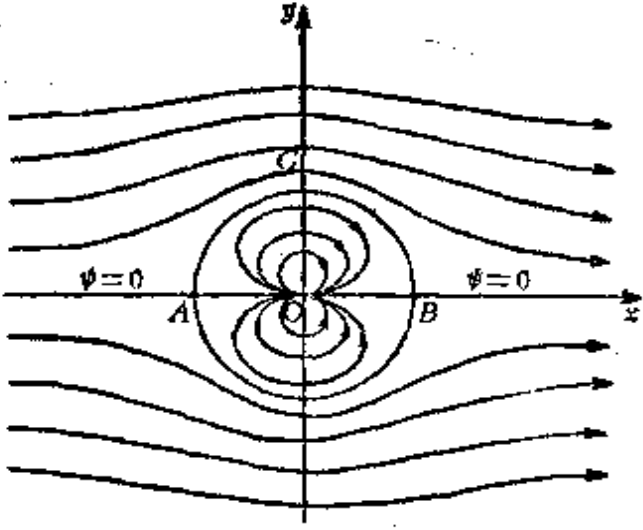


图 7.10.2

$$\psi = V_{\infty}y - \frac{m}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

令 $\psi = \text{常数}$ ，流线方程为

$$V_{\infty}y - \frac{m}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = \text{常数}$$

它是一族三次方程所代表的曲线，其中的零流线为

$$\left(V_{\infty} - \frac{m}{2\pi} \frac{1}{x^2 + y^2} \right) y = 0$$

它由下列两条曲线组合而成，即

$$y = 0 \quad \text{及} \quad x^2 + y^2 = \frac{m}{2\pi V_{\infty}}$$

前者是 Ox 轴，后者是半径为 $a = \sqrt{m/(2\pi V_{\infty})}$ 的圆周，我们把这个圆想象是一个物面（零流线用物面代替，流动不受丝毫影响，因为物体本身就是一条流线）。由此可见，平行流和偶极子的叠加在圆内是偶极子在圆柱内的流动，在圆外就是绕圆柱的流动。圆柱半径 a ，来流速度 V_{∞} 及偶极矩 m 之间存在着关系式

$$a = \sqrt{\frac{m}{2\pi V_{\infty}}}$$

如果给定 V_{∞} 及圆柱半径 a ，则偶极矩 m 应取为 $2\pi V_{\infty} a^2$ 。于是由(7.10.1)式可知，无穷远处速度为 V_{∞} 的均匀来流沿 Ox 轴方向绕半径为 a 的圆柱流动的复位势为

$$w = V_{\infty} \left(z + \frac{a^2}{z} \right), \quad |z| \geq a \quad (7.10.2)$$

现在我们确定圆柱上的速度分布、压力分布及圆柱所受的力。根据(7.10.2)式共轭复速度为

$$\bar{V} = \frac{dw}{dz} = V_{\infty} \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right)$$

在圆周 $z = ae^{i\theta}$ 上有

$$\begin{aligned} \bar{V} &= V_{\infty} (1 - e^{-2i\theta}) = V_{\infty} e^{-i\theta} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\ &= (2V_{\infty} \sin \theta) i e^{-i\theta} \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} V &= -(2V_{\infty} \sin \theta) e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} \\ v_{\theta} &= -2V_{\infty} \sin \theta \end{aligned} \quad (7.10.3)$$

于是圆周上的速度分布为

$$|V| = 2V_{\infty} \sin \theta \quad (7.10.4)$$

此式表明，圆周上速度分布由正弦规律确定。当流体质点处于 A 点时， $\theta = \pi$ ， $|V| = 0$ 。而后沿圆周流动， θ 从 π 逐渐减少， $|V|$ 逐渐增加，到达 $\theta = \pi/2$ 的 C 点时达到最大值

$$|V_{\max}| = 2V_{\infty} \quad (7.10.5)$$

而后又逐渐减少，到达 $\theta = 0$ 的 B 点处，速度又取零值（图7.10.3）。分支点 A 与 B ，称为驻点。 A 点称为前驻点， B 点称为后驻点。

有了速度分布(7.10.4)，根据伯努利积分可计算圆柱表面上的压力分布。伯努利积分为

$$p + \frac{\rho V^2}{2} = p_{\infty} + \frac{\rho V_{\infty}^2}{2} \quad (7.10.6)$$

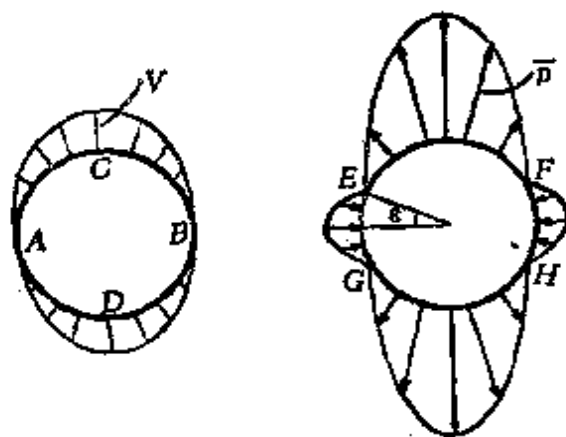


图 7.10.3

超星浏览器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

引进无量纲的压力系数，它的定义为

$$\bar{p} = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2}$$

考虑到(7.10.6)式及(7.10.4)式

$$\bar{p} = 1 - \left(\frac{V}{V_{\infty}}\right)^2 = 1 - 4 \sin^2 \theta \quad (7.10.7)$$

现研究圆周上压力系数的分布情况，当流体质点处在前驻点A时

$$\theta = \pi, \quad \bar{p} = 1, \quad p = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2$$

此时压力为极大，它比 p_{∞} 大 $\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2$ 。当 θ 由 π 减低至 $\pi/2$ 时， \bar{p}

也随着按(7.10.7)式减少，到 $\theta = 5\pi/6$ 时

$$4 \sin^2 \theta = 1, \quad \bar{p} = 0$$

此时 $p = p_{\infty}$ 。圆柱面上压力恰好等于无穷远处的压力。当流体质点

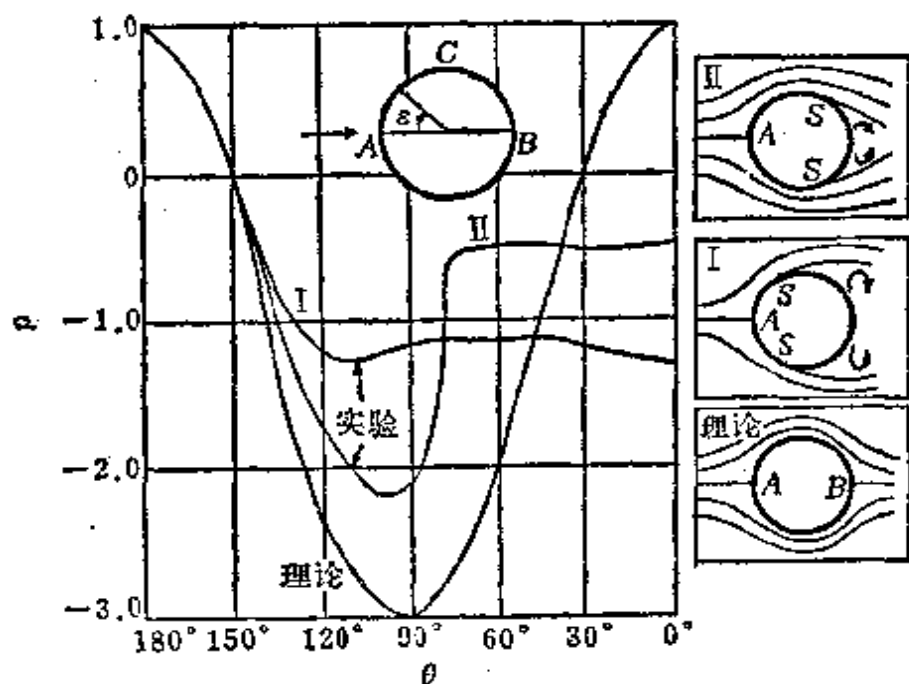


图 7-10.4

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

运动到速度最大点 C 时

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \bar{p} = -3, \quad p = p_{\infty} - \frac{3}{2} \rho V_{\infty}^2$$

此时压力极小，它比 p_{∞} 小 $\frac{3}{2} \rho V_{\infty}^2$ 。从 $\theta = \pi/2$ 到 $\theta = 0$ 的压力分布和 $\theta = \pi$ 到 $\theta = \pi/2$ 的压力分布相同，这是因为压力分布对 y 轴是对称的。压力分布如图 7.10.4 所示。

由于压力分布对 Ox 轴和 Oy 轴都是对称的，所以圆柱所受的合力为零，即圆柱不但不承受与气流垂直的升力，而且在气流方向也不承受阻力。前者是和实际情况符合的，而后者则与实际不符，这就是著名的达朗贝尔悖论。其所以不符主要是由于没有考虑粘性对圆柱所产生的摩擦阻力和由于边界层分离所产生的压差阻力。

下面我们将压力分布的理论结果和实验结果进行比较。由于不同的条件实验结果有两条曲线，对应的流动图案画在图 7.10.4 的旁边。曲线 I 和理论曲线比较接近。但就是这条比较接近的曲线也和理论结果相差甚远，特别是在 C 点到 B 点的区域内。这是因为圆柱是非流线型物体，圆柱表面上的边界层经受不起逆压的作用约在 $e = \pm 84^\circ$ （第一条曲线）或在 $e = \pm 120^\circ$ （第二条曲线）时就脱离物体，在物体后面形成尾涡区。这样，实际存在的绕流图案和理论上得到的不脱体绕流图案有本质差别。这就是在压力分布上理论结果和实际结果不符合的原因。从实验所得的压力分布曲线可看到，圆柱在流动时将受到阻力，而理论却给出阻力等于零的结果。因此在阻力方面理论结果也和实验结果根本不符。

虽然圆柱绕流问题的结果在压力分布和阻力等方面都和实际相差较大，但是它毕竟为分析粘性流动提供了必要的数据和资料，加上它在机翼理论中的基础作用，因此它在绕流问题中仍然具有基本的重要性。

由于基本流动中不出现涡旋，速度环量处处为零，所以上述

绕流问题称为圆柱的无环量绕流问题. 根据 7.5 节当 $\Gamma = 0$ 时圆柱绕流问题的解是唯一的, 因此复位势(7.10.2)就是我们所要找的唯一解.

最后我们证明, 如果无穷远处来流的速度矢量与 x 轴成 α 角, 无穷远处共轭复速度为

$$V_{\infty} = |V_{\infty}| e^{-i\alpha}$$

则圆柱无环量绕流问题的复位势为

$$w(z) = V_{\infty} z + V_{\infty} \frac{a^2}{z} \quad (7.10.8)$$

取辅助平面 z' , 原点与原平面重合, x' 轴与原平面的 x 轴夹成 α 角, 则在 z' 平面上圆柱无环量绕流问题的复位势为

$$w(z') = |V_{\infty}| z' + |V_{\infty}| \frac{a^2}{z'}$$

z' 与 z 的关系是

$$z' = z e^{-i\alpha}$$

代入上式有

$$\begin{aligned} w(z) &= |V_{\infty}| e^{-i\alpha} z + |V_{\infty}| e^{i\alpha} \frac{a^2}{z} \\ &= V_{\infty} z + V_{\infty} \frac{a^2}{z} \end{aligned}$$

即得证明.

7.11 圆柱的有环量绕流问题

我们先在风洞中作一个实验. 一个半径为 a 的圆柱体在电机带动下可以绕 Oz 轴转动, 该轴固定在可沿 Oy 方向运动的小车上, Ox 方向为风洞吹风的方向, 如图 7.11.1 所示. 我们先开动电机, 使圆柱转动, 无论转动角速度方向与 Oz 轴相同或相反, 小车都不动. 让圆柱停止转动, 而开动风洞, 小车也不动. 但当既吹风, 圆柱也转动时, 小车就走动了, 并且转动角速度与 Oz

方向相同时，小车向负 y 方向走动；与 Oz 方向相反时，小车向正 y 方向走动。圆柱转动得越快，风速越大，则小车运动得也越快。这就提出一个问题：推动小车运动的升力是怎样产生的？它和风速与转速有什么关系？

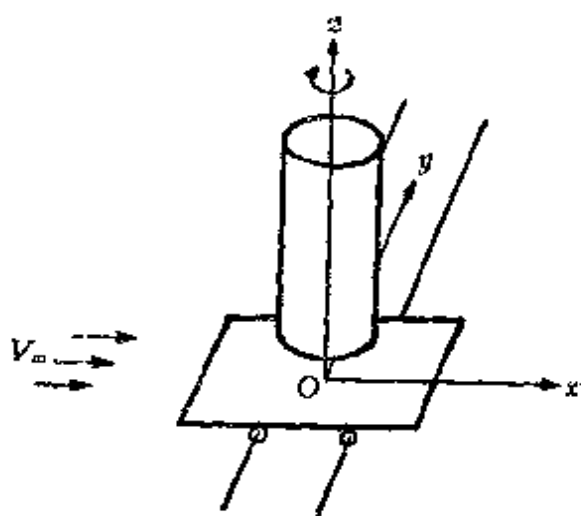


图 7.11.1

为了回答这些问题，我们来分析上面的实验。圆柱在静止气体中等速旋转，由于粘性的缘故，带动周围的气体产生圆周运动，其速度随着到柱面的

距离的增加而减小。这样的流动可以用圆心处有一强度为 Γ 的点涡来模拟。将旋转的圆柱放在横向的均匀平行气流中而考虑旋转圆柱的定常绕流问题（图 7.11.2）。在理想流体范畴内，上述流动可以用两个流动的叠加来模拟：

(1) 圆柱的无环量绕流；(2) 圆心处强度为 $-\Gamma$ ($\Gamma > 0$) 的点涡。复合流动的复位势为

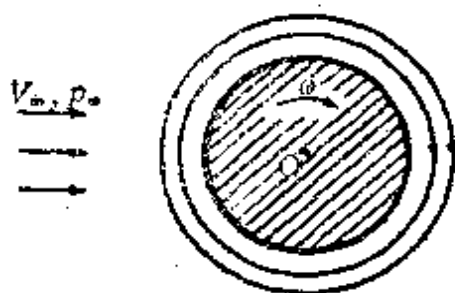


图 7.11.2

$$w(z) = V_\infty z + V_\infty \frac{a^2}{z} - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z \quad (7.11.1)$$

不难看出，(7.11.1)式所表示的平面无旋运动仍然是无穷远处速度为 V_∞ 的均匀来流绕圆柱的流动。这是因为复函数 $V_\infty z +$

$V_\infty \frac{a^2}{z}$ 加上 $-\frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$ 后还是圆柱外的解析函数，且点涡所产生的

流动，其流线皆为圆周，无穷远处的速度趋于零，因此圆柱是流线的边界条件以及无穷远处的边界条件都没有破坏，所以(7.11.1)式还是圆柱绕流问题的解。所不同的是现在沿任一绕原点的封闭

回线的速度环量不等于零而等于 Γ ，因此这样的圆柱绕流问题称为圆柱的有环量绕流问题。根据 7.5 节可以推出，当 Γ 给定后复位势(7.11.1)是唯一的。

推动小车前进的升力的出现是和环量有极密切的关系。图 7.11.3 画出了复合前和复合后的流线图。从图上可看出，复合流

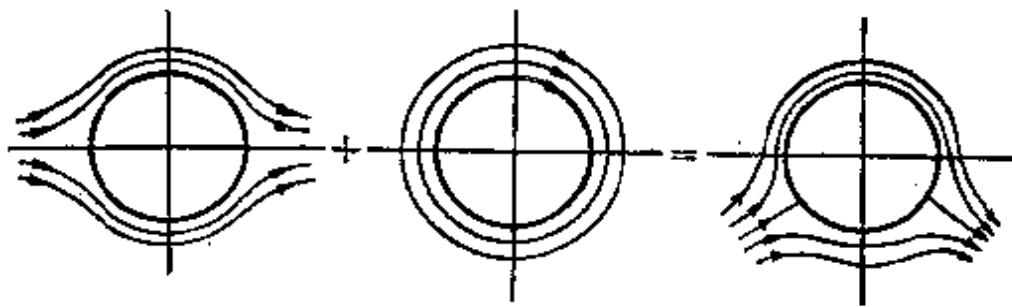


图 7.11.3

动对 y 轴是对称的，所以圆柱将不遭受阻力，但由于环量的存在，对 x 轴不再对称，这就必然产生 y 方向的合力。升力的产生还可更细致的分析如下：在圆柱的上表面，顺时针的环流和无环量的绕流方向相同，因而速度增加；而在下表面则方向相反，因而速度减少。根据伯努利定理，上表面压力减少，下表面压力增大，结果就产生了向上的升力。现在我们来计算升力的大小。由(7.11.1)，圆柱 $r=a$ 上的速度分布为

$$v_{\theta} = -2V_{\infty} \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi a} \quad (7.11.2)$$

根据伯努利方程

$$\begin{aligned} p &= C - \frac{\rho v^2}{2} \\ &= C - \frac{\rho}{2} \left(2V_{\infty} \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a} \right)^2 \\ &= C - \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi^2 a^2} - 2\rho V_{\infty}^2 \sin^2 \theta - \frac{\Gamma \rho V_{\infty} \sin \theta}{\pi a} \quad (7.11.3) \end{aligned}$$

超星浏览器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

圆柱所受合力为

$$R = - \oint p n ds$$

于是升力为

$$R_y = - \oint p \cos(n, y) ds = - \int_0^{2\pi} p \sin \theta \cdot a d\theta$$

将(7.11.3)代入上式，并考虑到

$$\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \pi$$

我们得到

$$R_y = \rho V_{\infty} \Gamma \tag{7.11.4}$$

(7.11.4)揭示了升力和环量之间的一个重要关系，即升力的大小准确地和环量 Γ 成正比，此外还和来流速度 V_{∞} 及流体密度 ρ 成正比。要决定升力的方向，只要把来流速度矢量逆环量方向旋转 90° 即得。这个关系称为茹柯夫斯基定理，它在绕流问题中具有普遍意义，即不仅对圆柱是正确的，而且对于有尖后缘的任意翼型都是正确的（参阅机翼理论部分）。

真实气体由于粘性，圆柱后部会有分离，这时除升力外还有阻力。但升力基本上可用(7.11.4)式计算。

这就回答了本节开头提出的问题。旋转圆柱绕流后会产生升力的这种现象称为麦格努斯(Magnus)效应，曾被用来借助风力推动船舶。用几个迅速转动的铅直圆柱体来代替风帆，试验是成功的。但由于不经济，所以风筒船并没有被采用。麦格努斯效应还可以从一个在空气中飞着的削球（乒乓球或网球）看出来。侧旋球、弧圈球所以有那么大的弧度，道理就在于此。

Γ 不同时，有不同的驻点位置，从而决定了不同类型的流线图（图7.11.4）。

考虑驻点位置和 Γ 的关系。根据(7.9.7)及(7.10.3)式圆柱上无环量绕流和纯环流的速度分布 v_θ 分别为 $-2V_{\infty} \sin \theta$ 和

$-\Gamma/2\pi a$, 速度在上表面($\theta \leq \theta \leq \pi$)相加, 下表面($\pi \leq \theta \leq 2\pi$)相减. 当 $\Gamma/2\pi a$ 等于无环量绕流最大速度 $2V_\infty$ 时, 即 $\Gamma = 4\pi aV_\infty$ 时, 驻点就在圆柱底部 AB 处; 当 $\Gamma/2\pi a < 2V_\infty$, 即 $\Gamma < 4\pi aV_\infty$ 时, 圆柱下表面有两个对于 y 轴对称的点 A 与 B , 在那里无环量绕流的速度刚好等于 $\Gamma/2\pi a$, 因此 A 与 B 就是驻点; 当 $\Gamma/(2\pi a) > 2V_\infty$, 即

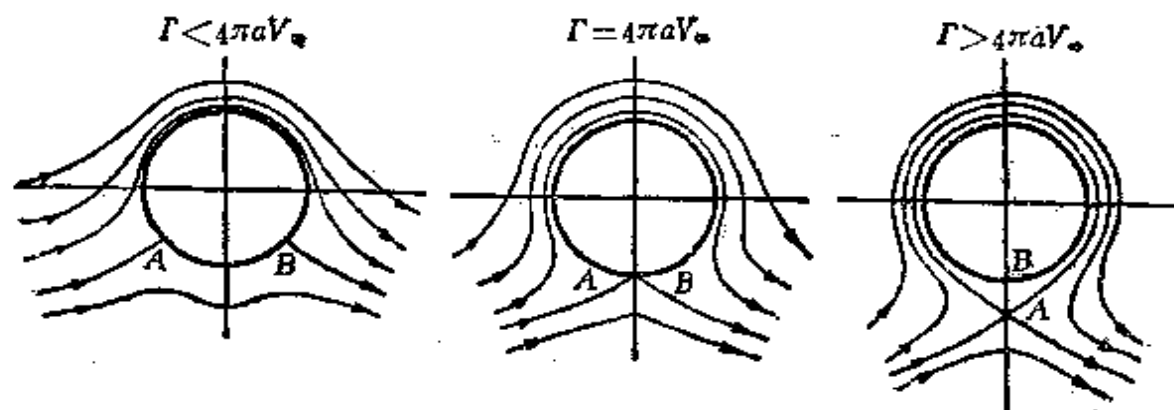


图 7.11.4

$\Gamma > 4\pi aV_\infty$, 圆柱下表面任一点上的无环量绕流速度都小于 $\Gamma/2\pi a$, 所以圆柱上没有驻点, 驻点发生在圆柱外的 y 轴上. 如果驻点位于圆柱上, 则它的位置可由下式确定

$$-2V_\infty \sin \theta_0 - \frac{\Gamma}{2\pi a} = 0$$

从而

$$\sin \theta_0 = -\frac{\Gamma}{4\pi aV_\infty} \quad (7.11.5)$$

θ_0 为驻点的极坐标. (7.11.5) 将在机翼理论中用到.

7.12 虚像法. 映射定理和圆周定理

前两节以圆柱绕流问题为例介绍了用奇点法解反问题的过程. 由于教材安排上的考虑我们将推迟到7.18节结合薄翼绕流问题才向读者介绍奇点法解正问题的全部细节. 本节我们向大家介绍奇点法中的另一种方法——虚像法, 这种方法在解决某些类型

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

的具体问题时是很有用的。

考虑机翼绕流问题。为了抓住升力这一主要特性有时我们可以用强度为 Γ 的点涡代替机翼。于是机翼绕流就可以用点涡绕流代替，它的复位势当然是知道的。设想机翼放在圆截面风洞中吹风，或者考虑飞机降落时地面对机翼绕流的影响，这时我们就遇到这样的问题，平板或圆放入气流后将对原来的复位势产生什么样的影响？有没有一种办法能够很容易地根据原来的复位势求出扰动后的复位势？本节介绍的虚像法很好地回答了上述两个问题。下面分平板和圆两种情形介绍虚像法。

设想 z_0 处有一强度为 Γ 且顺时针方向旋转的点涡，其复位势为 $\Gamma \ln(z - z_0) / 2\pi i$ 。今在气流中放置一无界平板 AB (为方便起见取为 x 轴)。为了使 AB 是一条流线，虚像法告诉我们须要在 z_0 相对于 AB 的镜面反射处 \bar{z}_0 放置一个同等性质的奇点，即强度为 Γ 且逆时针方向旋转的点涡，如图 7.12.1 所示。于是

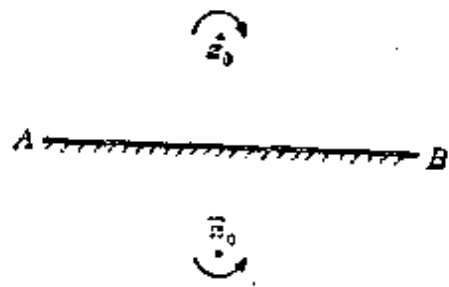


图 7.12.1

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - \bar{z}_0) \quad (7.12.1)$$

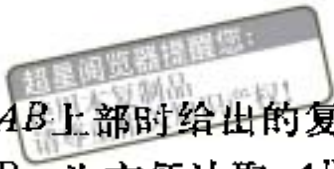
给出放置 AB 后欲求的复位势。通过直观分析可以很容易地看出 AB 上的速度方向是沿着平板的。令

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0)$$

则(7.12.1)可改写为

$$w(z) = f(z) + \bar{f}(z)$$

其中 \bar{f} 是 f 表达式中的系数取共轭后得到的函数。如果将 $f(z)$ 的含意推广，理解为全部奇点皆位于 AB 上部时给出的流动复位势，则我们得下述映射定理



映射定理 设 $f(z)$ 是全部奇点位于 AB 上部时给出的复位势 (AB 不存在时). 今在流动中插入平板 AB , 为方便计取 AB 为 x 轴, 则

$$w(z) = f(z) + \bar{f}(z) \quad (7.12.2)$$

给出 AB 存在时的复位势.

证 因 $f(z)$ 的奇点全部位于上半平面, 所以它们的虚像点全部位于下半平面. 由此可见, 在上半平面 $w(z)$ 的奇点和 $f(z)$ 的奇点完全一样, 它仍然是除原奇点外的解析函数, 而且不破坏原有的无穷远处条件, 剩下须要证明的是 AB 即 x 轴是一条流线. 因 x 轴上的点, 其坐标皆为实数, 故

$$z = \bar{z} \quad (7.12.3)$$

根据(7.12.2)及(7.12.3)式在 AB 上有

$$\varphi + i\psi = f(z) + \bar{f}(z) = f(z) + \overline{f(\bar{z})} = \text{实数}$$

即

$$\psi = 0$$

AB 为一流线. 定理得证.

例 设在 z_0 处有一强度为 Q 的点源, 求地面 (取为 x 轴) 对它的影响. 根据映射定理, 地面存在时的复位势为

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_0) + \frac{Q}{2\pi} \ln(z - \bar{z}_0)$$

相当于在 z_0 的共轭点上放置一同等强度的点源.

附注 注意只有在 AB 取作 x 轴时(7.12.2)式才是正确的. 当 AB 是任意方向时, 必须按虚像法原则在镜面 AB 的反射处放置相同性质的奇点, 然后写出相应的复位势.

现考虑圆周的情形.

圆周定理 考虑理想不可压缩流体平面无旋运动. 设流体中无固壁时它的复位势为 $f(z)$, $f(z)$ 的所有奇点都在圆 $|z| = a$ 外. 今在流体中放置一半径为 a 的圆周 $|z| = a$, 则复位势为

$$w(z) = f(z) + \bar{f}\left(\frac{a^2}{z}\right) \quad (7.12.4)$$

证 因 $f(z)$ 的奇点全部位于圆外, 故 $f(a^2/z)$ 的奇点全部位于圆内. 于是 $w(z)$ 在圆外的奇点完全和 $f(z)$ 相同, $w(z)$ 是除原奇点外的解析函数, 且满足 $f(z)$ 的无穷远处边界条件. 现证圆 $|z|=a$ 是流线, 显然在圆周上有

$$a^2 = z\bar{z}$$

超星浏览器提醒您：
使用本复制机
请尊重相关知识的版权！
(7.12.5)

于是在 $|z|=a$ 上有

$$\varphi + i\psi = f(z) + \overline{f(z)} = f(z) + \overline{f(\bar{z})} = \text{实数}$$

即

$$\psi = 0$$

圆周 $|z|=a$ 是一流线, 定理证毕.

例 1 考虑圆柱的无环流绕流问题. 圆柱不存在时的均匀来流其复位势为 $V_\infty z$, 根据圆周定理, 圆周存在时的复位势为

$$w(z) = V_\infty z + V_\infty \frac{a^2}{z} \quad (7.12.6)$$

和(7.10.8)式完全相同. (7.12.6)式说明, 如果将均匀来流视为无穷远处的偶极子, 则为了使圆柱的表面变为流线, 还须在原点处放一偶极子.

例 2 设在 $z=z_0$ 点有一强度为 Γ 的点涡, 其复位势为

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0)$$

插入半径为 a 的圆周 $|z|=a$ 后, 其复位势应取

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln\left(\frac{a^2}{z} - z_0\right) \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln\left[\frac{z(z - z_0)}{a^2 - z\bar{z}_0}\right] \end{aligned}$$

说明为了使圆周保持为流线, 在 z_0 的映射点 a^2/\bar{z}_0 上应放置一强度为 $-\Gamma$ 的点涡, 在原点处应放置强度为 Γ 的点涡(图7.12.2). 应该指出,

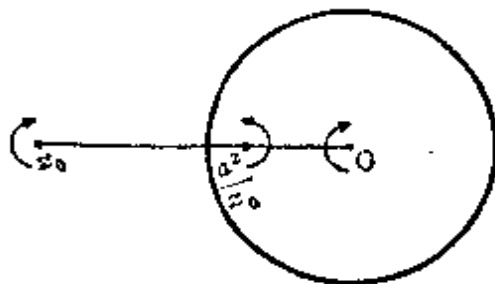


图 7.12.2

原点处的点涡可放可不放，并不破坏圆周是流线的要求。

7.13 机翼的几何参数及空气动力特性曲线

以下几节将研究机翼绕流问题。本节扼要地介绍一下机翼方面的名词作为准备知识。机翼的空气动力学特性决定于机翼的几何形状和几何参数。这些几何特性可归纳如下：

a) 机翼的剖面形状

翼剖面也叫翼型，它是指用平行于机翼对称面的平面去截机翼而得到的截面形状。翼剖面的几何形状对整个机翼的空气动力特性有很大的影响。

翼弦是连接翼型前后缘的直线段。通常后缘是一尖点，比较明确；关于前缘，习惯上有一些实际相差不大的不同说法：有的指翼型周线上离后缘最远的点，也有的定义为前端曲率半径最小的点。翼弦的长度通常用字母 c 表示。

翼型厚度是指剖面上下表面之间垂直于翼弦的直线段的长度，以 δ 表示。最大厚度就是其最大值 δ_{max} ，通常以它作为翼型

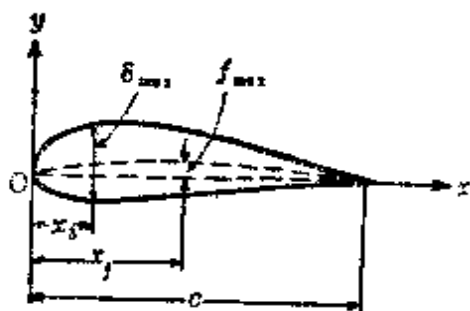


图7.13.1 翼型的几何特征

厚度的代表。最大厚度与翼弦之比 $\delta = \delta_{max}/c$ 称为相对厚度。翼型的最大厚度点离前缘的距离用 x_δ 表示，通常采用其相对值 $\bar{x}_\delta = x_\delta/c$ (图7.13.1)。

翼型的中线是翼弦上各垂直线段的中点的连线。中线到翼弦的距离 f 叫做翼型的弯度，其最大值 f_{max} 与翼弦之比 $\bar{f} = f_{max}/c$ 叫做



图7.13.2 S型翼型

最大相对弯度，简称相对弯度。翼弦上最大弯度点到前缘的距离用 x_f 表示。通常用其相对值 $\bar{x}_f = x_f/c$ 。有一些翼型，它的中线在靠近后缘部分具有负的弯度 (图7.13.2)，这样的翼型叫做S形翼型。取如图7.13.1所示

的直角坐标系,设上下剖面的方程分别是 $y=F_{\uparrow}(x)$ 及 $y=F_{\downarrow}(x)$,则

$$\delta = \frac{F_{\uparrow}(y) - F_{\downarrow}(x)}{2}, \quad f = \frac{F_{\uparrow}(x) + F_{\downarrow}(x)}{2} \quad (7.13.1)$$

近代飞机机翼上所用的翼型,其相对厚度与弯度都比较小,厚度约在10%左右,弯度约在3%以下.但在螺旋桨,各种涡轮机的叶片与导流装置中所用的翼型都有很大的相对厚度与相对弯度.

b) 机翼的平面形状

机翼的平面形状是指机翼的俯视正投影形状.按平面形状不同,机翼可分为矩形机翼,梯形机翼,椭圆机翼,后掠机翼等等(参看图7.13.3).最早的飞机曾广泛采用矩形机翼,因为它容易制造,但它的气动特性不好.椭圆机翼对于低速飞机来说具有最好的气动特性,但因制造复杂,未被广泛采用.在低速飞机上用得最多的是梯形机翼.随着飞机的速度接近并超过音速,为改善机翼在高速时的气动特性,近代飞机越来越广泛地采用后掠机翼与三角机翼.

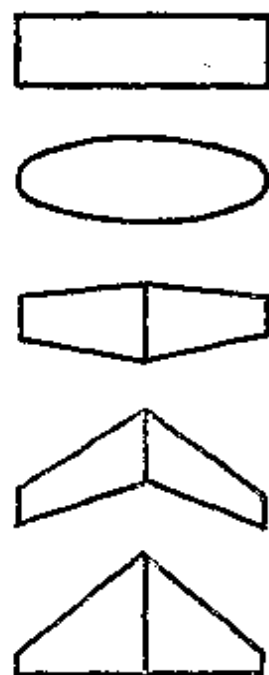


图7.13.3 各种不同机翼的平面形状

决定机翼平面形状的主要参数是:翼展、机翼面积、展弦比、根梢比和后掠角(参见图7.13.4).

翼展 它是机翼两 endpoint 之间的距离,通常用 b 表示;

机翼面积 它是机翼平面形状的面积,通常用 S 表示;

展弦比 它是指机翼的翼展与翼弦之比.但通常机翼沿翼展各剖面上的翼弦是变化的.我们可引进

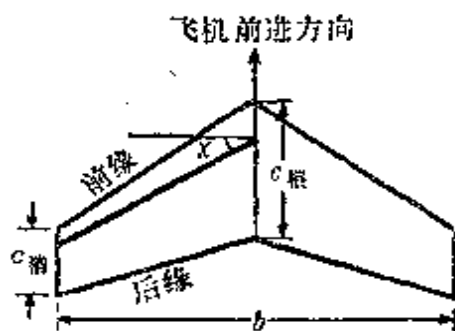


图7.13.4 机翼根梢比与后掠角

平均翼弦的概念，它是由下式定义的。

$$c_{\text{平均}} = \frac{S}{b}$$

于是机翼的展弦比可定义为翼展与平均翼弦之比，用 λ 表示

$$\lambda = \frac{b}{c_{\text{平均}}} = \frac{b^2}{S}$$

超星阅读器
使用本复制品
请尊重版权 (7.13.2)

展弦比 λ 是机翼平面形状中影响机翼气动特性的最重要的参数。一般在低速与远程飞机中都采用较大的展弦比，而在高速与短程使用的飞机中则采用较小的展弦比。

根梢比 它是翼根弦长 $c_{\text{根}}$ 与翼梢弦长 $c_{\text{梢}}$ 的比值，用 η 表示

$$\eta = \frac{c_{\text{根}}}{c_{\text{梢}}}$$

后掠角 它是离机翼前缘四分之一弦长处直线（该线称为机翼轴）与垂直于机翼对称平面的横向轴线之间的夹角，用 χ 表示。机翼轴向后的，此角取正值。在高速飞机上都采用较大的后掠角。在近代的某些飞机上，后掠角沿翼展可以有变化。或者可以在不同的飞行速度下采用不同的后掠角，后者称为可变翼飞机。

c) 机翼的前视形状

机翼的前视形状可用机翼的上反角 ψ 表示（见图7.13.5）。它是飞机的横向轴线与翼弦平面之间的夹角。对高速飞机来说，为了不致使横向稳定性过大，常采用负的上反角（即下反角）。

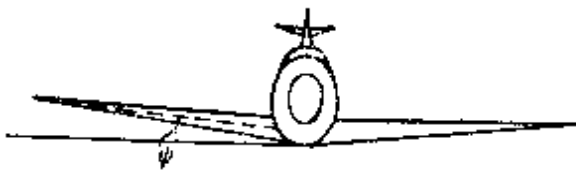


图7.13.5 机翼的上反角

机翼也有可能有所谓扭转，也就是沿翼展不同剖面上的翼弦不在同一平面内。

设机翼以速度 V_{∞} 在空气中运动。根据伽利略相对性原理，它相当于无穷远处的均匀来流绕机翼流动。在翼剖面平面上，来

流和翼弦的夹角 α 称为几何冲角，简称冲角（如图 7.13.6）。在翼剖面绕流问题中，由于下剖面压力较上剖面大，剖面将受到一个合力 R 。 R 在垂直来流方向的投影 R_y 称为举力，而在平行方向的投影 R_x 则称为阻力，此外合力 R 对某参考点而言将有力矩 M 。在空气动力学

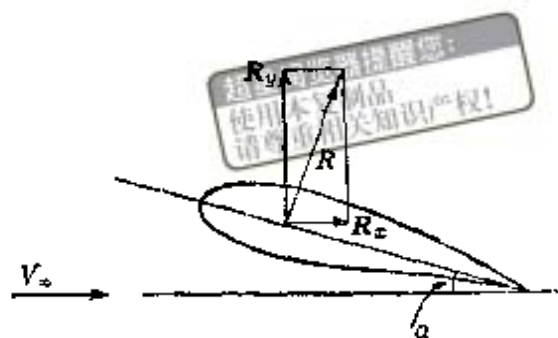


图 7.13.6

中常常引进无量纲的空气动力学系数：举力系数 C_y ，阻力系数 C_x 和力矩系数 C_m ，它们的定义分别是

$$\begin{cases} C_x = \frac{R_x}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \cdot c} \\ C_y = \frac{R_y}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \cdot c} \\ C_m = \frac{M}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \cdot c^2} \end{cases} \quad (7.13.3)$$

设整个机翼所受的举力、阻力、力矩记为 L, D, M ，则整个机翼的举力系数 C_L ，阻力系数 C_D ，力矩系数 C_M 分别定义为

$$\begin{cases} C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \cdot S} \\ C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \cdot S} \\ C_M = \frac{M}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \cdot S \cdot c} \end{cases} \quad (7.13.4)$$

飞机（或机翼）的空气动力特性，通常被表示成一些特性曲

线，其中较重要的有下列几种：

1) C_y 与 α 的关系曲线。它在实用范围内，基本上成一直线

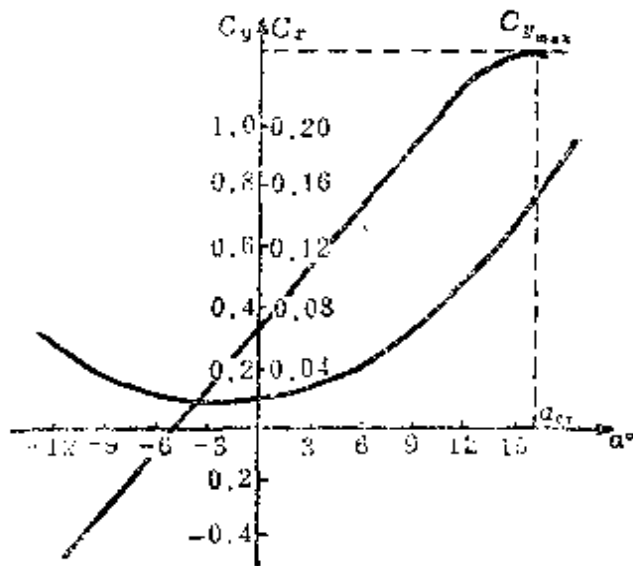


图 7.13.7

对一般的机翼这个角大约为十几度。这时的最大升力系数 $C_{y_{max}}$ 大约为 1.2—1.5。飞机的起飞与降落性能就与这个值有关。

2) C_x 与 α 的关系曲线，曲线形状有些与抛物线相近。一般

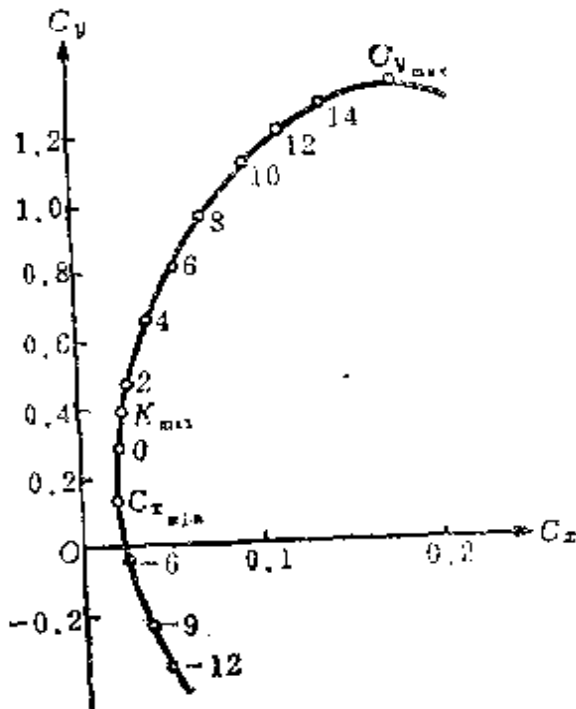


图 7.13.8

(图 7.13.7)。在较大攻角时，略向下弯曲。当攻角增大到某个 α_c 时， C_y 达到其最大值 $C_{y_{max}}$ ，尔后则突然下降。飞机如在飞行时遇到这种情况，将有坠毁的危险，这一现象称为失速。它与机翼上表面的气流在前缘附近发生脱体（或称分离）的现象有关。

攻角 α_c 称为临界攻角。

在某一个不大的负攻角时，取其最小值 $C_{x_{min}}$ 。飞机以此攻角飞行，可以达到最大的平飞速度。随着攻角的增加，阻力增加得很快，在达到临界攻角以后，更加如此。

3) C_y 与 C_x 的关系曲线，亦称极曲线。以 C_x 为横坐标， C_y 为纵坐标，对应于每一个攻角 α ，有一对 C_x 、 C_y 值，在图 7.13.8 上可描一点，并在其旁标上相应的攻角，连接所有各点即成极曲线。这一条曲线就

包括了上面两条曲线的全部内容。因升力与阻力本是作用于飞机（或机翼）的合力在直角坐标系的 x 轴和 y 轴上的两个分量。所以从原点 O 到曲线上任一点的矢径就表示了在该对应攻角下的总气动力系数的大小和方向。该矢径线的斜率，就是在该攻角下的升力与阻力之比， $K = C_y/C_x$ ，简称升阻比，又称气动力效率。过

原点作极曲线的切线，就得飞机（或机翼）的最大升阻比。显然这是飞机最有利的飞行状态。由于 C_x 的数值远小于 C_y ，因此常将 C_x 的尺度放大五倍或十倍。由于从极曲线可以得到飞机的许多性能，在使用上特别方便，所以这种画图方法被广泛地采用。

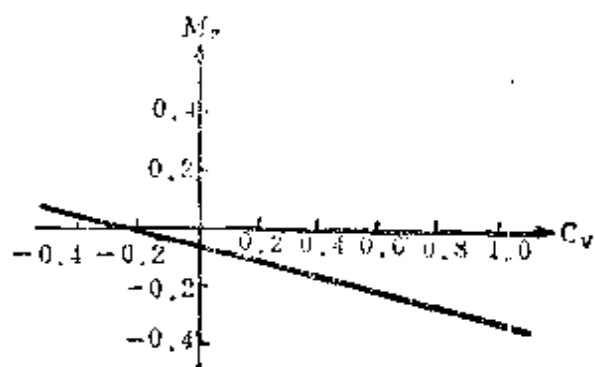


图 7.13.9

4) M_x 对 C_y 的关系曲线。从图 7.13.9 中可以看出，在未失速的范围内，基本上是一直线。根据此曲线可以决定压力中心（即合力作用线与翼弦交线的位置），它们与飞机飞行的稳定性密切相关。

7.14 保角映射方法。任意物体绕流问题。复位势的一般表达式。环量的确定

考虑任意物体 C 的不脱体绕流问题，其数学提法如下：

要求 C 外区域 D 内的解析函数 $w(z)$ ，它在 $D+C$ 上连续且满足

(1) 在 C 上 $\text{Im } w(z) = \psi = \text{常数}$;

(2) 在无穷远处 $\frac{dw}{dz} = V_\infty$ 。

现在我们采用保角映射方法来解决这个问题。保角映射方法的基

本思想可简述如下：将剖面 C 借助于解析函数变换到圆 K 上去， C 外区域对应于圆 K 外区域(图7.14.1)。由于圆柱体绕流问题的解是知道的，于是任意物体绕流问题的解也就可以求出来。上述基本思想在下述定理中得到了既具体又确切的表达。

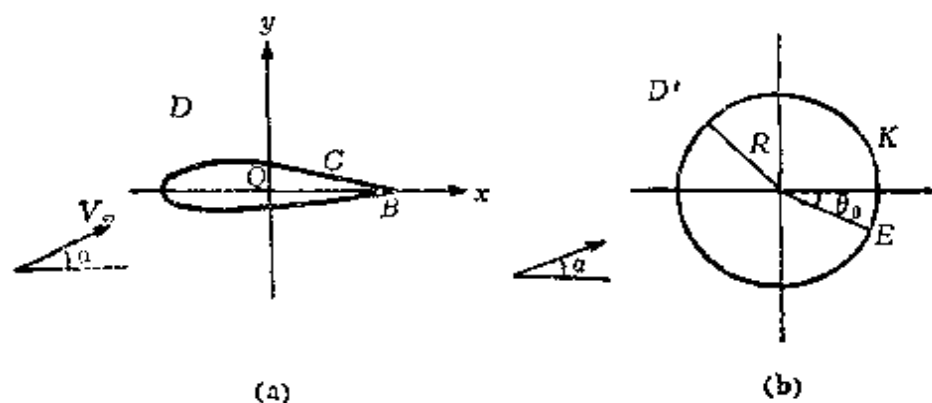


图 7.14.1

设 $z = f(\xi)$ ($\xi = F(z)$ 是它的反函数) 是一个单值的解析函数，它将半径为 R 的圆 K 外的区域互为单值且保角地映射到任意剖面 C 外区域上去，并且满足

(1) ∞ 点对应 ∞ 点；

(2) $\left(\frac{dz}{d\xi}\right)_{\infty} = k$ ， k 是一个正的实数（根据黎曼定理这样的函数是存在且唯一的）。

由于无穷远处速度为 kV_{∞} 的圆柱绕流问题的解是

$$W(\xi) = kV_{\infty}\xi + \frac{kV_{\infty}R^2}{\xi} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \xi$$

则

$$w(z) = kV_{\infty}F(z) + \frac{kV_{\infty}R^2}{F(z)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln F(z) \quad (7.14.1)$$

是无穷远处来流速度为 V_{∞} 的任意剖面绕流问题的复位势。

现在我们就来证明这个定理。要证明(7.14.1)式是来流速度为 V_{∞} 的任意剖面绕流问题的解也就是要验证：(1) $w(z)$ 是

$D+C$ 上连续, D 内解析的函数; (2) $w(z)$ 的虚数部分 ψ 在 C 上取常数值; (3) 在无穷远处 $dw/dz = V_\infty$. 现分别证明之.

(1) 因为 $W(\xi)$ 是在 $K+D'$ 上连续且在 D' 内解析的函数, $\xi = F(z)$ 是在 $C+D$ 上连续且在 D 内解析的函数, 于是根据复合函数的性质 $w(z) = W(F(z))$ 仍是在 $C+D$ 上连续, D 内解析的函数.

(2) 由 $w(z) = W(F(z))$ 推出在 ξ 平面和 z 平面的对应点上有

$$\varphi = \Phi, \quad \psi = \Psi$$

$\varphi, \psi, \Phi, \Psi$ 分别是 w 与 W 的实数部分速度势函数及虚数部分流函数.

在 K 上 $\Psi = \text{常数}$, 于是在 K 的对应曲线, 即 C 上有

$$\psi = \text{常数}$$

(3) 将 $w(z)$ 看作是 $W(\xi)$ 及 $\xi = F(z)$ 的复合函数, 对 z 微分得

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dW}{d\xi} \frac{d\xi}{dz}$$

特别地在无穷远处有

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_\infty = \left(\frac{dW}{d\xi}\right)_\infty \left(\frac{d\xi}{dz}\right)_\infty$$

考虑到 $\left(\frac{dW}{d\xi}\right)_\infty = kV_\infty$, $\left(\frac{d\xi}{dz}\right)_\infty = k$. 我们有

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_\infty = V_\infty$$

定理证毕.

根据这个定理可知, 任意剖面 C 的不脱体绕流问题归结为寻求任意剖面 C 外区域和圆外区域的保角映射函数的问题. 只要求出这个函数, 代入(7.14.1)式立即求得复位势 $w(z)$. 函数 $z = f(\xi)$ 在理论上说来是存在且唯一的, 但实际上在任意剖面或

浏览器提醒您：
请支持正版软件！

剖面较复杂的情况下具体地将它找出来即是一件困难的事情。

这样看来，似乎任意剖面绕流问题原则上说来已经解决了，其实不然，原来在(7.14.1)式的第三项中包含有环量 Γ ，它是圆柱绕流问题中的速度环量，也是剖面绕流问题的速度环量（因为

$$\Gamma = \int_K d\varphi = \int_K dW = \int_C dw = \int_C d\varphi = \Gamma'），这是一个不确定的量。$$

我们无法在理想流体理论的范畴内将其确定出来，于是产生了一个问题，就是究竟应该怎样来确定绕翼型的速度环量值 Γ 呢？存在着两种克服困难的方法，一种方法是抛弃理想流体近似，采用真实流体模型；另一种方法是在理想流体近似范围内补充一个合理的经验假设，根据这个附加的补充条件将环量 Γ 唯一地确定出来。由于粘性流体运动的复杂性，第一种方法不是上策，还是采用第二种方法为好。为了能够正确地提出切合实际的经验假设应该分析不同环量下翼剖面的绕流图案，然后与观察到的实验事实进行比较确定哪一种绕流图案是客观存在的，由此提炼出确定 Γ 的补充条件。

考虑具有尖后缘翼型的绕流问题，正如我们在理想流体绕圆柱

流动的分析中所看到的，对于给定的圆柱与来流，理论上可以存在各种不同的速度环量值，而且不同的速度环量对应于流场中不同的驻点位置。这对于在航空上通常采用的带有尖锐后缘的翼型来说，情况也是完全类同的。对于给定的来流与翼型，在理想流体范围内，理论上也可以存在三类不同的速度环量值，分别对应后驻点在上表面、尖后缘与下表面三种不同的绕流图案（图7.14.2中的(a)，(b)，(c)）。(a)和(c)两种情形后缘附

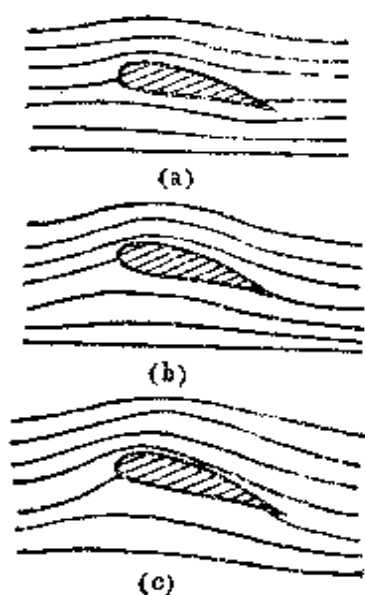


图 7.14.2

近的流体将从翼型表面的一边绕过尖端流到另一边去，出现了大于 π 角的绕流。这时在尖端将形成无穷大的速度与无穷大的负压（这在物理上当然是不可能的）。只有在(b)情形中，流体将从上下二边顺着翼型表面平滑地流过尖端。在此尖端上，速度是有限的。以上三种绕流图案，实际上存在的究竟是哪一种呢？实验观察发现，当冲角不太大时翼型绕流问题中的流线确实是平滑地顺翼型上、下表面从后缘流出，后缘点的速度是有限的。也就是说在(a),(b)与(c)三种流型中只有(b)是实际存在的。据此，1909年茹柯夫斯基(ЖУКОВСКИЙ)首先提出确定环量的补充条件，即后缘角点处的速度应有限的茹柯夫斯基假设。此假设在数学上可表成

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z_B} = \text{常数} \quad (7.14.2)$$

其中 z_B 是后缘点的坐标。

根据这个重要假设就可以确定环量 Γ 的具体数值。

设角点 B 在 ζ 平面上对应的是圆上幅角为 θ_0 的点 E 。如果 $z=f(\zeta)$ 已知，则 θ_0 是一个已知的量。显然解析函数 $z=f(\zeta)$ 在 E 点的保角性被破坏了，因为 E 点上夹角为 π 的曲线变到了 B 点上夹角为 $2\pi-\tau$ 的曲线(τ 是翼型在尖后缘的夹角)，于是在 E 点上必须满足

$$\left(\frac{dz}{d\zeta}\right)_{\zeta_E} = 0 \quad (7.14.3)$$

此外 E 点的速度和 B 点的速度存在着下列关系

$$\left(\frac{dW}{d\zeta}\right)_{\zeta_E} = \left(\frac{dw}{dz}\right)_{z_B} \left(\frac{dz}{d\zeta}\right)_{\zeta_E}$$

考虑到(7.14.2)式和(7.14.3)式我们有

$$\left(\frac{dW}{d\zeta}\right)_{\zeta_E} = 0 \quad (7.14.4)$$



也就是说 ζ 平面上 E 点是一个驻点，根据圆柱有环量绕流问题中驻点位置和 Γ 的关系式(7.11.5)，知道了驻点的位置就可以将 Γ 唯一的确定出来，驻点位置与 Γ 的关系是

$$\sin(\alpha - \theta_0) = -\frac{\Gamma}{4\pi Rk|V_\infty|}$$

注意现在来流的大小为 $k|V_\infty|$ ，驻点相对来流的幅角为 $\alpha - \theta_0$ ，于是 Γ 的数值为

$$\Gamma = -4\pi Rk|V_\infty| \sin(\alpha - \theta_0) \quad (7.14.5)$$

式中的 k, θ_0 ，当 $z = f(\zeta)$ 求出后全是已知的量。

Γ 确定后， $w(z)$ 便完全确定了，于是原则上说来具有后缘角点的任意翼型的绕流问题就归结为寻求保角映射函数 $z = f(\zeta)$ 的问题了。

若物体不具有角点则 Γ 的值须用实验测得或事先给定，而不能从理论上求出。

虽然茹柯夫斯基假设是根据实验事实提出来的合理推断，但是它并不能解释以下的疑问：既然翼型都是从静止状态起动而后达到定常状态，根据理想不可压缩重流体涡旋的守恒性，翼型引起的流体运动中速度环量应和静止流体一样处处为零，那么为什么根据茹柯夫斯基假设计算出来的速度环量是一个不等于零的有限值(7.14.5)呢？这不是和涡旋守恒定理矛盾了吗？这个矛盾该怎样解释呢？其次，茹柯夫斯基假设只是如实地反映了客观存在的事实，但是它并没有讲清楚为什么实际上存在的绕流图案总是(b)而不会是别的，所有这些问题的解决都有待于我们对环量产生的本质进行更深入的研究。在机翼理论发展的初期，由于人们对粘性流体的运动规律了解得很少，只能满足于把茹柯夫斯基假设看作一个经验规律。随着近代边界层理论的迅速发展，我们已经搞清楚环量产生的机制并能回答上述看来似乎互相矛盾的疑问。

当翼型在流体中开始起动的最初一瞬间，流体运动到处是无

旋的，因为贴近物体的边界层还来不及生成，绕翼型的环量为零，此时后驻点不在角点而在剖面上，例如上剖面上，对应的流动图案如图7.14.2(a)所示，在角点附近流体从下表面绕过尖角到上表面去，形成大于 π 角的流动，那里速度无穷大，压力负无穷大。

于是上表面角点处存在很大的逆压梯度，边界层承受不住这么大的逆压梯度，几乎立刻从后缘分离形成切向速度间断面，在后驻点急剧减速的作用下卷成一个涡旋（图7.14.3），这个涡旋通常称为起动涡。



图 7.14.3

这种在尖角边缘产生涡旋的现象是在日常的生产与生活中所常见的，例如，在房屋墙角后面常见的旋风；划船时，在船桨后面产生的旋涡等等。

观察表明，如果翼型在起动过程中产生了一个涡旋，也就是使一部分流体发生了旋转，那末，在这同时在流体的另一部分引起了反方向的转动，其大小相等，而方向相反。这个反方向的转动就以围绕翼型的环流的形式出现。

这个观察事实可理论上论证如下。

在静止时随意画一包围翼型的封闭物质回线（见图7.14.4），显然这时绕此回线的速度环量为零。翼型开始运动后，此回线随流体质点一起

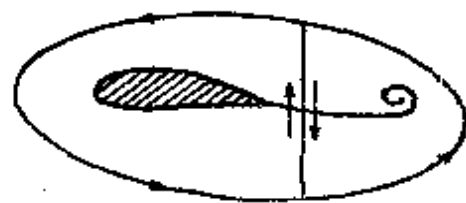


图 7.14.4

移动，而且总是同时将翼型和起动涡包在其中，此时可将绕此回线的环量看作是一个绕翼型的环量与一个绕起动涡的环量之和。

由于绕此封闭回线的速度环量总保持为零，因此绕翼型的环量总是与起动涡大小相等，符号相反。至此我们论证了随着起动涡的出现必将伴随着反向的绕翼型的速度环量，而且起动涡的强度愈大，速度环量也就愈大。这个绕翼型的反向环流将增加上表面的气流速度，结果使后驻点的位置向后推移。由于开始时起动涡很

小，速度环量也很小，后驻点只后移了不大的距离，因此后缘处仍然是大于 π 角的流动，流动继续分离，起动涡越变越大，强度不断增加，绕翼型的环量也在不断增长，后驻点位置不断后移，一直到后驻点移至角点处，机翼上下两边的气流在后缘平滑地相遇时才不产生绕大于 π 角流动，亦不再增加起动涡的强度，驻点的位置也不再移动，绕翼剖面的环量达到了它的最大值。这时出现了如图 7.14.2(b) 所示的绕流图案，在后缘点的速度是有限的，随着时间的推移，起动涡被气流冲到下流很远的地方，并逐渐被粘性耗散掉它的全部能量，而只留下绕翼型的环量一个定值，这时流体内部仍然可以近似地看作是无旋运动。

明白了粘性和角点是产生起动涡和速度环量的主要因素，以及绕流图案从(a)演变到(b)的全过程就不难解释环量的存在与涡旋守恒定理之间的矛盾了。涡旋守恒性是在理想不可压缩重流体时成立的，翼型起动后，由于粘性的作用破坏了涡旋守恒性产生了起动涡及速度环量，一直到形成绕流图案(b)后为止。由此可见囿于理想流体的范畴内考虑问题就有矛盾，考虑了粘性的作用就不矛盾了。



图 7.14.5

根据(7.14.5)式环量的数值正比于来流的速度，这是因为角点处速度有限是由纯环量和无环绕流两部分的贡献加起来得到的，当速度

值改变时必然会从机翼处脱落下涡旋来。图 7.14.5 清楚地显示了翼型从静止起动到突然停止期间所产生的“起动涡”和“停止涡”，两个涡旋大小相等方向相反。如果此后翼型继续保持静止，则这两个涡旋将沿着涡旋联线的垂直方向向前运动。

求出 $w(z)$ 后，可计算共轭复速度，特别地可求出物体表面上的速度分布，根据伯努利定理物体表面上的压力分布也就可以得到。下节我们根据 (7.14.1) 及 (7.14.5) 求作用在物体上的合力及合力矩等空气动力学方面的物理量。

7.15 举力和力矩公式. 茹柯夫斯基定理

现在我们来推导任意物体不脱体绕流问题中周围流体作用在物体上的合力与合力矩. 有了合力及合力矩, 就可以推出压力中心.

a) 恰普雷金公式

作用在物体上的合力及合力矩一般说来是这样求的, 先求出物体表面上的速度分布, 而后根据伯努利定理求出物体表面的压力分布, 将压力矢量对物体剖面积分即得作用在物体上的合力; 将压力矢量对坐标原点的矩沿物体剖面积分则得作用在物体上的合力矩. 在理想不可压缩平面无旋绕流问题中, 因为存在着复位势, 它是解析函数, 所以求合力和合力矩的积分公式化为解析函数的封闭回线积分公式, 这样的积分是恰普雷金 (Чаплыгин) 首先导出的, 所以称为恰普雷金公式. 现在我们就来推导它.

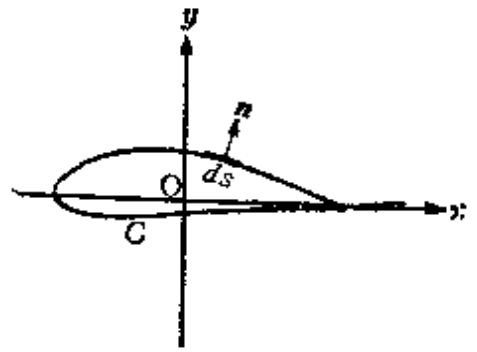


图 7.15.1

设物体的边线是 C , 它的外法线单位矢量是 n , 边线的弧元素是 ds (见图 7.15.1), 则作用在 C 上的合力是

$$R = - \oint_C p n ds$$

它在 x, y 两个方向上的分量 R_x, R_y 为

$$\begin{cases} R_x = - \oint_C p \cos(n, x) ds = - \oint_C p dy \\ R_y = - \oint_C p \cos(n, y) ds = \oint_C p dx \end{cases} \quad (7.15.1)$$

这里用到了关系式 (7.6.13). 引进复合力 $\mathcal{R} = R_x + iR_y$, 由 (7.15.1) 推出

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{R}} &= R_x - iR_y \\ &= -\oint_C p(dy + idx) = -i\oint_C p d\bar{z}\end{aligned}\quad (7.15.2)$$

根据伯努利定理, 压力可以通过速度表示出来

$$p = C' - \frac{\rho|V|^2}{2} = C' - \frac{\rho}{2} \left(\frac{dw}{dz}\right) \overline{\left(\frac{dw}{dz}\right)} \quad (7.15.3)$$

其中 C' 是伯努利常数. 将上式代入(7.15.2)式, 并考虑到

$$\oint_C dz = 0$$

得

$$\overline{\mathcal{R}} = \frac{i\rho}{2} \oint_C \frac{dw}{dz} \overline{\frac{dw}{dz}} d\bar{z} \quad (7.15.4)$$

在 C 上流体质点的速度方向是和剖面切线方向重合的, 即 $\left(\frac{dw}{dz}\right)_C$

的幅角和 $(dz)_C$ 的幅角相同, 于是 $\left(\frac{dw}{dz} \overline{dz}\right)_C$ 是实数, 在 C 上关系式

$$\overline{\frac{dw}{dz}} dz = \frac{dw}{dz} dz \quad (7.15.5)$$

成立, 将之代入(7.15.4)得

$$\overline{\mathcal{R}} = \frac{i\rho}{2} \oint_C \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz \quad (7.15.6)$$

这就是合力公式. 现在我们来求合力矩公式, 合力矩是

$$L = -\oint_C p(r \times n) ds$$

其大小为

$$L = -\oint_C p[x \cos(n, y) - y \cos(n, x)] ds$$

超星阅读器水印
使用本复制品
请尊重相关知识产权!

$$= \oint_C p(xdx + ydy) = \operatorname{Re} \left(\oint_C p z dz \right)$$

将(7.15.3)式代入得

$$L = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \left(\oint_C \frac{dw}{dz} \overline{\frac{dw}{dz}} z d\bar{z} \right)$$

考虑到(7.15.5)式有

$$L = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \left[\oint_C \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 z dz \right] \quad (7.15.7)$$

这就是合力矩公式。(7.15.6)与(7.15.7)合起来称为恰普雷金公式。

若 C 外被积函数是解析函数，则积分曲线 C 可改为 C 外任一封闭回线。

恰普雷金公式的优点在于，知道了复位势 $w(z)$ 后，我们只须求函数 $(dw/dz)^2$ 及 $z(dw/dz)^2$ 沿 C 的回线积分，即求它们的残数便可按公式(7.15.6)与(7.15.7)求出合力及合力矩，而无须按一般的办法求 $|V|^2$ 沿 C 的积分。大家知道，求残数的问题要比求普通积分，特别是被积函数十分复杂的积分要方便得多。由于恰普雷金将求合力及合力矩的问题化为复变函数中求残数的问题，因而在计算方面得到很大的简化，所以在理想不可压缩平面无旋运动中我们通常采用(7.15.6)与(7.15.7)式计算合力及合力矩。

b) 举力公式，茹柯夫斯基定理

现在我们利用(7.15.6)式来推导举力公式。

设 G 是 C 外圆心在原点的圆， dw/dz 在 G 外可展成下列罗朗级数

$$\frac{dw}{dz} = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (7.15.8)$$

级数中正幂次项不存在，这是因为 dw/dz 在无穷远处取常数值缘故。由于

超星浏览器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{\infty} = V_{\infty}$$

故

$$a_0 = V_{\infty}$$

而

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dw}{dz} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\varphi + id\psi = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi i} \end{aligned}$$

这里我们利用了沿 C , $\psi = \text{常数}$ 的事实。考虑到 a_0, a_1 的表达式, (7.15.8) 式可改写为

$$\frac{dw}{dz} = V_{\infty} + \frac{\Gamma}{2\pi iz} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (7.15.9)$$

将(7.15.9)代入(7.15.6)式, 并计算残数得

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{R}} &= \frac{i\rho}{2} \oint_C \left(V_{\infty} + \frac{\Gamma}{2\pi iz} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \right)^2 dz \\ &= \frac{i\rho}{2} 2\pi i \cdot \frac{\Gamma V_{\infty}}{\pi i} = i\rho \Gamma V_{\infty} \end{aligned}$$

取其共轭值得

$$\mathcal{R} = -i\rho \Gamma V_{\infty} \quad (7.15.10)$$

这就是举力公式, 它是由茹柯夫斯基首先发现的, 称为茹柯夫斯基定理。现分析这个结果, 为此先将(7.15.10)写成下列形式

$$\mathcal{R} = \rho |\Gamma| |V_{\infty}| e^{i(\alpha \mp \frac{\pi}{2})} \quad (7.15.11)$$

其中 $|\Gamma|, |V_{\infty}|$ 分别是 Γ 及 V_{∞} 的大小, \mp 对应的是 $\pm |\Gamma|$ 。由此我们看到

(1) 合力的大小是

$$P = \rho |\Gamma| |V_{\infty}|$$

它与流体的密度、来流速度的大小以及环量的大小成正比。

(2) 合力的方向与来流的方向垂直。当 $\Gamma > 0$ 时由来流方向向右方旋转 90° ；当 $\Gamma < 0$ 时，由来流方向向左方旋转 90° （见图 7.15.2）。总之是逆着 Γ 的方向旋转 90° 即得合力的方向。因为合力是和来流方向垂直的，因此我们得到的只是升力，而阻力是等于零的，这就是著名的达朗贝尔佯谬。它告诉我们理想不可压缩流体绕任意剖面的不脱体绕流问题中的物体不遭到任何的阻力，这当然和实际情形不符合的，产生这样佯谬的根本原因是我们没有考虑粘性的作用。由此可见，理想流体绕任意剖面不脱体绕流的模型不能给出与实际符合的阻力结果。因

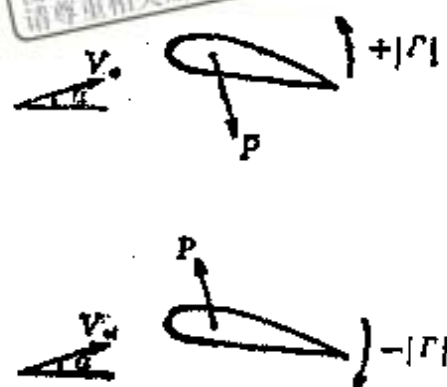


图 7.15.2

$$\Gamma = 4\pi kR |V_\infty| \sin(\theta_0 - \alpha)$$

故

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{R}} &= 4\pi\rho kR |V_\infty|^2 i e^{-i\alpha} \sin(\theta_0 - \alpha) \\ &= 2\pi\rho kR |V_\infty|^2 (e^{i(\theta_0 - 2\alpha)} - e^{-i\theta_0}) \\ P &= 4\pi\rho kR |V_\infty|^2 \sin(\alpha - \theta_0) \end{aligned} \quad (7.15.12)$$

当来流方向与 θ_0 的方向重合时，即 $\alpha = \theta_0$ 时 $P = 0$ ， θ_0 方向称为零举力线。

c) 合力矩公式

现在我们利用(7.15.7)式求合力矩公式。将(7.15.9)式代入(7.15.7)，并计算残数值得

$$\begin{aligned} L &= \operatorname{Re} \left[-\frac{\rho}{2} \oint_c \left(V_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi iz} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \right)^2 z dz \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[-\frac{\rho}{2} \cdot 2\pi i \left(-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + 2V_\infty a_2 \right) \right] \\ &= \operatorname{Re}(-2\pi\rho i V_\infty a_2) = -2\pi\rho \operatorname{Re}(i V_\infty a_2) \end{aligned} \quad (7.15.13)$$

这样，知道了复速度 dw/dz 的罗朗级数中 $1/z^2$ 项的系数 a_2 后，

按(7.15.13)式即可求出合力矩的大小。

按照任意剖面连续绕流问题的一般理论，绕流问题归结于求圆外区域和任意剖面外区域保角映射函数 $z=f(\zeta)$ 的问题，考虑到 ∞ 对应于 ∞ ，且

$$\left(\frac{dz}{d\zeta}\right)_{\infty} = k$$

k 是一正的实数，于是 $z=f(\zeta)$ 可展成

$$z = k\zeta + k_0 + \frac{k_1}{\zeta} + \frac{k_2}{\zeta^2} + \dots \quad (7.15.14)$$

我们很希望合力矩公式能通过 $z=f(\zeta)$ 的展开式中的系数表达出来，因此我们将由(7.15.13)出发，将 a_2 用(7.15.14)式的系数及流动参数等表示出来，显然

$$a_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left(\frac{dw}{dz}\right) z dz$$

亦可转到圆的平面 ζ 上去，将上式改写为

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_K \left(\frac{dw}{d\zeta}\right) \left(\frac{d\zeta}{dz}\right) \frac{dz}{d\zeta} z d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{dw}{d\zeta} z d\zeta \quad (K \text{ 是圆的边线}) \end{aligned}$$

考虑到(7.15.14)式及

$$\frac{dw}{d\zeta} = kV_{\infty} - \frac{kV_{\infty}R^2}{\zeta^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{\zeta}$$

我们有

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{K-} \left[\left(kV_{\infty} - \frac{kV_{\infty}R^2}{\zeta^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{\zeta} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(k\zeta + k_0 + \frac{k_1}{\zeta} + \frac{k_2}{\zeta^2} + \dots \right) d\zeta \right] \end{aligned}$$

$$= -k^2 V_\infty R^2 + \frac{\Gamma k_0}{2\pi i} + k k_1 V_\infty$$

扫描器扫描您：
使用本复制品
请尊重相关知识版权！

将之代入(7.15.13)式得

$$L = -2\pi\rho \operatorname{Re} \left[-iV_\infty V_\infty k^2 R^2 + \frac{\Gamma k_0 V_\infty}{2\pi} + i k k_1 V_\infty^2 \right]$$

$$L = \operatorname{Re} [-2\pi i \rho k k_1 V_\infty^2 - \rho \Gamma k_0 V_\infty] \quad (7.15.15)$$

因为 V_∞, k, R 皆为实数, 故

$$\operatorname{Re} [-iV_\infty V_\infty k^2 R^2] = 0$$

将 Γ 的表达式 $\Gamma = 4\pi k R |V_\infty| \sin(\theta_0 - \alpha)$ 代入(7.15.15)式得

$$\begin{aligned} L &= \operatorname{Re} \left[-2\pi i \rho k k_1 |V_\infty|^2 e^{-2i\alpha} \right. \\ &\quad \left. - 4\pi \rho k k_0 R |V_\infty|^2 e^{-i\alpha} \frac{e^{i(\theta_0 - \alpha)} - e^{-i(\theta_0 - \alpha)}}{2i} \right] \\ &= \operatorname{Re} \{ -2\pi \rho k |V_\infty|^2 [i(k_1 - R k_0 e^{i\theta_0}) e^{-2i\alpha} + i k_0 R e^{-i\theta_0}] \} \end{aligned} \quad (7.15.16)$$

从(7.15.12)及(7.5.16)式可看出合力及合力矩只决定于(7.15.14)展开式中的前三项系数, 即 k, k_0 及 k_1 , 而与 $k_n (n \geq 2)$ 无关。

7.16 椭圆和平板的绕流问题

本节以椭圆及平板的绕流问题作为应用保角映射方法解决不脱体绕流问题的例子。

a) 椭圆绕流问题

给定一中心在坐标原点, 长短轴分别为 a 和 b 的椭圆(图7.16.1)。有一无穷远处速度大小为 $|V_\infty|$, 方向为 α 的来流定常地向椭圆流来, 求该椭圆绕流问题的解。

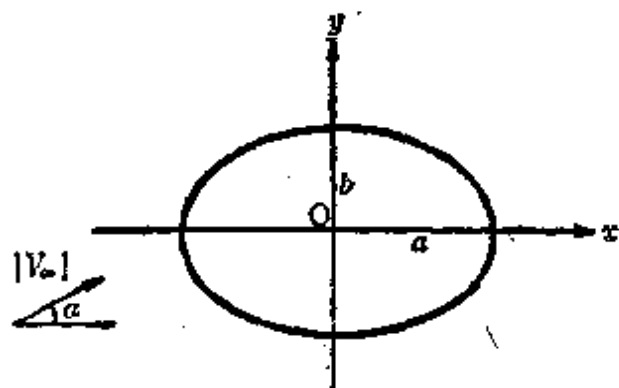


图 7.16.1

根据保角映射方法一般理论，本问题归结于寻找一个将椭圆外部区域保角地映射到圆外区域上去的解析函数的问题。为此我们首先考虑下列解析函数

$$z = \frac{1}{2} \left(\xi + \frac{c^2}{\xi} \right) \quad (7.16.1)$$

其中 c 是实常数，其逆函数为

$$\xi = z \pm \sqrt{z^2 - c^2} \quad (7.16.2)$$

我们研究函数(7.16.1)的几个性质。

1) ξ 平面上圆心在原点，半径为 c 的圆 C 通过变换(7.16.1)变到 z 平面的割线段 $(-c, c)$ 上。

设圆 C 的方程为

$$\xi = ce^{i\theta}$$

代入(7.16.1)式得

$$z = \frac{1}{2} (ce^{i\theta} + ce^{-i\theta}) = c \cos \theta$$

这就是 z 平面上对应曲线的方程。当 A 沿圆弧在 ξ 的上半平面移动时，即 θ 由 0 变到 π ，此时 z 由 $F(c, 0)$ 变到 $F'(-c, 0)$ ，当 A' 继续沿圆弧在 ξ 的下半平面移动时， θ 由 π 变至 2π ，此时 z 由 $F'(-c, 0)$ 变回至 $F(c, 0)$ ，这就是说当我们沿圆周绕行一周时在 z 平面上已绕线段 $(-c, c)$ 来回了一次。由此可见与圆 C 对应的是割线段 FF' ，圆 C 称为基本圆（参看图7.16.2及7.16.3）。

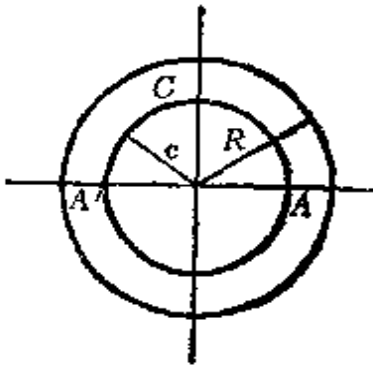


图 7.16.2

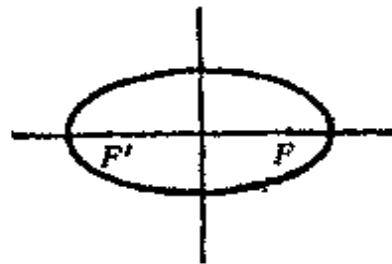


图 7.16.3

2) 基本圆外点 $\zeta (|\zeta| > c)$ 和基本圆内的点 $\zeta' = \frac{c^2}{\zeta} (|\zeta'| < c)$

在 z 平面上对应于同一点 z .

设 ζ 对应于 z 点, z 与 ζ 的关系是

$$z = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{c^2}{\zeta} \right)$$

现令 $\zeta = \zeta'$, 则

$$z' = \frac{1}{2} \left(\zeta' + \frac{c^2}{\zeta'} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{c^2}{\zeta} + \zeta \right) = z$$

即得证明. 由此可见, 基本圆内区域和基本圆外区域对应于 z 平面上同一区域.

3) 基本圆 C 外, 中心在坐标原点的共心圆族变到以 F, F' 为焦点的椭圆族上.

设圆 K 在基本圆外, 它的半径为 R , 则圆 K 的方程为 $\zeta = Re^{i\theta}$. 将之代入(7.16.1)式得

$$z = \frac{1}{2} \left(Re^{i\theta} + \frac{c^2}{R} e^{-i\theta} \right)$$

分别写出实部和虚部有

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \left(R + \frac{c^2}{R} \right) \cos \theta \\ y = \frac{1}{2} \left(R - \frac{c^2}{R} \right) \sin \theta \end{cases}$$

这就是 z 平面上对应曲线的方程, 显然它是椭圆的参数方程, 长短轴 a 及 b 分别为

$$a = \frac{1}{2} \left(R + \frac{c^2}{R} \right), \quad b = \frac{1}{2} \left(R - \frac{c^2}{R} \right) \quad (7.16.3)$$

由此得

$$R = a + b \quad (7.16.4)$$

将(7.16.3)中两式平方相减得

$$a^2 - b^2 = c^2$$

这表明(7.16.1)式中的常数 c 就是椭圆的焦距, 于是割线段的两个端点 F, F' 就是椭圆的焦点. 这就证明了 ζ 平面上基本圆外的圆 (中心在原点, 半径为 R) 经过变换 (7.16.1) 变到以 F, F' 为焦点, 长短轴由(7.16.3)式确定的椭圆上; 反之, 以 a, b 为长短轴, 中心在原点的椭圆经过变换(7.16.2)后变到半径为 R 的圆上. 此外我们看到 R 愈大, a 及 b 也愈大, 由此可见基本圆外整个区域是和割线 FF' 外整个区域对应的.

从上面的讨论我们作出如下的结论: 函数(7.16.1)是单值双叶函数, 它将基本圆 C 外及 C 内的区域都变换到割线 FF' 外的全平面上, z 平面上二个黎曼曲面在割线 FF' 上粘合, 而且, 若是圆外区域与 z 平面割去 FF' 的全平面对应, 则(7.16.2)式应取“+”号, 即

$$\zeta = z + \sqrt{z^2 - c^2} \quad (7.16.5)$$

若是基本圆内区域与 z 平面上割去 FF' 的全平面对应, 则(7.16.2)式应取“-”号, 即

$$\zeta = z - \sqrt{z^2 - c^2} = \frac{c^2}{z + \sqrt{z^2 - c^2}}$$

(当 $z \rightarrow \infty$ 时, $\zeta = 0$)

通过上面的分析我们不难看到, 要将长短轴为 a, b , 圆心在原点的椭圆变到圆外区域中去, 变换函数应取为

$$z = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{c^2}{\zeta} \right) \quad (7.16.6)$$

其中常数 c 满足 $c^2 = a^2 - b^2$ 的关系, 且对应圆的半径应取成

$$R = a + b \quad (7.16.7)$$

(7.16.1)的逆函数为

$$\zeta = F(z) = z + \sqrt{z^2 - c^2} \quad (7.16.8)$$

于是根据(7.16.1)得

$$k = \frac{1}{2}, \quad k_0 = 0, \quad k_1 = \frac{c^2}{2} \quad (7.16.9)$$

找到了保角映射函数(7.16.1)及对应圆的半径(7.16.4)后, 我们可以根据保角映射方法的一般理论将椭圆绕流问题的结果全部求出.

1) 复位势

$$w(z) = kV_{\infty}F(z) + \frac{kV_{\infty}R^2}{F(z)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln F(z)$$

将(7.16.8), (7.16.7)及(7.16.9)式代入得

$$w(z) = \frac{1}{2}V_{\infty}(z + \sqrt{z^2 - c^2}) + \frac{1}{2}V_{\infty}(a+b)^2 \frac{1}{z + \sqrt{z^2 - c^2}} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z + \sqrt{z^2 - c^2})$$

或

$$w(z) = \frac{1}{2}V_{\infty}(z + \sqrt{z^2 - c^2}) + \frac{1}{2} \frac{(a+b)^2}{c^2} V_{\infty}(z - \sqrt{z^2 - c^2}) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z + \sqrt{z^2 - c^2}) \quad (7.16.10)$$

其中 Γ 未定, 因椭圆无角点, 故 Γ 确定不出来, 需要事先给出.

对 w 微分 z 可求出共轭复速度, 特别地可求出椭圆上速度分布, 然后根据伯努利定理即得压力分布.

$\Gamma = 0$ 时椭圆的绕流图案如图 7.16.4 所示.

2) 合力及合力矩

合力为

$$\mathcal{R} = -i\rho\Gamma V_{\infty}$$

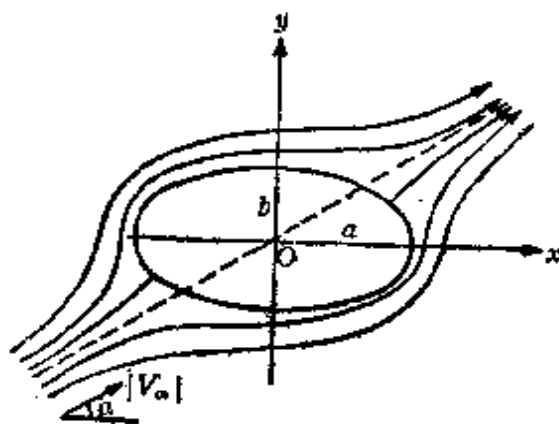


图 7.16.4

对于合力的讨论同一般理论中进行的一样, 不另述.

合力矩为

$$L = \operatorname{Re}\{-2\pi i \rho k k_1 V_\infty^2 - \rho \Gamma k_0 V_\infty\}$$

将(7.16.9)式代入得

$$\begin{aligned} L &= \operatorname{Re}\left[-2\pi i \rho \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{2} |V_\infty|^2 e^{-2i\alpha}\right] \\ &= -\frac{\pi}{2} \rho |V_\infty|^2 c^2 \sin 2\alpha \end{aligned}$$

考虑到 $c^2 = a^2 - b^2$, 得

$$L = -\frac{\pi}{2} \rho |V_\infty|^2 (a^2 - b^2) \sin 2\alpha \quad (7.16.11)$$

当 $\alpha = 0, \pi/2$ 时 $L = 0$, 即横向及纵向绕流对原点不产生力矩.

当 $a = b$ 时 $L = 0$, 即圆柱绕流问题中圆柱不受力矩作用. 对同一个 $a, b, \alpha = 45^\circ$ 时 L 最大, 即冲角是 45° 时, 椭圆所受到的力矩最大. 对同一个 α , 若 a 愈大, b 愈小, 则 L 就愈大, 这就是说平板所受到的力矩最大.

下面我们讨论椭圆绕流的一个非常重要的特例, 即平板绕流问题.

b) 平板绕流问题

平板是退化的椭圆, 令短轴 $b = 0$, 则有 $a = c$, 于是椭圆退化成成长为 $2c$ 的平板, 此时我们有

$$R = c, \quad k = 1/2, \quad k_0 = 0, \quad k_1 = c^2/2, \quad \theta_0 = 0 \quad (7.16.12)$$

1) 复位势, 平板上速度分布

在(7.16.10)式中令 $b = 0, a = c$, 则得平板绕流问题的复位势, 它是

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{2} V_\infty (z + \sqrt{z^2 - c^2}) + \frac{1}{2} V_\infty (z - \sqrt{z^2 - c^2}) \\ &\quad + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z + \sqrt{z^2 - c^2}). \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} (V_{\infty} + \bar{V}_{\infty}) z - \frac{1}{2} (V_{\infty} - \bar{V}_{\infty}) \sqrt{z^2 - c^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z + \sqrt{z^2 - c^2})$$

即

$$w(z) = u_{\infty} z - i v_{\infty} \sqrt{z^2 - c^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z + \sqrt{z^2 - c^2}) \quad (7.16.13)$$

其中 u_{∞}, v_{∞} 是无穷远处速度矢量在 x, y 轴上的分量。因为平板是有角点的，于是 Γ 由下式决定

$$\Gamma = 4\pi k R |V_{\infty}| \sin(\theta_0 - \alpha)$$

考虑到(7.16.12)式得

$$\Gamma = -2\pi c |V_{\infty}| \sin \alpha = -2\pi c v_{\infty} \quad (7.16.14)$$

平板无环量绕流和保证后缘角点速度有限的有环量绕流的绕流图案如图 7.16.5 与图 7.16.6 所示。

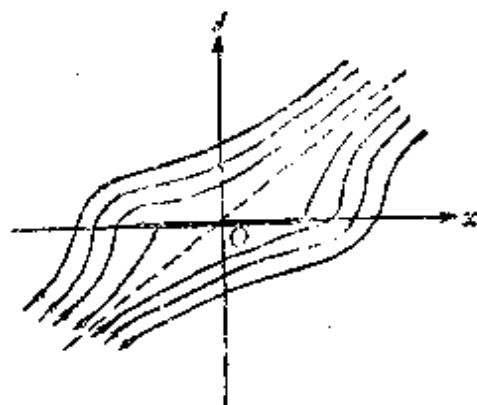


图 7.16.5

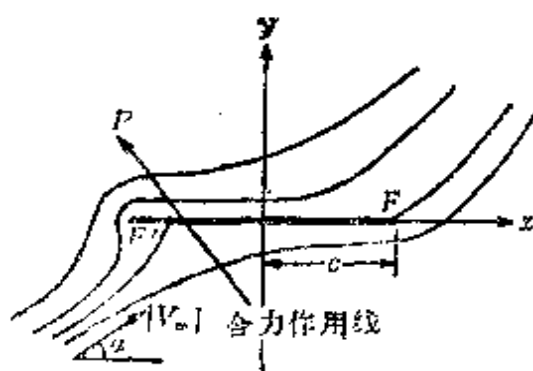


图 7.16.6

共轭复速度是

$$\bar{V} = \frac{dw}{dz}$$

$$= u_{\infty} - i v_{\infty} \frac{z}{\sqrt{z^2 - c^2}} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - c^2}}}{z + \sqrt{z^2 - c^2}}$$

$$= u_\infty - \frac{i v_\infty z - \frac{\Gamma}{2\pi i}}{\sqrt{z^2 - c^2}}$$

由此式可见，当 $z = \pm c$ 时，即在平板的两端点，一般说来速度趋于无穷。但当 Γ 取(7.16.14)所确定的数值时， \bar{V} 的值为

$$\bar{V} = u_\infty - i v_\infty \sqrt{\frac{z-c}{z+c}} \quad (7.16.15)$$

此时能保证平板的后缘点速度取 u_∞ 的有限值，即无穷远处速度在 x 方向的分量。但在前缘点即 $z = -c$ 上，速度仍然为无限大。

现求平板上的速度分布，

为此将(7.16.15)式改写成

$$\bar{V} = u_\infty - i v_\infty \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} e^{i(\theta_1 - \theta_2)/2}$$

其中 $r_1, \theta_1, r_2, \theta_2$ 分别是 $z-c, z+c$ 的模数及幅角，如图

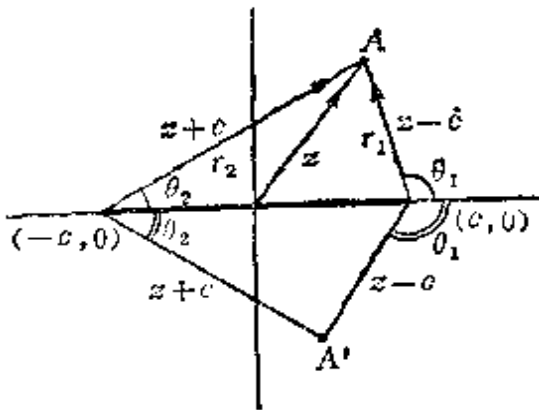


图 7.16.7

7.16.7 所示，当 z 由上半平面趋于平板上的点 $(x, +0)$ 时，得上剖面的速度分布 $\bar{V}(x, +0)$

$$\begin{aligned} \bar{V}(x, +0) &= u_\infty - i v_\infty \sqrt{\frac{c-x}{c+x}} e^{i\pi/2} \\ &= u_\infty + v_\infty \sqrt{\frac{c-x}{c+x}} \end{aligned}$$

亦即

$$u(x, +0) = u_\infty + v_\infty \sqrt{\frac{c-x}{c+x}}, \quad v(x, +0) = 0$$

当 z 由下半平面趋于平板上的点 $(x, -0)$ 时，则得下剖面的速度分布 $\bar{V}(x, -0)$

$$\bar{V}(x, -0) = u_\infty - i v_\infty \sqrt{\frac{c-x}{c+x}} e^{-i\pi/2}$$

$$= u_{\infty} - v_{\infty} \sqrt{\frac{c-x}{c+x}}$$

亦即

$$u(x, -0) = u_{\infty} - v_{\infty} \sqrt{\frac{c-x}{c+x}}, \quad v(x, -0) = 0$$

因此平板上下的速度分布为

$$u(x, +0) = u_{\infty} + v_{\infty} \sqrt{\frac{c-x}{c+x}}$$

$$u(x, -0) = u_{\infty} - v_{\infty} \sqrt{\frac{c-x}{c+x}}$$

由此可见在平板绕流问题中，上下剖面的速度分布是不一样的，在同一个点 $(x, 0)$ 上 $(-c \leq x \leq c)$ 上剖面的切向速度分量 u 不同于下剖面的，也就是平板是切向速度间断面，其间断值为

$$u(x, -0) - u(x, +0) = -2v_{\infty} \sqrt{\frac{c-x}{c+x}} \quad (7.16.16)$$

下面我们来证明，平板上的切向速度间断面和平板上连续分布着点涡的涡层是等价的，而且涡层的单位长度的强度等于间断面的间断值。

i) 平板 FF' 上的涡层即切向速度间断面。

设平板 FF' 上连续分布着点涡，平板上任一点涡对共轭点对 $z(x, y)$ 及 $\bar{z}(x, -y)$ 所感应的速度显然满足下式（见图7.16.8）

$$u(x, y) = -u(x, -y), \quad v(x, y) = v(x, -y)$$

于是整个涡层对 z, \bar{z} 所感应的速度也一定满足上式，特别地当 $y \rightarrow \pm 0$ 时有

$$u(x, +0) = -u(x, -0), \quad v(x, +0) = v(x, -0)$$

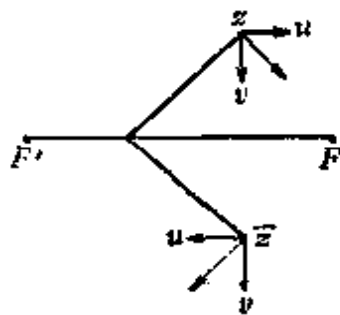


图 7.16.8

这说明平板是切向速度间断面，而法向速度分量则是连续的。

ii) 切向速度间断面 FF' 可看作是 FF' 上存在着涡层。

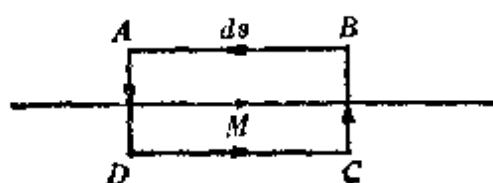


图 7.16.9

设 FF' 为切向速度间断面，在平板上取一线段元素 ds ，围绕 ds 画出一矩形封闭曲线，如图 7.16.9 所示，现计算沿 $ABCD$ 的逆时针方向的环量

$$\Gamma = [u(x, -0) - u(x, +0)] ds \neq 0$$

这说明在 ds 上有涡层。设涡层单位长度的强度是 $\gamma(x)$ ，则根据斯托克斯定理有

$$\gamma ds = [u(x, -0) - u(x, +0)] ds$$

$$\gamma(x) = u(x, -0) - u(x, +0)$$

将(7.16.16)式代入得平板绕流问题中涡层的强度为

$$\gamma(x) = -2v_{\infty} \sqrt{\frac{c-x}{c+x}} \quad (7.16.17)$$

若令 $x = -c \cos \theta$ ，则

$$\gamma(\theta) = -2v_{\infty} \sqrt{\frac{1+\cos \theta}{1-\cos \theta}} = -2v_{\infty} \cot \frac{\theta}{2}$$

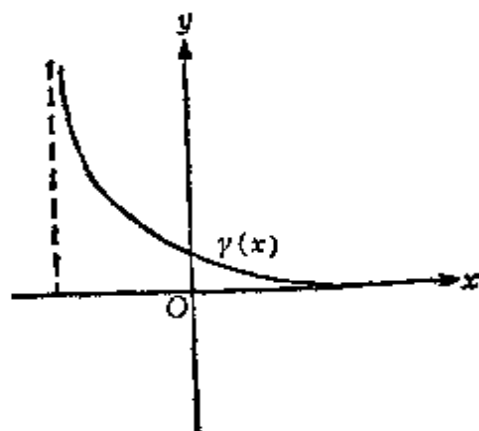


图 7.16.10

平板上 $\gamma(x)$ 的分布图（速度分布曲线的形状与此相同）如图 7.16.10 所示。

2) 合力、合力矩及压力中心
合力为

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= -i\rho V_{\infty} \Gamma \\ &= 2\pi\rho c |V_{\infty}|^2 \sin \alpha (\cos \alpha \\ &\quad + i \sin \alpha) \end{aligned}$$

其实部及虚部分别为

$$R_x = -2\pi\rho c|V_\infty|^2 \sin^2\alpha$$

$$R_y = 2\pi\rho c|V_\infty|^2 \sin\alpha \cos\alpha$$

它们的系数分别是

$$\begin{cases} C_x = \frac{R_x}{\frac{1}{2}\rho|V_\infty|^2 \cdot 2c} = -2\pi \sin^2\alpha \\ C_y = \frac{R_y}{\frac{1}{2}\rho|V_\infty|^2 \cdot 2c} = 2\pi \sin\alpha \cos\alpha \end{cases} \quad (7.16.18)$$

当 α 小时有

$$C_x = -2\pi\alpha^2, \quad C_y = 2\pi\alpha \quad (7.16.19)$$

在(7.16.11)式中令 $b=0, a=c$, 即得合力矩为

$$L = -\frac{\pi}{2}\rho|V_\infty|^2 c^2 \sin 2\alpha$$

其系数为

$$C_m = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho|V_\infty|^2 \cdot (2c)^2} = -\frac{\pi}{4} \sin 2\alpha \quad (7.16.20)$$

当 α 小时有

$$C_m = -\frac{\pi}{2}\alpha \quad (7.16.21)$$

C_m 与 C_y 之间的关系是

$$|C_m| : |C_y| = 1 : 4 \quad (7.16.22)$$

即压力中心在离前缘 $1/4$ 平板长度处。

在合力方面有必要指出下列两点:

i) 举力和阻力按一般的定义应该是与来流垂直和平行的力, 如按此定义则根据平板绕流问题中茹柯夫斯基定理平板将不受阻力, 但在平板这一特殊情形下, 事情有些两样, 显然此时与平板

垂直的力即 R_y 应是举力，而与平板平行的力 R_x 应是阻力。若按此新的理解，则平板受到 x 方向的力。

ii) 这个 x 方向的力是负值，因此不是阻力而是吸力，是一个推动平板前进的有利的力。

研究绕平板的流动具有很大的实际意义。在实际生产中某些比较简陋的翼型就是一块平板，例如，一般民船上所用的舵，某些通风机的叶片等等。通常航空用的机翼的相对厚度与相对弯度也都比较小，和平板比较接近，它们的气动特性常常可以利用平板的结果，再加上适当的厚度与弯度的修正。并且处理平板绕流的理论方法也可以作为分析绕一般翼型流动时的借鉴。

7.17 茹柯夫斯基剖面

从本节开始研究翼型绕流问题，所采用的方法就是前几节介绍的保角映射法和奇点法。首先应用保角映射方法解反问题，即给定变换函数 $z = f(\zeta)$ ，希望通过这个变换将圆变换到符合实际要求的翼型上去。直接寻求任意翼剖面 C 外区域和圆外区域的保角映射函数是比较困难的，只是到四十年代才找到有效的解正问题的近似方法。本书不打算介绍这方面的各种方法，而满足于在下一节中向读者介绍一种用奇点法解正问题的格劳威尔方法。

剖面 C 外区域和圆外区域的保角映射函数可展成

$$z = k\zeta + k_0 + \frac{k_1}{\zeta} + \frac{k_2}{\zeta^2} + \dots$$

通过位移可使 k_0 为零。只取展开式前两项所得的函数

$$z = k\zeta + \frac{k_1}{\zeta}$$

是这类变换函数中最简单的一种。取 $k = 1/2$, $k_1 = c^2/2$ (c 是实数) 就得到著名的茹柯夫斯基变换

$$z = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{c^2}{\zeta} \right) \quad (7.17.1)$$

此式还可写成

$$\frac{z-c}{z+c} = \left(\frac{\xi-c}{\xi+c} \right)^2 \quad (7.17.2)$$

变换(7.17.1)的部分性质已在7.16节中介绍过。需要指出的是 $\xi = \pm c$ 时 $dz/d\xi = 0$, 于是 $\xi = \pm c$ 是茹柯夫斯基变换的保角映射破坏点, 这点从(7.17.2)式亦可看出。 A 与 A' 点上的圆弧变成了 F 与 F' 点上的割线(见图7.17.1)。 π 角变成了 2π 角, F 与 F' 成了角点。其次, 从(7.17.1)式容易看出 ξ 平面中与 ξ 轴或 η 轴对称的曲线经过变换后所得的 z 平面上的对应曲线仍和 x 轴和 y 轴对称。

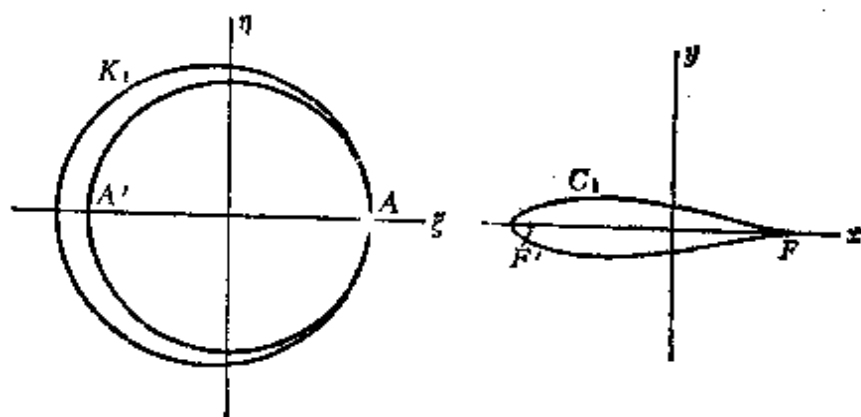


图 7.17.1

由此可以看出, 为了要得到头圆尾尖符合航空要求的翼型, ξ 平面上的出发圆必须通一个保角映射破坏点, 而将另一个保角映射破坏点包在其中。

我们知道圆心在原点的基本圆变到长为 $2c$ 的平板 FF' 上去, 下面我们考察一下符合上述要求的偏心圆变到什么样的剖面上去?

- 1) 圆心位于 ξ 轴且通过 A 点的偏心圆族 K_1 ,
偏心圆族 K_1 的方程为

$$\xi = -\lambda c + (1+\lambda)ce^{i\theta}$$

式中 λ 是表征 ξ 方向偏心距离的一个无量纲参数. 将之代入 (7.17.1) 即得 z 平面上对应曲线 C_1 的方程. 由于 K_1 是对称于 ξ 轴的, 因此 C_1 亦将对称于 x 轴, 所得的曲线称为茹柯夫斯基舵面, 它是一个只有厚度没有弯度的翼型.

当 $\lambda \ll 1$ 我们得到对称薄翼. 忽略 λ 二级微量以上的项得 C_1 的下列近似公式

$$\begin{cases} x(\theta) = c \cos \theta + \frac{1}{2} \lambda c (\cos 2\theta - 1) \\ y(\theta) = c \lambda (\sin \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta) \end{cases} \quad (7.17.3)$$

易证 $\theta = 2\pi/3$ 时, y 取极大值

$$y_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4} c \lambda$$

其次, 茹柯夫斯基舵面的翼弦为 $b = x(0) - x(\pi) = 2c$, 于是翼型的最大相对厚度为

$$\delta = \frac{2y_{\max}}{2c} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \lambda \approx 1.3\lambda \quad (7.17.4)$$

由此可见, 在薄翼的条件下, 翼剖面的最大相对厚度 δ 与 λ 成正比. λ 越大, δ 越大; λ 越小, δ 也越小. 因此, λ 是控制翼型厚

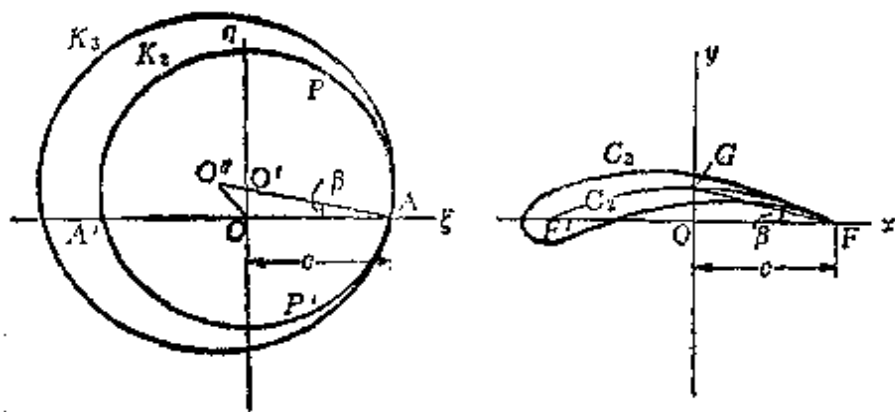


图 7.17.2

度的无量纲参数。

2) 圆心位于 η 轴且通过 A 点 (也通过 A' 点) 的偏心圆族 K_2 ,

设 K_2 的圆心在 $(0, c \tan \beta)$ 上 (见图 7.17.2). 利用 (7.17.2) 式有

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z-c}{z+c}\right) = 2 \operatorname{Arg}\left(\frac{\zeta-c}{\zeta+c}\right) \quad (7.17.5)$$

ξ 轴将圆 K_2 分成 $A'PA$ 及 $A'P'A$ 两部分. 在弧 $A'PA$ 及 $A'P'A$ 上 $\operatorname{Arg}(\zeta-c) - \operatorname{Arg}(\zeta+c)$ 分别为 $\frac{\pi}{2} - \beta$ 及 $-\frac{\pi}{2} - \beta$. 于是根据 (7.17.5) 式在 z 平面的对应曲线上 $\operatorname{Arg}(z-c) - \operatorname{Arg}(z+c)$ 分别取 $\pi - 2\beta, -\pi - 2\beta$. 两者都是常数且相差 2π , 说明对应的两条曲线都是圆弧而且是重合的 (图上的 $F'GF$). 因为 $\operatorname{LOG} F = \frac{\pi}{2} - \beta$, 故 $OG = c \tan \beta$. 圆弧翼剖面的最大相对弯度是

$$f = \frac{OG}{2c} = \frac{1}{2} \tan \beta \quad (7.17.6)$$

当 $\beta \ll 1$, 即考虑薄翼时

$$f = 0.5\beta \quad (7.17.7)$$

于是圆心位于 η 轴上的偏心圆族对应于只有弯度没有厚度的圆弧翼剖面, 其最大相对弯度与 β 成正比, β 是一个控制弯度的无量纲参数.

3) 圆心位于第二象限且通过 A 点的偏心圆族 K_3 ,

圆心 O'' 的坐标是 $(-\lambda c, (\lambda+1)c \tan \beta)$, 它是由控制厚度和弯度的两个参数决定的, 因此圆 K_3 的对应曲线 C_3 是一个既有厚度也有弯度的翼剖面, 而且头圆尾尖夹角是零度. 翼型包住对应于 K_2 的圆弧 C_2 , 并与其在 F 点相切, 这样得来的翼型称为茹柯

夫斯基剖面。

以上详细地讨论了通过 A 点的不同偏心圆族通过茹柯夫斯基变换变换到什么样的曲线上。我们发现通过 A 点圆心位于第二象限上的偏心圆族变到头圆尾尖的茹柯夫斯基剖面族上去，而且通过改变 λ 和 β 的值可以控制翼型的厚度和弯度， λ 和 β 分别是刻画厚度和弯度的二个无量纲参数，由于茹柯夫斯基剖面受两个参数的控制，所以称之为两个参数的剖面族。

为了得出茹柯夫斯基剖面的空气动力学特性曲线须要知道圆心在原点的圆变换到翼型 C 上去的映射函数，平移 ξ 平面上的坐标系使坐标原点与 O'' 点重合，得 ξ' 平面。于是 ξ' 与 ξ 的变换关系为

$$\xi = OO'' + \xi' = c - ae^{-i\beta} + \xi'$$

其中 $a = c(1 + \lambda) \sec \beta$ 。将上式代入(7.17.1)式得

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2} \left(c - ae^{-i\beta} + \xi' + \frac{c^2}{c - ae^{-i\beta} + \xi'} \right) \\ &= \frac{1}{2} \xi' + \frac{1}{2} (c - ae^{-i\beta}) + \frac{c^2}{2\xi'} - \frac{c^2(c - ae^{-i\beta})}{2\xi'^2} + \dots \end{aligned}$$

由此得

$$k = \frac{1}{2}, \quad k_0 = \frac{1}{2}(c - ae^{-i\beta}), \quad k_1 = \frac{c^2}{2} \quad (7.17.8)$$

其次由图 7.17.2 看出，保角映射破坏点 A 的幅角及圆半径分别为

$$\theta_0 = -\beta, \quad R = a \quad (7.17.9)$$

1) 举力系数

根据(7.15.12), (7.17.8)及(7.17.9)式，举力的大小为

$$\begin{aligned} P &= 4\pi\rho k R |V_\infty|^2 \sin(\alpha - \theta_0) \\ &= 2\pi\rho a |V_\infty|^2 \sin(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

于是举力系数是

$$C_y = \frac{P}{\frac{1}{2}\rho|V_\infty|^2 \cdot 2c} = 2\pi \frac{a}{c} \sin(\alpha + \beta)$$

即

$$C_y = 2\pi(1 + \lambda) \sec \beta \sin(\alpha + \beta) \quad (7.17.10)$$

在薄翼小冲角时， α, λ, β 皆为小量，上式可近似为

$$C_y = 2\pi(\alpha + \beta) \quad (7.17.11)$$

图 7.17.3 将 C_y 的理论结果和实验进行了比较，对比是在如图

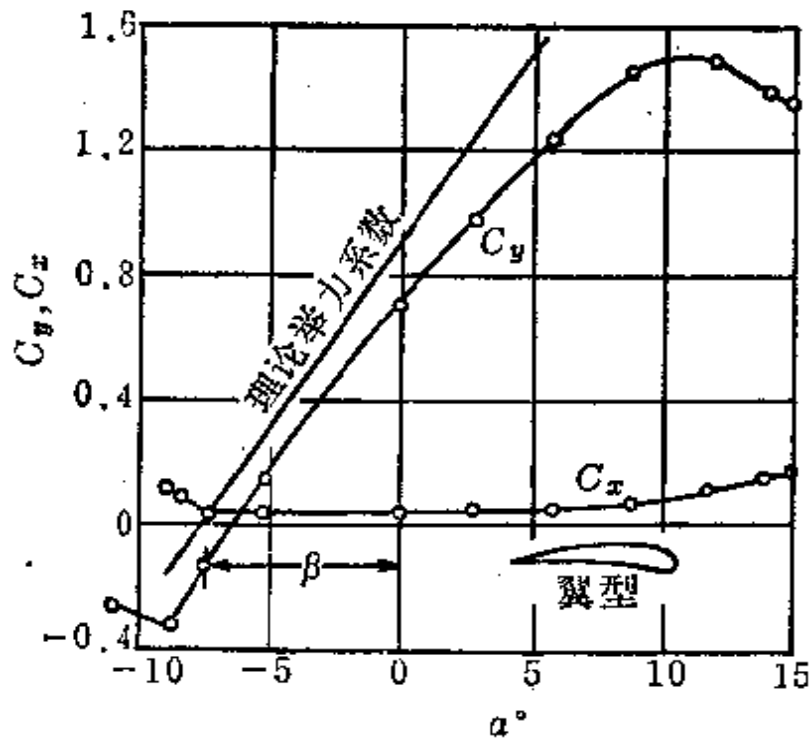


图 7.17.3

所示的茹柯夫斯基翼型中进行的($\beta = 8^\circ$)。符合的程度是令人满意的。例如 dC_y/da 的理论值是 2π ，而实验值约为 6，误差不超过 5%。实验曲线较理论曲线整个的偏低的原因部分地是由于翼剖面上半部分边界层加厚引起的。当冲角在 9° 附近时，举力曲线的形状有一个突然的改变，这标志着边界层开始从翼剖面的上表

面分离。图 7.17.3 还附带地画出了实验测出的阻力系数曲线。

2) 力矩系数和压力中心

根据(7.15.16), (7.17.8), 及(7.17.9), 力矩为

$$\begin{aligned}
 L &= \pi\rho|V_\infty|^2 \operatorname{Re} \left\{ i \left[\frac{c^2}{2} - \frac{a}{2}(c - ae^{-i\beta})e^{-i\beta} \right] e^{-2i\alpha} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{i}{2}a(c - ae^{-i\beta})e^{i\beta} \right\} \\
 &= \frac{1}{2}\pi\rho|V_\infty|^2 [c^2 \sin 2\alpha + a^2 \sin 2(\alpha + \beta) \\
 &\quad - 2ac \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha] \quad (7.17.12)
 \end{aligned}$$

若考虑薄翼且冲角不大时, α, λ, β 皆为小量, 上式可近似为

$$L = \pi\rho|V_\infty|^2 c^2 \alpha \quad (7.17.13)$$

于是对应的力矩系数为

$$C_m = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho|V_\infty|^2(2c)^2} = \frac{1}{2}\pi\alpha \quad (7.17.14)$$

从实用的观点来看, 对前缘取矩更方便, 若以 L_{LE} 表之, 则 L_{LE} 与 L 之间存在下式关系

$$L_{LE} = L - cP$$

由此

$$(C_m)_{LE} = C_m - \frac{1}{2}C_y$$

利用公式(7.17.11)及(7.17.14), 在薄翼小冲角时有

$$(C_m)_{LE} = \frac{1}{2}\pi\alpha - \pi(\alpha + \beta) = -\frac{\pi}{2}(\alpha + 2\beta)$$

相对于前缘的压力中心用翼弦 $2c$ 相除得下列值

$$-\frac{(C_m)_{LE}}{C_y} = \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha + 2\beta}{\alpha + \beta} \right) \quad (7.7.15)$$

结构上主要承受载荷的地方应放在压力中心附近，因此希望在通常采用的冲角范围内压力中心的位置不要改变太多。对于对称的茹柯夫斯基剖面而言， $\beta=0$ ，压力中心固定在1/4翼弦处。对于一般的弯曲薄茹柯夫斯基翼型，压力中心随冲角移动较大。

茹柯夫斯基翼型有两个结构上的缺点：(1) 尾部角点的夹角是零度，这不仅制造困难，而且也不牢固；(2) 压力中心位置随冲角的改变移动较大，因此稳定性能较差。有鉴于此，在航空工程中并不采用茹柯夫斯基翼型。尽管如此由于它是一个准确解，人们常利用它来检验近似方法的准确性，再加上它提供了解反问题的一个完整的典型例子，在空气动力学发展史上起过历史作用，所以仍然具有基础意义。

7.18 薄翼

上一节研究了经典的茹柯夫斯基理论剖面，通过它揭示了翼剖面的厚度、弯度和来流的冲角对空气动力学系数的影响。由于茹柯夫斯基剖面具有零尖角，压力中心移动较大等缺点，因此在工程实际中很少采用。在剖面设计工作中通常根据空气动力学性质等方面的考虑提出某种形状的翼剖面，要求计算给定翼剖面上的空气动力学系数。因此我们必须解决任意给定翼型的绕流问题。

给定翼剖面 C 。将坐标原点取在前后缘联线的中点， x 轴沿翼弦方向。设翼型 C 的方程为 $y = F(x)$ 。假定无穷远处来流速度为 $|V_\infty|$ ，冲角为 α (图 7.18.1)。翼型绕流可理解为翼型对均匀来流有一扰

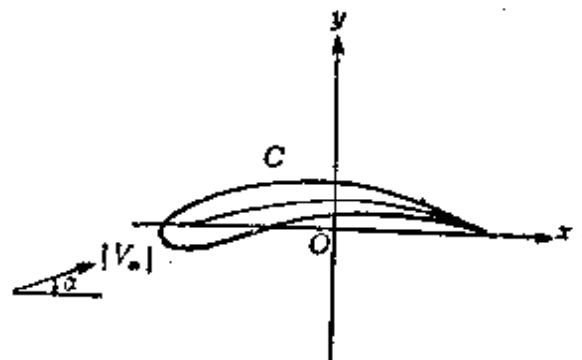


图 7.18.1

动。设 $w(z)$ 是扰动复位势，它和绕流复位势 $W(z)$ 的关系为

$$W(z) = \bar{V}_\infty z + w(z)$$

u, v 是扰动速度，则任意翼型绕流问题的数学提法亦可表叙为，要求 C 外区域内的解析函数——扰动复位势 $w = w(z)$ ，它在

1) 剖面 $y = F(x)$ 上满足绕流条件

$$\frac{|V_\infty| \sin \alpha + v}{|V_\infty| \cos \alpha + u} = \frac{dF}{dx} \quad (7.18.1)$$

2) 在无穷远处满足扰动消失条件

$$u = 0, \quad v = 0 \quad (7.18.2)$$

采用保角映射方法解决任意翼型绕流问题，早在四十年代前后，就已发展了多种有效的理论计算方法，例如西奥道生方法、努仁方法等等。它们相对来说都比较复杂，我们不准备在本教程中进行介绍。在近代航空工业中所广泛采用的翼型，一般都具有较小的相对厚度与弯度，并且主要在小攻角下使用，对于这种所谓的薄翼，可以采用奇点法求解。本节主要介绍薄翼理论中的格劳威尔(Glauert)方法。

小冲角薄翼绕流问题最主要的物理性质就是翼型对来流的小扰动性，反映在数学上就是剖面上的边界条件可以线性化，厚度、弯度与冲角的影响能分开考虑，从而进一步简化了数学问题。

对于薄翼小冲角绕流问题我们有：

- 1) 翼型的相对厚度和相对弯度都很小，因此 $F, dF/dx$ 都是一级小量；
- 2) 来流冲角 α 很小，可认为是一级小量；
- 3) 翼型的存在对均匀来流所产生的扰动很小，因此，扰动速度及其导数相对来流速度 $|V_\infty|$ 是一级小量。

根据上述三条，并注意到

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots, \quad \cos \alpha = 1 + \frac{\alpha^2}{2} + \dots$$

在(7.18.1)式中忽略二级以上小量后得

$$v(x, F(x)) = |V_{\infty}| \left(\frac{dF}{dx} - \alpha \right) \quad (7.18.3)$$

注意，上式是在 $y = F(x)$ 上满足的，即(7.18.3)式左边的 v 是在点 $(x, F(x))$ 上取值。现在证明准确到一级近似上式可转移到 $y = 0$ 上满足，即 v 可近似地取在翼弦上。根据泰勒公式有

$$v(x, F(x)) = v(x, 0) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0 F(x) + \dots$$

因 $F(x)$, $\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0$ 都是一级小量，故 $\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_0 F(x)$ 是二级小量，略

去这一项及后面更高阶的小量，得

$$v(x, F(x)) = v(x, 0)$$

于是翼型表面上的值可用翼弦上的值来近似。考虑到这一点(7.18.3)式可改写为

$$v(x, 0) = |V_{\infty}| \left(\frac{dF}{dx} - \alpha \right) \quad (7.18.4)$$

现在薄翼绕流问题一级近似的数学提法可改写为：求平板 AB (图7.18.2)外的解析函数——扰动位势 $w(z)$ ，它满足

$$1) \quad v(x, 0) = |V_{\infty}| \left(\frac{dF}{dx} - \alpha \right), \quad -\frac{c}{2} \leq x \leq \frac{c}{2};$$

$$2) \quad \text{在无穷远处 } u=0, v=0;$$

3) 在后缘 B 点满足茹柯夫斯基条件。

必须指出：(1) 绕流条件转移到平板上满足，意味着流动区域也

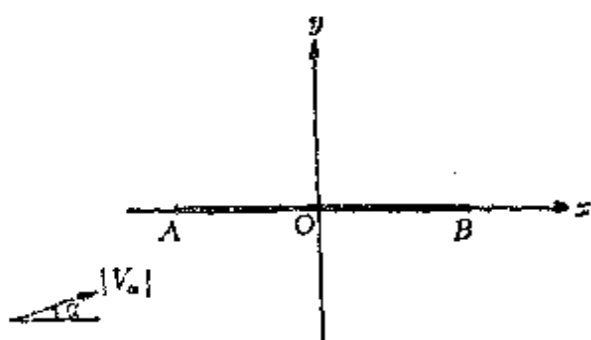


图 7.18.2

随之发生改变, 从原来的剖面 C 外区域变到平板 AB 外区域. (2) 虽然绕流条件转移到平板上满足, 定义区域也变为平板 AB 外的整个区域, 但是它并不是平板绕流问题.

因为在边界条件(7.18.4)中多了一项 $|V_\infty| \frac{dF}{dx}$, 正是通过它将翼型形状的影响考虑进去了. (3) 线性化后翼型 C 被平板 AB 替代, 平板 AB 所受的合力及合力矩近似地代表了翼型 C 所受的合力及合力矩. (4) 设上表面的方程为 $y = F_+(x)$, 下表面的方程为 $y = F_-(x)$, 则(7.18.4)包含了两个式子

$$v(x, +0) = |V_\infty| \left(\frac{dF_+}{dx} - \alpha \right)$$

$$v(x, -0) = |V_\infty| \left(\frac{dF_-}{dx} - \alpha \right)$$

$+0$ 与 -0 表示在平板上和平板下取值. 对于对称剖面而言

$$F_+ = -F_- = F$$

上两式可合写为

$$v(x, \pm 0) = |V_\infty| \left(\pm \frac{dF}{dx} - \alpha \right)$$

对于弯弧剖面而言

$$F_+ = F_- = F$$

上两式可合写为

$$v(x, \pm 0) = |V_\infty| \left(\frac{dF}{dx} - \alpha \right)$$

现分析边界条件(7.18.4)式. 如果其右边括号中只取第二项,

即

$$v = -|V_{\infty}| \alpha$$

则与前面所讲的平板有冲角绕流问题中的边界条件完全一样。如果在括弧中只取第一项，即

$$v = |V_{\infty}| \frac{dF}{dx}$$

这就是零冲角 $\alpha=0$ 的来流绕薄翼流动的边界条件。由于解析函数及线性化后边界条件都是线性的，因此小冲角绕薄翼流动可以看成上述两个简单流动的叠加。而这后一个流动又可分解为两个更简单流动的叠加。翼型的中线及半厚度可分别表示为

$$y = F_m(x) = \frac{1}{2} [F_+(x) + F_-(x)]$$

$$y = F_t(x) = \frac{1}{2} [F_+(x) - F_-(x)]$$

于是翼型的上下表面也可改写为

$$y = F_{\pm}(x) = F_m(x) \pm F_t(x)$$

因此零冲角绕薄翼流动在上下表面满足的边界条件可改写为

$$v(x, \pm 0) = |V_{\infty}| \frac{dF_m}{dx} \pm |V_{\infty}| \frac{dF_t}{dx}$$

显而易见，右边只取第一项时代表的是零冲角来流绕一个没有厚度的弯弧翼型的流动，这个弯弧就是原来翼型的中线；右边只取第二项时所代表的正是零冲角来流绕一个没有弯度的对称翼型的流动，这个对称翼型具有与原来的翼型相同的厚度分布。因此零冲角绕薄翼的流动又可看成是弯弧和对称翼型两个流动的叠加。

总起来说，由于解析函数和边界条件都是线性的，因此一般的绕薄翼的小冲角流动可以分解为下列三个基本绕流问题的叠加（见图7.18.3）。

1) 零冲角绕对称翼型的流动，其扰动复位势为 $w_1(z)$ 满足

$$v_1(x, \pm 0) = \pm |V_{\infty}| \frac{dF_t}{dx}$$

$$u_1(\infty)=0, \quad v_1(\infty)=0$$

2) 零冲角绕弯弧的流动, 其扰动复位势为 $w_2(z)$ 满足

$$v_2(x, \pm 0) = |V_\infty| \frac{dF_m}{dx}$$

$$u_2(\infty)=0, \quad v_2(\infty)=0$$

3) 小冲角绕平板流动, 其扰动复位势为 $w_3(z)$ 满足

$$v_3(x, \pm 0) = -|V_\infty| \alpha$$

$$u_3(\infty)=0, \quad v_3(\infty)=0$$

也就是说可以分别考虑厚度、弯度和冲角对翼型的影响。

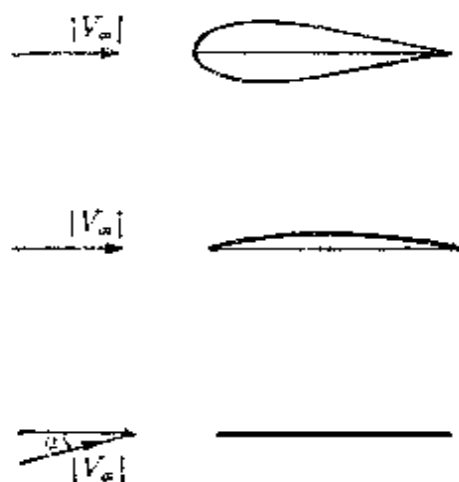


图 7.18.3

对于零冲角绕对称翼型的流动, 由于流动的对称性, 不产生升力与力矩. 因此从气动力计算来说, 可以不必考虑它, 它只在求翼型上压力分布与速度分布时有用. 为便于分析我们把第二个问题与第三个问题合起来讨论, 即讨论小冲角绕弧形翼型流动的问题. 此时绕流条件为

$$v(x, \pm 0) = |V_\infty| \left(\frac{dF_m}{dx} - \alpha \right) \quad (7.18.5)$$

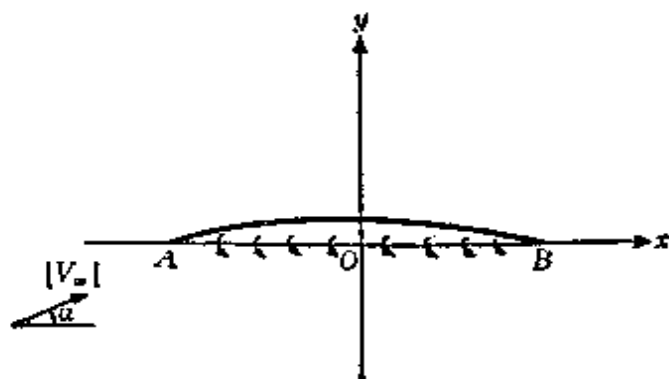


图 7.18.4

我们采用奇点法解此问题. 在平板绕流问题中, 平板是切向速度间断面. 容易想象, 与平板一样弧形翼型也是切向速度间断面 (如果是连续的, 剖面将不受力). 因此我们可以用沿翼弦分布的涡

层代替这个翼型(图7.18.4). 设沿翼弦的涡旋密度分布为 $\gamma(x)$, 则它感应的复位势为

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-c/2}^{+c/2} \gamma(\xi) \ln(z - \xi) d\xi \quad (7.18.6)$$

显然, $w(z)$ 是 AB 外解析函数, 并且满足无穷远处条件, 剩下的问题是使 $w(z)$ 满足绕流条件及后缘速度有限条件从而定出 $\gamma(\xi)$. 由(7.18.6)得

$$u - iv = \frac{1}{2\pi i} \int_{-c/2}^{+c/2} \frac{\gamma(\xi)}{z - \xi} d\xi$$

$$v = \frac{1}{2\pi} \int_{-c/2}^{+c/2} \gamma(\xi) \frac{(x - \xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi$$

令其满足绕流条件(7.18.5)得确定 $\gamma(\xi)$ 的积分方程

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-c/2}^{+c/2} \frac{\gamma(\xi)}{x - \xi} d\xi = |V_\infty| \left(\frac{dF_m}{dx} - \alpha \right) \quad (7.18.7)$$

为了求解此方程, 令

$$\xi = -\frac{c}{2} \cos \theta, \quad x = -\frac{c}{2} \cos \theta_1 \quad (7.18.3)$$

前后缘对应于 $\theta=0$ 及 $\theta=\pi$, 然后将 $\gamma(\theta)$ 展成 θ 的三角函数. 由于在后缘处要求解满足速度有限的条件, 因此, 那里的 $\gamma(\pi) = u(\pi-0) - u(\pi+0)$ 应取零值. 其次, 考虑到弯弧绕流与平板绕流有相近的性质, 因此在前缘尖端附近出现速度趋于无穷大的情形, 对应的 $\gamma(\theta)$ 在 $\theta=0$ 处有 $\cot(\theta/2)$ 类型的奇性[参看(7.16.17)]. 考虑函数

$$\mathcal{V}(\theta) = 2|V_\infty| A_0 \cot \frac{\theta}{2}$$

显然它感应的速度在前缘处有限，重复后缘的推论得它在前缘 $\theta=0$ 处取零值。其次由 $\mathcal{V}(\pi)=0$ 及 $\cot(\pi/2)=0$ 推出它在后缘 $\theta=\pi$ 处亦取零值。这就要求 $\mathcal{V}(\theta) = 2|V_\infty| A_0 \cot(\theta/2)$ 的富氏展式一定是奇函数型的，即

$$\mathcal{V}(\theta) = 2|V_\infty| \left(A_0 \cot \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right) \quad (7.18.9)$$

显然在后缘 $\theta=\pi$ 处 $\mathcal{V}(\pi)=0$ ，后缘处速度有限的条件得到满足。将(7.18.8)及(7.18.9)代入(7.18.7)得

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\left(A_0 \cot \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right) \sin \theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_1} = \frac{dF_m}{dx} - a \quad (7.18.10)$$

利用三角公式

$$\cot \frac{\theta}{2} \sin \theta = 1 + \cos \theta$$

$$\sin n\theta \sin \theta = \frac{1}{2} [\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta]$$

及公式 (证明见本节末附录)

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_1} = \pi \frac{\sin n\theta_1}{\sin \theta_1}$$

(7.18.10)式化为

$$A_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin(n-1)\theta_1 - \sin(n+1)\theta_1}{\sin \theta_1} = \frac{dF_m}{dx} - a$$

即

$$A_0 + \alpha - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta_1 = \frac{dF_m}{dx}$$

由此得到

$$\begin{cases} A_0 = -\alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dF_m}{dx} d\theta_1 \\ A_n = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dF_m}{dx} \cos n\theta_1 d\theta_1 \end{cases} \quad (7.18.11)$$

代入(7.18.9)式即得涡旋密度分布.

举力系数为

$$\begin{aligned} C_y &= \frac{-\rho |V_{\infty}| \Gamma}{\frac{1}{2} \rho |V_{\infty}|^2 \cdot c} = -\frac{2}{|V_{\infty}| c} \int_{-c/2}^{+c/2} \gamma(x) dx \\ &= -2 \int_0^{\pi} \left(A_0 \cot \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right) \sin \theta d\theta \\ &= -2\pi \left(A_0 + \frac{A_1}{2} \right) \\ &= 2\pi \alpha - 2 \int_0^{\pi} \frac{dF_m}{dx} (1 - \cos \theta) d\theta \\ &= 2\pi(\alpha + \epsilon_0) \end{aligned} \quad (7.18.12)$$

其中

$$\epsilon_0 = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dF_m}{dx} (1 - \cos \theta) d\theta$$

因 AB 上 dx 线段元受到 $-\rho |V_{\infty}| \gamma(x) dx$ 的力, 所以力矩系数为

$$C_m = \frac{\rho |V_\infty| \int_{-c/2}^{+c/2} \gamma(x) x dx}{\frac{1}{2} \rho |V_\infty|^2 c^2}$$

$$= \frac{-1}{2|V_\infty|} \int_0^\pi \left(A_0 \cot \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right) \cos \theta \sin \theta d\theta$$

$$= -\frac{\pi}{2} \left(A_0 + \frac{A_2}{2} \right)$$

对前缘而言的力矩 $(C_m)_{LE}$ 为

$$(C_m)_{LE} = C_m - C_y \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} \left(A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2} \right)$$

$$= -\frac{\pi}{2} \alpha - \int_0^\pi \frac{dF_m}{dx} \cos \theta (1 - \cos \theta) d\theta \quad (7.18.13)$$

由此可见，为了求得举力系数和力矩系数只要数值地计算两个积分就行了。

从(7.18.13)式可以看出，对于薄翼来说，举力曲线 $C_y(\alpha)$ 的斜率 $dC_y/d\alpha$ 与平板一样都是 2π 。这是一切薄翼的理论值。当来流冲角 $\alpha = -\epsilon_0$ 时， $C_y = 0$ ，冲角 $\alpha_0 = -\epsilon_0$ 称为零举力冲角。对于对称翼型，显然 $\alpha_0 = 0$ ；对于一般不对称的翼型， α_0 通常为一不大的负值，弯度越大，其绝对值越大。角度 $\alpha + \epsilon_0$ 称为有效冲角。在小冲角范围内，举力系数与有效冲角成正比。

为了检验薄翼理论的精度，我们将其和茹柯夫斯基剖面的准确结果进行比较。考虑圆弧翼型，根据(7.17.10)式，它的举力系数为

$$C_y = 2\pi \sec \beta \sin(\alpha + \beta)$$

根据薄翼理论中的(7.18.12)式经过简单计算后得 $\beta \ll 1$ 时

$$C_y = 2\pi\alpha + 2 \sin 2\beta \int_0^\pi \frac{\cos^2 \theta}{(1 - \sin^2 2\beta \cos^2 \theta)^{1/2}} d\theta$$

$$\approx 2\pi(\alpha + \beta) + 3\pi\beta^2$$

可见主要项和准确结果是吻合的。

薄翼理论的优点在于能用较简便的方法计算翼型的主要气动特性。它的弱点是不能正确地估计在前缘附近的流动情况，前缘速度无穷大，显然与实际不符。

附录 证明

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos \theta - \cos \varphi} d\theta = \pi \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi}$$

因

$$\int \frac{d\theta}{\cos \theta - \cos \varphi} = \frac{1}{\sin \varphi} \ln \left| \frac{\sin \frac{\varphi + \theta}{2}}{\sin \frac{\varphi - \theta}{2}} \right|$$

故

$$\begin{aligned} I_c &= \int_0^\pi \frac{d\theta}{\cos \theta - \cos \varphi} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{\varphi - \varepsilon} \frac{d\theta}{\cos \theta - \cos \varphi} + \int_{\varphi + \varepsilon}^\pi \frac{d\theta}{\cos \theta - \cos \varphi} \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sin \varphi} \ln \left| \frac{\sin \left(\varphi - \frac{\varepsilon}{2} \right)}{\sin \left(\varphi + \frac{\varepsilon}{2} \right)} \right| = 0 \end{aligned}$$

其次

$$I_1 = \int_0^\pi \frac{\cos \theta d\theta}{\cos \theta - \cos \varphi} = \int_0^\pi \frac{\cos \theta - \cos \varphi}{\cos \theta - \cos \varphi} d\theta = \pi$$

现证下列递推公式

$$I_{n+1} + I_{n-1} = 2I_n \cos \varphi$$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

因

$$\begin{aligned} & \cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta \\ &= 2\cos n\theta(\cos\theta - \cos\varphi) + 2\cos n\theta\cos\varphi \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} I_{n+1} + I_{n-1} &= \int_0^\pi \frac{\cos(n+1)\theta - \cos(n-1)\theta}{\cos\theta - \cos\varphi} d\theta \\ &= 2 \int_0^\pi \cos n\theta d\theta + 2\cos\theta \int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos\theta - \cos\varphi} d\theta \\ &= 2I_n \cos\varphi \end{aligned}$$

最后，用归纳法证

$$I_n = \pi \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$$

$n=0, 1$ 时上式成立，设 $n=k-1, k$ 时上式正确，现证 $n=k+1$ 时亦正确。

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= 2I_k \cos\varphi - I_{k-1} \\ &= 2\pi \frac{\sin k\varphi}{\sin\varphi} \cos\varphi - \pi \frac{\sin(k-1)\varphi}{\sin\varphi} \\ &= \pi \frac{\sin k\varphi \cos\varphi + \sin k\varphi \cos\varphi - \sin(k-1)\varphi}{\sin\varphi} \\ &= \pi \frac{\sin k\varphi \cos\varphi + \sin\varphi \cos k\varphi}{\sin\varphi} \\ &= \pi \frac{\sin(k+1)\varphi}{\sin\varphi} \end{aligned}$$

由归纳法证明了

$$I_n = \pi \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$$

的正确性。

7.19 具有自由流线的绕流和射流. 对数速度平面

实际问题中经常遇到具有自由流线的边值问题. 例如:

1) 孔口出流问题

射流从大容器中, 定常地喷出. 每秒钟的流量为 Q . 容器壁可近似地认为由两个无穷长对称平板组成, 它们与对称轴的夹角为 α , 容器出口处的宽度为 $2b$. 流体自孔口射出后在与大气接壤处形成自由面并逐渐收缩到下游无穷远处的宽度 (图7.19.1).

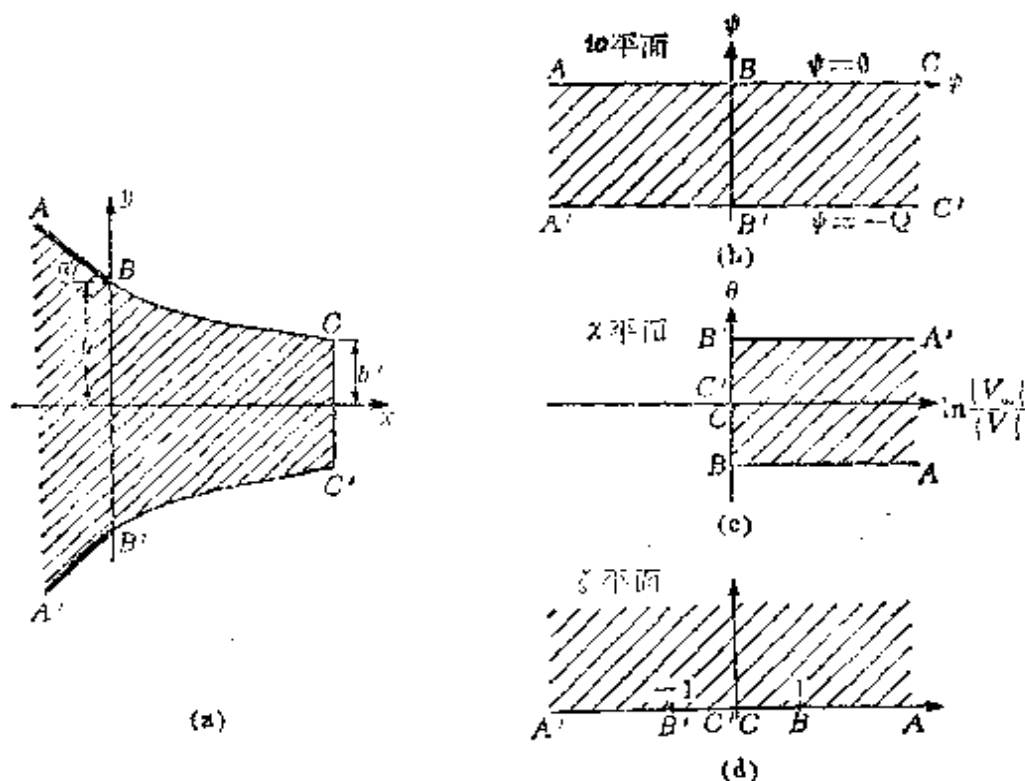


图 7.19.1

设 h 是射流的垂向尺度, 且满足 $gh \ll V^2$, 则重力的影响可忽略不计. 考虑到无穷远处流动是均匀的, 不难推出, 这是一个不可压缩流体的平面定常无旋运动问题, 因此可以应用保角映射方法求解.

2) 具有自由流线的绕流问题

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重知识产权！

流线型物体的绕流问题当冲角在一定范围内基本上是不脱体的。对于非流线型物体（例如圆柱）而言流动图案就大不相同了。



图 7.19.2

图 7.19.2 显示了一颗高速弹丸穿过侧壁射进盛满水的玻璃水槽中所形成的流动图案。从球面上某点处分离后形成稳定的自由流线，而后一直延伸到很远的地方。由此可见

当物体是非流线型时我们遇到的不是不脱体的流动图案，而是具有自由流线的绕流图案（当然在高速水流的条件下）。以上说的是轴对称流动，对于二维问题也有类似的情形。忽略重力并考虑

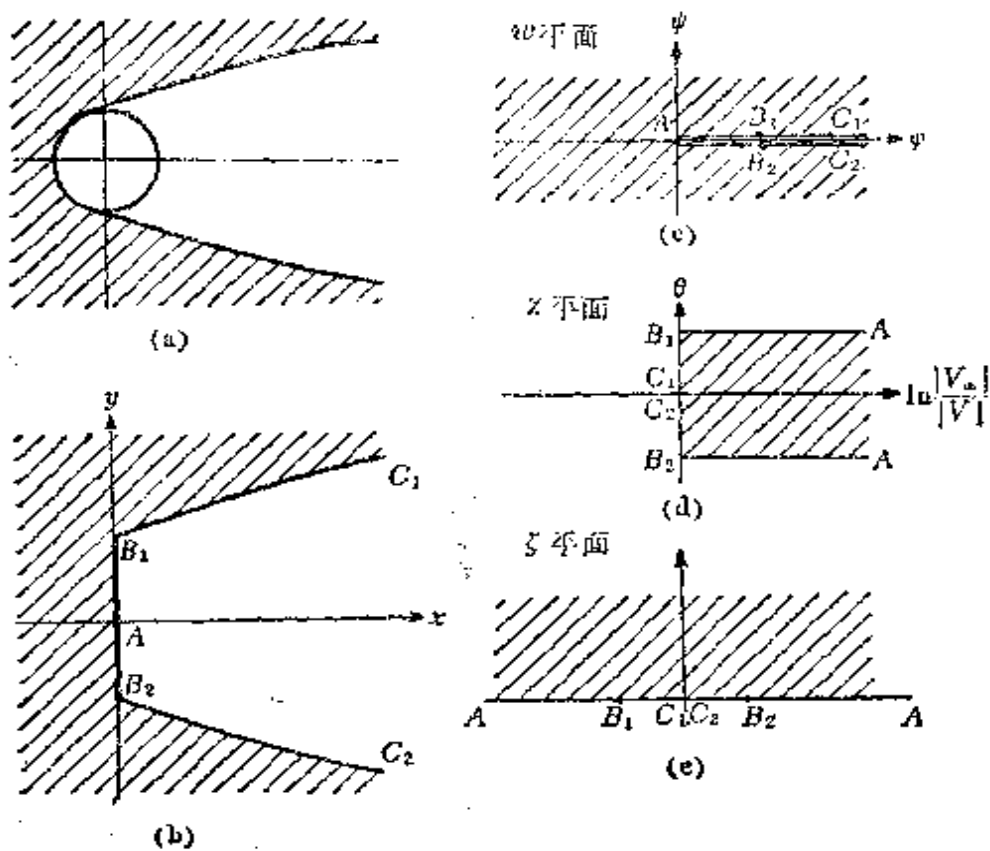


图 7.19.3

超星阅读器提醒您：
请支持正版图书

到来流是均匀的，不难看出，这里遇到的仍然是不可压缩流体的平面定常无旋运动问题，因此一样可以采用保角映射方法（见图 7.19.3）。

具有自由流线的绕流或射流问题具有以下几个特点：（1）自由流线的形状事先并不知道，须要在求解过程中求出，（2）自由流线上的压力等于死水区压力 p_∞ 或大气压力 p_0 ，根据伯努利定理推出自由流线上的速度等于常数 $|V_\infty|$ ；（3）分离点的位置除有尖角的物体外（尖角即分离点）不能在理想流体范围内解决，只能作为实验结果给出或采用粘性流体理论求出。

考察位势平面 w 上的对应区域，先考虑绕流问题。因为 $w = \varphi + i\psi$ 可以允许差一常数值，所以我们总可以做到驻点 A 上的 $\varphi = 0, \psi = 0$ 。由于沿流线有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = V \geq 0$$

于是沿着通过驻点 A 点的零流线， φ 由 $-\infty$ 变至 $+\infty$ ，在 w 平面上对应的是割去正 x 轴的 $\psi = 0$ ，而且 $\pm\infty \leftrightarrow \pm\infty, 0 \leftrightarrow 0, B_1, B_2$ 对应于 $\varphi = C, C$ 的值暂时还不确定。同样的推理可证每条流线在 w 平面上对应的都是平行 φ 轴，且两头伸至无穷远的直线。利用通过两流线间的流量等于流函数差值这一性质，易证 $y \rightarrow \pm\infty$ 时 $\psi \rightarrow \pm\infty$ 。 z 平面的流动区域在 w 平面上对应的是割去正 x 轴的全平面。完全同样的可以确定射流问题在 w 平面上对应的是如图 7.19.1(b) 所示的条带区域。

在物理平面 z 上，由于自由流线的形状事先是未知的，这就产生了物理平面上流动区域不确定的困难。按老办法求解析函数 $w = w(z)$ 将遇到克服不了的困难。摆脱困境的办法是引进对数速度平面（利用自由流线上速度等于已知常数 $|V_\infty|$ 这一性质）。

$$\chi = \chi_1 + i\chi_2 = \ln \left(|V_\infty| \frac{dz}{dw} \right) = \ln \frac{|V_\infty|}{|V|} + i\theta \quad (7.19.1)$$

超星阅读器提醒您：
 请支持正版图书

其中 $|V|, \theta$ 分别为速度矢量的大小及幅角。新变量 χ 具有下列重要的性质：其实数部分在每条自由流线上取常数值，即 $\chi_1 = 0$ ；其虚数部分在固壁的直线段上取常数值，即 $\chi_2 = \theta_0$ ，其中 θ_0 是直线的方向角。因此，如果边界仅仅是由自由流线和直线固壁组成的，那么它们在对数速度平面 χ 上的对应区域便是完全确定的多角形了。例如在射流问题中，其对应区域为如图 7.19.1(c) 所示的顶点在无穷远处的三角形 $ABCC'B'A'$ ，各直线段的方程分别为

$$\begin{aligned} AB: & \quad \chi_2 = -a, \quad 0 \leq \chi_1 < \infty \\ A'B': & \quad \chi_2 = a, \quad 0 \leq \chi_1 < \infty \\ BC: & \quad \chi_1 = 0, \quad -a \leq \chi_2 \leq 0 \\ B'C': & \quad \chi_1 = 0, \quad 0 \leq \chi_2 \leq a \end{aligned}$$

又如在垂直平板的脱体绕流问题中(图 7.19.2(b))，其在 χ 平面上的对应区域为顶点在无穷远处的三角形 $AB_1C_1C_2B_2A$ (参看图 7.19.3(d))。应该指出，如果固壁中包含非直线段，则由于流体质点在那里的速度大小未知，使得它在对数速度平面上的对应边界变得不确定了。因此对于这种情形(例如圆柱脱体绕流问题)引进对数速度平面并不能解决边界不确定的矛盾，此时还须采用别的办法解决问题。由于篇幅限制，本教程只限于研究固壁只包含直线段的情形。

现在问题归结为寻求 w 和 χ 之间的对应关系了。我们看到， χ 平面的对应区域是多角形类型的区域，利用著名的许瓦兹-克利斯多夫公式可以将它们变换到 ζ 的上半平面上去。如果再在 ζ 的上半平面和 w 平面的条带区域或割去正 x 轴的全平面之间建立对应关系，则不难建立 w 和 χ 之间函数关系。积分后得 w 和 z 的关系，到此问题得到了解决。

引进对数速度平面不是解决困难的唯一途径，例如也可以引进速度平面使边界确定，但是得到的不是多角形，不存在类似于许瓦兹-克利斯多夫公式那样的普遍方法建立它和上半平面之间的

对应关系。所以从方法的普遍性来说不如引进对数速度平面为好。

下面以孔口出流和垂直平板绕流问题为例具体地求解析函数 $w = w(z)$ 。

a) 孔口出流

函数 $w = w(\zeta)$ 是

$$w = -\frac{Q}{\pi} \ln \zeta = -\frac{Q}{\pi} \ln r - i \frac{Q}{\pi} \theta \quad (7.19.2)$$

因为 ζ 平面上的射线 $\theta = 0, \theta = \pi$ 分别对应于 $\psi = 0$ 及 $\psi = -Q$, 且 r 由 0 经过 1 变至 ∞ 时, φ 由 $+\infty$ 经过 0 变至 $-\infty$, 对应点如图 7.19.1 中 (b) 与 (d) 所示。

现求 $z = z(\zeta)$. 为此写出多角形变至上半平面的许瓦兹-克利斯多夫公式

$$z = A \int \left[(\zeta - \xi_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (\zeta - \xi_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \dots \right. \\ \left. \times (\zeta - \xi_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1} \right] d\zeta + B \quad (7.19.3)$$

其中 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 是 n 角形的内角; ξ_1, \dots, ξ_n 分别是 z 平面上多角形的顶点在 ζ 平面实轴上的对应点的坐标; 常数 A 与 B 可以任意选择。在 (7.19.3) 式中有 $2n+3$ 个独立参数, 即 n 个 ξ , n 个 α 和两个复常数 A 与 B 中的四个实常数, 共 $2n+4$ 个, 其中应减去一个 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 必须满足的多角形关系, 即

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = (n-2)\pi$$

所以一共是 $2n+3$ 个独立参数。我们一共给定了 $2n$ 个参数, 即多角形的 n 个顶点的位置, 这样还剩下 3 个参数可任意支配。如果指定实轴上的三个 ξ 值: ξ_1, ξ_2, ξ_3 , 则变换函数 (7.19.3) 就是唯一的了。

在本问题中, 三角形 $BB'A$ 的三个顶角为

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_3 = 0 \quad (7.19.4)$$

而三角形顶点 B, B', A 在 ξ 平面实轴上的对应点是

$$\xi_1 = 1, \quad \xi_2 = -1, \quad \xi_3 = \infty \quad (7.19.5)$$

现在我们写出(7.19.3)式, 因为在 ξ 中有一个 ξ_n 是 ∞ , 因此(7.19.3)式须采取下列形式

$$\begin{aligned} \chi = A \int & \left[(\xi - \xi_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (\xi - \xi_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \dots \right. \\ & \left. \times (\xi - \xi_{n-1})^{\frac{\alpha_{n-1}}{\pi} - 1} \right] d\xi + B \end{aligned}$$

将(7.19.4)式和(7.19.5)式的值代入上式得

$$\chi = A \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} + B = A \arcsin \xi + B \quad (7.19.6)$$

为了确定 A 和 B , 我们要求 χ 平面的 CC' 点对应于 ξ 平面原点, B 点 $\chi = -ia$ 对应于 $\xi = 1$, A 点 $\chi = \infty$ 对应于 $\xi = +\infty$. 由 $0 \leftrightarrow 0$, $-ia \leftrightarrow 1$, 定出

$$A = -\frac{2ia}{\pi}, \quad B = 0$$

最终得到

$$\chi = -\frac{2ia}{\pi} \arcsin \xi \quad (7.19.7)$$

这就是我们所要求的函数 $\chi = \chi(\xi)$. 将(7.19.2)式和(7.19.7)式联合起来, 我们便得到 $\chi = \chi(w)$ 的以 ξ 为参数的参数方程. 为了得到速度 dz/dw 与 w 的关系, 尚须在(7.19.2)与(7.19.7)中加上关系式(7.19.1), 即

$$\frac{dz}{dw} = \frac{e^x}{|V_\infty|}$$

于是我们有

$$\frac{dz}{dw} = \frac{e^x}{|V_\infty|}, \quad \chi = -\frac{2ia}{\pi} \arcsin \xi, \quad w = -\frac{Q}{\pi} \ln \xi \quad (7.19.8)$$

现在求 dz/dw 与 w 的函数关系的参数形式, 可以取 ξ 或 χ 为参数, 这里取 χ 为参数是方便的, 在(7.19.8)式中消去 ξ 后得

$$\begin{cases} \frac{dz}{dw} = \frac{1}{|V_\infty|} e^x \\ w = -\frac{Q}{\pi} \ln \left(\sin \frac{i\pi\chi}{2a} \right) \end{cases} \quad (7.19.9)$$

为了求出 $z = z(\chi)$, 将(7.19.9)的第一式积分一次, 即

$$\begin{aligned} dz &= \frac{1}{|V_\infty|} e^x \frac{dw}{d\chi} d\chi \\ &= -\frac{iQ}{2|V_\infty|a} e^x \cot \frac{i\pi\chi}{2a} d\chi \end{aligned} \quad (7.19.10)$$

积分之得

$$z = -\frac{iQ}{2|V_\infty|a} \int e^x \cot \frac{i\pi\chi}{2a} d\chi + C \quad (7.19.11)$$

C 是积分常数. 将(7.19.9)的第二式和(7.19.11)式联合起来, 就得到复位势 $w = w(z)$ 的参数形式的方程

$$\begin{cases} w = -\frac{Q}{\pi} \ln \left(\sin \frac{i\pi\chi}{2a} \right) \\ z = -\frac{iQ}{2|V_\infty|a} \int e^x \cot \frac{i\pi\chi}{2a} d\chi + C \end{cases} \quad (7.19.12)$$

现在我们求射流自由面 $BC, B'C'$ 的方程. 因对称性, 只求 BC 的方程. 在 BC 上因 $|V| = |V_\infty|$, 故

$$\chi = \ln \frac{|V_\infty|}{|V|} + i\theta = i\theta \quad (7.19.13)$$

θ 为速度的方向角. 将(7.19.13)式代入(7.19.10)式得

$$dz = -\frac{Q}{2|V_\infty|a} e^{i\theta} \cot \frac{\pi\theta}{2a} d\theta$$

分成实部和虚部

$$dx = -\frac{Q}{2|V_{\infty}|a} \cos \theta \cot \frac{\pi\theta}{2a} d\theta$$

$$dy = -\frac{Q}{2|V_{\infty}|a} \sin \theta \cot \frac{\pi\theta}{2a} d\theta$$

积分之得

$$\begin{cases} x = -\frac{Q}{2|V_{\infty}|a} \int_{-\alpha}^{\theta} \cos \theta \cot \frac{\pi\theta}{2a} d\theta \\ y = b - \frac{Q}{2|V_{\infty}|a} \int_{-\alpha}^{\theta} \sin \theta \cot \frac{\pi\theta}{2a} d\theta \end{cases} \quad (7.19.14)$$

这里已经考虑了 B 点上的边界条件

$$\theta = -\alpha \text{ 时: } x=0, \quad y=b$$

(7.19.14)式是自由面 BC 以 θ 为参数的方程。现在我们由此出发求射流在无穷远处的宽度 b' ，及至今未定出的 $|V_{\infty}|$ 。在 ∞ 远 C 点处 $\theta=0$ ，将此代入(7.19.14)式得

$$b' = b - \frac{Q}{2|V_{\infty}|a} \int_{-\alpha}^0 \sin \theta \cot \frac{\pi\theta}{2a} d\theta \quad (7.19.15)$$

此外，我们还有下列关系式联系 b' 和 $|V_{\infty}|$

$$2|V_{\infty}|b' = Q \quad (7.19.16)$$

从(7.19.15)式及(7.19.16)式解出 $|V_{\infty}|$ 和 b' 得

$$|V_{\infty}| = \frac{Q}{2b'} \left[1 + \frac{1}{a} \int_0^{\alpha} \sin \theta \cot \frac{\pi\theta}{2a} d\theta \right] \quad (7.19.17)$$

$$b' = \frac{b}{1 + \frac{1}{a} \int_0^{\alpha} \sin \theta \cot \frac{\pi\theta}{2a} d\theta} \quad (7.19.18)$$

将(7.19.17)式代入(7.19.12)及(7.19.14)式便完全确定了复位势和自由面的方程。由(7.19.18)式立即推出射流的收缩比为

$$\frac{b'}{b} = \frac{1}{1 + \frac{1}{a} \int_0^{\alpha} \sin \theta \cot \frac{\pi\theta}{2a} d\theta} \quad (7.19.19)$$

当 $\alpha=0, \pi/2, \pi$ 时, b'/b 分别等于 $1, \pi/(2+\pi) \approx 0.61, 1/2$. (7.19.19) 式所确定的理论公式及流线方程(7.19.14)基本上和实验观测到的数值相近, 说明此理论在处理射流问题上是可用的.

b) 脱体绕流问题

函数

$$\zeta = -\sqrt{\frac{c}{w}} \quad (7.19.20)$$

将 w 中割去正 x 轴的全平面映射到 ζ 的上半平面, 而且对应点如图 7.19.3(c) 与 (e) 所示, 其中 c 是待定常数.

此外, 函数 $\chi = \chi(\zeta)$ 的形式和射流情形完全一样, 唯一的差别就是 $\alpha = \pi/2$, 于是

$$\chi = -i \operatorname{arc} \sin \zeta \quad (7.19.21)$$

考虑到

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{|V_\infty|} e^{\chi}$$

及

$$\operatorname{arc} \sin \zeta = -i \ln(i\zeta + \sqrt{1-\zeta^2})$$

我们有

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dw} &= \frac{1}{|V_\infty|} \exp[-\ln(i\zeta + i\sqrt{\zeta^2-1})] \\ &= \frac{i}{|V_\infty|} \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{c} - \sqrt{c-w}} \end{aligned}$$

即

$$\frac{dz}{dw} = \frac{i}{|V_\infty|} \frac{\sqrt{c-w} + \sqrt{c}}{\sqrt{w}} \quad (7.19.22)$$

对 w 积分之得

$$z = \frac{i}{|V_\infty|} \int_0^w \frac{\sqrt{c-w} + \sqrt{c}}{\sqrt{w}} dw$$

$$= \frac{i}{|V_{\infty}|} \left[\int_0^w \frac{(c-w)dw}{\sqrt{w(c-w)}} + \sqrt{c} \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{w}} \right]$$

$$= \frac{i}{|V_{\infty}|} \left[\int_0^w \frac{\left(\frac{c}{2} - w\right)dw}{\sqrt{w(c-w)}} + \frac{c}{2} \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{w(c-w)}} + 2\sqrt{cw} \right]$$

故

$$z = \frac{i}{|V_{\infty}|} \left[\sqrt{w(c-w)} + \frac{c}{2} \cos^{-1} \frac{c-2w}{c} + 2\sqrt{cw} \right] \quad (7.19.23)$$

现在我们研究 z 与 w 两平面边界对应关系。显然 $w=c$ 对应的是 $z=hi/2$ 。根据这个关系可以定出未知常数 c 。因为

$$\frac{hi}{2} = \frac{i}{|V_{\infty}|} \left(\frac{c\pi}{2} + 2c \right) = \frac{\pi+4}{2} \frac{ci}{|V_{\infty}|}$$

所以

$$c = \frac{h|V_{\infty}|}{\pi+4} \quad (7.19.24)$$

有了(7.19.23)式，其中的常数 c 由(7.19.24)式决定，我们就可以求出所有的感兴趣的物理量及空气动力学系数。

1) 平板上的速度分布及压力分布

共轭复速度是

$$\mathcal{V} = \frac{dw}{dz} = \frac{V_{\infty}}{i} \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{c-w} + \sqrt{c}}$$

在垂直平板上， $\psi=0, x=0$ 。于是 $w=\varphi, dw=d\varphi, dz=idy$ 。

平板上的速度分布是

$$\mathcal{V} = \frac{d\varphi}{idy} = \frac{|V_{\infty}|}{i} \frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{c-\varphi} + \sqrt{c}}$$

$$|V| = \frac{d\varphi}{dy} = |V_{\infty}| \frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{c-\varphi} + \sqrt{c}} \quad (7.19.25)$$

在 A 点 $\varphi=0$ ，于是 $|V|=0$ ；在 B_1 点 $\varphi=c$ ，于是 $|V|=|V_{\infty}|$ 。在平板其他点则按(7.19.25)式分布。

平板上压力系数是

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho |V_\infty|^2} = 1 - \left(\left| \frac{V}{V_\infty} \right| \right)^2 \\ &= 1 - \left(\frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{c-\varphi} + \sqrt{c}} \right)^2 \end{aligned}$$

故

$$\bar{p} = \frac{c - \varphi + \sqrt{c(c-\varphi)}}{c - \frac{\varphi}{2} + \sqrt{c(c-\varphi)}} \quad (7.19.26)$$

在A点上, $\varphi=0, \bar{p}=1$; 在B₁点上 $\varphi=c, \bar{p}=0$. 其他点按(7.19.26)式分布.

2) 平板所受的合力及合力系数

平板所受的合力是

$$\begin{aligned} P &= 2 \int_0^{\frac{h}{2}} (p - p_\infty) dy \\ &= \rho |V_\infty|^2 \int_0^{\frac{h}{2}} \left[1 - \left(\left| \frac{V}{V_\infty} \right| \right)^2 \right] dy \end{aligned}$$

将(7.19.25)式代入上式, 并将 dy 改写成 $\frac{dy}{d\varphi} d\varphi$, y 的积分上下限换成 φ 的上下限, 得

$$\begin{aligned} P &= \rho |V_\infty|^2 \int_0^c \left\{ \frac{\sqrt{c-\varphi} + \sqrt{c}}{\sqrt{\varphi}} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1}{|V_\infty|} \left[1 - \left(\frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{c-\varphi} + \sqrt{c}} \right)^2 \right] \right\} d\varphi \\ &= \rho |V_\infty| \int_0^c \left[\frac{\sqrt{c-\varphi} + \sqrt{c}}{\sqrt{\varphi}} - \frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{c-\varphi} + \sqrt{c}} \right] d\varphi \\ &= \rho |V_\infty| \int_0^c \left[\frac{\sqrt{c-\varphi} + \sqrt{c}}{\sqrt{\varphi}} + \frac{\sqrt{c-\varphi} - \sqrt{c}}{\sqrt{\varphi}} \right] d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\rho |V_\infty| \int_0^c \frac{\sqrt{c-\varphi}}{\sqrt{\varphi}} d\varphi = 2\rho |V_\infty| \int_0^c \frac{(c-\varphi)d\varphi}{\sqrt{\varphi(c-\varphi)}} \\
 &= 2\rho |V_\infty| \left[\sqrt{\varphi(c-\varphi)} + \frac{c}{2} \cos^{-1} \frac{c-2\varphi}{c} \right]_0^c \\
 &= \pi c \rho |V_\infty|
 \end{aligned}$$

将(7.19.24)式中的 c 的值代入得

$$P = \frac{\pi}{\pi+4} h \rho |V_\infty|^2$$

合力系数 (即阻力系数)

$$C_x = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho |V_\infty|^2 \cdot h} = \frac{2\pi}{\pi+4} \approx 0.88 \quad (7.19.27)$$

3) 自由面的形状

将(7.19.22)式积分之得

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{ih}{2} + \int_c^w \frac{1}{|V_\infty|} \frac{\sqrt{w-c} + i\sqrt{c}}{\sqrt{w}} dw \\
 &= \frac{ih}{2} + \frac{1}{|V_\infty|} \left\{ \sqrt{w(w-c)} - \ln \frac{\sqrt{w} + \sqrt{w-c}}{\sqrt{c}} \right. \\
 &\quad \left. + 2i\sqrt{cw} - 2ic \right\}
 \end{aligned}$$

自由面以 φ 为参数的方程为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{|V_\infty|} \left\{ \sqrt{\varphi(\varphi-c)} - \ln \frac{\sqrt{\varphi} + \sqrt{\varphi-c}}{\sqrt{c}} \right\} \\ y = \frac{h}{2} + \frac{2\sqrt{c}}{|V_\infty|} (\sqrt{\varphi} + \sqrt{c}) \end{cases} \quad (7.19.28)$$

当 $\varphi \rightarrow \infty$, x 和 y 都是趋于无穷的。

理论计算出来的自由流线的形状与平板在水中高速运行时所观察到的稳定间断面的形状十分接近, 但是却和空气绕过垂直平板时的结果相差很远。这是因为, 空气之间形成的这些间断面是

极不稳定的，最终破碎为大大小小的涡旋并引起间断面两边流体的掺混。因此，“自由流线”并不真的延伸到无穷远处，而是在平板后不远处又很快重新汇合起来。平板后的涡旋运动及掺混使那里的压力较未受扰动的压力 p_∞ 有显著减小，由此产生的“抽吸效应”使实际阻力较理论算出的结果(7.19.27)大得多。例如对于“无限长”平板实验得到的结果约为 $c \approx 2.0$ ，与理论结果 0.88 相比差不多大一倍半。

(C) 理想不可压缩流体定常无旋轴对称运动

7.20 轴对称运动及其流函数

在实际问题中，有时要处理旋转体的绕流问题。比如炮弹、火箭、水雷、机身、风洞等都是旋转体。它们的特点是有一对称轴（取作 x 轴），和对称轴垂直的任一横截面都是圆心在对称轴上的圆，如图 7.20.1 所示。描述这样的物体采用柱坐标 (r, θ, x) 或球坐标 (r, λ, θ) 比较方便（参看图 7.20.1(a) 与 (b)）。

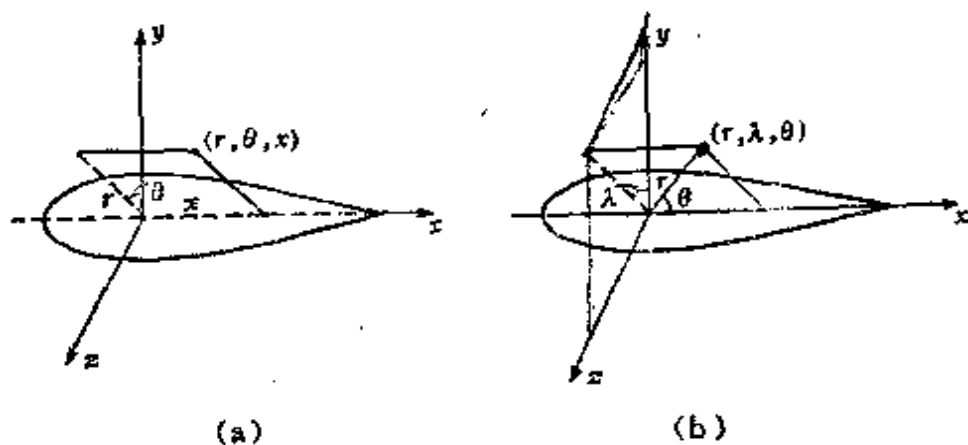


图 7.20.1

对轴对称物体，如来流平行于对称轴，那么从物理上来看整个绕流也应该是轴对称的，具体地来说也就是：

1) 在所有通过对称轴 Ox 的平面上流体质点的运动都是在这个平面上进行的，数学上可表达为：

$$v_{\theta}=0 \text{ (柱坐标)}, \quad v_{\lambda}=0 \text{ (球坐标)} \quad (7.20.1)$$

2) 在空间中任取一点 A , 将 A 点绕对称轴 Ox 旋转得一圆心在 Ox 轴上的圆, 圆上各点的物理量取相等的值. 数学上可表述为: 对任何物理量有

$$\frac{\partial}{\partial \theta}=0 \text{ (柱坐标)}, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda}=0 \text{ (球坐标)} \quad (7.20.2)$$

超星阅读器提醒您:
使用本复制品
请尊重知识产权!

这样, 对轴对称运动我们只须在一个通过 Ox 的平面 I 上研究流体的运动就可以了. 因为根据轴对称运动的性质, 通过 Ox 的所有其他平面上的运动都和平面 I 内相同. 由于这个性质在轴对称运动中我们只满足于在某一取定的通过 Ox 的平面 I 上研究流体的运动, 它代表了所有这类平面的流体运动. 但是必须要记住平面 I 上任一条曲线实际上代表的是一个以它为母线的旋转面, 平面 I 上任何一点代表的是一个圆. 上述事实在数学上表现为: 如果我们在柱坐标或球坐标系中研究流体的轴对称运动, 则由(7.20.1)推出未知函数减少了一个, 由(7.20.2)推出自变量也减少一个. 三维问题退化为二维问题, 数学上得到简化. 这里顺便可以提一下, 如果我们取直角坐标系, 则自变量和未知函数的个数都不能得到减少. 由此可见, 在轴对称运动中采用直角坐标系是不方便的. 对于不可压缩流体的定常轴对称运动而言, 柱标系统中的连续性方程是

$$\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial(rv_x)}{\partial x} = 0$$

由此推出存在着流函数 $\psi(x, r)$, 它使

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = rv_x, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -rv_r$$

或写作

$$v_x = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7.20.3)$$

在球坐标系中连续性方程是

$$\frac{\partial(r^2 \sin \theta v_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r \sin \theta v_\theta)}{\partial \theta} = 0$$

由此可引入流函数 $\psi(r, \theta)$, 它使

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = r^2 \sin \theta v_r, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = -r \sin \theta v_\theta$$

或写作

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (7.20.4)$$

与平面流动一样, 轴对称运动的流函数亦具有下列三个性质:

- 1) 流函数 ψ 可允许差一任意常数而不影响流体的运动。
- 2) $\psi = \text{常数}$ 是流面。以柱坐标为例证明这个性质, 球坐标也可以同样地证明。为了确定起见我们规定在 $\theta = 0$ 的平面上研究流体的运动, 在该平面上流线的方程是

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = 0$$

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dr}{v_r}$$

$$v_x dr - v_r dx = 0$$

将(7.20.3)式中 v_x, v_r 的表达式代入得

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = 0$$

即

$$d\psi(x, r) = 0$$

由此推出

$$\psi(x, r) = \text{常数}$$

说明 $\psi(x, r) = \text{常数}$ 是 $\theta = 0$ 平面上的流线, 实际上这是以 Ox 为对称轴的旋转流面。

3) 在 $\theta=0$ 的平面上取任一曲线弧 AB , 它代表旋转面 $ABA'B'$, 则通过 $ABA'B'$ 的体积通量 Q 等于 A 与 B 两点流函数数值之差乘以 2π , 若以

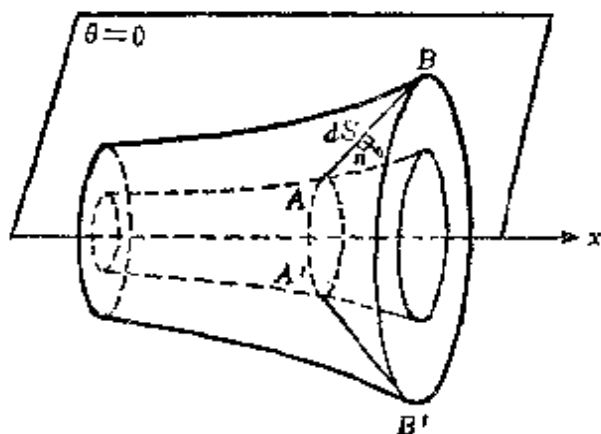


图 7.20.2

公式表之则有

$$Q = 2\pi(\psi_B - \psi_A)$$

现在我们在柱坐标中证明上述性质. 显然, 通过旋转面 $ABA'B'$ 的体积通量为:

$$Q = \int_S v_n dS = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (7.20.5)$$

其中 dS 是旋转面上的面积元素, \mathbf{n} 是 dS 面上的法线单位矢量, 其方向如图 7.20.2 所示. 上式可改写为

$$Q = \int_S [v_x \cos(n, x) + v_r \cos(n, r)] dS$$

考虑到

$$\cos(n, x) dS = r dr d\theta, \quad \cos(n, r) dS = -r d\theta dx$$

我们有

$$Q = \int_S [v_x r dr d\theta - v_r r d\theta dx]$$

因为 v_x 与 v_r 不依赖于 θ , 于是有

$$Q = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{AB} (rv_x dr - rv_r dx)$$

将(7.20.3)式代入得

$$Q = 2\pi \int_{AB} \frac{\partial \psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = 2\pi[\psi_B - \psi_A]$$

即得证明.

注意公式(7.20.5)和平面运动对应公式的差别. 平面运动中 没有 2π , 而轴对称运动必须添加 2π , 这个系数体现了轴对称效应.

我们在引进流函数的时候, 除了假定运动是定常轴对称而外

没有作其他任何假定，因此在有旋运动中流函数也是存在的。如果运动是无旋的，则我们在柱坐标系中有

$$\frac{\partial v_x}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial x} = 0$$

将 v_x 与 v_r 通过 ψ 表示出来的表达式(7.20.3)代入得

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0$$

即

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad (7.20.6)$$

这就是 ψ 在无旋运动时应该满足的微分方程。注意与平面情形不同，这个方程不是拉普拉斯方程。

容易证明，在球坐标系中 ψ 应该满足的方程是

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \quad (7.20.7)$$

根据(7.20.3)与(7.20.4)式及关系式

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (\text{柱坐标})$$

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \quad (\text{球坐标})$$

容易看出，速度势 φ 和流函数 ψ 之间存在着下列关系

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, & \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{柱坐标}) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, & \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (\text{球坐标}) \end{cases} \quad (7.20.8)$$

由此可见，已知 φ 由上式可求出 ψ ；反之，已知 ψ 由上式亦可求出 φ 。

7.21 轴对称流动问题的数学提法

对于定常无旋轴对称运动问题，可以有二种数学提法。第一种提法取速度势 φ 为未知函数；第二种提法则取流函数 ψ 为未知函数。现以绕流问题为例分别叙述之。



图 7.21.1

给定回转体 C ，无穷远处有一均匀的平行气流以速度 V_∞ 无冲角地向物体 C 流来（图7.21.1），要求这一绕流问题的解。

a) 以速度势 φ 为未知函数时问题的数学提法

求回转体 C 外区域的速度势 φ ，它满足

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad (\text{柱坐标}) \quad (7.21.1)$$

或

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (\text{球坐标}) \quad (7.21.2)$$

并满足下列两个边界条件：

$$1) \text{ 在 } C \text{ 上 } \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0;$$

$$2) \text{ 在无穷远处 } \text{grad} \varphi = V_\infty.$$

求出速度势 φ 后，速度分量由下式确定

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (\text{柱坐标}) \quad (7.21.3)$$

$$v_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \quad (\text{球坐标}) \quad (7.21.4)$$

而压力 p 则由伯努利积分确定.

b) 以流函数 ψ 为未知函数时问题的数学提法
求物体 C 外区域内的流函数 ψ , 它满足方程

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad (\text{柱坐标}) \quad (7.21.5)$$

或

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{球坐标}) \quad (7.21.6)$$

并满足边界条件:

- 1) 在物体 C 上 $\psi = 0$;
- 2) 在无穷远处满足无穷远处条件.

求出流函数 ψ 后速度分量可由(7.20.3)式或(7.20.4)式求出, 压力由伯努利积分求出.

我们知道在平面无旋问题中数学问题的提法一共有三种. 除了 φ 与 ψ 两种而外, 还可以对复位势解析函数 $w(z) = \varphi + i\psi$ 提数学问题, 而且利用复变解析函数解决问题要比调和函数有利得多. 因此平面无旋问题中我们主要是利用复位势解决问题, 亦即利用第三种数学提法. 这里自然地会提出这样的问题, 在轴对称流动中速度势 φ 和流函数 ψ 能不能组成解析函数, 能不能有第三种数学问题的提法呢? 令人遗憾的是在轴对称流动中 φ 和 ψ 不能组成解析函数. 这是因为, 虽然 φ 是调和函数但 ψ 不是调和函数, 或者说由(7.20.8)式确定的 φ 和 ψ 之间的关系不是哥西-黎曼条件, 因此就不能如同平面流动那样得到解析函数 $w(z) = \varphi + i\psi$, 因此也就没有类似的第三种数学问题提法. 由此可见在轴对称流动中我们只能对 φ 或 ψ 解拉氏方程或方程(7.21.5)与(7.21.6). 所以轴对称流动问题从数学上说要比平面流动问题困

难一些，解题方法也要少些。

现在我们来比较 φ 和 ψ 这两种数学提法。对于 φ 和 ψ 而言，我们需要解的都是二阶线性偏微分方程。但是 φ 满足的是经典的拉氏方程，对于它我们已经作了透彻的研究，而 ψ 却不是拉氏方程，对它我们还比较陌生，因此在这种情况下利用第一种数学提法解决问题显然是有利的。正因为如此，在以下各节我们只利用第一种数学问题的提法来解决实际问题。

解决拉氏方程(7.21.1)或(7.22.2)的方法最主要的有两种：(1)分离变数法；(2)源汇法。在第三节中我们通过解圆球绕流问题讲述分离变数法。在第四节中我们将讲述源汇法并用它来解决任意回转体的绕流问题。

7.22 圆球绕流问题

无穷远处速度为 V_∞ 的均匀来流不脱体地绕半径为 a 的圆球

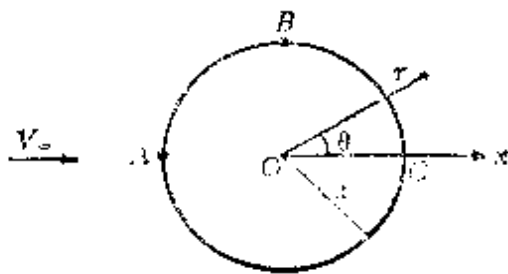


图7.22.1

流动。显然这一流动具有轴对称性，并且是无旋的。对称轴就是圆球的一根与来流平行的直径，我们把它取作 Ox 轴，并作为球坐标中 θ 角的起算轴（图7.22.1）。将速度势写为

$$\varphi = V_\infty r \cos \theta + \varphi'$$

其中第一项为均匀来流的速度势， φ' 为扰动速度势，它满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi'}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi'}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (7.22.1)$$

与边界条件：

$$1) \text{ 在 } r=a \text{ 处: } \frac{\partial \varphi'}{\partial r} = -V_\infty \cos \theta;$$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

2) 在无穷远处: $\frac{\partial \varphi'}{\partial r} = 0$.

采用数理方程中典型的分离变量法来解决这个问题. 设

$$\varphi' = P(r)Q(\theta) \quad (7.22.2)$$

因为 φ' 要满足第一个边界条件, 所以我们有

$$P'(a)Q(\theta) = -V_{\infty} \cos \theta$$

这说明如果 φ' 能分离变量, 则必有 $Q(\theta) = -\cos \theta$. 于是我们有

$$\varphi' = -P(r) \cos \theta$$

把它代入(7.22.1)式及边界条件, 得 $P(r)$ 应满足的常微分方程及边界条件

$$r^2 \frac{d^2 P}{dr^2} + 2r \frac{dP}{dr} - 2P = 0 \quad (7.22.3)$$

$$P'(a) = V_{\infty}, \quad P'(\infty) = 0$$

这是欧勒方程, 它的解具有 r^k 的形式, k 由方程

$$k(k+1) - 2 = 0$$

确定. 解此二次方程得 $k=1, -2$. 于是(7.22.3)的通解为

$$P(r) = Ar + \frac{B}{r^2}$$

其中 A, B 是任意常数, 它们由边界条件确定. 由 $P'(\infty) = 0$ 推出 $A=0$. 由 $P'(a) = V_{\infty}$ 推出 $B = -V_{\infty} a^3 / 2$. 从而有

$$P(r) = -\frac{V_{\infty} a^3}{2r^2}, \quad \varphi' = \frac{V_{\infty} a^3 \cos \theta}{2r^2}$$

于是圆球绕流问题的速度势 $\varphi = V_{\infty} r \cos \theta + \varphi'$ 为

$$\varphi = V_{\infty} r \cos \theta \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \quad (7.22.4)$$

根据 φ 与 ψ 的关系, 容易求出

超星浏览器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

$$\psi = \frac{1}{2} V_{\infty} r^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \quad (7.22.5)$$

由此可以求出圆球表面上的速度分布、压力分布以及圆球所受的合力。根据(7.21.4)及(7.22.4)有

$$\begin{cases} v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = V_{\infty} \cos \theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \\ v_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -V_{\infty} \sin \theta \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \\ v_{\phi} = 0 \end{cases}$$

在球面 $r = a$ 上，速度分布是

$$v_r = 0, \quad v_{\theta} = -\frac{3}{2} V_{\infty} \sin \theta, \quad v_{\phi} = 0$$

根据伯努利积分，圆球上压力系数分布是

$$\bar{p} = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2} = 1 - \left(\frac{V}{V_{\infty}} \right)^2 = 1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta$$

由此可见，在 A 与 C 两点速度最小，压力最大； B 点处速度最大，取 $3V_{\infty}/2$ 值，而压力系数最小取 $-5/4$ 。我们看到，圆球上最大速度 $3V_{\infty}/2$ 较圆柱上的最大速度 $2V_{\infty}$ 为小，这是因为圆球对气流的扰动较圆柱对气流的扰动为小的原因。整个速度分布和压力分布都呈正弦曲线。我们还可以看到， \bar{p} 对 x 轴及 y 轴都是对称的，所以合力为零，即圆球不受到任何作用力，这就是空间绕流问题的达朗贝尔悖论在圆球情形下的特例。这个结论当然与实际不符合，产生这种矛盾的原因是因为我们没有考虑粘性的影响。最后我们应该指出，圆球绕流问题的流动图案及圆球后部的速度分布和压力分布的理论结果与实验相差很远。由于边界层的作用，流体在 B 点前后已经脱体了，在物体后部形成很乱的涡旋区，这就根本上改变了流动图案及圆球后部的速度分布及压力

分布，导致不脱体绕流的理论不能给出与实际符合的结果。

7.23 回转体的绕流问题

因为速度势 φ 和流函数 ψ 满足的方程都是线性的，所以同样可以用基本解的叠加法解决问题。用源汇法解决轴对称问题其基本精神和 7.9 节中平面运动情形完全一样，它也包含基本流动的研究和基本流动叠加两大部分。通过叠加可以解决反问题也可以解决正问题。下面先研究基本流动，而后以圆球绕流问题为例说明如何利用源汇法解反问题。最后以回转体绕流问题为例说明利用基本流动的叠加解决正问题的具体步骤。

a) 基本流动

1) 均匀平行流

空间中有速度为 V_∞ 且平行 x 轴的均匀平行流。显然，此流动是无旋轴对称的，因而存在着速度势函数 φ 及流函数 ψ 。根据柱坐标系中 φ, ψ 和速度之间的关系(7.21.3)与(7.20.3)我们有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = V_\infty, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = rV_\infty, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$$

由此得

$$\varphi = V_\infty x, \quad \psi = \frac{1}{2} V_\infty r^2 \quad (7.23.1)$$

根据柱坐标和球坐标之间存在着的坐标转换关系

$$x = r_{\text{球}} \cos \theta, \quad r_{\text{柱}} = r_{\text{球}} \sin \theta$$

从(7.23.1)式出发可以直接写出均匀直线流在球坐标系中的表达式(为了区别，暂时用 $r_{\text{柱}}$ 与 $r_{\text{球}}$ 代表柱坐标和球坐标系中的 r 。一旦转到球坐标中去后，脚标就不再写了)。

$$\varphi = V_{\infty} r \cos \theta, \quad \psi = \frac{1}{2} V_{\infty} r^2 \sin^2 \theta \quad (7.23.2)$$

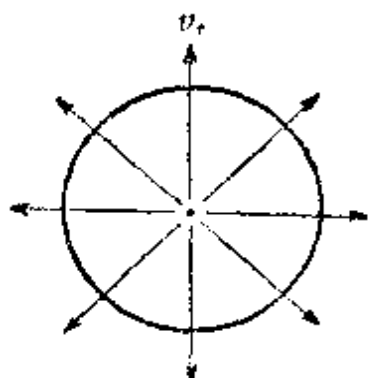


图 7.23.1

2) 空间点源

设在坐标原点 O 处有一强度为 $Q > 0$ 的点源. 取球坐标系, 根据对称性易知 $v_{\theta} = v_{\lambda} = 0$, 速度只有 r 方向分量 v_r . 以 O 为心作一半径为 r 的球 (图 7.23.1) 则根据质量守恒有

$$v_r \cdot 4\pi r^2 = Q$$

由此得

$$v_r = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

根据速度分布容易验证, 点源产生的流动是无旋轴对称的, 因此存在 φ 及 ψ . 根据 (7.21.4) 及 (7.20.4) 式, 我们有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{Q}{4\pi} \sin \theta, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 0$$

积分之并令 $\theta = 0$ 时 $\psi = 0$ 得

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi r}, \quad \psi = \frac{Q}{4\pi} (1 - \cos \theta) \quad (7.23.3)$$

现将 (7.23.3) 式转换到柱坐标系中去, 考虑到

$$r_{球} = \sqrt{x^2 + r_{柱}^2}, \quad \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + r_{柱}^2}}$$

我们得

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi \sqrt{x^2 + r^2}}, \quad \psi = \frac{Q}{4\pi} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} \right) \quad (7.23.4)$$

若点源不在原点 O 处, 而在坐标为 (ξ, η) 点上, 则 φ 与 ψ 为

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi \sqrt{(x-\xi)^2 + (r-\eta)^2}} \quad (7.23.5)$$

超星浏览器提醒您：
使用本复制品
请尊重知识产权！

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi} \left(1 - \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (r-\eta)^2}} \right) \quad (7.23.6)$$

在前面的式子中用 $-Q$ 代替 $Q(Q>0)$, 则得点汇流动的速度势及流函数.

3) 空间偶极子

空间偶极子是直线 L 上两强度相同并满足 $Q \cdot OO' \rightarrow m$ 的源汇点对无限逼近时所产生的流动. 设 O 点处有一点汇其强度为 Q , O' 点有一点源 (图 7.23.2) 其强度亦为 Q , 则它们对任一点 M 所产生的速度势是

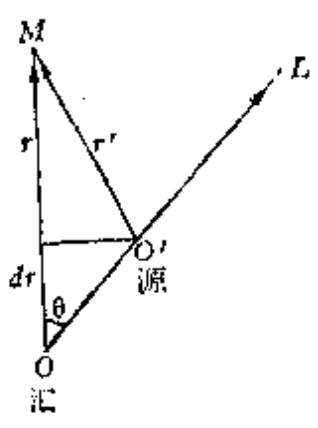


图 7.23.2

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{Q}{4\pi r'} + \frac{Q}{4\pi r} \\ &= -\frac{Q}{4\pi} \cdot OO' \cdot \frac{\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}}{OO'} \end{aligned}$$

令 O' 趋于 O , 并要求 $Q \cdot OO' \rightarrow m$, 则

$$\varphi = \lim_{\substack{O' \rightarrow O \\ Q \cdot OO' \rightarrow m}} \varphi = -\frac{m}{4\pi} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (7.23.7)$$

$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{r} \right)$ 表示函数 $\frac{1}{r}$ 在 L 方向的方向导数. 考虑到

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{ds} = \frac{\cos \theta}{r^2}$$

θ 的意义见图 7.23.2, 我们有

$$\varphi = -\frac{m \cos \theta}{4\pi r^2} \quad (7.23.8)$$

引进偶极矩矢量 m , 其大小为 m , 方向由汇到源, 则上式亦可改写为

$$\varphi = -\frac{m \cdot r}{4\pi r^3} \quad (7.23.9)$$

现在考虑偶极子方向与 x 轴正向重合时的特殊情形。取球坐标系，此时(7.23.8)中的 θ 和球坐标系中的坐标 θ 重合。根据 φ 和 ψ 的关系式(7.20.8)有

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{m}{2\pi r} \sin \theta \cos \theta$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{m}{4\pi r^2} \sin^2 \theta$$

积分之得

$$\psi = \frac{m \sin^2 \theta}{4\pi r} \quad (7.23.10)$$

此时要求 $\theta=0$ 时 $\psi=0$ 。

将(7.23.8)和(7.23.10)式转换到柱坐标中去有

$$\varphi = -\frac{m}{4\pi} \frac{x}{(x^2+r^2)^{3/2}} \quad \psi = \frac{m}{4\pi} \frac{r^2}{(x^2+r^2)^{3/2}} \quad (7.23.11)$$

若偶极子位于 (ξ, η) 点上则有

$$\begin{cases} \varphi = -\frac{m}{4\pi} \frac{x-\xi}{[(x-\xi)^2+(r-\eta)^2]^{3/2}} \\ \psi = \frac{m}{4\pi} \frac{(r-\eta)^2}{[(x-\xi)^2+(r-\eta)^2]^{3/2}} \end{cases} \quad (7.23.12)$$

b) 平行流和偶极子的叠加，圆球绕流问题

将无穷远处速度为 V_∞ 且平行 x 轴的统一平行流与位于原点的大小为 m ，偶极矩方向指向 x 轴负向的偶极子叠加起来(图 7.23.3)，我们得复合流动的速度势和流函数在球坐标系中的表达式为

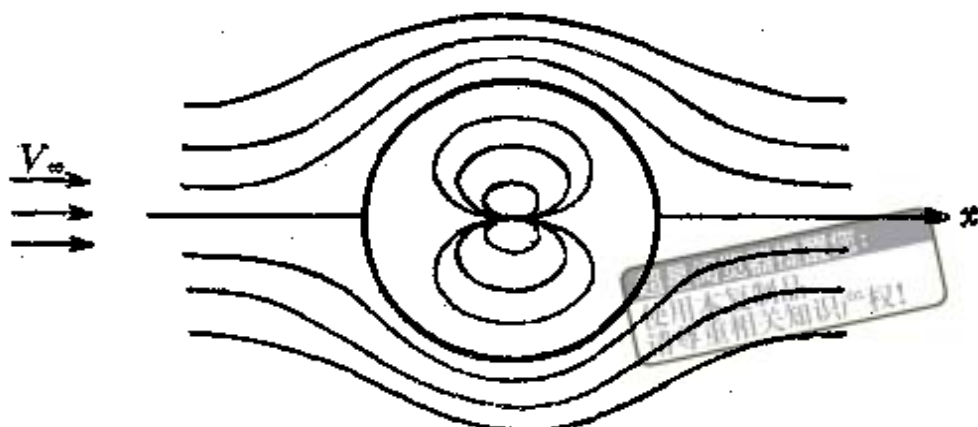


图 7.23.3

$$\varphi = V_\infty r \cos \theta + \frac{m \cos \theta}{4\pi r^2} \quad (7.23.13)$$

$$\psi = \frac{1}{2} V_\infty r^2 \sin^2 \theta - \frac{m \sin^2 \theta}{4\pi r} \quad (7.23.14)$$

在(7.23.14)中令 $\psi = 0$, 得零流线的方程为

$$\left(\frac{1}{2} V_\infty r^2 - \frac{m}{4\pi r} \right) \sin^2 \theta = 0$$

于是零流线是 $\theta = 0, \pm\pi, \dots$ 或

$$r = \sqrt[3]{\frac{m}{2\pi V_\infty}}$$

前者为正 x 轴和负 x 轴, 后者为半径等于 $\sqrt[3]{m/(2\pi V_\infty)}$ 的圆球,

由此可见复合流动代表的是半径为 $\sqrt[3]{m/(2\pi V_\infty)}$ 的圆球绕流问题,

若圆球的半径 a 已知, 则 m 可通过 a 表出, 它是

$$m = 2\pi V_\infty a^3$$

将其代入(7.23.13)及(7.23.14)式得圆球 $r = a$ 的绕流问题的 φ 及 ψ 为

$$\begin{cases} \varphi = V_\infty r \cos \theta \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] \\ \psi = \frac{1}{2} V_\infty r^2 \sin^2 \theta \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] \end{cases} \quad (7.23.15)$$

与(7.22.4)和(7.22.5)式完全一样。

c) 平行流和源汇连续分布的叠加，回转体无冲角绕流问题
有一对称回转体，其边线的方程为 $r=R(x)$ 。无穷远处有一速度为 V_∞ 的均匀来流沿对称轴线方向无冲角地流过此物体（图

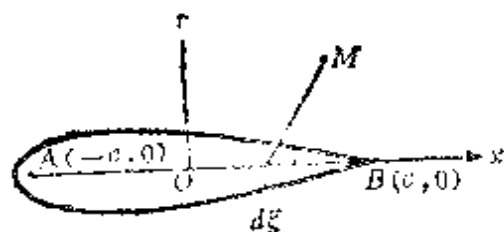


图 7.23.4

7.23.4), 试求此绕流问题的解。数学上也就是要求物体外满足拉氏方程的速度势 φ , 它满足:

- 1) 无穷远处条件;
- 2) 物体 $r=R(x)$ 上的绕流条件

$$\text{件 } \frac{v_r}{v_x} = \frac{dR}{dx}.$$

为了求出上述绕流问题的解，我们将平行于 x 轴，速度为 V_∞ 的均匀平行流和 x 轴上连续分布在 AB 上的源汇叠加起来。采用柱坐标系，根据(7.23.1)式，均匀平行流的速度势为

$$\varphi = V_\infty x$$

现写出源汇连续分布的速度势函数 φ 。设单位长度上源汇的密度分布是 $q(\xi)$ ，则 AB 上任一线元素 $d\xi$ 上的点源强度为 $q(\xi)d\xi$ 。它对空间中任一点 M 感应的速度势 φ 是

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{q(\xi)d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + r^2}}$$

由此推出，整个 AB 上源汇连续分布对 M 点感应的速度势是

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{q(\xi)d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + r^2}}$$

叠加后复合流动的速度势是

$$\varphi = V_\infty x - \frac{1}{4\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{q(\xi)d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + r^2}} \quad (7.23.16)$$

显见，由(7.23.16)式确定的速度势函数是满足拉氏方程及无穷远处边界条件的。现在的问题是选择适当的 $q(\xi)$ 使其满足物体上的绕流条件。为此我们求 v_x, v_r ，它们是

$$v_r = \frac{r}{4\pi} \int_{-c}^{+c} \frac{q(\xi) d\xi}{[(x-\xi)^2 + r^2]^{3/2}} \quad (7.23.17)$$

$$v_x = V_\infty + \frac{1}{4\pi} \int_{-c}^{+c} \frac{(x-\xi)q(\xi) d\xi}{[(x-\xi)^2 + r^2]^{3/2}}$$

代入绕流条件中去有

$$\begin{aligned} & \frac{r}{4\pi} \int_{-c}^{+c} \frac{q(\xi) d\xi}{[(x-\xi)^2 + r^2]^{3/2}} \\ &= \frac{dR}{dx} \left[V_\infty + \frac{1}{4\pi} \int_{-c}^{+c} \frac{(x-\xi)q(\xi) d\xi}{[(x-\xi)^2 + r^2]^{3/2}} \right] \end{aligned}$$

或写成

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-c}^{+c} \frac{\left[r - (x-\xi) \frac{dR}{dx} \right] q(\xi) d\xi}{[(x-\xi)^2 + r^2]^{3/2}} = V_\infty \frac{dR}{dx} \quad (7.23.18)$$

这是确定源汇强度分布函数 $q(\xi)$ 的积分方程。求出 $q(\xi)$ ，代入(7.23.16)就可以得到任意回转体绕流问题的解。据此可计算一切感兴趣的物理量。

现在的问题归结为求积分方程(7.23.18)的解。存在着若干种近似方法求解积分方程，但计算量都很大。近几十年来高速电子计算机及与之相关的近代计算技术得到了飞速的发展。源汇法和近代计算技术相结合便产生了现已广泛采用的有限基本解方法，利用它已经能足够精确地求出积分方程(7.23.18)的数值解来。关于这方面的内容将会有专门的课程讲授，下面我们只满足于向读者介绍一种在细长回转体情形下求近似积分方程解的方法。

所谓细长回转体指的是长比宽大得很多的回转体。于是扰动速度 v_r, v_x 及 dR/dx 皆为一级微量。仿照薄翼绕流问题中的处理方法，我们将绕流条件

$$v_r = (V_\infty + v_x) \frac{dR}{dx}$$

线性化。首先忽略二阶微量 $v_x dR/dx$ 得

$$r=R \text{ 处: } v_r(x,r) = V_\infty \frac{dR}{dx} \quad (7.23.19)$$

其次设法将边界条件(7.23.19)转移到轴 $r=0$ 上满足。完全模仿薄翼的做法应该有

$$v_r(x,0) = V_\infty \frac{dR}{dx}$$

超星浏览器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

但这样的转移法是不对的。原因是平面问题中的 $v_y(x,y)$ 和轴对

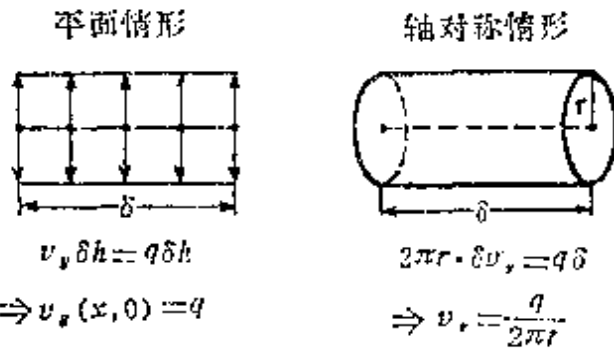


图 7.23.5

称问题中的 $v_r(x,r)$ 在轴上的行为方面存在着很大的差异。试看图 7.23.5。平面问题中, v_y 在轴上取有限值 q , 而在轴对称问题中, v_r 在轴上有 $1/r$ 的奇性。 $(v_r)_{r=R}$ 和 $(v_r)_{r=0}$ 相差很多而不是一个可以

忽略的高级微量, 因此不能直接将 v_r 转移到轴上。虽然如此, 我们注意到 $v_r r = q/2\pi$ 没有奇性, 因此, 如果将 (7.23.19) 式改写为

$$v_r r = V_\infty R \frac{dR}{dx}$$

然后再将函数 $v_r r$ 转移到轴上满足, 则情形将和薄翼问题中一样, 不产生任何麻烦。此时我们有

$$(v_r r)_{r=0} = V_\infty R \frac{dR}{dx} \quad (7.23.20)$$

将 v_r 的表达式(7.23.17)代入得确定 $q(\xi)$ 的近似积分方程为

$$\left[\frac{r^2}{4\pi} \int_{-c}^{+c} \frac{q(\xi) d\xi}{[(x-\xi)^2 + r^2]^{3/2}} \right]_{r=0} = V_\infty R \frac{dR}{dx} \quad (7.23.21)$$

注意，在(7.23.21)的积分中， x 是固定点， ξ 是变动点，它可以
 从 $-c$ 变到 $+c$ （见图7.23.6），现在计算
 (7.23.21)左边的积分值。容易看到当
 ξ 在间隔 $x-e < \xi < x+e$ (e 是一个任意
 小的数)之外时，因 $r=0$ ，积分取零值。

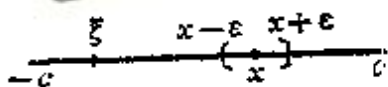


图 7.23.6

但在间隔 $x-e < \xi < x+e$ 之中时，因分子分母皆为零，积分可以
 取有限值。从物理上来看，对于轴上坐标为 x 的这一点来说，除
 了这点邻域内的源汇对它感应速度外，其他地方的源汇对它都不
 起作用。上述想法可用数学语言精确地表述如下：

$$\begin{aligned}
 (rv_r)_{r=0} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{r^2}{4\pi} \left[\int_{-c}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{+c} + \int_{x+\varepsilon}^0 \right] \right\}_{r=0} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{r^2}{4\pi} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{q(\xi) d\xi}{[(x-\xi)^2 + r^2]^{3/2}} \right]_{r=0} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{q(x)}{4\pi} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{d\left(\frac{x-\xi}{r}\right)}{\left[\left(\frac{x-\xi}{r}\right)^2 + 1\right]^{3/2}} + O(\varepsilon) \right]_{r=0} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{-q(x)}{4\pi} \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + r^2}} \Big|_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} + O(\varepsilon) \right]_{r=0} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{q(x)}{2\pi} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + r^2}} + O(\varepsilon) \right]_{r=0} \\
 &= \frac{q(x)}{2\pi}
 \end{aligned}$$

将上述结果代入(7.23.21)式得

$$q(x) = 2\pi V_{\infty} R \frac{dR}{dx} = V_{\infty} S'(x)$$

其中 $S(x) = \pi R^2(x)$ 是回转体的横截面函数。给定回转体的边线



方程 $r=R(x)$ 后，作 $S(x)$ 及 $V_{\infty}S'(x)$ 即得源汇强度的分布函数 $q(x)$ 。

(D) 理想不可压缩流体定常空间运动

7.24 有限翼展机翼理论

在前几节中，我们已经解决了理想不可压缩流体绕翼型的二维定常流动问题。这是一种理想化的简化模型。就是说，我们把机翼看作一个无限长的剖面形状完全相同的柱体，而且来流方向正与机翼轴线相垂直。在这种情况下，整个流场完全没有沿翼展方向的横向流动，在每一个垂直于机翼轴线的平面内，流动情况完全一样。各个剖面上速度环量与升力的分布都是均匀相等的。在小攻角范围内，由于粘性的作用产生了绕机翼的环量，其大小恰好使后驻点推移至尖后缘从而阻止了边界层分离，此时，流体贴着上下表面平滑地从后缘离开，在翼型后面没有尾涡区，整个流场都是连续的无旋位势流。研究发现在理想流体的范围内，机翼受到举力的作用但是不遭受任何阻力。

然而，实际的机翼都是有限长的，而且沿翼展各个截面上的翼剖面形状与飞行姿态都可以有所变化。所以绕实际机翼的流动必定是三维的，它比绕二维翼型的流动要复杂很多。此时如果我们仍然认为整个流场都是连续的无旋流动，那么根据三维流动的达朗贝尔悖论，机翼将不受到包括阻力和举力在内的任何类型力的作用。这当然和机翼是受举力作用这一事实不符，上述矛盾说明在流场中必定存在着涡旋。那么三维翼型绕流究竟具有怎样的涡旋分布？它与二维翼型绕流究竟有哪些差别？它有哪些基本的特点呢？

a) 流动图案及其分析

为了获得对有限翼展机翼绕流的规律的认识，我们首先做一个风洞实验，进行观察。将一个有限翼展直机翼安装在试验段中，

超星阅读器提醒您：
超星数字图书馆 000001

使它有一个不大的正攻角。在机翼的上下表面粘上几排短丝线，沿机翼后缘粘上一排末端系有小棉花球的长丝线。在吹风时，我们发现棉花球不停地转动，左右两侧的转动方向正好相反。越靠近两翼尖转动越剧烈，而到机翼中间，则只是略有振动而已。如图 7.24.1 所示。另外在机翼上表面丝线均向中间偏斜，而在下表面，丝线则向两翼尖偏斜。这说明流过机翼表面的流体具有横向的流动分量，上下两边的横向流动方向相反（见图 7.24.2）；在机翼后面沿整个后缘顺着气流方向向后延伸有一个旋涡区域（常称为尾涡区），这些现象都是在绕二维翼型的流动中所没有的。



图 7.24.1

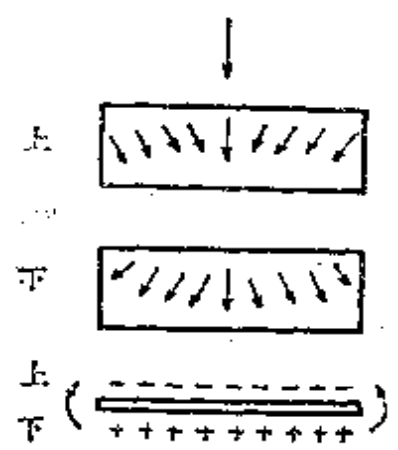


图 7.24.2

那末为什么会发生这些现象呢？其实，这是不难理解的。我们知道，当气流以正攻角流过机翼时，机翼受到向上的升力，因此机翼的下表面压力显然大于上表面压力。压力高的那部分的气流有向压力低的那部分流去的倾向，在无限翼展的情形下，翼展两端都伸展到无穷远去，因此纵然有上述趋势气流也无法从下表面流入上表面。但是如果机翼在翼尖这个地方被切断了形成有限翼展机翼，则在上下压力差的作用下，流体将从下表面绕过翼尖翻转到上表面，因此在下表面产生向外的横向速度分量。而在上表面则正好相反，产生向内的横向速度分量。与展向流动相适应，翼尖处的压力差被抹平了，环量等于零。此外在下表面，压力将从中间最高的地方往两侧逐渐地降低，而在上表面则相反，压力从两端最高的地方向中心处连续地降低。因而上下翼面之压力差

浏览器提醒您：
请关闭本浏览器

以及升力和环量沿翼展的分布将是变化的，由中间的最大值往外

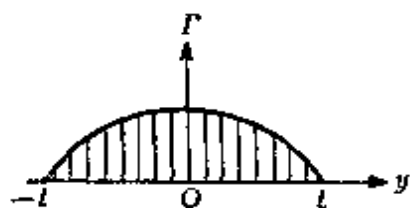


图 7.24.3

面逐渐减低，到翼尖处下降到零，如图 7.24.3所示。这点和无限翼展环量均匀分布的情形很不相同。由于翼剖面由中间向两端推延时，其上的环量值是不断减少的，根据旋涡不生不灭性质，在每个剖面的后缘点上必有一定数量的涡旋

离开并延伸到机翼外面的流体中去，一直到无穷远处，从而组成涡带并在整个有限翼展机翼的后面形成了连续的延伸到无穷远处的

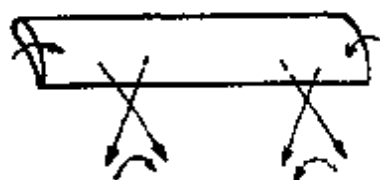


图 7.24.4

涡面。尾涡区的存在还可以有另一种解释。从机翼上下两表面流下来的流体在尾缘后面相遇，它们保留了展向的动量，因此在分界面的上下两侧流体具有相反的横向速度分量，也就是说这个分界面是一个切向速度间断面(图7.24.4)。

正如我们在二维机翼理论中所看到的，

这样一个切向速度间断面实质上就是一个涡层。从三维空间的角度来看，就是一个涡面。这涡面上的旋涡轴线的方向应与这速度差垂直，因此也就是沿着主流的方向。在对称平面的两边涡旋具有不同的旋转方向。需要指出的是，这个涡面与代表薄翼的涡层有一个原则的区别，就是它不能承受上下的压力差，也就是说穿过这个涡面时，压力是连续的。这种涡面是很不稳定的，最终在

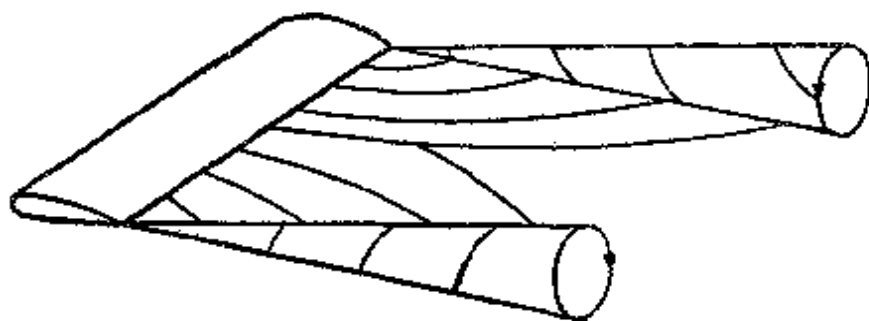


图 7.24.5

离开机翼后面不远的地方翻卷成两个孤立的大旋涡，如图 7.24.5 所示。根据涡旋守恒定理，涡旋总是附属于同一些流体质点，因此涡旋是顺着流线方向，基本上也就是顺着来流方向向后延伸，直至无穷远处。所以尾涡面也就是流面。

我们把这个在机翼后面可随流体一起运动的尾涡区的涡旋称为自由涡。与此相对照，把固定在机翼内部不能移动的涡旋称为附着涡。

由于自由涡的存在在与来流垂直的横向平面上将存在自由涡诱导的向下的流体运动——下洗运动。随着机翼的前进，飞行的路程连续地增长，机翼后面的新的涡旋成分以及它所伴生的新的下洗运动不断地产生。它们的能量必须由运动着的机翼连续地对流体做功供给，这个功就表现为机翼要克服一定的阻力。因此，有限翼展机翼与二维翼型不同，即使在理想流体理论的范围内，也要承受一定的阻力。这个阻力是与自由涡，也就是与升力以及物体的形状密切相关，而与流体的粘性无关。也可以说，这是为产生飞行所需要的升力所必须付出的代价。我们把这部分阻力称为诱导阻力。

总结起来，有限翼展机翼绕流与二维翼型绕流有一些重大的区别，主要是：

1) 有限翼展机翼绕流必定是三维流动，在翼面上存在横向的流动，各个剖面上的上下表面的压力差、升力与环量沿翼展的分布是不均匀的。

2) 除了在机翼内部有变强度的附着涡外，在机翼后面还存在一个从尾缘向后延伸的自由涡面。

3) 即使在理想流体理论的范围内，也存在一定的诱导阻力。这个阻力和流体的粘性无关，是一个只依赖机翼平面形状和剖面形状的物理量。

b) 举力线理论模型

上面我们通过实验观察获得了一些关于有限翼展机翼绕流的

感性认识，并且通过基本上是直观的物理的分析、判断和推理，形成了一些基本的概念和看法。但为了弄清事物的本质，真正掌握它的规律性，尤其是为了满足生产实践所提出的给出定量结果的要求，必须进一步建立理论模型，并把它表述成数学问题。

我们将限于讨论大展弦比的小冲角下的直机翼。所谓直机翼，

就是指机翼的横轴，即各剖面的1/4翼弦点的连线，是一条垂直于来流方向的直线段 AB ，见图 7.24.6。我们对机翼的平面形状与剖面形状不作任何限制。

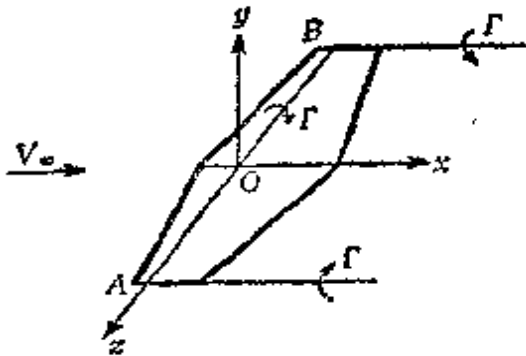


图 7.24.6

将坐标架固定在机翼上，机翼对称平面取作 Oxy 坐标平面， x 轴指向来流方向， z 轴与机翼的横轴

重合， y 轴垂直向上。

根据上述实验观察，问题的数学提法可表述如下：要求机翼和自由涡面之外的调和函数——速度势 φ ，它满足无穷远处的来流条件、机翼表面上的绕流条件以及尾涡面上间断条件。利用位势理论确定有限翼展的速度势 φ 是非常困难的。主要的困难溯源于：(1) 从机翼后缘延伸出去的自由涡面，其形状和位置事先是不知道的；(2) 有限翼展绕流问题是一个机翼形状很复杂的三维流动。在空气动力学发展的初期，普朗特提出了著名的处理大展弦比机翼的举力线理论，他仔细地分析了实验事实，准确地抓住了现象的主要方面并提出了几个大胆的简化假设，从而成功地求出了在一定条件下与实验结果符合得很好的作用在机翼上的举力和诱导阻力。这个理论在亚音速机翼的设计和计算中一直到今天仍然具有重大的现实意义。学习普朗特的举力线理论我们应该很好地学会他重视实验，重视观察，一切从实际出发，善于分清主次，大胆创新，大胆简化的本领。在计算机和计算技术高度发展的今天，这种力学工作者所特有的能力不仅不应该削弱，而且还

其中点涡的强度为 Γ , 偶极子强度为 m .

应该加强, 因为不管是理论, 实验或是计算, 其共同的基础不仅是数学而且还包括对流动的力学本质的透彻了解.

对于大展弦比机翼, 普朗特主要作了如下三个主要的简化假设:

1) 自由涡面是平行来流的半无穷平面

首先假设尾涡是直的并且和来流平行, 这样自由涡面的形状和位置完全确定, 从而解决了尾涡面的形状事先不知道的困难. 事实上涡线是跟随流体一起运动的, 在它本身的诱导下, 随着向后距离的增加将产生向下的下洗速度使尾涡偏离来流方向, 发生向下弯曲的变形, 并在本身诱导速度的作用下在离开后缘一倍翼展左右的地方向后逐渐翻卷成两个孤立的大旋涡. 由于上述变形主要发生在远离机翼的地方, 因此在举力不大, 尾涡较弱的情况下可忽略这种变形对举力和诱导阻力所产生的效应. 我们可近似地假定每条尾涡仍然沿着原来的来流方向, 整个自由涡面位于平面内并向后延伸至无穷远处.

2) 平面截面假定

在大展弦比和小冲角的情况下, 除翼尖部分以外, 各个剖面上的横向速度分量 w 及各物理量沿展向的变化, 比起其他方向速度分量及物理量的变化要小得多. 因此, 可以近似地把每一个横截面上的流动看作是均匀流绕该翼型的二维平面流动. 当然在不同的横截面上的平面流动, 彼此并不一样. 也就是说, 从局部来说, 可近似地看作是二维流动, 但在整体上, 仍是三维流动. 这就是所谓的平面截面假定. λ 愈大, 这个假定愈和实际接近, 当 $\lambda \rightarrow \infty$, 即考虑的是无限翼展机翼时这个假定是准确的.

有了平面截面假定如果我们满足于求机翼的总体性特征量——举力和诱导阻力, 那么就不必去求三维流动的调和函数 φ , 而只要设法找出环量 Γ 沿翼展方向的分布即可. 因为若已知 Γ 沿翼展的分布, 就可以利用茹柯夫斯基定理, 求出每个翼剖面上所受的举力. 然后沿翼展积分即得整个机翼所受的总举力.

3) 举力线模型

如果机翼后面没有自由涡，则每个截面上的流动就像二维翼型一样。根据来流速度、冲角以及翼剖面的形状便可按二维机翼理论计算出 Γ 的分布，进而求出作用力。而且知道，此作用力只有升力，没有阻力。但在有限翼展情形下尾部有自由涡。实际作用于每个翼剖面的来流，就不再简单是原来的那个均匀来流，而必须在这之上叠加一个自由涡所感生的速度场。与之同时，来流的改变反过来也会对自由涡的强度产生影响。这样在尾涡和来流之间便发生了相互作用，此时我们不能象二维机翼那样单纯地知道 V_∞, α 及翼剖面形状就可求出 Γ 分布，而必须考虑尾涡与来流的相互影响，在相互作用中求出 $\Gamma(z)$ 。

为了计算 Γ 分布我们须要进一步对机翼和自由涡面作出近似。最简单的也是最粗糙的模型是用一根放置在离前缘 $1/4$ 弦长处的直线附着涡丝来代替机翼（见图 7.24.7(a)）。根据亥姆霍兹定理，此涡丝不能在流体中发生和终止，因此必须在翼展两端沿来流方向伸展至无穷，从而形成自由涡。用这种“马蹄形涡”来研究远处流场是足够的。例如计算飞机下边的地面上的压力分布，或计算水翼船在原来静止的水面上所产生的水波等。但是对于计算近处流场以及机翼所受的举力及诱导阻力，这样的模型是不够的。因为 Γ 沿展向是不变的，而事实上 Γ 沿翼展方向是改变的，至两端趋于零。为了逼近真实的变涡量分布，普朗特建议用无穷多个宽度连续变化强度无限小的马蹄涡的叠加来模拟机翼及自由涡。于是，机翼用一根强度连续变化的直线涡丝代替，其环量值沿翼展向翼尖方向推进时是连续地减小的，到翼尖处趋于零。这根直线涡通常称为举力线。而马蹄涡系中的自由涡丝则溶成一体组成了机翼后的尾涡面（见图 7.24.7(b)）。这样的模型称为普朗特的举力线模型。

c) 下洗速度、下洗角与诱导阻力

在有限翼展情形下尾部的自由涡将对来流感生速度场。当然，

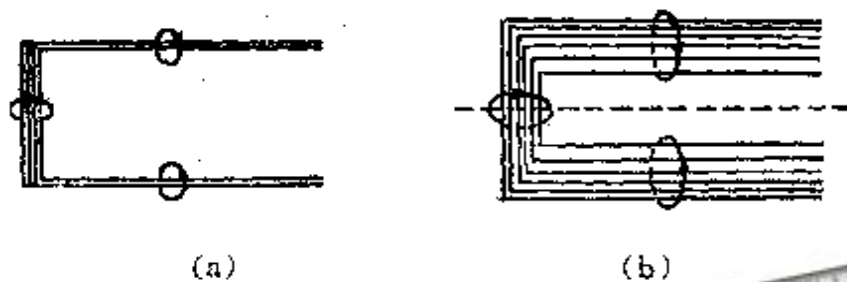


图 7.24.7

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

在这个平面截面上由自由涡所感生的速度场是不均匀的，这是由于平面上各个点离开自由涡面上各涡旋元素的距离不同的缘故。但是计算表明，当展弦比较大时，在所有远离翼尖的各个平面截面中，自由涡对翼剖面附近各点上的诱导速度的差别不大，因此可以用自由涡面在举力线与平面的交点这一个点上所诱导的速度 V_i 来代表自由涡对这整个平面上来流的扰动。

由于举力线与自由涡面位于同一平面上，自由涡面在举力线的各个点上所诱导的速度 V_i 都是垂直向下的。习惯上常把这个速度称为下洗速度。如果自由涡面上的涡旋密度分布已知的话，这个下洗速度是可以算出来的。因此，在每个平面截面内，作用于翼剖面的实际来流速度 V_m 等于机翼前无穷远处的速度 V_∞ 与由自由涡所诱导的下洗速度 V_i 二者的矢量和(见图 7.24.8)

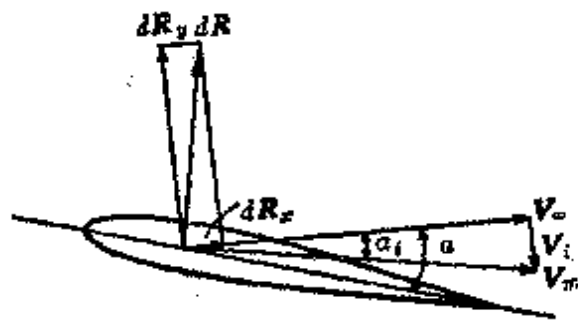


图 7.24.8

$$V_m = V_\infty + V_i$$

由于下洗速度的作用，使实际来流的冲角减小了 α_i ， α_i 称为下洗角。由速度三角形，可以看出

$$\tan \alpha_i = -\frac{V_i}{V_\infty}$$

一般情形下 α_i 很小，只有几度，故可近似地以 α_i 代替 $\tan \alpha_i$ 。于

是有

$$\alpha_i = -\frac{V_i}{V_\infty} \quad (7.24.1)$$

而实际来流速度的大小为

$$\begin{aligned} V_m &= \sqrt{V_\infty^2 + V_i^2} \\ &= \sqrt{V_\infty^2 \left[1 + \left(\frac{V_i}{V_\infty} \right)^2 \right]} \approx V_\infty \left(1 + \frac{\alpha_i^2}{2} \right) \end{aligned}$$

略去二级小量后，就有

$$V_m = V_\infty$$

所以，可以认为自由涡的作用就是使实际来流方向向下偏斜了一个 α_i 角。这个来流方向的改变，一方面直接影响绕翼剖面的环量 $\Gamma(z)$ 与举力的大小；另一方面，根据二维机翼理论，在 dz 宽度的机翼微元上所受的合力 dR 应垂直于实际来流 V_m 的方向。因此 dR 也就有一个向右偏斜的角度 α_i ，把它投影到无穷远处来流 V_∞ 的方向，就得到一个阻力

$$dR_x = dR \sin \alpha_i \approx dR \cdot \alpha_i$$

这个阻力是在理想流体的二维机翼理论里所没有的，它的出现完全是由于在有限翼展机翼后面存在着自由涡的结果，我们把它称为诱导阻力，其中的 dR 可根据茹柯夫斯基举力定理得到

$$dR = \rho V_m \Gamma dz \approx \rho V_\infty \Gamma dz$$

因此

$$dR_x = \rho V_\infty \Gamma \alpha_i dz$$

把 dR 投影到 V_∞ 的垂直方向，就得到升力

$$dR_y = dR \cos \alpha_i \approx dR = \rho V_\infty \Gamma dz$$

如沿翼展积分，就得到整个机翼所受的举力和诱导阻力

$$R_y = \rho V_\infty \int_{-l}^{+l} \Gamma(z) dz \quad (7.24.2)$$

$$R_z = \rho V_\infty \int_{-l}^{+l} \Gamma(z) \alpha_i(z) dz \quad (7.24.3)$$

d) 确定环量分布 $\Gamma(z)$ 的积分——微分方程

根据以上简化假设,可以看出,有限翼展机翼绕流的整个问题归结为确定沿翼展的环量分布 $\Gamma(z)$.有了 $\Gamma(z)$ 就可由(7.24.2)及(7.24.3)式直接求出举力及诱导阻力.

在二维机翼理论里,若已知来流速度的大小 V_∞ ,攻角 α 及翼剖面的形状,就可以完全确定环量 Γ .而在有限翼展情形,虽有平面截面假定,使在每个局部剖面上可以利用二维机翼理论,但问题仍不那么简单.因为实际来流的攻角受自由涡面的影响,而自由涡面本身的强度分布又反过来取决于下洗角 α_i .我们只能从 $\Gamma(z)$ 与来流即下洗角 α_i 的相互依赖关系中来决定 $\Gamma(z)$.

1) Γ 对于 α_i 的依赖关系

考虑任一剖面上所受的升力.根据平面截面假定,局部可作为二维机翼来处理.由茹柯夫斯基举力定理,展宽为 dz 的机翼微元上所受的举力为

$$dR = \rho V_\infty \Gamma(z) dz$$

其中 dR 可用无量纲的升力系数来表示

$$dR = C_y \cdot \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 b(z) \cdot dz$$

式中 $b(z)$ 是翼弦沿翼展的分布函数.把它代入上式就得

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2} V_\infty \cdot C_y(z) \cdot b(z) \quad (7.24.4)$$

根据二维机翼理论, C_y 与来流冲角成线性关系

$$C_y = a_0 \cdot \alpha_a$$

其中 α_a 是从零举力线算起的冲角,称为有效冲角,它与几何冲角 α 的关系为

$$\alpha_a = \alpha - \alpha_0$$

α_0 为零举力冲角,通常为一不大的负值; a_0 为一常数,也就是该翼型的举力曲线的斜率,取决于翼型的形状(图7.24.9),由二维机

翼理论确定。由于各个剖面的翼型形状与扭转角都可有所不同，因此，一般来说， α_0 与 α_a 都是 z 的函数。

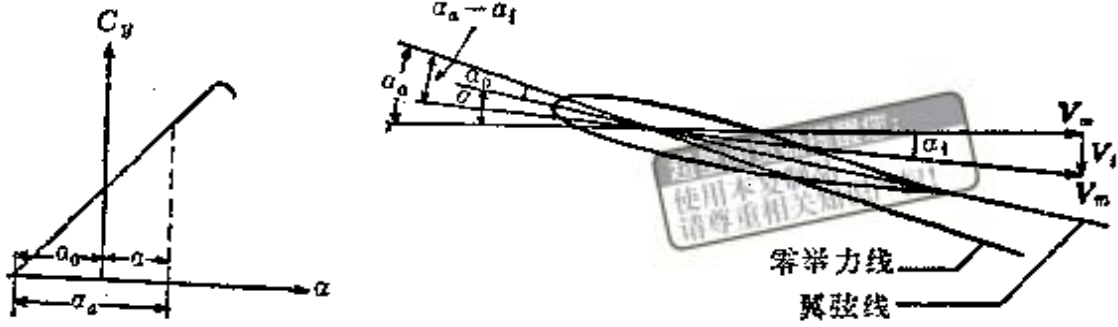


图 7.24.9

现在的来流受自由涡的影响，减少了一个下洗角，实际来流的有效冲角为

$$\alpha_a - \alpha_i$$

因此有

$$C_y = a_0(\alpha_a - \alpha_i) \quad (7.24.5)$$

把它代入(7.24.4)式得

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2} V_\infty a_0(z) b(z) [\alpha_a(z) - \alpha_i] \quad (7.24.6)$$

这就是 $\Gamma(z)$ 对于 α_i 的依赖关系，其中 V_∞ ， $a_0(z)$ ， $b(z)$ 与 $\alpha_a(z)$ 全是已知的量。

2) α_i 对于 $\Gamma(z)$ 的依赖关系

考虑自由涡面在升力线上任意一点 P 处所感生的下洗速度

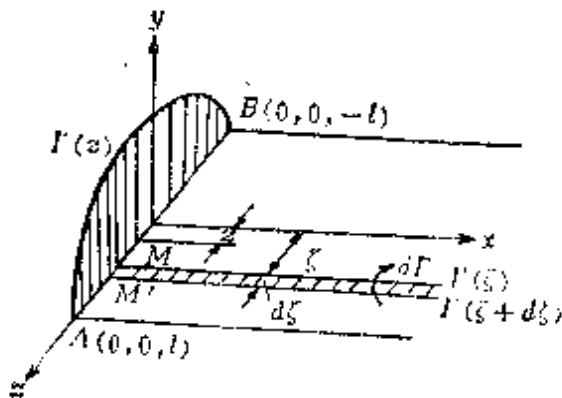


图 7.24.10

V_i ， P 点的坐标为 z 。在 AB 上任取两无限邻近的点 $M(\xi)$ 与 $M'(\xi + d\xi)$ (见图 7.24.10)。在这两个剖面上的环量分别为 $\Gamma(\xi)$ 与 $\Gamma(\xi + d\xi) = \Gamma(\xi) + d\Gamma$ ，两者相差 $d\Gamma$ ，从这两点之间向后延伸的涡带的强度必为 $d\Gamma$ 。此半无穷长的涡带对 P 点所诱导的速度 dV_i 应正好等于

一根强度为 $d\Gamma$ 的两端均伸向无穷远的直线涡丝在该点的诱导速度的一半，而后者就是二维点涡的诱导速度。因此

$$dV_i = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Gamma}{d\xi} \frac{d\xi}{z-\xi}$$

要得到整个自由涡面对点 P 的诱导速度，只需将上式对 ξ 沿整个翼展积分。于是有

$$V_i = -\frac{1}{4\pi} \int_{-l}^{+l} \frac{d\Gamma}{d\xi} \frac{d\xi}{z-\xi}$$

上式为奇异积分，在 $\xi=z$ 时是发散的。所以在积分时规定取其主值，即

$$V_i = -\frac{1}{4\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-l}^{z-\epsilon} \frac{d\Gamma}{d\xi} \frac{d\xi}{z-\xi} + \int_{z+\epsilon}^{+l} \frac{d\Gamma}{d\xi} \frac{d\xi}{z-\xi} \right]$$

在物理上这意味着在 P 点上的涡丝对本身无诱导速度。

于是，根据(7.24.1)，下洗角

$$\alpha_i = -\frac{V_i}{V_\infty} = \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-l}^{+l} \frac{d\Gamma}{d\xi} \frac{d\xi}{z-\xi} \quad (7.24.7)$$

这就是 α_i 对 $\Gamma(z)$ 的依赖关系，把它与(7.24.6)式合并，便得到决定 $\Gamma(z)$ 的积分-微分方程：

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2} V_\infty a_0(z) b(z) \left[a_0(z) - \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-l}^{+l} \frac{d\Gamma}{d\xi} \frac{d\xi}{z-\xi} \right] \quad (7.24.8)$$

式中只有 $\Gamma(z)$ 是未知函数。它在下述边界条件下求解

$$\Gamma(+l) = \Gamma(-l) = 0$$

e) 积分-微分方程的解法

确定 $\Gamma(z)$ 的方程 (7.24.8) 是一个奇异线性积分-微分方程，迄今为止还没有求其精确解的一般方法，但存在着很多近似解法。这里我们介绍一种三角级数法，它是格劳威尔首先建议采

用的.

引进新变数 θ , 它与 z 的关系为

$$z = -l \cos \theta \quad (7.24.9)$$

z 从 $-l$ 变到 l 时, θ 从 0 变到 π . 我们将未知函数 $\Gamma(\theta)$ 展成三角级数

$$\Gamma(\theta) = 4V_{-1} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \quad (7.24.10)$$

显然它能满足边界条件 $\Gamma(0) = \Gamma(\pi) = 0$, 式中 A_n 是待定的常数. 将(7.24.10)代入(7.24.8)便得确定 A_n 的代数方程. 为此我们首先算出方程中的积分项. 注意到

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{d\xi} d\xi &= \frac{d\Gamma}{d\theta'} d\theta' \\ &= 4V_{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \cos n\theta' d\theta' \end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \frac{\cos n\theta' d\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta' d\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta} \end{aligned}$$

考虑到

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta' d\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta} = \pi \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}$$

我们有

$$a_i = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \quad (7.24.11)$$

代入(7.24.8)得

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta$$

$$= \frac{a_0(\theta)b(\theta)}{8l} \left[a(\theta) - \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \right]$$

令

$$\mu(\theta) = \frac{a_0(\theta)b_0(\theta)}{8l}$$

有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n\mu(\theta) + \sin \theta) A_n \sin n\theta$$

$$= \mu(\theta) a(\theta) \sin \theta \tag{7.24.12}$$

这就是确定 A_n 的线性代数方程组，它是无穷阶的。在实际计算中不可能找出它的准确解来，所以常常求它的 K 阶近似解。即在(7.24.12)式取 K 项逼近无穷级数，然后在机翼上选取 K 个不同的剖面，即 K 个不同的 θ 值。对每一个 θ 值，写出方程(7.24.12)，得到 K 个线性代数方程，用来确定 K 个系数 A_1, \dots, A_K 。

如果机翼是对称的，而且作没有侧滑的平直飞行，则整个流动对 Oxy 平面对称，于是 $\Gamma(\theta) = \Gamma(\pi - \theta)$ ，由此易证 A_n 的偶数项皆为零，这时只须在半个机翼 $0 \leq \theta \leq \pi/2$ 的范围内选取 K 个不同剖面就可以了。这些剖面应当选择在翼型或翼弦有显著变化的地方。计算实践表明，取级数的头四项 A_1, A_3, A_5, A_7 就已经足够精确的了。为了确定这四个系数可以取下列四个 θ 值作为计算点（见图7.24.11）。

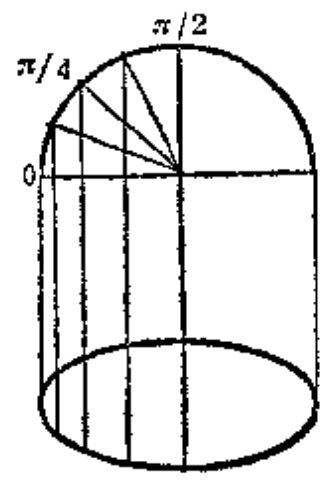


图 7.24.11

$$\theta = \pi/8, \pi/4, 3\pi/8, \pi/2$$

代入(7.24.12)式我们得到下列确定 A_1, A_3, A_5, A_7 的线性代数方

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

程组

$$\begin{cases} 0.383(\mu_1 + 0.383)A_1 + 0.924(3\mu_1 + 0.383)A_3 \\ \quad + 0.924(5\mu_1 + 0.383)A_5 + 0.383(7\mu_1 + 0.383)A_7 \\ = 0.383\mu_1 a_1 \\ (\mu_2 + 0.707)A_1 + (3\mu_2 + 0.707)A_3 \\ \quad - (5\mu_2 + 0.707)A_5 - (7\mu_2 + 0.707)A_7 = \mu_2 a_2 \\ 0.924(\mu_3 + 0.924)A_1 - 0.383(3\mu_3 + 0.924)A_3 \\ \quad - 0.383(5\mu_3 + 0.924)A_5 + 0.924(7\mu_3 + 0.924)A_7 \\ = 0.924\mu_3 a_3 \\ (\mu_4 + 1)A_1 - (3\mu_4 + 1)A_3 + (5\mu_4 + 1)A_5 \\ \quad - (7\mu_4 + 1)A_7 = \mu_4 a_4 \end{cases}$$

其中的 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4; a_1, a_2, a_3, a_4$ 均为已知的量。解此方程组就可求得 A_1, A_3, A_5, A_7 。

f) 举力系数和诱导阻力系数

有了展向环量分布 $\Gamma(z)$ ，我们需要的一切气动特性皆可求出。根据(7.24.2)，计算举力的公式为

$$R_y = \rho V_\infty \int_{-l}^{+l} \Gamma(z) dz$$

将(7.24.9)与(7.24.10)式代入得

$$R_y = \rho V_\infty^2 (2l)^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^{\pi} \sin n\theta \sin \theta d\theta$$

考虑到

$$\int_0^{\pi} \sin n\theta \sin m\theta d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{当 } n=m \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } n \neq m \text{ 时} \end{cases}$$

我们有

$$R_y = \rho \frac{V_\infty^2}{2} (2l)^2 \cdot \pi A_1$$

于是举力系数是

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
须尊重相关知识产权！

$$C_y = \frac{R_y}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \cdot S} = \pi \frac{(2l)^2}{S} A_1 = \pi \lambda A_1 \quad (7.24.13)$$

式中 $\lambda = (2l)^2/S$ 是展弦比。

计算诱导阻力的公式为

$$R_x = \rho V_\infty \int_{-l}^{+l} \Gamma(z) \alpha_i(z) dz$$

将(7.24.9), (7.24.10)及(7.24.11)式代入得

$$\begin{aligned} R_x &= 4\rho V_\infty^2 l^2 \int_{-l}^{+l} \left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{m=1}^{\infty} m A_m \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} \sin \theta d\theta \right] \\ &= \rho V_\infty^2 (2l)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[m A_n A_m \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^\pi \sin n\theta \sin m\theta d\theta \right] \\ &= \frac{\rho V_\infty^2}{2} (2l)^2 \pi \sum_{n=1}^{\infty} n A_n^2 \end{aligned}$$

于是机翼的诱导阻力系数为

$$C_{xi} = \frac{R_x}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \cdot S} = \pi \frac{(2l)^2}{S} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n^2 = \pi \lambda \sum_{n=1}^{\infty} n A_n^2 \quad (7.24.14)$$

考虑到(7.24.13)式, (7.24.14)式可改写为

$$C_{xi} = \frac{C_y^2}{\pi \lambda} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n A_n^2}{A_1^2}$$

令

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

$$\delta = \frac{\sum_{n=2}^{\infty} n A_n^2}{A_1^2} \geq 0$$

我们得

$$C_{x_i} = \frac{C_y^2}{\pi \lambda} (1 + \delta) \quad (7.24.15)$$

由此可见，诱导阻力系数总是大于 0 的正数，也就是说有限翼展机翼飞行时，不等于零的诱导阻力总是存在的。并且，它和升力系数的平方成正比，又与展弦比成反比。机翼平面形状的影响体现在 δ 的值上，因此，为了得到良好的升阻比和长距离的航程，最好采用很大的展弦比。不过由于结构上的考虑，中等速度飞机采用的展弦比的实际数值则不得限制在 8 或 10 上下。而高速飞机的诱导阻力与其他阻力部分（主要是波阻）相比则是比较小的，主要是为了减小波阻，常采用很小的展弦比，甚至小到 $\lambda = 1.5$ 左右。

g) 具有最小诱导阻力的机翼平面形状，椭圆机翼

当 C_y 和 λ 值给定时，什么样的机翼平面形状具有最小的诱导阻力呢？也就是说，什么样的平面形状从空气动力学的观点来看是最有利的呢？容易看出，

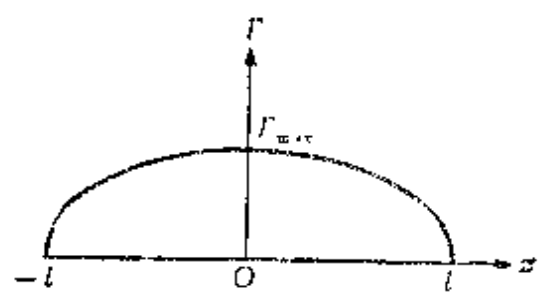


图 7.24.12

当 $\delta = 0$ ，即当 $A_n = 0$ ($n > 2$)， $A_1 \neq 0$ 时， C_{x_i} 将取最小值。这时机翼的环量分布应为

$$\begin{aligned} \Gamma(\theta) &= 4V_{\infty} l A_1 \sin \theta \\ &= \Gamma_{\max} \sin \theta \end{aligned}$$

其中 $\Gamma_{\max} = \Gamma(\pi/2) = 4V_{\infty} l A_1$ 。自变量由 θ 换回到 z 得

$$\Gamma = \Gamma_{\max} \sqrt{1 - \left(\frac{z}{l}\right)^2}$$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

或

$$\left(\frac{\Gamma}{\Gamma_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{z}{l}\right)^2 = 1$$

由此可见，最小诱导阻力的机翼必须有椭圆形的展向环量分布（图7.24.12）。

此时，下洗角按(7.24.11)与(7.24.13)式应为

$$\alpha_i = A_1 = \frac{C_y}{\pi\lambda} = \frac{\Gamma_{\max}}{4V_{\infty}l} \quad (7.24.16)$$

它与 θ 无关，即下洗角沿整个翼展都是相同的。对于无扭转的平面机翼，如前所述有效冲角 α_0 沿翼展是常数，于是受下洗后的实际来流的有效冲角 $\alpha_0 - \alpha_i$ 也是常数。根据(7.24.6)式

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2} V_{\infty} a_0(z) b(z) (\alpha_0 - \alpha_i)$$

如 $a_0(z)$ 也是常数，则 $b(z)$ 应与 $\Gamma(z)$ 成正比，即沿翼展弦长也为椭圆分布。因此具有最小诱导阻力的机翼平面形状应是椭圆形的。

对椭圆机翼， $\delta = 0$ 。由(7.24.15)推出诱导阻力系数为


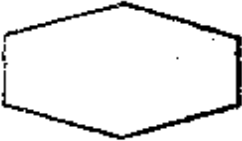

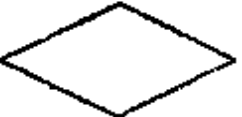
$$C_{xi} = \frac{C_y^2}{\pi\lambda}$$

可见(7.24.15)式中的 δ 为任意形状机翼的诱导阻力相对于椭圆机翼的修正值。机翼越接近于椭圆， δ 值也越小（见下表）。

从理论上来说，椭圆型机翼是空气动力学上最有利的机翼。但在结构与加工上它是不太有利的。从下表(在下页)中可看出梯形机翼与椭圆机翼相比，在气动特性上并无明显差别，但它在结构与加工上都比较有利，故在实践中低速飞机常采用梯形机翼。

实践证明，举力线理论用在 $\lambda > 3$ 的直机翼时是相当成功的。对于小展弦比机翼来说，由于翼弦相对于翼展来说已相当大，已不能用举力线理论来计算，此时必须用举力面理论或其他更准确的理论进行计算。

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
尊重相关知识产权！

机翼平面形状	图	C_{z_1}
椭圆形		0.318
梯形		0.318
矩形		0.335
菱形		0.363

(E) 理想不可压缩流体不定常无旋运动

7.25 附加质量和不定常阻力

任意物体在无界流体内运动可以分成两大类：即匀速直线运动及非匀速直线运动。对于固体在无界流体中作匀速直线运动的这种情形，可以通过将坐标系转换到与物体固定在一起的惯性系上去的方法，把问题转换成为均匀来流的定常绕流问题。根据伽利略相对性原理，在两个惯性系中所有动力学特性函数都是相等的，因此定常绕流问题中求出来的压力分布、合力、合力矩等空气动力学特性函数就是匀速直线运动中所要求的对应函数，这样

超星阅读器提醒您：
使用本文制品
请尊重版权！

我们便将固体在无界流体中作匀速直线运动这一不定常问题转换成了定常的绕流问题。至于如何解定常绕流问题已在前几节比较详细地讨论过了，并且得到了物体不受任何合力的达朗贝尔佯谬。现在让我们来讨论固体在无界流体中作非匀速直线运动这一情形。在这种情形，取固定在物体上的坐标系是无益的。一方面坐标转换后所得的绕流问题本身可能就是不定常运动；另一方面在这样一个非惯性系中求出来的空气动力学特性函数亦已不是我们所要求的。正因为如此，我们在这里不得不处理一个纯粹的不定常问题。

假设流体是理想均质不可压缩的，固体从静止或无旋状态起，根据涡旋不生不灭定理整个流体运动是无旋的。取与静止流体固定在一起的坐标系，原点在物体内部，于是速度势函数 φ 是 x, y, z, t 的函数。将 $v = \Delta\varphi(x, y, z, t)$ 代入连续性方程 $\text{div}v = 0$ 中去，我们得到 φ 应满足拉氏方程

$$\Delta\varphi = 0 \tag{7.25.1}$$

在此方程中时间 t 以参数形式出现。 φ 除了满足拉氏方程外，还应满足下列边界条件：

1) 在无穷远处速度趋于零； (7.25.2)

2) 在物体表面上 $\partial\varphi/\partial n = V_n$ ，其中 V_n 是物体表面上固体质点的运动速度 v 在外法线方向 n 上的投影。 (7.25.3)

根据 7.4 中的公式(7.4.8)， φ 具有下列展式

$$\varphi(r) = C_1 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) + C_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{1}{r} \right) + \dots$$

上式表明 φ 在无穷远处的量阶是 $1/R^2$ ，而 $\partial\varphi/\partial t$ 及速度的量阶则为 $1/R^2$ 及 $1/R^3$ 。于是在无穷远处我们有下列量阶估计

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = O\left(\frac{1}{R^2}\right), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = O\left(\frac{1}{R^2}\right) \\ u, v, w = O\left(\frac{1}{R^3}\right), \quad V = O\left(\frac{1}{R^3}\right) \end{array} \right. \tag{7.25.4}$$

超星浏览器提醒您：
使用本产品
请遵守相关知识产权！

由理论力学知道，刚体中任一点上的速度 V 可以分解为某一点的平动速度 V_0 和刚体绕该点转动速度之和，用式子表出有

$$V = V_0 + \omega \times r$$

其中 ω 为刚体的角速度矢量， r 为欲求速度那点的矢径。于是边界条件(7.25.3)可写成

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= V_n = V_0 \cdot n + (\omega \times r) \cdot n = V_0 \cdot n + (r \times n) \cdot \omega \\ &= u_0 \alpha + v_0 \beta + w_0 \gamma + \omega_x (y\gamma - z\beta) \\ &\quad + \omega_y (z\alpha - x\gamma) + \omega_z (x\beta - y\alpha) \end{aligned} \quad (7.25.5)$$

由于方程(7.25.1)是线性的，因此可以将 φ 写成下列六个函数的线性组合

$$\varphi = u_0 \varphi_1 + v_0 \varphi_2 + w_0 \varphi_3 + \omega_x \varphi_4 + \omega_y \varphi_5 + \omega_z \varphi_6 \quad (7.25.6)$$

其中 $\varphi_i (i=1, \dots, 6)$ 分别满足拉氏方程(7.25.1)，边界条件(7.25.2)，此外在物面上还分别满足下列条件

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \alpha, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \beta, & \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} = \gamma \\ \frac{\partial \varphi_4}{\partial n} = y\gamma - z\beta, & \frac{\partial \varphi_5}{\partial n} = z\alpha - x\gamma \\ \frac{\partial \varphi_6}{\partial n} = x\beta - y\alpha \end{cases} \quad (7.25.7)$$

现在，寻求速度势函数 φ 的问题归结为寻求满足(7.25.1)，(7.25.2)及(7.25.7)的六个函数 $\varphi_i (i=1, \dots, 6)$ 的问题了。函数 φ_i 具有下列简单的物理意义， φ_1 相当于

$$u_0 = 1, \quad v_0 = w_0 = 0, \quad \omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$$

的情形，这就是说 φ_1 是固体在无界流体以单位速度平行 Ox 轴运动时所产生的速度势。同理可说明 φ_2 与 φ_3 是固体在无界流体以单位速度平行 Oy 与 Oz 轴作正向运动时所产生的速度势。其次我们看到 φ_4 对应于

超星阅读器提醒您：
使用本文制品
请关知识版权！

$$u_0 = v_0 = w_0 = 0, \quad \omega_x = 1, \quad \omega_y = \omega_z = 0$$

的情形，也就是说 φ_1 是固体在无界流体以单位角速度绕 Ox 轴转动时所产生的速度势。同理可证 φ_5 与 φ_6 是固体以单位角速度绕 Oy 与 Oz 轴转动时所产生的速度势。为了以后说话的方便，我们称 $\varphi_i (i=1, \dots, 6)$ 为基本速度势。

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 实际上就是 x, y, z 方向上的匀速直线运动，我们会求它们的解；至于 $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ 则必须解一个满足方程(7.25.1)及边界条件(7.25.2)与(7.25.7)的问题，求它的解原则上没有什么困难，因篇幅所限我们不详细介绍求解过程，认为 $\varphi_1, \varphi_5, \varphi_6$ 已经得到了。本节将着重研究物体在流体中作非匀速直线运动时所受到的作用力。

设 φ 或 $\varphi_i (i=1, \dots, 6)$ 已经求出，欲求物体所受到的作用力，我们首先取静止在流体中的坐标系，求作用在物体上的合力及合力矩有两种办法。第一种办法是写出作用在物体表面 S 上的作用力公式

$$R = - \int_S p n dS, \quad L = - \int_S p r \times n dS$$

然后根据拉格朗日积分将 p 通过 v 即 φ 及其导数表出，经过计算，求出所需的结果。第二种办法是利用动量定理和动量矩定理。在这两种方法中后者较简单，用它来求合力及合力矩是方便的。

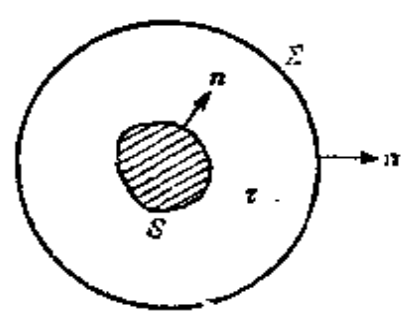


图 7.25.1

取一个球心在坐标原点半径为 R 且包住物体的大球，球面以 Σ 表之。设球面 Σ 及物体 S 的法线正方向都取成如图 7.25.1 所示的外法线方向。现在我们对以 Σ 及 S 为界的流体体积 τ 应用动量定理。以 K 表 τ 内的动量， R', R'' 分别表示 Σ 外流体及物体作用在 τ 上的力。于是根据动量定理我们有

超星浏览器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

$$R' + R'' = \frac{dK}{dt} \quad (7.25.8)$$

根据作用等于反作用的原理，流体作用在物体上的合力 R 将等于物体作用在流体上的合力 R'' 的负值，于是我们有

$$R'' = -R \quad (7.25.9)$$

将(7.25.9)式代入(7.25.8)式得

$$R = R' - \frac{dK}{dt} \quad (7.25.10)$$

现分别计算(7.25.10)式右边的两项。根据 R' 的定义有

$$R' = - \int_S p n dS \quad (7.25.11)$$

忽略外力时，拉格朗日积分具有下列形式

$$p = \rho f(t) - \frac{\rho V^2}{2} - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

在 ∞ 处 $V=0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \rightarrow 0$ (参看(7.25.4)式), 而 $p = p_\infty$, 由此定出

$$f(t) = \frac{p_\infty}{\rho}$$

于是

$$p = p_\infty - \frac{\rho V^2}{2} - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

将之代入(7.25.11)式，并考虑到 $\int_S n dS = 0$ 的事实后得

$$R' = \int_S \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} n dS + \int_S \rho \frac{V^2}{2} n dS \quad (7.25.12)$$

其次对于动量 K 我们有公式

$$K = \int_V \rho v d\tau = \int_V \rho g \text{grad} \varphi d\tau$$

利用奥高公式

超星浏览器提醒您：
使用本产品
请尊重相关知识产权！

$$K = \int_{\Sigma} \rho \varphi n dS - \int_S \rho \varphi n dS$$

右边第二项所以是负的是因为我们取指向流体内部的方向为法线的正方向。这里须要强调指出， Σ 及 S 现在都是由流体质点组成的流动面。将上式对时间 t 取随体导数后得

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \rho \varphi n dS - \frac{d}{dt} \int_S \rho \varphi n dS \quad (7.25.13)$$

根据面积分随体导数的公式（证明见附录 2）

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \rho \varphi n dS = \int_{\Sigma} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} n + \rho v_n v \right) dS$$

(7.25.13)式可写成

$$\frac{dK}{dt} = \int_{\Sigma} \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} n dS + \int_{\Sigma} \rho v_n v dS - \frac{d}{dt} \int_S \rho \varphi n dS \quad (7.25.14)$$

将(7.25.12)及(7.25.14)式代入(7.25.10)式中得

$$R = \frac{d}{dt} \int_S \rho \varphi n dS + \int_S \rho \left(\frac{V^2}{2} n - v_n v \right) dS \quad (7.25.15)$$

现在估计(7.25.15)式右边第二个积分在无穷远处的量阶，根据(7.25.4)式，被积函数的量阶是 $O(1/R^6)$ ，于是这个积分在无穷远处的量阶为 $O(1/R^4)$ 。令大球的半径 R 趋于无穷，此时第二个积分趋于零，这样我们得到合力 R 的下列表达式

$$R = \frac{d}{dt} \int_S \rho \varphi n dS \quad (7.25.16)$$

利用动量矩定理，完全采用和上述方法类似的过程得到下列动量矩 L 的公式

$$L = \frac{d}{dt} \int_S \rho \varphi (r \times n) dS \quad (7.25.17)$$

现在我们将(7.25.16)式及(7.25.17)式以另一物理解释，写出物体的动量方程及动量矩方程

$$\frac{dK^*}{dt} = R^* + R, \quad \frac{dM^*}{dt} = L^* + L$$

其中 R^*, L^* 分别是外力及外力矩, K^*, M^* 分别是物体的动量及动量矩. 将(7.25.16)式及(7.25.17)式代入得

$$\frac{d}{dt} \left(K^* - \int_S \rho \varphi n dS \right) = R^*$$

$$\frac{d}{dt} \left(M^* - \int_S \rho \varphi (r \times n) dS \right) = L^*$$

超星浏览器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

◆

$$B = - \int_S \rho \varphi n dS \quad (7.25.18)$$

$$I = - \int_S \rho \varphi (r \times n) dS \quad (7.25.19)$$

则有

$$\frac{d}{dt} (K^* + B) = R^* \quad (7.25.20)$$

$$\frac{d}{dt} (M^* + I) = L^* \quad (7.25.21)$$

上面两式在物理上可以这样解释, 固体在流体中作不定常运动, 相当于动量为 $K^* + B$, 动量矩为 $M^* + I$ 的物体在真空中运动, 矢量 B 及 I 分别称为附加动量和附加动量矩, 因为它是在固体原有的动量 K^* 及动量矩 M^* 上附加上去的.

公式(7.25.16)与(7.25.17)中出现的是总的速度势函数 φ , 而它是通过基本速度势 φ_i 表出的, 因此须要将 B 与 I 通过 φ_i 表示出来.

将(7.25.18)式及(7.25.19)式写成分量形式, 并考虑到(7.25.7)式有

$$B_x = - \int_S \rho \varphi n_x dS = - \int_S \rho \varphi \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS$$

$$B_y = - \int_S \rho \varphi \beta dS = - \int_S \rho \varphi \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} dS$$

$$B_z = - \int_S \rho \varphi \gamma dS = - \int_S \rho \varphi \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} dS$$

$$I_x = - \int_S \rho \varphi (y\gamma - z\beta) dS = - \int_S \rho \varphi \frac{\partial \varphi_4}{\partial n} dS$$

$$I_y = - \int_S \rho \varphi (za - x\gamma) dS = - \int_S \rho \varphi \frac{\partial \varphi_5}{\partial n} dS$$

$$I_z = - \int_S \rho \varphi (x\beta - ya) dS = - \int_S \rho \varphi \frac{\partial \varphi_6}{\partial n} dS$$

为了书写简单, 令

$$B_x = B_1, \quad B_y = B_2, \quad B_z = B_3$$

$$I_x = B_4, \quad I_y = B_5, \quad I_z = B_6$$

$$u_0 = U_1, \quad v_0 = U_2, \quad w_0 = U_3$$

$$\omega_x = U_4, \quad \omega_y = U_5, \quad \omega_z = U_6$$

于是上式可写成下列形式

$$B_i = - \int_S \rho \varphi \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS \quad (i=1, \dots, 6) \quad (7.25.22)$$

而(7.25.6)式可写成

$$\varphi = \sum_{k=1}^6 U_k \varphi_k \quad (7.25.23)$$

将(7.25.23)式代入(7.25.22)式, 得

$$\begin{aligned} B_i &= - \int_S \rho \sum_{k=1}^6 U_k \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS \\ &= \sum_{k=1}^6 U_k \left[- \int_S \rho \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \varphi_k dS \right] \end{aligned}$$

引入符号

$$\lambda_{ik} = - \int_S \rho \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \varphi_k dS \quad (7.25.24)$$

则上式可写成

$$B_i = \sum_{k=1}^6 \lambda_{ik} U_k \quad (7.25.25)$$

由于 B_i 的物理意义是附加动量或附加动量矩，因此，根据(7.25.25)式， λ_{ik} 相当于质量或惯性矩，故称之为附加质量。

下面证明 λ_{ik} 是对称的，即 $\lambda_{ik} = \lambda_{ki}$ 。对 Σ 面和 S 面内的体积 τ 应用下列格林公式

$$\begin{aligned} & \int_{\tau} (q_i \Delta q_k - q_k \Delta q_i) d\tau \\ &= \int_{\Sigma} \left(q_i \frac{\partial q_k}{\partial n} - q_k \frac{\partial q_i}{\partial n} \right) dS - \int_S \left(q_i \frac{\partial q_k}{\partial n} - q_k \frac{\partial q_i}{\partial n} \right) dS \end{aligned}$$

由 $\Delta q_k = 0, \Delta q_i = 0$ ，推出左边积分等于零。其次在无穷远处，右边第一积分的量级为 $1/R^3$ ，当 $R \rightarrow \infty$ 时，它趋于零。于是当 $R \rightarrow \infty$ 时有

$$- \int_S q_k \frac{\partial q_i}{\partial n} dS = - \int_S q_i \frac{\partial q_k}{\partial n} dS$$

此即

$$\lambda_{ik} = \lambda_{ki}$$

对称性得证。有了对称性后，三十六个系数 λ_{ik} 中最多只有二十一个是不相同的。

引进体积 τ 内流体的总动能 T 后，(7.25.25)式还可以写成更简单的形式。根据第四章公式

$$\begin{aligned} T &= \rho \int_{\tau} \frac{V^2}{2} d\tau \\ &= - \frac{\rho}{2} \int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS + \frac{\rho}{2} \int_{\Sigma} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \end{aligned}$$

第二个积分在无穷远处邻域内的量阶为 $O(1/R^3)$, 当 $R \rightarrow \infty$ 时, 趋于零. 于是

$$T = -\frac{\rho}{2} \int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$$

将(7.25.23)式代入得

$$\begin{aligned} T &= -\frac{\rho}{2} \int_S \sum_{k=1}^6 U_k \varphi_k \sum_{i=1}^6 U_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \sum_{k=1}^6 \left[- \int_S \rho \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \varphi_k dS \right] U_i U_k \end{aligned}$$

利用(7.25.24)式我们有

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \sum_{k=1}^6 \lambda_{ik} U_i U_k \quad (7.25.26)$$

有了(7.25.26)式, B_i 可按下式很容易地求出

$$B_i = \frac{\partial T}{\partial U_i} \quad (7.25.27)$$

引进动能(7.25.26)的优点在于一旦计算出 T 来, 附加动量和动量矩就可以很容易地按(7.25.27)式通过微分求出, 而不必求助于较麻烦的公式(7.25.25).

若物体的表面 S 具有三个相互垂直的对称轴线(例如椭球), 则当我们取此三对称轴线为动坐标系中的坐标轴线时, 易证

$$\lambda_{ik} = - \int_S \rho \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \varphi_k dS = 0 \quad (i \neq k)$$

为了证明这个公式, 我们在平动及转动部分中分别取 φ_i 及 φ_k 作代表. 容易看出, 由于我们现在所考虑

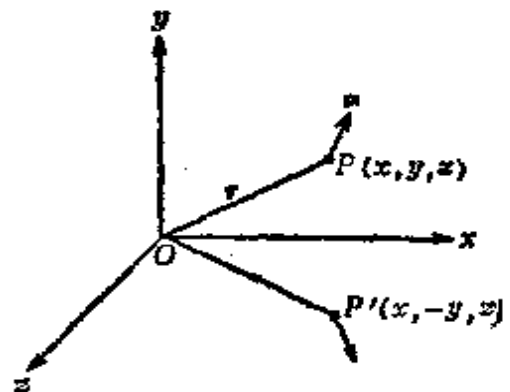


图 7.25.2

物体具有对称性, 因此整个流动对 $x-z$ 平面对称的, 即在对称点 $P(x, y, z)$ 及 $P'(x, -y, z)$ 上

(见图7.25.2) φ_1 及 φ_4 的值相等. 另一方面

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \cos(n, y), \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} = \cos(n, z)$$

在 P 点及 P' 点具有相同的绝对值, 但符号相反. 而

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial n} = (r \times n)_x, \quad \frac{\partial \varphi_5}{\partial n} = (r \times n)_y, \quad \frac{\partial \varphi_6}{\partial n} = (r \times n)_z$$

在 P 点及 P' 点的值亦因为 $(r \times n)$ 矢量在 P 点及 P' 点具有反对称性而具有相反的符号及相同的值, 于是不难理解

$$\int_S \rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \varphi_1 dS = 0 \quad (i=1)$$

$$\int_S \rho \frac{\partial \varphi_4}{\partial n} \varphi_4 dS = 0 \quad (i=4)$$

成立. 同时可对 $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_5, \varphi_6$ 证明类似的公式. 综合起来证明了

$$\lambda_{ik} = 0 \quad (i \neq k) \quad (7.25.28)$$

此时, (7.25.26), (7.25.16) 及 (7.25.17) 简化为

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} (\lambda_{11} u_0^2 + \lambda_{22} v_0^2 + \lambda_{33} \omega_0^2 + \lambda_{44} \omega_x^2 + \lambda_{55} \omega_y^2 + \lambda_{66} \omega_z^2) \\ R_x = -\frac{d}{dt} (\lambda_{11} u_0), \quad R_y = -\frac{d}{dt} (\lambda_{22} v_0), \quad R_z = -\frac{d}{dt} (\lambda_{33} \omega_0) \\ L_x = -\frac{d}{dt} (\lambda_{44} \omega_x), \quad L_y = -\frac{d}{dt} (\lambda_{55} \omega_y), \quad L_z = -\frac{d}{dt} (\lambda_{66} \omega_z) \end{cases} \quad (7.25.29)$$

下面我们以圆球在无界流体中的非匀速直线运动作为一个例子. 设半径为 a 的圆球在无界流体中运动, 球心的平动速度是 $V_0(t) = u_0(t)i + v_0(t)j + w_0(t)k$; 没有绕球心转动的角速度. 显然

$$\varphi_4 = \varphi_5 = \varphi_6 = 0$$

于是

$$\lambda_{44} = \lambda_{55} = \lambda_{66} = 0 \quad (7.25.30)$$

其次，从对称性得到

$$\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{33} \quad (7.25.31)$$

现在我们计算 λ_{11}

$$\lambda_{11} = -\rho \int_S \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dS \quad (7.26.32)$$

φ_1 是圆球在无界流体中以单位速度运动时所产生的速度势，它是时间 t 的函数。若初始时刻坐标原点和圆球中心重合，则根据(7.22.4)式该时刻的速度势为

$$\varphi_1 = -\frac{a^3 \cos \theta}{2r^2} \quad (7.26.33)$$

于是在球面 S 上有

$$\varphi_1 = -\frac{a}{2} \cos \theta, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \cos \theta \quad (7.26.34)$$

将(7.26.34)式代入(7.26.32)式得

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= \frac{\rho a}{2} \int_S \cos^2 \theta dS \\ &= \frac{\rho a^3}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\lambda = \frac{2\pi \rho a^3}{3} \end{aligned} \quad (7.26.35)$$

这是初始时刻的 λ_{11} 。根据 φ_1 的力学特性容易看出任何时刻附加质量 λ_{11} 具有相同的值，于是 λ_{11} 是一个不依赖时间 t 的常数。考虑到(7.25.31)式有

$$\lambda_{22} = \lambda_{33} = \frac{2\pi \rho a^3}{3} \quad (7.26.36)$$

将(7.25.30), (7.25.35), (7.25.36)式代入(7.25.29)式得

$$\begin{aligned} T &= \frac{\pi \rho a^3}{3} (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) \\ B &= \frac{2}{3} \pi \rho a^3 V_0, \quad l=0 \end{aligned} \quad (7.26.37)$$

$$R = -\frac{2}{3} \pi \rho a^3 \frac{dV_0}{dt}, \quad L=0 \quad (7.26.38)$$

当球心作等速直线运动，即 V_0 与 t 无关时 $R=0$ ，这就是达朗贝尔悖论在圆球情形下的一个特例。

圆球的运动方程按(7.5.20)式成为

$$\left(m + \frac{2}{3} \pi \rho a^3\right) \frac{dV_0}{dt} = R^* \quad (7.26.39)$$

从(7.26.39)式我们看出，圆球在无界流体中运动时将受到

$$-\frac{2}{3} \pi \rho a^3 \frac{dV_0}{dt}$$

的反作用力，这个力就称为不定常阻力。它相当于质量 m 增加了 $(2/3)\pi\rho a^3$ 后的圆球在真空中的运动。 $(2/3)\pi\rho a^3$ 就是附加质量，等于圆球所排出的流体质量的一半。

习 题

下列前 51 题，如不作说明，均指平面不可压缩理想流体的流动，且重力忽略不计。

1. 已知下列两个速度分布

$$u = \frac{cx}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{cy}{x^2 + y^2}$$

$$u = \frac{-cy}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{cx}{x^2 + y^2}$$

其中 c 为常数。

(1) 求速度势 φ ，流函数 ψ 和复位势 $w(z)$ ，并画出等势线和流线；

(2) 围绕坐标原点作一封闭曲线，求沿此封闭曲线的环量 Γ 及通过此封闭曲线的流量 Q ；

(3) 比较两个速度场所得的结果。

2. 证明在不可压缩的平面运动中，速度分布

$$v_r = akr^n e^{-k(n+1)\theta}, \quad v_\theta = ar^n e^{-k(n+1)\theta}$$

是一种可能的速度分布. 求流函数 ψ , 并证明任何一点流速的大小为

$$\frac{-(n+1)\psi\sqrt{1+k^2}}{r}$$

3. 证明不可压流体的理想、定常、二维运动, 在忽略质量力时, 流函数 ψ 和涡旋 Ω 满足

$$\frac{\partial(\Omega, \psi)}{\partial(x, y)} = 0$$

若 Ω 是常数, 则压力方程为 $\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + \Omega\psi = \text{常数}$.

4. 一理想、不可压缩、定常流动, 在极坐标中势函数为

$$\varphi = r^{1/2} \cos \frac{\theta}{2}$$

求速度分量与流函数, 并分析流动图案.

5. 不可压缩、定常、二维流动的流函数是 $\psi = x^2 + y^2$, 这一流动有速度势吗? 为什么?

6. 证明不可压缩, 二维位势流动中 $\varphi = \text{常数}$ 和 $\psi = \text{常数}$ 的线构成一正交网. 并证明在二维、定常、可压缩流动时这一结论也成立.

(提示: 后一部分利用可压缩、定常流动中的关系式

$$\rho u = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \rho v = -\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

ρ_0 是参考密度, 并为常数.)

7. 已知下列速度势函数, 求相应的流函数

(1) $\varphi = xy$;

(2) $\varphi = x^3 - 3xy^2$;

(3) $\varphi = x/(x^2 + y^2)$;

(4) $\varphi = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$.

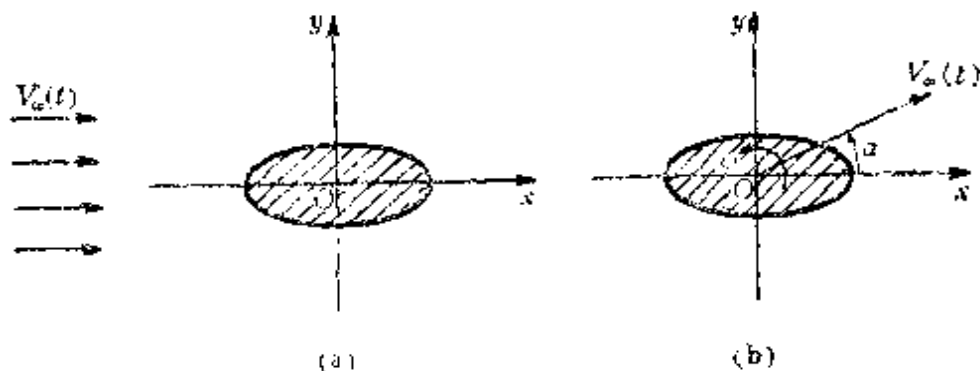
8. 在不可压缩流体的平面定常运动中, 若速度场只是矢径大小 r 的函数, 证明在极坐标下流函数 ψ 的表达式为

$$\psi = f(r) + k\theta$$

其中 k 为常数。若运动无旋，证明流线是等角螺线，并求这时的速度势函数。

9. 分别用速度势 φ 和流函数 ψ 表示下述流场的物面边界条件。在与物体相固结的坐标系中讨论流体的绝对运动。物面方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



题 9

10. 证明速度分量

$$\begin{cases} u = U \left[1 - \frac{ay}{x^2 + y^2} + \frac{b^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right] \\ v = U \left[\frac{ax}{x^2 + y^2} + \frac{2b^2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right] \end{cases}$$

代表一个流体运动可能的速度分布，且是无旋的。求其复位势，并说明它是由哪几种基本流动合成的？常数 U, a, b 代表什么物理意义？

11. 一流动的复位势为 e^z 和 $\sin z$ 时，求流场中流线形状和速度分布。

12. 设复位势为

$$w(z) = (1+i)\ln(z^2+1) + (2-3i)\ln(z^2+4) + \frac{1}{z}$$

试分析它们是由哪些基本流动组成的? 并求沿圆周 $x^2+y^2=9$ 的速度环量 Γ 及通过该圆周的流体体积流量 Q .

13. 设复位势为

$$w(z) = m \ln\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

试问它们是由哪些基本流动组成的? 求流线和单位时间通过 $z=i$ 和 $z=1/2$ 两点连线的流体体积.

14. 在 $(a,0), (-a,0)$ 处放置等强度点源, 在 $(0,a), (0,-a)$ 处放置与点源等强度的点汇, 证明通过这四点的圆周是一条流线.

15. 在 $(a,0), (-a,0)$ 放置等强度的点源, 证明在圆周 $x^2+y^2=a^2$ 上的任意一点的速度都平行 y 轴, 并证明此速度大小与 y 成反比. 求 y 轴上速度达到最大值的点, 并证明 y 轴是一条流线.

16. 在 $(a,0), (-a,0)$ 处各有强度为 $2\pi m$ 的点源, 在原点有强度为 $4\pi m$ 的点汇, 证明流线方程是曲线

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)\lambda xy$$

λ 是可变参数, 并证明在任意点上的流速为 $2ma^2/(r_1 r_2 r_3)$, 其中 r_1, r_2, r_3 分别为此点离这三个奇点的距离.

17. 在正实轴上, 从 $x=0$ 到 $x=a$ 有连续均匀分布的点源, 它们的总强度为 $2\pi m$, 求复位势. 若加一平行 x 轴的平行流 V (沿 x 正向), 证明有一条流线为

$$Vy + \frac{m}{a} \left[x(\theta_1 - \theta_2) + a\theta_2 + y \ln \frac{r_1}{r_2} - \pi a \right] = 0$$

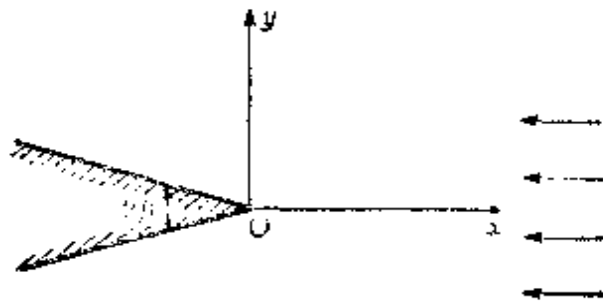
其中 r_1, r_2 是到 $z=0, z=a$ 的距离, θ_1, θ_2 是流线上任意一点到这两点的连线与 x 轴的夹角.

18. 证明沿正 x 轴的均匀流 V 加上在 $z=-a$ 处强度为 $2\pi m$ 的点源和在 $z=a$ 处强度为 $2\pi m$ 的点汇组成卵形体的绕流, 求驻

点及卵形体方程.

19. 证明沿正 x 轴的均匀流 V 加上 $z=0$ 处的强度为 $2\pi m$ 的点源组成了半无穷体的绕流. 求流线方程、驻点, 并证明此半无穷体在 y 轴上达到其最大厚度的一半.

20. 求沿正 x 轴的均匀流 V , $z=0$ 处强度为 $2m\pi$ 的点源和从 $z=a$ 到 $z=b$ 处连续分布的总强度为 $2m\pi$ 的点汇系 (a, b 为实数, 且 $b > a > 0$) 三个流动叠加后的复位势. 求流线方程和确定驻点的方程.



题 21

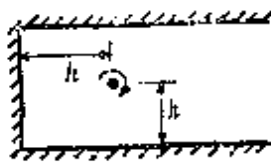
21. 求图示绕流的复速度及楔面上流体速度 V_w , 已知无穷远处复速度为

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z \rightarrow \infty} = (-az^{\beta/(n-\beta)})_{z \rightarrow \infty}$$

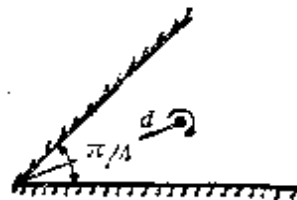
22. 设 Ox 轴, Oy 轴为直角固壁, 在 $z=1+i$ 处有一强度为 $2\pi m$ 的点源, 而在 $z=0$ 处有一等强度的点汇 (即固壁上有一小孔). 求流体运动的复位势及流线方程; 并求在 $z=1$ 点的速度值.

23. 同上题直角固壁, 在 $z=1+i$ 处放一环量为 Γ 的点涡, 求复位势及流线方程.

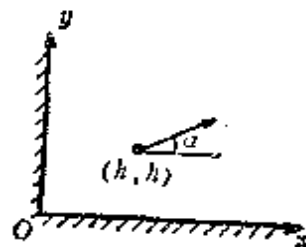
24. 求下列图示流动的复位势.



(a)



(b)



(c)

题 24

其中点涡的强度为 Γ , 偶极子强度为 m .

25. 设 $\theta = -\pi/4, \theta = \pi/4$ 为固壁边界, 在 $\theta = 0, r = a$ 处有一强度为 $2\pi m$ 的点源, 而在 $\theta = 0, r = b (b > a)$ 处有一等强度的点汇, 求证流函数为

$$\psi = m \arctan \frac{r^4(a^4 - b^4) \sin 4\theta}{r^8 - r^4(a^4 + b^4) \cos 4\theta + a^4 b^4}$$

并验证固壁是流线.

26. 证明位于 $z = \pm na (n = 0, 1, 2, \dots, a$ 为实数), 强度均为 $2\pi\Gamma$ 的一列点涡的复位势为

$$w(z) = i\Gamma \ln \sin \frac{\pi z}{a}$$

并证明各点涡保持静止.

27. 有两个圆 $|z - i| = \sqrt{2}, |z + i| = \sqrt{2}$ 组成固壁. 若在 $z = 1$ 处有一单位强度的点源, 求此流动的复位势, 并计算 $z = 3i$ 点处的速度.

28. 三个环量各为 Γ 的同向点涡, 两两相距 $\sqrt{3}b/(2\pi)$, b 为实数, 证明它们沿着同一个圆周运动, 并且绕行一圈需要时间为 $b^2/|\Gamma|$.

29. n 个等距离分配在半径为 R 的圆周上的点涡, 它们强度均为 Γ , 方向相同, 求复位势和复速度, 并证明各个点涡以 $\omega = \frac{\Gamma(n-1)}{4\pi R^2}$ 的角速度沿圆周转动.

30. 设 Ox 与 Oy 轴为直角固壁, 求直角中位于 z_1 处点涡的运动轨迹为

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = c$$

其中 c 为常数.

31. 设 $|z| = a$ 为固壁边界, n 个点涡同向, 强度都为 Γ , 对称地排列在 $|z| = b (b > a)$ 上, 其中有一个在 $z = b$ 处, 证明复位

势为

$$w(z) = \frac{\Gamma i}{2\pi} \ln \left\{ \frac{z^n(z^n - b^n)}{b^n z^n - a^{2n}} \right\}$$

并证明各点涡以下列速度绕圆周 $|z| = b$ 移动

$$v = \frac{\Gamma \{ (n+1)b^{2n} - (3n-1)a^{2n} \}}{4\pi b(b^{2n} - a^{2n})}$$

32. 设一圆柱半径为 a , 在距圆柱中心为 $f(f > a)$ 处分别放置

- (1) 强度为 $2\pi Q$ 的点源;
- (2) 强度为 $2\pi m$ 的偶极子;
- (3) 强度为 $2\pi \Gamma$ 的点涡.

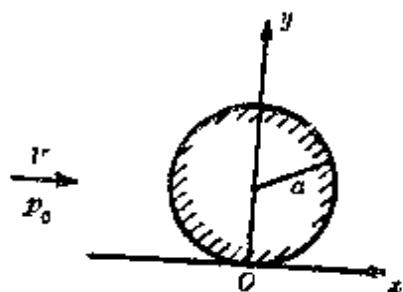
分别计算以上各种情况下圆柱所受的合力. 设流体密度为 ρ .

33. 一半径为 a 的圆木放在无穷长的平坦河床上, 若河水流速为 V , 压力为 p_0 .

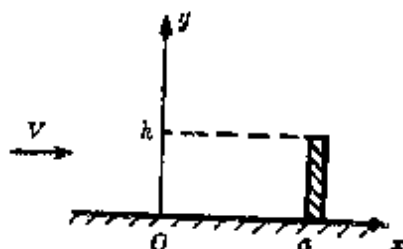
- (1) 计算流动复位势;
- (2) 证明河床上压力为

$$p_0 + \frac{1}{2} \rho V^2 - \frac{\rho \pi^4 a^4 V^2}{2x^4 \sinh^4 \frac{\pi a}{x}}$$

(3) 计算圆木上受的压力, 并证明圆木上最大与最小压力差为 $\pi^4 \rho V^2 / 32$, 其中 ρ 为流体密度.



题 33



题 34

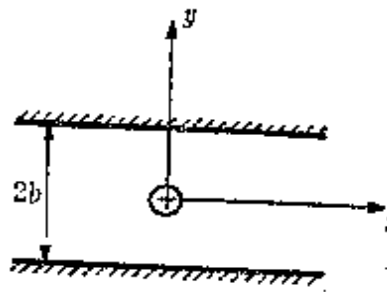
34. 在无穷长的平坦河床上有一高为 h , 厚度很薄的障碍物, 它离坐标原点的距离为 a . 若河水流速为 V , 压力为 p_0 , 河水密度为 ρ . 求障碍物上的压力分布, 并说明当

$$y > h(1+m)^{1/2}(1+2m)^{-1/2}$$

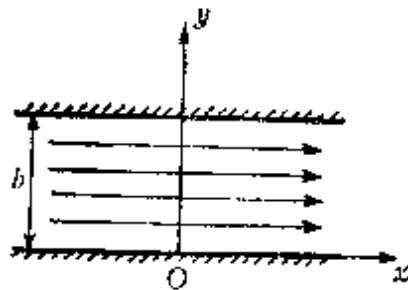
时, 此压力为负值, 其中 $m = \rho V^2 / (2p_0)$.

35. 在宽度为 $2b$ 的无穷长渠道中央放置一强度为 Q 的点源, 求复位势.

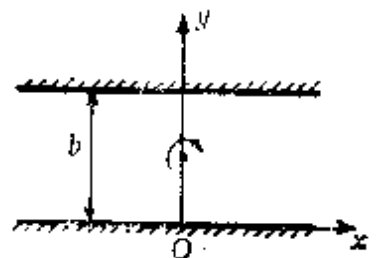
36. 流体以流量 Q 在宽度为 b 的无穷长渠道中流动, 求复位势.



题 35



题 36

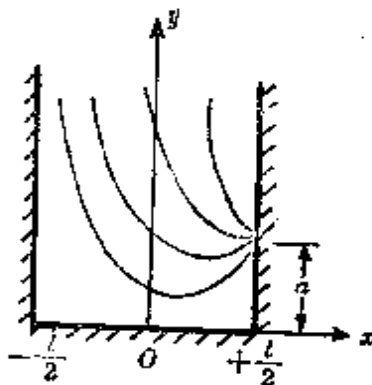


题 37

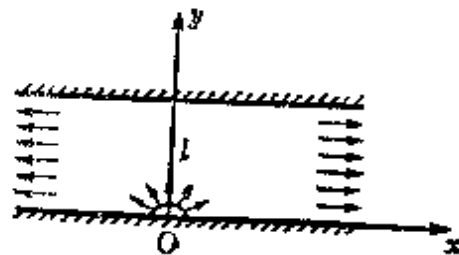
37. 在宽度为 b 的无穷长渠道中央放置一强度为 $2\pi\Gamma$ 的点涡, 方向如图所示, 证明其复位势为

$$w(z) = i\Gamma \ln \frac{e^{\pi z/b} - i}{e^{\pi z/b} + i}$$

38. 有一宽为 l 的无限高容器, 在侧壁高为 a 处有一小孔,



题 38



题 39

流体以流量 Q 自小孔流出。证明复位势为

$$w(z) = -\frac{Q}{\pi} \ln \left(\sin \frac{\pi}{l} z - \cosh \frac{\pi}{l} a \right)$$

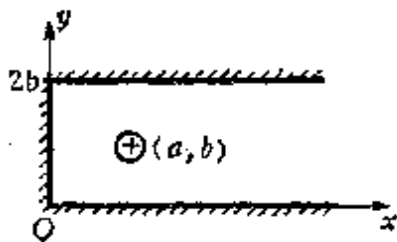
39. 有一宽为 l 的无穷长渠道，流体以流量为 Q 自渠边小孔流入渠道，求复位势。

40. 如图所示， (a, b) 处放置一强度为 Q 的点源，试证流线为

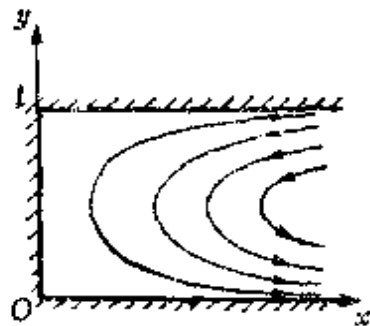
$$\cosh \left(\frac{\pi x}{b} \right) \cos \left(\frac{\pi y}{b} \right) + \cosh \left(\frac{\pi a}{b} \right) = c \sinh \left(\frac{\pi x}{b} \right) \sin \left(\frac{\pi y}{b} \right)$$

其中 c 为常数。

41. 设有一端封闭的半无穷长渠道，宽为 l 。今在无穷远处有一宽为 $l/2$ 的流束以速度 V 沿负 x 轴方向紧贴渠道一边流动。试求复位势，势函数和流函数。



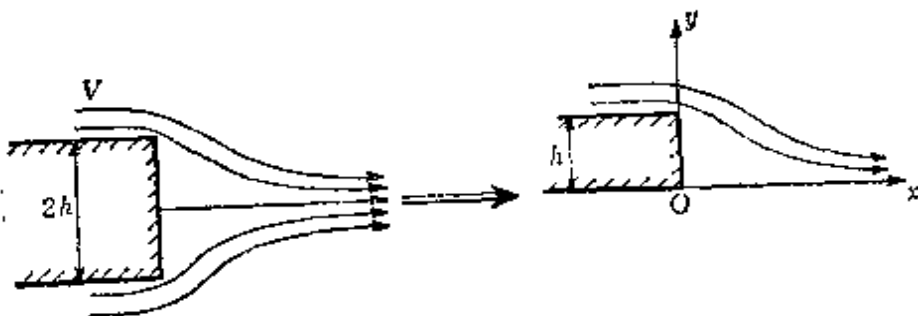
题 40



题 41

42. 如图所示，有一半无穷长宽为 $2h$ 的物体，流体自无穷远处以速度 V 沿物面流来，求复位势。

(提示：可化为(b)图所示的问题处理。)

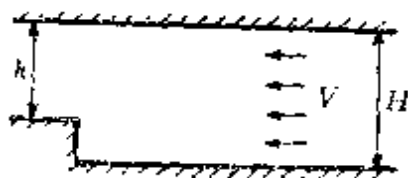


(a)

(b)

题 42

43. 流体以速度 V 在如图所示的变截面渠道中自右向左流动, 求复位势.



题 43

44. 一无穷长的平坦河床上有一障碍物为一圆弧 \widehat{Oa} , 其参数如图所示, 求复位势.



题 44

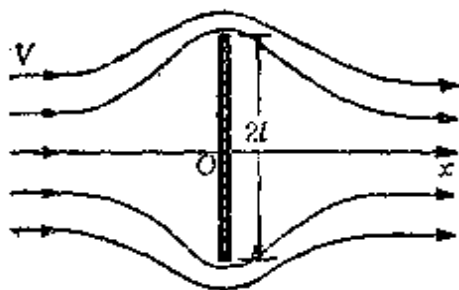
45. 自选两种不同的方法求解平板的垂直绕流问题, 写出复位势、流线方程、等势线方程. 并证明平板所受的合力为零.

46 一个薄翼剖面, 弦长为 a , 无穷远来流为 V , 与翼弦夹角为 α . 若以连续分布的点涡来代替翼剖面, 并设每单位长涡旋强度为 $\gamma(\xi)$.

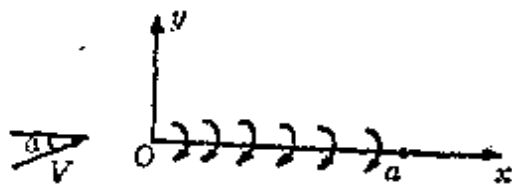
(1) 证明 $\int_0^a \frac{\gamma(\xi) d\xi}{\xi - x} = 2\pi V \sin \alpha$, 其中 $0 < x < a$;

(2) 验证 $\gamma(\xi)$ 的一个解是 $c \left(\frac{\xi}{a - \xi} \right)^{1/2}$, c 为常数;

(3) 用茹柯夫斯基公式证明: 翼剖面每单位长度的举力为 $\pi \rho V^2 \sin \alpha$, 其中 ρ 为流体密度.

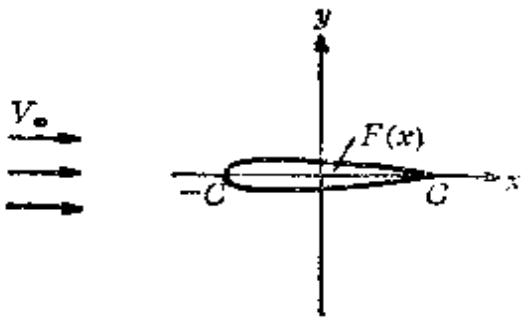


题 45



题 46

47. 考虑一对称翼剖面，弦长为 $2c$ ，剖面方程为 $y = F(x)$ ($x > 0$)，无穷远流速为 V_∞ ，设运动是定常的，流体是理想不可压缩。



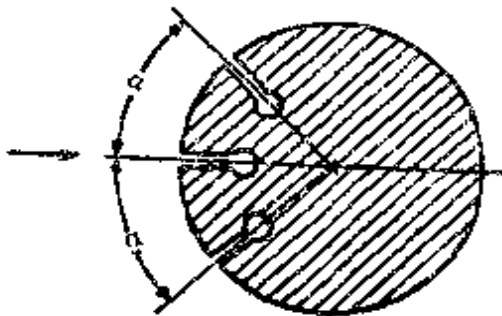
题 47

试用源汇法求此绕流问题的复位势和复速度。问此时薄翼所受的举力和阻力多大？

48. 半径分别为 r_0 和 R_0 的两个同心圆筒间充满了无粘性、不可压缩、无旋的流体。在某一时刻，内筒有一向右（径向）的速度 V_0 ，外筒不动。

- (1) 写出内、外筒上速度所满足的条件；
- (2) 求流动的速度势。

49 具有三个径向钻孔、能绕轴转动的圆柱可用作流向指示器（如图示）。当两个边孔的压力相等时，中间孔将指向流动的方向，于是中间孔的压力为驻点压力。此装置称为导向皮托管或称圆柱偏航探头。



题 49

(1) 如果导向皮托管的边孔要用来测量来流的静压 p_∞ ，问边孔应开在何处，即 α 为多少（这里按不可压缩流体的位势流计算，在实际流动的情形， α 角应略大一些）？

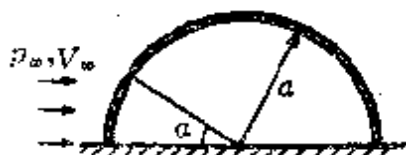
(2) 按此计算而设计的导向皮托管，其测压的灵敏度如何？设灵敏度定义为单位角的压力改变，即 $\partial p / \partial \theta$ 。

50. 设一蒙古包作成半径为 a 的半圆柱形，因受正面来的速度为 V_∞ 的大风袭击，屋顶承受升力有离开基础而升起之危险。升力产生的主要原因是入口在地面上，该处有驻点压力。一有经验的牧民迅速地将此口堵上而在由地面算起的 α 角处重新开一通

气窗，使作用在屋顶上的升力消除了，问 α 应为什么值？设开口尺寸远小于半径 a ，又设流动是不可压缩的位势流动。

51. 考虑一均匀剪切流 $V_\infty = U + uy$ 绕半径为 a 的圆柱体的流动，求流体作用在圆柱上的合力。设流动是定常的，流体密度 ρ 为常数。

52. 试画出到达有限翼展机翼前缘的一条流线在机翼上下表面分流的趋势及其流动图案，并与二维机翼的情况进行比较。



题 50



题 51

53. 设在一大展弦比机翼上取如图的坐标系，试证在机翼下游无穷远处与 $y-z$ 平面平行的平面内，每一点的下洗速度值为 $y-z$ 平面内对应点的下洗速度值的两倍，即

$$\lim_{x \rightarrow \infty} w(x, y, z) = 2w(0, y, z)$$

54. 试证对于椭圆分布载荷的有限翼展机翼，沿机翼的翼展下洗速度和下洗角为常数。



题 53

55. 已知有限翼展机翼沿翼展环量分布为

$$\Gamma = \Gamma_0 \left(1 - \frac{y^2}{S^2}\right)^{3/2}$$

其中 Γ_0 为常数， S 为半翼展长， y 为展向坐标。利用举力线理论求：

(1) $y = S/2$ 处的诱导速度值；

(2) 翼梢处的诱导速度值.

提示: 利用积分恒等式

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta d\theta}{\cos \theta - \cos \varphi} = \frac{\pi \sin n\varphi}{\sin \varphi}$$



56. 一重为 W , 翼展长为 l 的单翼飞机, 机翼所受载荷为椭圆分布, 若用一条等价马蹄形举力线代替机翼, 计算当冲角很小、飞行速度为 v 时沿飞机轴线在机翼后面 H 处下洗角的大小.

(提示: 等价马蹄形举力线所承受的总举力应与机翼承受举力相等, 但附着涡的宽度与翼展长度就不同了.)

57. 若机翼用一条马蹄形举力线代替, 附着涡长为 $2S$, 试证在机翼中央距附着涡后面 l 处下洗角为

$$\varepsilon = \frac{C_L}{2\pi\lambda} \left[\frac{\sqrt{S^2 + l^2}}{l} + 1 \right]$$

其中 C_L 为举力系数, λ 为展弦比.

若二维举力曲线斜率为 2π , 设展弦比的修正是采用椭圆机翼的修正, 证明在机翼后面 l 处下洗角对冲角 α 的改变率为

$$\frac{d\varepsilon}{d\alpha} = \frac{1}{\lambda + 2} \left[\frac{\sqrt{S^2 + l^2}}{l} + 1 \right]$$

并计算当 $\lambda = 8, l = 0.8S$ 时, $d\varepsilon/d\alpha$ 的大小.

58. 空气中有一球形水滴, 求水滴下落加速度. 设水的密度为 ρ_1 , 空气密度为 ρ .

59. 设半径为 a 的无穷长的圆柱在无穷的理想不可压静止流体中沿 x 轴(与柱轴垂直的方向)作不定常平动, 速度为 $u(t)$, 求流体对圆柱的惯性阻力, 并写出该圆柱体的运动微分方程.

如果圆柱绕自己的轴转动, 角速度为 $\omega(t)$, 这时它所受的惯性阻力是多少?

60. 淹没在不可压缩理想流体中的球面按一定规律 $R = R(t)$ 而膨胀, 试确定球面所受的流体压力. 质量力忽略不计.

第八章 理想不可压缩流体波浪运动

3.1 基本方程组、边界条件及初始条件

考虑处于重力场作用下的理想不可压缩均质流体，流体的四侧底部以固壁为界（例如海底、两岸等），上面则与空气接壤形成自由面，若流体在重力场作用下处于静止状态，根据静力学原理自由面必为平面。现在由于某种外界的作用，流体的表面离开了自己的平衡位置，则由于重力场力图使自由面恢复原来的位置，流体中便产生了运动，这种运动以波的形式在整个自由面上传播。这样我们在自由面上就看到一种以一定速度运动的表面波，这种表面波称为重力波，因为它是在重力作用下产生的。

表面波的形态是多种多样的。按振幅与波长之间的关系来分可以得到小振幅波和有限振幅波两种

类型。所谓小振幅波是指那种振幅比起波长来说小得很多的波，如果振幅比波长不是小得很多就称为有限振幅波。下面我们只限于考虑小振幅波的情形，并通过小振幅波的结果阐明重力波的主要物理特性。

取自由面的平衡位置为 $x-y$ 平面， z 轴垂直向上。（见图 8.1.1）设重力波波面的方程为

$$z = \zeta(x, y)$$

流体质点速度在三个坐标轴上的分量分别以 u, v, w 表示。现估计小振幅波情形下波面的几何特征量和速度特征量的量阶。以

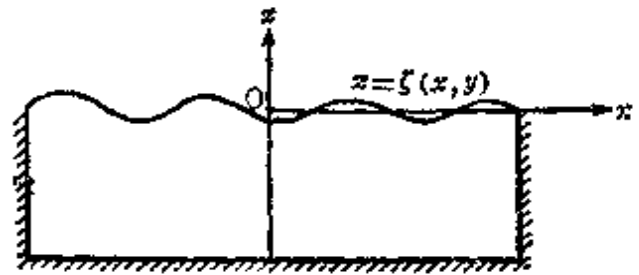


图 8.1.1

a 表振幅, λ 表波长, 则 λ 是 1 阶的量, 而 a 则是一阶微量。显然, 波面的坐标 $\xi \sim a$, 而



$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \text{ 与 } \frac{\partial \xi}{\partial y} \sim \frac{a}{\lambda}$$

现在我们来估计速度分量 u, v, w 的量阶。流体质点在经过周期 τ 后走了 a 数量阶的距离, 因此速度大小及速度分量的量阶为

$$V \sim u \sim v \sim w \sim \frac{a}{\tau}$$

而速度对时间及坐标的偏导数分别是 a/τ^2 及 $a/(\tau\lambda)$ 的量阶。总结起来, 我们得到下列量阶估计:

$$1) \xi \sim a; \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} \text{ 与 } \frac{\partial \xi}{\partial y} \sim \frac{a}{\lambda}. \quad (8.1.1)$$

$$2) u, v, w \sim \frac{a}{\tau}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \sim \frac{1}{\tau}, \quad \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \sim \frac{1}{\lambda}. \quad (8.1.2)$$

现在我们利用上述量阶估计证明重力波的流体运动在小振幅情形下是无旋的。写出动量方程

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) \quad (8.1.3)$$

等式左边就地导数和位变导数之比具有下列量阶

$$\frac{(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}}{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}} \sim \frac{\frac{a^2}{\tau^2 \lambda}}{\frac{a}{\tau^2}} = \frac{a}{\lambda}$$

在小振幅波情形, a/λ 是一小量。因此 $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ 相对 $\partial \mathbf{v} / \partial t$ 而言可以忽略不计, 这样(8.1.3)式变为

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + gz \right)$$

积分之, 并考虑到初始时刻流体处于静止状态后得

$$\mathbf{v} = -\nabla \int_0^t \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) dt \quad (8.1.4)$$

此式说明流体运动是无旋的。令

$$\mathbf{v} = \text{grad} \varphi \quad (8.1.5)$$

将之代入连续性方程得到 φ 应满足拉氏方程

$$\Delta \varphi = 0 \quad (8.1.6)$$

解出 φ 后，速度由(8.1.5)式决定，而压力则由拉格朗日积分

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - gz + f(t) \quad (8.1.7)$$

决定，原积分中应出现的 $V^2/2$ 现在因忽略 $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ 项故必须忽略，这点从(8.1.4)式也可看出。

由于拉氏方程的解可以相差 t 的一个任意函数，令

$$\varphi' = \varphi - \int_0^t f(t) dt + \frac{p_0 t}{\rho}$$

则(8.1.6)及(8.1.7)式转换成下列形式

$$\Delta \varphi' = 0 \quad (8.1.8)$$

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -\frac{\partial \varphi'}{\partial t} - gz \quad (8.1.9)$$

以后就采用这个形式，为了方便起见将 φ' 中的“'”省略不写。

现在考虑边界条件。在固壁上满足法向速度分量等于零的条件，即

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad (8.1.10)$$

在自由面 $z = \zeta(x, y)$ 上

$$p = p_0 \quad (8.1.11)$$

其中 p_0 为大气压力。将(8.1.9)式代入得

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{z=\zeta} + g\zeta = 0 \quad (8.1.12)$$

现在我们设法将上式中的 ζ 消去。对于速度分量 w 有

$$w = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

由于 $u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y}$ 的量阶为 $\frac{a}{\lambda} \frac{a}{\tau}$, 而 $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ 的量阶为 $\frac{a}{\tau}$, 于是 $u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ 相比是一个小量, 可以忽略不计. 由此我们得到

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (8.1.13)$$

联合(8.1.12)式及(8.1.13)式, 并将 ξ 消去后得

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{z=\xi} = 0$$

因为 ξ 是一阶微量, 且有(8.1.1), (8.1.2)式的量阶估计, 因此上式可转移到 $z=0$ 的平面上满足. 于是我们有

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{z=0} = 0 \quad (8.1.14)$$

(8.1.10)式和(8.1.14)组成全部边界条件.

现在再来考虑初始条件. 初始条件和重力波产生的原因密切相关. 重力波之所以产生总是由于外界对流体有作用使其离开平衡位置所致. 外界作用可以分成两类: (1) 作用在流体内部, 例如潜水艇在水中运动, 海底地震等; (2) 作用在自由面上. 作用在自由面的因素也可以分成两种情形, 一种因素是使自由面的初始平衡发生变化. 例如将一固体慢慢沉入水内, 然后突然从水中取出, 这样自由面的形状就受到一个扰动, 原始位置发生变化. 这时自由面各点的初始速度都是等于零的. 另一种因素是使自由面上各个质点获得初始速度. 例如在自由面上突然吹来一阵风, 风吹过后自由面各点的初始速度便不等于零. 在实际问题中, 这两种作用在自由面上的因素可以同时存在, 即既有初始位置变化也有初始速度变化. 下面我们只限于考虑作用在自由面的因素并写出与之相应的初始条件.

设自由面的初始位置变化以函数 $\zeta(x, y)|_{t=0} = h(x, y)$ 表示, 则由(8.1.12)式得 $z=0$ 及 $t=0$ 时

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -gh(x, y)$$

令 $-gh(x, y) = f(x, y)$, 得 $z=0, t=0$ 时

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(x, y) \quad (8.1.15)$$



这就是初始位置变化所引起的初始条件。下面考虑和初始速度变化相联系的初始条件。

设初始时刻 $t=0$ 时自由面上各点速度为零 (自由面的形状不一定是平面, 也即可以有初始位置的变化)。现在在无穷小时间 δ 内给自由面以很大的作用力, 使得整个作用在自由面上的冲量是有限值。由于流体是不可压缩的, 这个冲量作用瞬间传递流体内各点, 各点都获得冲量, 各点的压力及速度都发生变化。现在考察 δ 时刻后的速度值, 写出欧拉方程

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p$$

将此方程对 t 从 0 积到 δ , 并考虑到 $t=0$ 时 $\mathbf{v}=0$ 的事实得

$$\mathbf{v} + \int_0^\delta (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} dt = \int_0^\delta \mathbf{F} dt - \frac{1}{\rho} \text{grad} \int_0^\delta p dt$$

其中 $\int_0^\delta p dt$ 是流体各点所受到的冲量, 注意它只是在自由面上才是已知的, 等于给定的冲量值。由于 δ 很小, $\int_0^\delta (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} dt$ 及 $\int_0^\delta \mathbf{F} dt$ 都是 δ 数量阶的量 (因 $\mathbf{F}, (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ 都是有限的), 比起 $\int_0^\delta p dt$ 这一有限量来说均可忽略不计, 于是我们有

$$\mathbf{v} = \text{grad} \left(-\frac{1}{\rho} \int_0^\delta p dt \right),$$

令

$$\pi = - \int_0^a p dt$$

得

$$v = \text{grad} \left(- \frac{\pi}{\rho} \right)$$

这说明 v 是有势的, 且

$$\varphi = - \frac{\pi}{\rho}$$

设初始时刻冲量 $\pi = \int_0^\delta p dt$ 在自由面上的值是已知的

$$\pi = \pi(x, y, \zeta)$$

则在自由面 $z = \zeta(x, y)$ 上, 在 $t = \delta$ 时刻

$$\varphi = - \frac{\pi}{\rho} = F(x, y, z)$$

由于 δ 很小, ζ 也很小, 我们可以认为上述条件在 $t=0, z=0$ 上满足, 于是 $t=0, z=0$ 时有

$$\varphi = F(x, y) \quad (8.1.16)$$

这就是与初始速度变化相联系的初始条件, (8.1.15) 式和 (8.1.16) 式组成作用在自由面上的全部初始条件.

总起来说我们有: 速度势函数 $\varphi(x, y, z, t)$ 满足下列方程及边界条件和初始条件

$$\Delta \varphi = 0$$

$$\text{边界条件: 在固壁上} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

$$\text{在 } z=0 \text{ 上:} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = - \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (8.1.17)$$

初始条件: 在 $t=0, z=0$ 时

$$\varphi = F(x, y), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(x, y)$$

解出 φ 后, 速度、压力及自由面形状分别由下列三式决定



$$\begin{cases} v = \text{grad} \varphi \\ \frac{p}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - gz + \frac{p_0}{\rho} \\ \xi = \left(-\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=0} \end{cases} \quad (8.1.18)$$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

8.2 平面波的周期解、驻波、进波

为了简单起见下面只考虑 Oxz 平面上的平面波情形。根据平面运动的定义，平行 Oxz 平面的所有平面上流体运动都在该平面内进行，即没有 y 方向分量。此外沿 Oxz 平面的垂线方向，所有物理量都取同一值，也就是所有物理量与坐标 y 无关。因此对于 Oxz 平面上的平面波浪运动而言，我们只要考虑 Oxz 平面上的流体运动即可。但要记住， Oxz 上一条直线实际上代表以平行 Oy 轴的直线为母线的柱面。以后我们常在自由面柱面及固壁柱面所围成的单位高度的柱体内考虑问题。

下面我们进一步假定流体是无界的，即底部及两边都伸展到无穷去。无界流体的波浪运动实际上是不存在的，它只是深度和长度比波长大得很多时的近似模型。在无界流体情形，固壁上的边界条件应该被 $z = -\infty$ 时 $\partial \varphi / \partial z = 0$ 及两侧速度有限的条件代替。

在无界平面波情形方程及与之相应的边界条件、初始条件可写成

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (8.2.1)$$

$$\text{边界条件：在 } z=0 \text{ 处 } \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (8.2.2)$$

$$\text{在 } \infty \text{ 处 } \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (8.2.3)$$

初始条件：在 $t=0, z=0$ 时

超星阅读器提醒您：
使用本软件(8.2.4)
请尊重相关知识产权

$$\varphi = F(x), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = f(x)$$

先求平面波的周期性特解及其叠加，并分析这些解所代表的波浪运动：驻波及进波。

我们寻找方程(8.2.1)下列形式的特解

$$\varphi(x, z, t) = T(t)\Phi(x, z) \quad (8.2.5)$$

将(8.2.5)式代入(8.2.1)及(8.2.3)式中去分别得 Φ 满足下列方程及边界条件，

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (8.2.6)$$

$$\text{在 } \infty \text{ 处 } \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (8.2.7)$$

其次，将(8.2.5)式代入(8.2.2)式得 $z=0$ 时

$$T(t) \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{1}{g} T''(t) \Phi$$

或 $z=0$ 时

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -g \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

因等式右边只是 x 和 z 的函数，而左边却是 t 的函数，因此它们都只能等于常数，令此常数为 $-\sigma^2$ ，于是有

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -g \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\sigma^2$$

即

$$T''(t) + \sigma^2 T(t) = 0 \quad (8.2.8)$$

及 $z=0$ 时

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\sigma^2}{g} \Phi \quad (8.2.9)$$

(8.2.8)式决定 $T(t)$ ；(8.2.6)，(8.2.7)，(8.2.9)组成确定 $\Phi(x, z)$ 的方程及边界条件，解出(8.2.8)后得

7(4) - 1 11 1 1 1 1 (21 1) 10

超星阅读器提醒您
使用本复制品
请尊重相关知识产权!

(8.2.14)式容易看出物理量 φ, v, p 在某点上与时间 t 的关系是周期性的简谐函数。因而(8.2.14)式中的 φ 称为平面波的周期性特解。应该指出，周期性特解的线性组合仍然是拉氏方程满足所有边界条件的解。我们正是利用这个性质求周期解的叠加及平面波的一般解。

下面分析(8.2.14)式代表的波浪运动，即研究它的自由面形状、速度、压力及轨迹。不失普遍性令 $\xi = 0, e = 0$ 。于是

$$\varphi(x, z, t) = C e^{kz} \sin kx \cos \sigma t \quad (8.2.15)$$

1) 自由面形状

由(8.1.18)式

$$\begin{aligned} \zeta(x, t) &= -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi(x, 0, t)}{\partial t} \\ &= \frac{C \sigma}{g} \sin kx \sin \sigma t \end{aligned} \quad (8.2.16)$$

令

$$\frac{C \sigma}{g} = a$$

则

$$C = \frac{ag}{\sigma} \quad (8.2.17)$$

于是(8.2.15)及(8.2.16)式可写成

$$\begin{aligned} \varphi(x, z, t) &= \frac{ag}{\sigma} e^{kz} \sin kx \cos \sigma t \\ \zeta(x, t) &= a \sin \sigma t \sin kx \end{aligned} \quad (8.2.18)$$

现在分析自由面的方程(8.2.18)。对于每一个固定时刻来说，自由面的形状是正弦曲线。暂时令

$$A = a \sin \sigma t \quad (8.2.19)$$

则(8.2.18)式变为

$$\zeta = A \sin kx$$

它与 Ox 轴的交点是

$$x = \frac{n\pi}{k} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

称为节点。它的极大点 B' 及极小点 C' 分别称为波峰及波谷(见图8.2.1)。两节点之间的距离为 π/k ，两个波峰或波谷之间的距离则为

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (8.2.20)$$

称为波长。而

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (8.2.21)$$

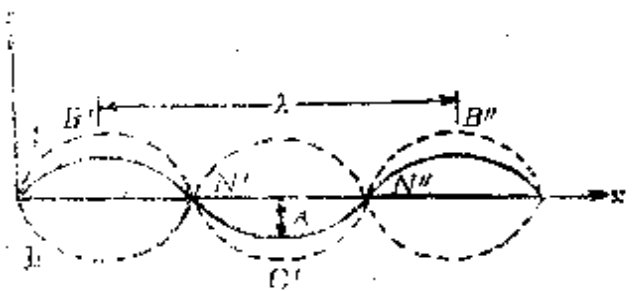


图 8.2.1

则称为波数，它代表 2π 长度内有多少个波长。波峰到 x 轴的距离 $A = |a \sin \sigma t|$ 在 0 和 $|a|$ 之间振动，随之整个正弦曲线在如图 8.2.1 所示的两个极限位置 I, II 之间上下作周期性振动。振动的周期

$$\tau = \frac{2\pi}{\sigma} \quad (8.2.22)$$

称为波的周期。而

$$n = \frac{1}{\tau} = \frac{\sigma}{2\pi} \quad (8.2.23)$$

称为频率，它代表每秒钟振动的次数。

$$\sigma = 2\pi n \quad (8.2.24)$$

称为角频率或圆周频率，代表 2π 秒钟振动的次数。 $|a|$ 称为振幅。

通过上面的分析可以确信，自由面是正弦曲线，它随着时间以正弦规律上下作周期性振动。由于驻点位置不随时间变化，初始时刻是驻点永远是驻点，整个波不向左右传播，因此被称为驻波。

现在我们来考察(8.2.13)式

$$\sigma^2 = gk, \quad k = \frac{1}{g} \sigma^2 \quad (8.2.25)$$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

这是一个联系波数及角频率的关系式，将(8.2.22)式与(8.2.21)式代入得波长 λ 与周期 τ 之间的一个关系式

$$\tau = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}}, \quad \lambda = \frac{g\tau^2}{2\pi} \quad (8.2.26)$$

(8.2.25)及(8.2.26)式告诉我们在波数及角频率，波长及周期之间存在着紧密的联系，它们是平方正比关系，当波数愈大时，角频率愈大；反之，当波长愈大时，周期也愈大。

2) 速度

由(8.1.18)式得

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{2gk}{\sigma} e^{kz} \cos kx \cos \sigma t \\ \quad = a\sigma e^{kz} \cos kx \cos \sigma t \\ w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{agk}{\sigma} e^{kz} \sin kx \cos \sigma t \\ \quad = a\sigma e^{kz} \sin kx \cos \sigma t \end{cases} \quad (8.2.27)$$

上式表明速度分量与 x, t 的关系与 φ 相同。其次随着 $z \rightarrow -\infty$, u, w 以 e 的指数极快地趋于零。这就说明表面波所引起的流体运动主要限制在流体表面附近。

3) 质点运动规律及轨迹

由(8.2.27), 质点运动规律的方程是

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a\sigma e^{kz} \cos kx \cos \sigma t \\ \frac{dz}{dt} = a\sigma e^{kz} \sin kx \cos \sigma t \end{cases} \quad (8.2.28)$$

这是确定 $x(t), z(t)$ 的微分方程组，它不易求解。但由于我们考虑的是小振幅波，流体质点在其平衡位置作微小振动，在忽略高级微量的条件下可以用平衡位置 z_0, x_0 近似地代替(8.2.28)式右

边的 z, x . 于是

$$\frac{dx}{dt} = a\sigma e^{kz_0} \cos kx \cos \sigma t$$

$$\frac{dz}{dt} = a\sigma e^{kz_0} \sin kx_0 \cos \sigma t$$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重知识产权！

此方程组容易积分出来. 考虑到初始条件 $t=0$ 时 $x=x_0, z=z_0$ 后我们有

$$\begin{cases} x - x_0 = ae^{kz_0} \cos kx_0 \sin \sigma t \\ z - z_0 = ae^{kz_0} \sin kx_0 \sin \sigma t \end{cases} \quad (8.2.29)$$

消去 t 后有

$$z - z_0 = (x - x_0) \tan(kx_0) \quad (8.2.30)$$

(8.2.29), (8.2.30) 分别确定了质点的运动规律及轨迹. 我们看到流体质点的轨迹是直线 (见图 8.2.2), 直线的倾角是 kx_0 . 在

节点处, $\tan kx_0 = 0$, 流体质点在平衡位置 x_0, z_0 附近作水平方向振动, 而在波峰、波谷处 $\tan kx_0 = \infty$. 流体质点在垂直方向围绕平衡位置作振动. 其次我们看到质点

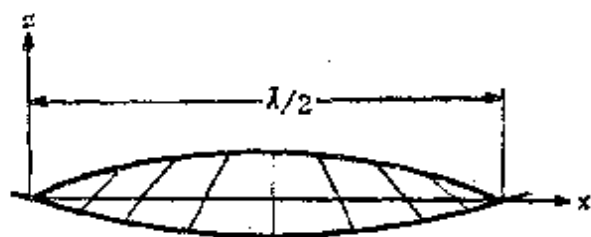


图 8.2.2

振动的振幅等于 ae^{kz_0} , 它随 z_0 的增加以指数规律迅速地减少. 例如在深度等于波长 ($z_0 = -2\pi/k$) 的地方振幅为 $ae^{-2\pi}$, 已是原自由面处振幅的 535 分之一. 这说明在无界流体平面波情形, 波动现象具有明显的表面性质.

上面我们考虑了初相为零的特解

$$\varphi = Ce^{kz} \sin kx \cos \sigma t$$

现在再写出初相为 $\xi = \pi/2, \varepsilon = \pi/2$ 的特解

$$\varphi = Ce^{kz} \sin \left(kx + \frac{\pi}{2} \right) \cos \left(\sigma t + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= Ce^{kz} \sin k \left(x + \frac{\lambda}{4} \right) \cos \sigma \left(t + \frac{\tau}{4} \right)$$

$$= -Ce^{kz} \cos kx \sin \sigma t$$

(8.2.31)



其中

$$\sigma^2 = gk$$

显然这个解代表的还是驻波，它与前一个解的差别仅在于坐标的相位向前移动了 $\lambda/4$ 的距离，节点与波峰、波谷的位置互换。此外时间的相位也提前了 $\tau/4$ ，当前一运动处于极端位置时，现在这个运动却处于平衡状况，反之亦然。

将解(8.2.15)及(8.2.31)叠加起来得

$$\varphi = Ce^{kz} \sin(kx - \sigma t) \quad (8.2.32)$$

其中

$$\sigma^2 = gk \quad (8.2.3)$$

由于方程(8.2.1)，边界条件(8.2.2)及(8.2.3)的线性性质，(8.2.32)将仍然是拉氏方程的满足一切边界条件的解。现在我们来研究这个解代表什么样的平面波。

1) 自由面形状

$$\xi = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi(x, 0, t)}{\partial t} = \frac{C\sigma}{g} \cos(kx - \sigma t)$$

令 $C\sigma/g = a$ ，得

$$\varphi = \frac{ag}{\sigma} e^{kz} \sin(kx - \sigma t) \quad (8.2.34)$$

$$\xi = a \cos(kx - \sigma t) = a \cos k \left(x - \frac{\sigma}{k} t \right) \quad (8.2.35)$$

自由面的形状是余弦曲线，振幅及波长仍为 $|a|$ 及 $\lambda = 2\pi/k$ 。值得注意的是振幅及波长并不随着时间改变，因此整个波面的形状亦将不随时间而改变，不同时刻的波面只相差一个位相 $\sigma t/k$ ，也就是说整个波面随着时间 t 将向前移动。现在来求波面移动速度。初始时刻取波面上某 x_0 ，它可以是节点也可以是波峰或任何其他

点，为了明确起见，取它为节点。于是不同时刻节点的位置满足关系式

$$kx - \sigma t = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

亦即不同时刻节点位置为

$$x = \frac{\sigma}{k}t + \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{k}$$

由此不难看出整个节点也就是整个波面以速度

$$c = \frac{\sigma}{k} \quad (8.2.36)$$

向正 x 轴方向移动，速度 c 称为波的传播速度。因为

$$\sigma = \frac{2\pi}{\tau}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \sigma = \sqrt{gk}, \quad \tau = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}}$$

所以波的传播速度还可以写成下列各种形式

$$c = \frac{\sigma}{k} = \frac{\lambda}{\tau} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \frac{g}{\sigma} = \frac{g\tau}{2\pi} \quad (8.2.37)$$

上式表明，传播速度 c 是角频率 σ 和波数 k 之比或波长与周期之比，并且它和波长 λ 的平方根或周期 τ 成正比，与波数 k 的平方根或角频率 σ 成反比。由于(8.2.34)式代表的波动，其波面随时间传播，故称为进波。

应该强调指出，当整个波面以速度 c 传播时，流体质点只是围绕自己的平衡位置作微小的振动。关于这一点，我们在下面可以看出。

2) 速度

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = a\sigma e^{kz} \cos(kx - \sigma t) \quad (8.2.38)$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = a\sigma e^{kz} \sin(kx - \sigma t) \quad (8.2.39)$$

我们看出速度的变化规律与 φ 相似，而且随着 z 的增加， u, w 迅速以 e^{kz} 的阶次趋于零，因此波动的影响主要局限在自由面附近。

3) 质点的运动规律及轨迹

质点运动规律的方程根据(8.2.38), (8.2.39)式是

$$\frac{dx}{dt} = a\sigma e^{kz} \cos(kx - \sigma t)$$

$$\frac{dz}{dt} = a\sigma e^{kz} \sin(kx - \sigma t)$$

和驻波一样，由于我们考虑的是小振幅波，流体质点围绕平衡位置作微小振动，因此等式右边的 x, z 可以用平衡位置 x_0, z_0 代替，相差的仅是高级微量。于是

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a\sigma e^{kz_0} \cos(kx_0 - \sigma t) \\ \frac{dz}{dt} = a\sigma e^{kz_0} \sin(kx_0 - \sigma t) \end{cases} \quad (8.2.40)$$

积分之并考虑到初始条件 $t=0$ 时 $x=x_0, z=z_0$ 得

$$\begin{cases} x = x_0 - ae^{kz_0} \sin(kx_0 - \sigma t) \\ z = z_0 + ae^{kz_0} \cos(kx_0 - \sigma t) \end{cases} \quad (8.2.41)$$

消去 t 后得

$$(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2 e^{2kz_0} \quad (8.2.42)$$

(8.2.41)式及(8.2.42)式确定了流体质点的运动规律及轨迹。我们看到流体中每一个质点近似地作圆周运动。圆的半径是 ae^{kz_0} ，愈往下的质点半径愈小。当深度等于波长时，圆的半径较表面上的半径小535倍，由此可见波动现象主要限制在表面上。

现在我们考察一下质点绕圆周运动时速度的大小及方向，由(8.2.40)式得

$$v = (ae^{kz_0})\sigma$$

我们看到，质点绕圆周运动速度是常数值，即为 $(ae^{kz_0})\sigma$ ，且角

速度为 σ 。现在再来研究质点运行的方向，写出圆周的参数

$$x - x_0 = -ae^{kz_0} \sin \theta$$

$$z - z_0 = ae^{kz_0} \cos \theta$$

其中 θ 角如图8.2.3所示，将上式与(8.2.41)式比较得

$$\theta = kx_0 - \sigma t$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\sigma$$

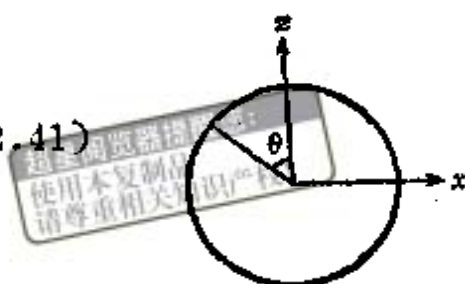


图 8.2.3

由此可见，质点将沿顺时针方向运动。

我们指出，波峰处流体质点的运动方向与波前进的方向相同，而波谷处流体质点的运动方向则与前进的方向相反，质点运动速度与波传播速度之比

$$\frac{v}{c} \sim \frac{a\sigma}{c} = \frac{a\sigma k}{\sigma} = \frac{a}{\lambda} 2\pi$$

是 a/λ 的阶次，在小振幅波情形是一个小量。由此可见，质点运动速度 v 比起传播速度 c 小得很多，是一个微量。

4) 压力

由(8.1.18)式得

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - gz = a g e^{kz_0} \cos(kx - \sigma t) - gz$$

以 z_0, x_0 代右边第二项中的 z, x 得

$$\frac{p - p_0}{\rho} = g[-z_0 + ae^{kz_0} \cos(kx_0 - \sigma t)]$$

考虑到(8.2.42)式上式变为

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -gz_0, \quad p = p_0 - \rho g z_0$$

上式表明，平衡时刻位于同一平面 $z = z_0$ 上的质点在以后任何时刻中都是组成等压面的。

8.3 群速

上面我们考虑了两个波长和周期相同而初相不同的平面波的叠加。为了解决实际问题，常常需要将几个波长不同的平面波叠加起来，此时自然地应该引进群速的概念。下面我们通过一个简单例子阐明这个概念。考虑两个周期相差很小的无界流体内进波的叠加。根据上节公式(8.2.34)，叠加后波浪运动的速度势函数为

$$\varphi = \frac{ug}{\sigma} e^{kz} \sin(kx - \sigma t) + \frac{ug}{\sigma'} e^{k'z} \sin(k'x - \sigma' t) \quad (8.3.1)$$

其中

$$\sigma = \sqrt{gk}, \quad \sigma' = \sqrt{gk'} \quad (8.3.2)$$

而 $k-k'$ 及 $\sigma-\sigma'$ 都是小量。

自由面的方程为

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi(x, 0, t)}{\partial t} = a[\cos(kx - \sigma t) + \cos(k'x - \sigma' t)] \\ &= 2a \cos\left[\frac{k+k'}{2}x - \frac{\sigma+\sigma'}{2}t\right] \cos\left[\frac{k-k'}{2}x - \frac{\sigma-\sigma'}{2}t\right] \end{aligned} \quad (8.3.3)$$

现在我们来详细地分析一下自由面的形状。考虑某一固定时刻 t 。(8.3.3)式中有两个余弦因子，每一个余弦代表一个周期现象，因此这里存在着两个周期性波动过程。第一个波动现象的波长是 $4\pi/(k+k')$ ，两节点间的距离为 $2\pi/(k+k')$ ；第二个波动现象的波长是 $4\pi/(k-k')$ ，两节点间的距离为 $2\pi/(k-k')$ 。由于 $k-k'$ 是小量，因此第二个波长 $4\pi/(k-k')$ 较第一个波长 $4\pi/(k+k')$ 大得很多。在第二个波动现象的波长间隔内将包含许多个波长为 $4\pi/(k+k')$ 的波。现在再让我们对这两种不同波长的周期现象进行具体的考察。将(8.3.3)式改写成

$$\xi = A \cos\left[\frac{k+k'}{2}x - \frac{\sigma+\sigma'}{2}t\right] \quad (8.3.4)$$

其中振幅 A 由下式确定

$$A = 2a \cos \left[\frac{k-k'}{2} x - \frac{\sigma-\sigma'}{2} t \right] \quad (8.3.5)$$

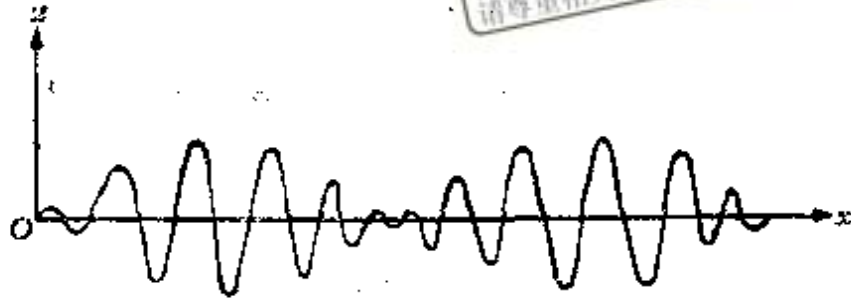


图 8.3.1

从(8.3.4)式我们看到, 当 x 位置每增加 $4\pi/(k+k')$ 距离时, 出现一个单个波 (参阅图8.3.1). 这些单个波的振幅由(8.3.5)式确定. 显然振幅是随 x 的变化而改变的, 在单个波波长 $4\pi/(k+k')$ 这一很短的距离内, A 的变化不大, 因此我们看到的波和 A 不变的波很相似. 但是随着 x 的增加, 新的单个波不断出现, 这些单个波的振幅则逐渐发生明显的变化, 由 0 变到 $2a$, 再由 $2a$ 变到 0, 呈现出明显的周期性, 这个周期现象的波长是 $4\pi/(k-k')$.

通过上面的分析我们可以得到如下结论: 在我们所研究的情形中有两种周期现象. 第一种周期现象是单个波, 波长为 $4\pi/(k+k')$, 主要受第一个余弦因子

$$\cos \left[\frac{k+k'}{2} x - \frac{\sigma+\sigma'}{2} t \right]$$

的制约; 第二种周期现象是单个波组成的波群, 它们的振幅呈现出周期性变化, 波长为 $4\pi/(k-k')$, 主要受第二个余弦因子

$$\cos \left[\frac{k-k'}{2} x - \frac{\sigma-\sigma'}{2} t \right]$$

的制约.

当时间 t 变化时, 由于两个余弦因子的相位发生变化, 无论

单个波或波群的位置都将向前移动，这样我们看到两种波动现象的传播，单个波的传播及波群的传播。下面我们计算单个波的传播速度及波群的传播速度。

单个波的节点位置由下式决定

$$\frac{k+k'}{2}x - \frac{\sigma+\sigma'}{2}t = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

或

$$x = \frac{\sigma+\sigma'}{k+k'}t + \frac{2\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)}{k+k'}$$

因此传播速度 c 为

$$c = \frac{\sigma+\sigma'}{k+k'}$$

由于 σ 与 σ' ， k 与 k' 相差很小，上式近似地等于

$$c \approx \frac{\sigma}{k} \quad (8.3.6)$$

这个公式和(8.2.37)式相同。

波群最大振幅相当于

$$\left| \cos\left(\frac{k-k'}{2}x - \frac{\sigma-\sigma'}{2}t\right) \right| \approx 1$$

对应的位置 x 由下式决定

$$\frac{k-k'}{2}x - \frac{\sigma-\sigma'}{2}t \approx n\pi \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

或

$$x = \frac{\sigma-\sigma'}{k-k'}t + \frac{2n\pi}{k-k'}$$

由此可见，最大振幅位置的传播速度即波群的传播速度 v_g 为

$$v_g = \frac{\sigma-\sigma'}{k-k'} \approx \frac{d\sigma}{dk} \quad (8.3.7)$$

波群的传播速度 v_g 称为群速，它由公式(8.3.7)式确定。

现在我们来推导群速 v_g 的另一公式。因

$$\sigma = kc = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

将(8.3.7)式写成

$$v_g = \frac{d\sigma}{dk} = \frac{2\pi}{\lambda^2} \frac{\lambda \frac{dc}{d\lambda} - c}{-\frac{2\pi}{\lambda^2}} = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} \quad (8.3.8)$$

(8.3.8)式表明，当波速 c 与波长 λ 无关时，群速与波速相等；若 c 依赖于波长 λ ，则群速 v_g 和波速 c 一定不相等。 c 依赖于 λ 的情形称为波的色散现象。

现在计算无限深流体进波的群速。由公式

$$\sigma = \sqrt{gk}$$

得

$$v_g = \frac{d\sigma}{dk} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}}$$

根据(8.2.37)式

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

得

$$v_g = \frac{c}{2}$$

由此可见，在无界流体的进波情形，群速是波速的一半。

8.4 波能，波能转移，波阻

在这一节中我们将研究波浪运动的能量，能量的转移以及与之相联系的波阻问题。

首先考虑波浪运动的能量。为了简单起见我们考虑无界流体的平面周期波作为例子。取平衡时的水平面为 x 轴， z 轴垂直向上。通常取一个周期长的流体体积 S ，考虑它的总能量。体积 S 是由波面 OAB ，平行 Oz 轴的直线 OD, BC 以及远处平行 x 轴的直线段 CD 组成（图 8.4.1 上画斜线的区域）。总能量在重力场情形下由动能及位能组成。现分别计算体积 S 内的动能及位能。我们知道，在无旋运动中动能的公式是

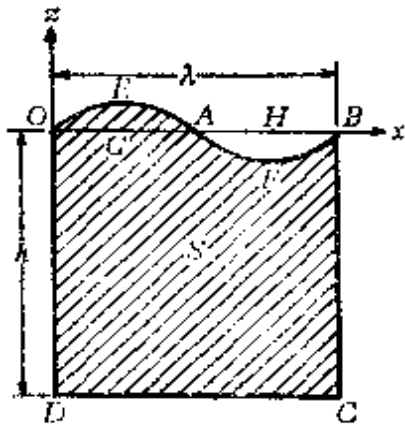


图 8.4.1

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_L \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl \quad (8.4.1)$$

其中 L 即 S 的界面，由 OAB, BC, CD, DO 组成。 \mathbf{n} 是 L 的外法线方向。将 (8.4.1) 式改写成

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_{CD} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl + \frac{1}{2} \rho \int_{BC+OD} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl + \frac{1}{2} \rho \int_{OAB} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl \quad (8.4.2)$$

因为平面无旋运动的速度势函数 φ 在无穷远处的量阶是 $1/R$ ，因此右边第一项积分在无穷远处的量阶是 $1/R^2$ ，当 $R \rightarrow \infty$ 时趋于零。其次在 BC 及 OD 的对应点上由于运动的周期性 φ 取相同值，而 $\partial \varphi / \partial n$ 的值则由于 BC 及 OD 的外法线方向恰好相反，因而取大小相等符号相反的值，于是被积函数 $\varphi(\partial \varphi / \partial n)$ 在 BC, OD 对应点上的值两两相消，即

$$\frac{1}{2} \rho \int_{BC+OD} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl = 0 \quad (8.4.3)$$

最后沿 OAB 的积分

$$\frac{1}{2} \rho \int_{OAB} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl$$

可以用沿直线 OB 的积分

$$\frac{1}{2} \rho \int_0^\lambda \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} dx \quad (8.4.4)$$

代替，相差二级微量。这是因为自由面方程 $\zeta = \zeta(x, t)$ 是一级微量，而将自由面上取值的 φ 及 $\partial\varphi/\partial n$ 转移到 $z=0$ 上取值将产生二级微量的偏差；其次

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_{z=0} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n}\right)_{z=0}$$

而 $\partial z/\partial n$ 与 1 亦相差二级微量，因此，可以用 $(\partial\varphi/\partial z)_{z=0}$ 代替 $(\partial\varphi/\partial n)_{z=0}$ ，其误差为二级微量以上的项。这样我们就可以用 (8.4.4) 式代替 (8.4.3) 式。将上述结果代入 (8.4.2) 式得

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_0^\lambda \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} dx \quad (8.4.5)$$

这就是平面周期波情形下计算动能的方程，我们看到，它只和 x 轴上的 φ 值及 $\partial\varphi/\partial z$ 值有关。

现在转来计算体积 S 的位能。这里的位能指的是波浪运动的位能和平衡时位能之差。显然位能之差等于 $OEAG$ 体积内的位能减去 $AFBH$ 内的位能。考虑到位能 $V = mgz$ ，我们得到位能差为

$$V = \int_0^\lambda dx \int_0^\zeta \rho g z dz = \frac{1}{2} \rho g \int_0^\lambda \zeta^2 dx \quad (8.4.6)$$

这就是位能公式，它与自由面的形状紧密联系。将 (8.4.5) 式及 (8.4.6) 式合并起来得到总能量的公式为

$$T + V = \frac{1}{2} \rho \int_0^\lambda \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} dx + \frac{1}{2} \rho g \int_0^\lambda \zeta^2 dx \quad (8.4.7)$$

现在我们计算驻波及进波情形下的动能及位能作为例子。无界流体驻波的 φ 及自由面方程为

$$\varphi = \frac{ag}{\sigma} e^{kz} \sin kx \cos \sigma t$$

$$\xi = a \sin \sigma t \sin kx$$

而

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = a \sigma e^{kz} \sin kx \cos \sigma t$$

于是

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_0^\lambda \frac{ag}{\sigma} a \sigma \sin^2 kx \cos^2 \sigma t dx = \frac{1}{4} \rho a^2 g \lambda \cos^2 \sigma t$$

$$V = \frac{1}{2} \rho g a^2 \int_0^\lambda \sin^2 \sigma t \sin^2 kx dx = \frac{1}{4} \rho a^2 g \lambda \sin^2 \sigma t$$

而

$$T + V = \frac{1}{4} \rho a^2 g \lambda$$

我们看到动能和位能之和是守恒的，动能和位能相互转移。

对于无界流体的进波而言，有

$$\varphi = \frac{ag}{\sigma} e^{kz} \sin(kx - \sigma t)$$

$$\xi = a \cos(kx - \sigma t)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = a \sigma e^{kz} \sin(kx - \sigma t)$$

于是

$$T = \frac{1}{2} \rho a^2 g \int_0^\lambda \sin^2(kx - \sigma t) dx = \frac{1}{4} \rho a^2 g \lambda$$

$$V = \frac{1}{2} \rho a^2 g \int_0^\lambda \cos^2(kx - \sigma t) dx = \frac{1}{4} \rho a^2 g \lambda$$

$$T + V = \frac{1}{2} \rho a^2 g \lambda$$

我们看到在进波情形下，无论位能或动能，它们的值都是不随时间改变的，当然总能量亦是守恒的。

现以无界流体进波为例计算能量的传递。取与 Ox 轴垂直的



平面 Oyz , 计算波从负 x 轴进入正 x 轴后传递了多少能量 (参看图 8.4.2). 为此只需计算左边流体对右边流体所作的功, dt 时间内压力作的功是

$$W' = \int_{-\infty}^0 p u dz$$

将无界流体进波的公式

$$\varphi = \frac{ag}{\sigma} e^{kz} \sin(kx - \sigma t)$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = a\sigma e^{kz} \cos(kx - \sigma t)$$

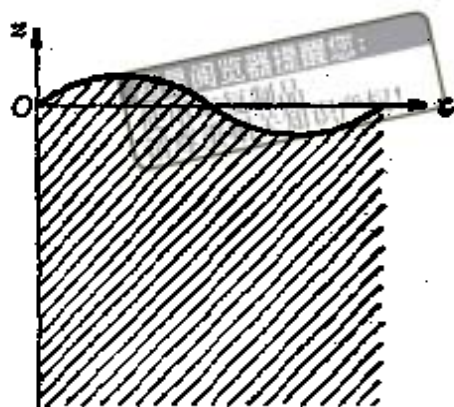


图 8.4.2

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - gz = ag e^{kz} \cos(kx - \sigma t) - gz$$

代入得

$$\begin{aligned} W' &= \int_{-\infty}^0 [a^2 g \sigma \rho e^{2kz} \cos^2(kx - \sigma t) dt \\ &\quad + (p_0 - \rho g z) a \sigma e^{kz} \cos(kx - \sigma t) dt] dz \\ &= \frac{\rho a^2 g \sigma}{2k} \cos^2(kx - \sigma t) dt \\ &\quad + \int_{-\infty}^0 (p_0 - \rho g z) a \sigma e^{kz} \cos(kx - \sigma t) dt dz \end{aligned}$$

在一个周期 $\tau = 2\pi/\sigma$ 内作的功是

$$W = \frac{\pi}{\sigma} \frac{\rho a^2 g \sigma}{2k} = \frac{1}{4} \rho g a^2 \lambda$$

于是单位时间内功的平均值是

$$W_1 = \frac{\rho g a^2}{4} \frac{\lambda}{\tau} = \frac{\rho g a^2}{4} c \quad (8.4.8)$$

这个功根据物理学基本定理就是单位时间内从负 x 轴到正 x 轴波浪所传递的平均能量. 上面我们已经计算单位长度内进波的总能量为 $\rho a^2 g/2$. 而群速 $u_g = c/2$, 于是(8.4.8)可改写为

$$W_1 = \left(\frac{1}{2} \rho g a^2 \right) v_g$$

上式表明，波能将以群速传递而不是以波速传递。这个结果在其他波浪运动也成立，是群速的一个动力学特性。从这里也可以看出引进群速概念的重要性。

波的传递和波阻紧密相关。考虑以速度 C 运动的船只，在船的后面形成了波浪。于是这些波的传播速度就是 C ，如果以 E 表单位长度的波能，则每秒钟形成的波能是 CE 。这个能量中有一部分是先前形成的波浪传递过来的，这些先前形成的波浪每秒钟通过平面带来 $v_g E = CE/2$ 的能量，而余下的能量 $(C-U)E = CE/2$ 就是由船只供给的。那就是说每秒钟内船将做 $CE/2$ 的功去形成波浪。因为船每秒钟走 C 的距离，所以它所遭受到的阻力 R 由下式确定

$$CR = \frac{CE}{2}, \quad R = \frac{E}{2}$$

于是船只所受到的阻力是单位长度波能的一半。

8.5 长波理论

上面几节我们研究了无限深流体内的小振幅波。这是流体深度比起波长来说大得很多的极限情形。下面我们研究另一种极限情形，即波长比流体深度大很多的情形，波长比流体深度大很多的波称为长波。下面为了简单起见只限于研究小振幅的情形，这时振幅和流体深度都是比波长小得多的量。其次认为振幅又比深度小得多，即 $\lambda \gg h \gg a$ 。研究长波的运动具有实际意义，海洋江河中发生的劲浪及潮汐波等都是长波。例如在深度为50公里的海洋中，劲浪的振幅为5公里而波长可长达50000公里，由此可见劲浪的波长比起振幅及海洋深度来说都大得很多，因而是一种小振幅的长波。

和前几节一样这里只考虑平面情形，取自由面的平衡位置为

x 轴, z 轴垂直向上. 河渠的底部可以取任意的形状. 设底部到 x 轴的距离用 h 表示, 它一般是 x 的函数. 和前面一样令 ζ 是波浪运动发生后自由面到平衡位置 x 轴的距离 (见图 8.5.1), 则一般说来它是 x, t 的函数.

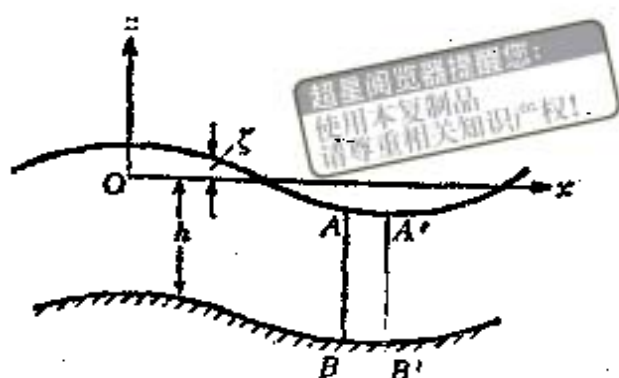


图 8.5.1

容易理解, 小振幅长波既具有小振幅波的特性, 也具有长波的特性. 小振幅波的特性已在第一节中研究

过, 它的几何参数 ζ 与 $\partial\zeta/\partial x$, 力学参数 u , 及其偏导数皆为一级微量. 现在我们研究长波的特性, 写出平面波的连续性方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

于是

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad w_2 - w_1 = \int_{\zeta}^h -\frac{\partial u}{\partial x} dz$$

其中 w_2, w_1 分别是底部及自由面上的速度, 由于 $\partial u/\partial x, \zeta, h$ 皆是一级微量, 所以右边积分是二级微量. 于是速度在 z 方向分量 w 是二级微量, 它比速度在 x 方向分量 u 低一阶. 归纳上面所讲的, 我们得到小振幅长波的下列性质:

- | | | |
|---|---|---------|
| 1) ζ 及 $\partial\zeta/\partial x$ 是一级微量 | } | (8.5.1) |
| 2) u 及其偏导数是一级微量 | | |
| 3) w 及其偏导数是二级微量 | | |

现在根据上述性质来简化运动方程组. 写出平面运动的欧拉方程

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{dw}{dt} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{array} \right. \quad (8.5.2)$$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

我们考虑只有重力场的情形，此时 $F_x = 0$, $F_z = -g$, (8.5.2)式是一个由三个偏微分方程组成的方程组，用来确定三个未知函数 u, w, p . (8.5.2)式中的

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z}$$

是二阶微量项，较重力及压力梯度项可忽略不计，于是(8.5.2)式中第二个方程化为

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

积分之得

$$p = -\rho g z + c(x, t)$$

在自由面 $z = \zeta$ 上， $p = p_0$ (p_0 是大气压力). 考虑到这一点得

$$p = p_0 + \rho g(\zeta - z) \quad (8.5.3)$$

上式表明压力函数 p 和自由面形状 ζ 之间存在着一个有限关系式. (8.5.3)式实质上就是静力学的压力公式，因为在忽略惯性力 dw/dt 后，压力梯度和重力维持平衡，而这恰恰就是静力学的情形. 根据(8.5.3)式 p 可以用函数 ζ 代替，于是我们以 u, w, ζ 代替了 u, w, p . 由于 w 和 u 由(8.5.3)式第三式联系，由此只要求出 u, ζ ，问题也就解决了. 下面着手推导 u, ζ 应满足的方程. 将(8.5.3)式代入(8.5.2)中第一式得

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

按(8.5.1) $u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z}$ 是二级微量以上项，略去不计后得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (8.5.4)$$

这是第一个联系 u 及 ξ 的方程。由(8.5.4)式容易看出 u 只是 x, t 的函数而与 z 无关。也就是说在河渠的每一个截面上速度分量 u 都是相等的，因此未知函数 u 及 ξ 都是 x, t 的函数。现在我们来推导第二个联系 u, ξ 的方程，为此我们推导另一形式的连续性方程代替(8.5.2)中第三式。取平行 z 轴且相距 dx 的二个截面 AB 及 $A'B'$ ，计算 dt 时间内 $ABA'B'$ 内的流量变化。通过 AB 流入的流量是

$$[\rho u(h+\xi)]_x dt$$

而通过 $A'B'$ 流出的流量则为

$$[\rho u(h+\xi)]_{x+dx} dt$$

因此 dt 时间内体积 $ABA'B'$ 内由于流进及流出，流体质量减少了

$$\frac{\partial[\rho u(h+\xi)]}{\partial x} dx dt \quad (8.5.5)$$

根据质量不灭定理，这部分流体质量的减少只能是由于自由面 $\xi(x, t)$ 的变化所引起。由于 $\xi(x, t)$ 的变化，在 dt 时间内流量减少了

$$-\rho \frac{\partial \xi}{\partial t} dx dt \quad (8.5.6)$$

令(8.5.5)式与(8.5.6)式相等得

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\partial[(h+\xi)u]}{\partial x} = -\frac{\partial(hu)}{\partial x} - \xi \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

由(8.5.1)的量阶估计， $-\xi \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial \xi}{\partial x}$ 是二级微量可略去不计，

这样我们就得到联系 ξ, u 的第二个方程

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\partial(hu)}{\partial x} \quad (8.5.7)$$

将(8.5.4)式和(8.5.7)式联合起来我们得到确定 $u(x, t), \xi(x, t)$ 的基本方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\partial(hu)}{\partial x} \end{cases} \quad (8.5.8)$$

求出 u, ξ 后, 压力 p 及速度分量 w 分别由 (8.5.3) 及 (8.5.2) 中的第三式确定.

下面考虑深度 h 为常数的情形, 此时方程 (8.5.8) 化为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} = -h \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases} \quad (8.5.9)$$

从这两个式子消去 ξ 后得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - gh \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

令 $c = \sqrt{gh}$. 于是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

这个方程的普遍解是

$$u = c[F(x-ct) + f(x+ct)] \quad (8.5.10)$$

由 (8.5.9) 的第二式得

$$\xi = h[F(x-ct) - f(x+ct)] \quad (8.5.11)$$

其中 F, f 都是任意函数.

考虑 $f=0$ 的情形, 此时有

$$u = cF(x-ct), \quad \xi = hF(x-ct)$$

现在我们来阐明上式的物理意义, ξ 和 u 是常数的点的坐标满足下式

$$x = x_0 - ct$$

由此推出, 确定的 ξ 值及 u 值以速度

$$c = \sqrt{gh}$$

向右方运动， c 称为长波的传播速度，它与波长无关，只是 h 的函数。

应该指出，虽然波面以速度 c 向右传播，但是流体质点则是作微小的振动。由

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

得 $t_2 - t_1$ 时间内质点的位移是

$$\begin{aligned} \xi_2 - \xi_1 &= \int_{t_1}^{t_2} u dt = \int_{t_1}^{t_2} cF(x-ct) dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} F(x-ct) d(x-ct) \\ &= \int_{x-ct_2}^{x-ct_1} F(x) dx = \frac{1}{h} \int_{x-ct_2}^{x-ct_1} \xi dx \end{aligned}$$

右边积分等于 x 轴波面，和 $x-ct_2$ 与 $x-ct_1$ 之间的面积，它的数值很小，且有时为正有时为负，说明质点在作微小的振动。

完全同样地可以说明 $F=0$ 时

$$u = cf(x+ct), \quad \xi = -hf(x+ct)$$

的物理意义代表向左传播的长波。

一般情形下，(8.5.10) 与 (8.5.11) 式代表的是向左传播的波和向右传播的波的叠加。(8.5.10) 与 (8.5.11) 式中的任意函数由初始条件及边界条件确定。

习 题

1. 求波长为 145 米的海洋波的传播速度和振动周期。
2. 海洋波以 10 米/秒的速度移动，求波的波长和周期。
3. 在波上观察到浮标一分钟内上升下降十五次，求波长及其传播速度。假定液体很深。
4. 上下两部分液体的深度分别为 h 和 h' ，密度分别为 ρ 和 ρ' ($\rho > \rho'$)，上层液体和下层液体分别有一水平面界于上方和下方。试算出由于重力作用而发生在两液体分界面上波长为 λ 的行

.....

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识版权！

10. 利用上题结果和富氏-贝塞尔积分

$$f(r) = \int_0^{\infty} J_0(kr) k dk \int_0^{\infty} f(a) J_0(ka) a da$$

证明在初始条件 $\xi_0 = f(r)$ 和 $\varphi_0 = 0$ 时, 深水中波动的解为

$$-\varphi = g \int_0^{\infty} \frac{\sin \sigma t}{\sigma} e^{kz} J_0(kr) k dk \int_0^{\infty} f(a) J_0(ka) a da$$

$$\xi = \int_0^{\infty} \cos \sigma t J_0(kr) k dk \int_0^{\infty} f(a) J_0(ka) a da$$

11. 在等温大气中, 密度由 $\rho = \rho_0 e^{-2\beta z}$ 给出, 其中 z 是铅垂方向的坐标. 若用 w 表示速度的铅垂分量, 证明圆频率为 σ 的微波动由下列方程给出

$$\left[\left(1 - \frac{N^2}{\sigma^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2\beta \frac{\partial}{\partial z} \right] w = 0$$

其中

$$N^2 = -\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz} = 2\beta g$$

x, y, z 是笛卡儿坐标.

12. 如果沿全渠道各个断面相等, 断面面积为 S , 并且水面上的断面宽度为 b , 求长波在渠道中的传播速度.

13. 求在深度为20厘米的梯形断面渠道上长波的传播速度. 梯形的上底为60厘米, 下底为40厘米.

14. 求长波在断面为半径 $r=1$ 米的半圆形渠道中的传播速度.

15. 试解释为什么临近岸边的波总是与岸平行或是成一很小的角度运动的.

第九章 粘性不可压缩流体运动

本章研究粘性不可压缩流体运动。在粘性流体运动中总是伴随着与内摩擦及传热有关的能量耗损过程，因此粘性流体运动不可避免地要和阻力、衰减、扩散等现象紧密地联系在一起。

前面几章我们讨论了理想不可压缩流体的运动。理想流体是真实流体的近似模型，当粘性力比惯性力小得多时，有时我们可以将真实的有粘性的流体近似地按理想的无粘性的流体来处理。由于理想流体模型在数学上带来很多简化，因此一开始我们就对于它进行了大量研究，它的结果在一定条件下对于某些物理量可以给出与实验符合的结果，但在另外一些条件下，对于另外一些物理量却与实际相差很大。例如，在流线型物体的不脱体绕流问题中，理想流体的理论在举力、压力分布和速度分布等方面给出与实验符合的令人满意的结果，但在阻力方面却给出达朗贝尔悖论这样与实际绝不相同的结论。理想流体模型在阻力问题上失败的原因究其根源实是因为没有考虑粘性作用的缘故。一般说来，当我们考虑溯源于粘性及能量耗损的物理现象时，就必须毫不犹豫地抛弃理想流体的模型，而把流体看成是有粘性的。例如研究与机械能耗损有关的阻力问题，与粘性摩擦有关的声波及重力波的衰减问题，以及涡旋因粘性作用产生和扩散等问题就是如此。当然，如果所考虑的区域是粘性力和惯性力同阶或较惯性力大得多的时候，就是不考虑这些现象也必须计及粘性的影响。

下面我们把粘性流体运动的研究重点放在阻力问题上，它是流体力学中最重要的问题之一。我们知道，当物体在流体中运动时会遭受到阻力。按力的性质，阻力可分成摩擦阻力和压差阻力两种。摩擦阻力指的是作用在物面上的切应力在运动方向的合

力，它的大小取决于粘性系数及物体表面的面积。压差阻力则是垂直于物面的压力在运动方向的合力。压差阻力中一部分是诱导阻力及不定常阻力，可以用理想流体的理论处理。另一部分称为尾涡阻力，它是由气流脱离物面后在下游形成尾涡区损耗动能形成压力差所产生的。十九世纪末，基尔霍夫(Kirchhoff)，亥姆霍兹(Helmholtz)，瑞利(Raleigh)等人企图用理想流体的脱体模型处理尾涡阻力问题，但是因为他们没有考虑粘性的作用，因此没有得到成功。看来，要正确解决摩擦阻力和尾涡阻力问题，离开粘性大概是没有希望的。

(A) 基本理论

9.1 粘性不可压缩流体的运动方程组

a) 矢量形式的运动方程组

对于通常条件下的液体或低速运动的气体可以采用不可压缩流体的模型。此外，我们还假设流体是均质的。流体的粘性主要随温度而改变。当热量从边界传入或在流体内部因粘性耗损而产生时， μ 应看作温度 T 的函数。但是，如果温度差足够小时我们可近似地认为 μ 对整个流体取同一常数值。此时根据(3.6.11)式，粘性不可压缩均质流体的基本方程组可写成

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v} \\ \rho C \frac{dT}{dt} = k \Delta T + \Phi \end{cases} \quad (9.1.1)$$

其中 ν, k 分别是常数粘性系数及热传导系数， Φ 是耗损函数，它的表达式是 $\Phi = 2\mu S^2$ 。上述方程组是由五个方程组成的二阶偏微分方程组，用来确定五个未知函数 \mathbf{v}, p, T 。一般说来，动力学元素 p 与运动学元素 \mathbf{v} 是和热力学元素 T 相互影响的。特别地流

场受温度场的影响，这种影响主要是通过粘性系数 ν 和温度有关体现出来。当温度变化不大， ν 可近似地取作常数时，流体运动将不受温度的影响，流场可独立于温度场求解。即我们可以先从连续性方程及运动方程解出 v 及 p ，而后代入能量方程再求 T 。这样运动及传热问题可以分开讨论。下面限于研究流体运动问题，所以只写出连续性方程及运动方程

$$\begin{cases} \operatorname{div} v = 0 \\ \frac{dv}{dt} = F - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta v \end{cases} \quad (9.1.2)$$

四个方程用来确定四个未知函数 v 及 p ，找到 v, p 后应力张量可按下式计算

$$P = -pI + 2\mu S \quad (9.1.3)$$

根据 (4.3.6) 式粘性不可压缩流体涡旋矢量满足下列方程

$$\frac{d\Omega}{dt} - (\Omega \cdot \nabla)v = \nu \Delta \Omega \quad (9.1.4)$$

b) 直角及曲线坐标系中的运动方程组

根据 (1.12.13) 及 (1.12.14) — (1.12.16) 式，曲线坐标系中的运动方程采取下列形式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(H_2 H_3 v_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(H_3 H_1 v_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(H_1 H_2 v_3)}{\partial q_3} = 0 \\ & \frac{\partial v_1}{\partial t} + v \cdot \nabla v_1 + \frac{v_1 v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{v_1 v_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \\ & \quad - \frac{v_2^2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} - \frac{v_3^2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \\ & = F_1 - \frac{1}{\rho} \frac{1}{H_1} \frac{\partial p}{\partial q_1} + \nu \left(\Delta v_1 + \frac{2}{H_1^2 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \frac{\partial v_2}{\partial q_1} \right. \\ & \quad \left. - \frac{2}{H_1 H_3^2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \frac{\partial v_2}{\partial q_2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{H_1^2 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \frac{\partial v_3}{\partial q_1} - \frac{2}{H_1 H_3^2} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \frac{\partial v_3}{\partial q_3} \\
& + \left\{ \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial(H_2 H_3)}{\partial q_1} \right] \right. \\
& + \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\frac{H_3}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_1} \right] \\
& + \left. \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \left[\frac{H_2}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \right] \right\} v_1 \\
& + \left\{ \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial(H_3 H_1)}{\partial q_2} \right] \right. \\
& - \left. \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\frac{H_3}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right] \right\} v_2 \\
& + \left\{ \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial(H_1 H_2)}{\partial q_3} \right] \right. \\
& - \left. \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \left[\frac{H_2}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \right] \right\} v_3 \Big) \\
& \frac{\partial v_2}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_2 + \frac{v_1 v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{v_2 v_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \\
& - \frac{v_1^2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} - \frac{v_1^2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \\
& = F_2 - \frac{1}{\rho} \frac{1}{H_2} \frac{\partial p}{\partial q_2} + v \left(\Delta v_2 + \frac{2}{H_1^2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \frac{\partial v_3}{\partial q_2} \right. \\
& - \frac{2}{H_1 H_3^2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \frac{\partial v_3}{\partial q_3} \\
& + \frac{2}{H_1^2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \frac{\partial v_1}{\partial q_2} - \frac{2}{H_2 H_3^2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \frac{\partial v_1}{\partial q_1} \\
& \left. + \left\{ \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial(H_3 H_1)}{\partial q_2} \right] \right. \right.
\end{aligned}$$

(9.1.5)

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial}{\partial q_3} \left[\frac{H_1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \right] \\
 & + \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{H_3}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right] \} v_2 \\
 & + \left\{ \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial (H_1 H_2)}{\partial q_3} \right] \right. \\
 & \left. - \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial}{\partial q_3} \left[\frac{H_1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_2} \right] \right\} v_3 \\
 & + \left\{ \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial (H_2 H_3)}{\partial q_1} \right] \right. \\
 & \left. - \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{H_3}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \right] \right\} v_3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial v_3}{\partial t} + v \cdot \nabla v_3 + \frac{v_3 v_1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{v_2 v_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_2} \\
 & - \frac{v^2}{H_3 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \frac{v_2^2}{H_3 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \\
 & = F_3 - \frac{1}{\rho} \frac{1}{H_3} \frac{\partial p}{\partial q_3} + v \left(\Delta v_3 + \frac{2}{H_3^2 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \frac{\partial v_1}{\partial q_3} \right. \\
 & \left. - \frac{2}{H_3 H_1^2} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{2}{H_3^2 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \frac{\partial v_2}{\partial q_3} \right. \\
 & \left. - \frac{2}{H_3 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \frac{\partial v_2}{\partial q_2} + \left\{ \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_3} \left[\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial (H_1 H_2)}{\partial q_3} \right] \right. \right. \\
 & \left. + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{H_2}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \right] \right. \\
 & \left. + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\frac{H_1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \right] \right\} v_3 \\
 & \left. + \left\{ \frac{1}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \left[\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial (H_3 H_2)}{\partial q_1} \right] \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{H_2}{H_1 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \right] \} v_1 \\
 & + \left\{ \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial (H_2 H_3)}{\partial q_2} \right] \right. \\
 & \left. - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\frac{H_1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right] \right\} v_2
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 v \cdot \nabla &= \frac{v_1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \\
 \Delta &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_2} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right) \right]
 \end{aligned}$$

本构方程在曲线坐标系中的表达式为

$$\begin{cases}
 p_{11} = -p + 2\mu \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \right. \\
 \quad \left. + \frac{v_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \right) \\
 p_{22} = -p + 2\mu \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial v_2}{\partial q_2} + \frac{v_1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right. \\
 \quad \left. + \frac{v_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \right) \\
 p_{33} = -p + 2\mu \left(\frac{1}{H_3} \frac{\partial v_3}{\partial q_3} + \frac{v_1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \right. \\
 \quad \left. + \frac{v_2}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \right) \\
 p_{23} = \mu \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial v_2}{\partial q_3} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial v_1}{\partial q_2} - \frac{v_2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \right)
 \end{cases} \quad (9.1.6)$$

$$-\frac{v_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2})$$

$$p_{31} = \mu \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial v_3}{\partial q_1} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial v_1}{\partial q_3} - \frac{v_3}{H_2 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \right)$$

$$-\frac{v_1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_3})$$

$$p_{12} = \mu \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial v_1}{\partial q_2} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial v_2}{\partial q_1} - \frac{v_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \right)$$

$$-\frac{v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1})$$

在直角坐标系中 $H_1 = 1, H_2 = 1, H_3 = 1$, 于是有

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}$$

(9.1.7)

$$= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

本构方程是

$$\left\{ \begin{aligned} p_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad p_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad p_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ p_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad p_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad p_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \right. \quad (9.1.8)$$

在柱坐标系中 $H_1=1, H_2=r, H_3=1$ ，于是有

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial v_r}{\partial t} + v \cdot \nabla v_r - \frac{v_\theta^2}{r} \\ & = F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\Delta v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r}{r^2} \right) \\ & \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v \cdot \nabla v_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} \\ & = F_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \\ & \frac{\partial v_z}{\partial t} + v \cdot \nabla v_z = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z \\ & \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0 \end{aligned} \right. \quad (9.1.9)$$

其中

$$v \cdot \nabla = v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$$

本构方程为

$$p_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

$$p_{\theta\theta} = -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)$$

$$p_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$p_{r\theta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)$$

$$p_{\theta z} = \mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right)$$

$$p_{rz} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)$$

(9.1.10)

在球坐标系中 $H_1 = 1, H_2 = r, H_3 = r \sin \theta$, 于是有

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_r}{\partial t} + v \cdot \nabla v_r - \frac{v_\theta^2 + v_\lambda^2}{r} \\ &= F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left(\Delta v_r - \frac{2v_r}{r^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v \cdot \nabla v_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\lambda^2 \cot \theta}{r} \\ &= F_\theta - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + v \left(\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right. \\ & \quad \left. - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} \right) \end{aligned} \quad (9.1.11)$$

$$\frac{\partial v_\lambda}{\partial t} + v \cdot \nabla v_\lambda + \frac{v_\lambda v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\lambda \cot \theta}{r}$$

$$= F_\lambda - \frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + v \left(\Delta v_\lambda + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \lambda} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda} - \frac{v_\lambda}{r^2 \sin^2 \theta} \right)$$

$$\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right) = 0$$

其中

$$v \cdot \nabla = v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda}$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}$$

本构方程为

$$\begin{cases} p_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \\ p_{\theta\theta} = -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right) \\ p_{\lambda\lambda} = -p + 2\mu \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right) \\ p_{r\theta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \\ p_{\theta\lambda} = \mu \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \theta} - \frac{v_\lambda \cot \theta}{r} \right) \\ p_{\lambda r} = \mu \left(\frac{\partial v_\lambda}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \lambda} - \frac{v_\lambda}{r} \right) \end{cases} \quad (9.1.12)$$

c) 初始条件与边界条件

1) 初始条件: $t=0$ 时, 在所考虑的流场中给出

$$v = v(x, y, z), p = p(x, y, z)$$

2) 边界条件: 边界条件的形式很多, 下面我们只写出三种最常用的边界条件:

静止固壁 在固壁 c 上满足粘附条件 $v=0$;

运动固壁 在运动固壁 c 上满足 $v_{\text{流}}=v_{\text{固}}$;

自由面 在自由面上满足

$$p_{nn} = -p_0, \quad p_{n\tau} = 0$$

因为粘性流体的方程是二阶偏微分方程, 因此物面上的边界条件需要有二个, 即 $v_n=0, v_\tau=0$, 或 $v_{\text{流}}=v_{\text{固}}$.

d) 关于重力项的处理

在大多数实际问题中, 外力是重力, 此时粘性不可压缩流体的方程组可写为

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho g - \nabla p + \mu \Delta v \quad (9.1.13)$$

其中 g 是重力常矢量. 当 ρ 是常数时, 重力这一体力等效于静力学压力函数 $p_0 + \rho g \cdot r$, 这里 p_0 是一常数, 即

$$\rho g = \nabla(p_0 + \rho g \cdot r) \quad (9.1.14)$$

考虑到(9.1.14)式, (9.1.13)可改写为

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla(p - p_0 - \rho g \cdot r) + \mu \Delta v \quad (9.1.15)$$

由此可见, 如果引进广义压力 p'

$$p' = p - p_0 - \rho g \cdot r \quad (9.1.16)$$

则方程

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p' + \mu \Delta v \quad (9.1.17)$$

中将不出现重力项. 物理上说也就是如果从流体压力中减去静压力分布, 得到广义压力, 则广义压力 p' 将只和流体的运动速度有关.

引进广义压力总可以做到方程中不出现重力, 但是这并不意味着重力在任何情况下都不再对速度 v 发生影响. 因为除方程外

还必须考虑边界条件。这里必须区别两种情形：(1) 如果边界条件中只包含速度不包含压力，那么引进变换(9.1.16)后对边界条件不发生任何影响，此时重力同样地不出现在边界条件中。由此可以确信在这种情形下重力项的存在除对压力发生作用产生静压力外，不再对其他物理量包括速度 v 产生任何效应。(2) 如果边界条件中出现压力，则经过变换(9.1.16)后原来不包含 g 的边界条件中将出现 g ，重力通过边界条件又重新出现了，它仍将对速度起作用。例如在自由面 $z=f(x,y)$ 上满足 $p=p_0$ 的条件，其中 p_0 是大气压，经过变换(9.1.16)式后广义压力满足条件 $p' = -\rho g \cdot r$ ，边界条件变得更复杂了，其复杂程度超过了方程的简化。在这种情况下引进广义压力并没有什么好处。

通过以上的讨论我们看到只有在边界条件中只包含速度的时候，引进广义压力才是有效的。今后凡是遇到这种情形我们就写出(9.1.17)式，并将 p' 中的一撇省去。但要记住现在的 p 是广义压力而不是原来的压力。

最后应该指出，只有在密度是常数时引进广义压力才是许可的，当密度可变时，(9.1.14)式不再成立。

9.2 粘性流体运动的一般性质

粘性流体运动的一般性质概括起来主要有以下三点：(1) 运动的有旋性；(2) 能量的耗损性；(3) 涡旋的扩散性。现分别加以说明。

a) 粘性流体运动的有旋性

我们知道，在理想流体中流体运动可以是无旋的，也可以是有旋的。当体力有势，流体是正压的条件下，如果初始时刻运动是无旋的，则以后各个时刻运动一直保持无旋。在定常运动的时候，如果在某一截面上（如无穷远处）运动是无旋的，则整个流场都是无旋的。物体由静止时开始运动或均匀来流的问题是在工程实际中大量遇到的情形，因此理想流体无旋运动是一种经常遇

到的具有重大实际意义的情形。当体力无势或流体是斜压的时候，理想流体中可以产生涡流，此时流体运动一般说来是有旋的，这类运动大量存在在气象学中。由此可见在理想流体中无旋运动及有旋运动都是大量存在的。但是在不可压缩粘性流体中，情形就不同了。除了极为个别的几种特殊情形而外（都是没有什么实际兴趣的），运动都是有旋的。由于这个性质的存在使我们在处理粘性流体问题时碰到了比理想流体大得多的困难。现在我们用反证法说明这个性质。

由于 $\Delta v = \nabla(\nabla \cdot v) - \nabla \times (\nabla \times v) = -\text{rot } \Omega$ ，粘性不可压缩流体的方程组可改写为

$$\begin{cases} \text{div } v = 0 \\ \frac{dv}{dt} = F - \frac{1}{\rho} \text{grad } p - \nu \text{rot } \Omega \end{cases} \quad (9.2.1)$$

未知函数应该满足物体上、自由面上及无穷远处的边界条件以及 $t=t_0$ 时的初始条件。大家看到，方程组(9.2.1)与理想不可压缩流体运动方程组的差别仅仅在于多了粘性力 $-\nu \text{rot } \Omega$ 这一项。如果我们所考虑的粘性不可压缩流体的运动是无旋的，则 $\text{rot } \Omega = 0$ 。于是粘性力等于零，方程(9.2.1)变成

$$\begin{cases} \text{div } v = 0 \\ \frac{dv}{dt} = F - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \end{cases} \quad (9.2.2)$$

这样一来，不可压缩粘性流体的方程组和理想不可压缩流体运动的方程组完全一样，它们的差别只表现在固壁上的条件不同：一个满足粘附条件 $v=0$ ，另一个满足绕流条件 $v_n=0$ 。满足绕流条件的理想不可压缩流体运动的解一般说来是唯一的，而且在绝大多数情形下在固壁上不满足 $v_t=0$ 的条件。也就是说流体可以沿物面流动。例如在圆柱绕流问题中，圆柱表面上的切向速度分量是 $2V_\infty \sin \theta$ ，除驻点外并不等于零。由此可见，方程是理想不可压缩的且满足粘附条件 ($v_r=0, v_t=0$) 的解一般说来是不存在的。

这无异意味着在粘性不可压缩流体的情形下，无旋运动的解一般是不存在的。这样我们就说明了不可压缩粘性流体运动一般说来不可能是无旋的。但是在极为个别的情形下，不可压缩粘性流体的运动也可以是无旋的。

这里我们举一个例子，一半径为 a 的圆柱以 $\Gamma/(2\pi a^2)$ 的角速度在无界粘性不可压缩流体中向逆时针方向旋转（见图 9.2.1）。被圆柱带动的粘性流体运动满足方程(9.2.2)及下列边界条件：



图 9.2.1

- 1) 在圆柱 $r = a$ 上 $v_r = 0$, $v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi a}$;

- 2) 在无穷远处 $v = 0$.

而我们知道在理想流体中一位于原点，强度为 Γ 的点涡所感生的流场也满足方程(9.2.2)及边界条件 1) 与 2)。由此可见，一点涡所感应的速度场与压力场就是圆柱在粘性流体中转动时所应有的解，而这个解却是无旋的。

从上面说明的过程中可以看到方程组(9.2.2)是允许无旋运动存在的，它之所以成为不可能是因为不能满足固壁上的粘附条件，也就是说是由于固壁的存在所致。

b) 机械能的耗损性

我们在第三章讲述能量方程时已经知道，在粘性不可压缩流体中由于粘性应力的存在，体力和面力所作的功只有一部分变成动能，而另外一部分则被粘性应力耗损掉变成了热能。单位体积内耗损掉的动能由耗损函数

$$\Phi = 2\mu S^2 = \mu[2e_1^2 + 2e_2^2 + 2e_3^2 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2]$$

表征。此式表明，耗损能量和应变速度张量各分量的平方和成正比，变形速度愈大，耗损愈大，这也是十分自然的，因为变形速

度大，粘性应力也大，因而耗损能量也多。当变形不存在时，即 $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$ 时，耗损为零， $\Phi = 0$ 。有限体积 τ 内耗损能量为

$$E = 2\mu \int_{\tau} S^2 d\tau$$

E 及 $\int_{\tau} S^2 d\tau$ 总是大于零的，可见粘性系数 μ 永远是正的值。

耗损掉的机械能转换为热能从而使流体和相邻固壁的温度升高。例如旋转机械和飞行器的表面都会有温度升高的现象。

c) 粘性流体

中涡旋的扩散性

在讲述涡旋运动时，我们已经说明了在粘性流体中存在着涡旋的扩散现象。涡旋强的地

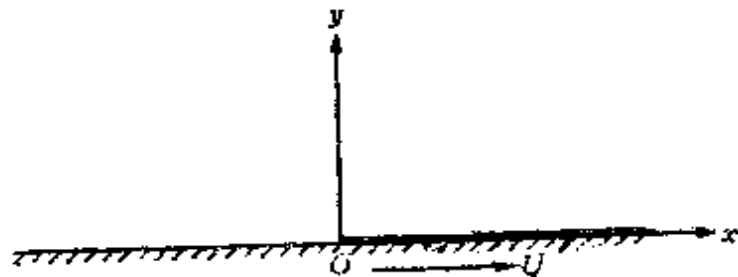


图 9.2.2

方向涡旋弱的地方输送涡量，直至涡量相等为止。现在我们以一个具体的运动为例，进一步探讨涡旋进行扩散的具体规律。

有一无穷长平板，平板上面的整个空间充满了粘性不可压缩流体。设平板在某一瞬间以等速 U 在自己的平面上向右方突然起动，以后维持常速 U 不变。在起动的那一瞬间，与平板粘附在一起的流体质点突然获得了一个常速度 U ，而平板外面的流体因为还来不及感受到这突如其来的变化仍然处在静止状态，这样就在平板上形成一个切向速度间断面，也就是形成了一个涡层。涡层的强度等于 U ，而涡层各点上的涡量都是无穷大（因为涡层无限薄）。根据涡旋扩散性，这涡层将向静止流体扩散涡量直至涡量到处相等为止。现在我们就着手将涡层扩散的具体规律找出来。我们先求出这个问题的速度场，然后根据涡旋场和速度场的关系，推出涡旋场的变化规律。

取直角坐标系如图 9.2.2 所示。x 轴沿平板方向，y 轴垂直平

板且指向流体内部， z 轴垂直 x, y 轴与之成右手系。根据问题的特点，运动将与 x, z 无关，且只有沿 x 方向的运动，因此 $u = u(y, t), v = w = 0$ 。此外我们认为压力到处是常数，即 $p = \text{常数}$ ，于是粘性不可压缩流体的基本方程组(9.1.7)变成：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (9.2.3)$$

此时连续性方程自动满足，所以不需要将它写出。(9.2.3)式说明在我们这个问题中，惯性力中的局部导数和粘性力平衡。此外，可以得出下列形式的初始条件：

$$\begin{cases} \text{当 } t \leq 0, y \geq 0 \text{ 时} & u = 0 \\ \text{当 } t > 0 \begin{cases} y = 0 \text{ 时} & u = U \\ y = \infty \text{ 时} & u = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (9.2.4)$$

现在我们的问题化为在初边条件(9.2.4)下求方程(9.2.3)的解。方程(9.2.3)是二个自变数 y, t 的热传导方程，它相当于下列热传导问题：在初始时刻 $t = 0$ 时在平板上有一高于周围介质温度的常温。根据热量由高温必然传向低温的特性， $t > 0$ 时热将向 $y > 0$ 的半空间传播，传热规律亦由方程(9.2.3)及初边条件(9.2.4)描写。由此可见，热传导和涡旋扩散虽然是不同的物理问题，却遵循同一规律。现在我们解方程(9.2.3)，热传导方程可以用各种方法求解，我们采用较为简单的一种，引进无量纲自变数

$$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \quad (9.2.5)$$

及无量纲速度

$$u = Uf(\eta) \quad (9.2.6)$$

于是

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{U}{2} \frac{\eta}{t} \frac{df}{d\eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{U}{2\sqrt{vt}} \frac{d}{d\eta}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{U}{4vt} \frac{d^2}{d\eta^2}$$

方程(9.2.3)及初边条件(9.2.4)变成

$$f'' + 2\eta f' = 0 \quad (9.2.7)$$

$$f(0) = 1, \quad f(\infty) = 0 \quad (9.2.8)$$

积分(9.2.7)式得

$$f = A \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta + B$$

超星浏览器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识版权！

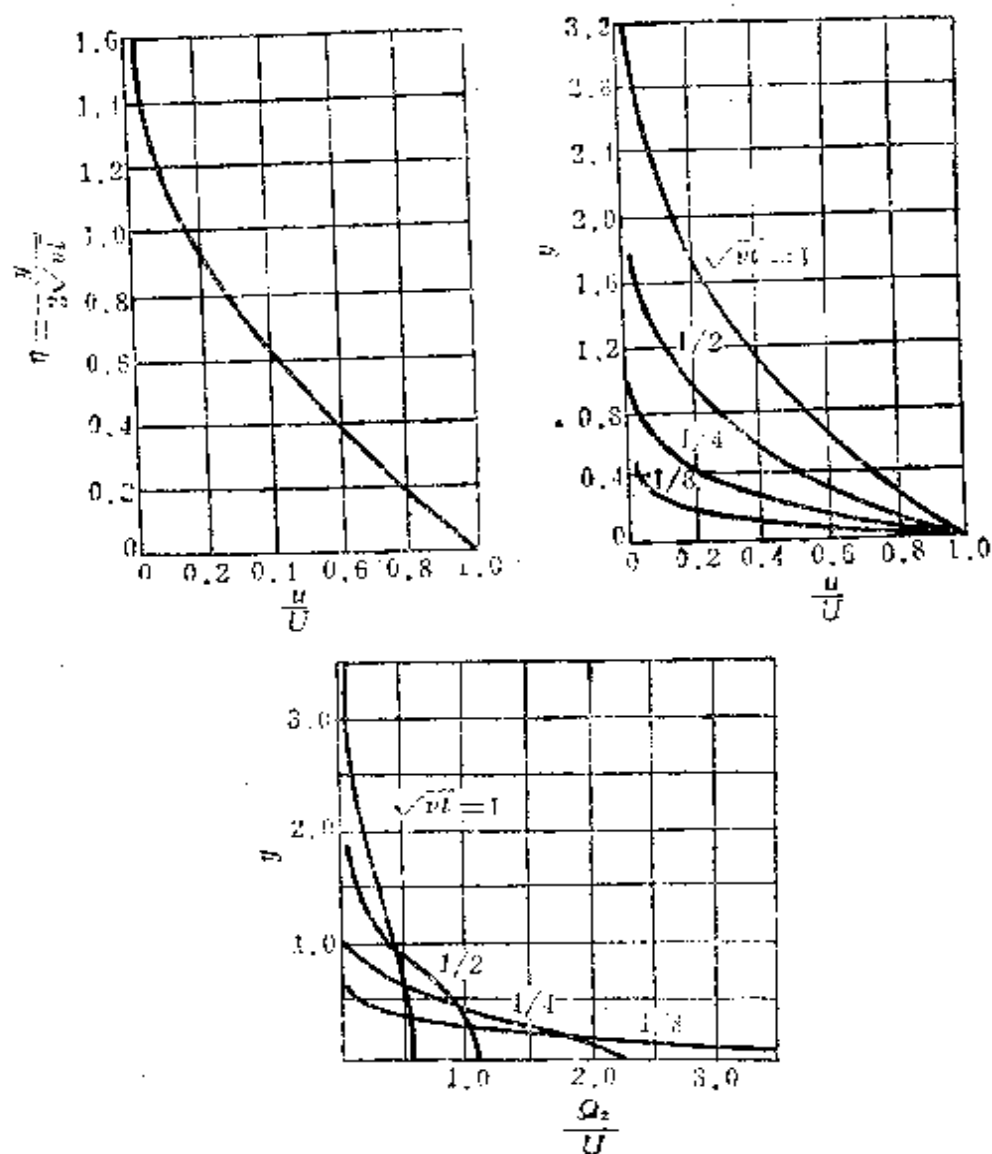


图 9.2.3

由 $f(0)=1$ 及 $f(\infty)=0$ 得

$$B=1, A=-\int_0^{\infty} \frac{1}{e^{-\eta^2}} d\eta = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

于是

$$\frac{u}{U} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta = 1 - \text{erf} \eta \quad (9.2.9)$$

$\text{erf} \eta$ 是误差函数。

现在我们计算涡量分布函数，根据定义

$$\begin{aligned} \Omega_z &= -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2U}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2\sqrt{vt}} e^{-\eta^2} \\ &= \frac{U}{\sqrt{\pi vt}} e^{-\frac{y^2}{4vt}} \end{aligned} \quad (9.2.10)$$

速度分布图及涡量分布图画在图 9.2.3 上。第一图是 u/U 和 η 的关系，第二、三图是 u/U 和 Ω_z/U 在 \sqrt{vt} 取不同值时依赖于 y 的图。

从这些图可以看出，在起动的那一瞬时，板面上流体质点的速度为 U ，涡量则为无穷，板外流体静止。当 $t > 0$ 时，即板开始移动后，整个流体被板带动了，涡量向外扩散并一下传至无穷。但是由于速度分布或涡量分布在同一时刻随 y 的分布是以误差函数和 e^{-y^2} 规律衰减的，因此涡量或动量的主要部分集中在板面附近。从图上看出，这涡量及动量的主要部分是以一定的速度垂直地向外扩散的。扩散后，板面上涡量的极大值也随之逐渐减小。当 $t \rightarrow \infty$ 时，整个流体将和板一起作等速运动，此时涡量到处均匀并趋于零。现在我们来考察一下涡量的扩散规律。当 $\eta=2$ 时， u/U 约为 0.01，我们认为动量和涡量的主要部分集中在 $\eta=2$ 以下，即 $\eta=2$ 是边线。考虑到 $\eta=y/(2\sqrt{vt})$ ，涡量及动量主要部分的扩散规律为

$$y_0 \sim 4\sqrt{vt} \quad (9.2.11)$$

由此可见，扩散的距离将按 $4\sqrt{vt}$ 的规律随时间增加，而扩散的

速率按 $2\sqrt{\nu/t}$ 的规律减少。粘度愈低的流体，扩散出去的距离和扩散的速率都愈小。

9.3 相似律

由于粘性不可压缩流体运动的复杂性，粘性流体的理论研究和实验必须与实验相辅而行。流体力学实验的手段主要是通过室内的风洞、船池、水工模型等设备模拟自然界的流体运动。大家知道，实物的尺寸一般说来都是较大的，例如飞机、轮船它们都是庞然大物，在实验室里要制造这样的实物需要大量经费有时甚至不可能。因此通常做一个较实物小多少倍的几何相似模型，而后在模型上进行试验得到所需的实验数据。这样自然就产生了模拟的运动和被模拟的运动之间的相似问题。例如我们在风洞中模拟一个飞机在空中等速平飞，如果飞机的几何形状、航速和高度给定，那么模型尺寸和实验条件应如何选择才能使飞机与模型所产生的运动相似？在实际工作中回答这样的问题是非常重要的，这就是本节相似律所要解决的问题。

a) 力学相似

如两个流动的边界形状是几何相似的，则称这两个流动几何相似。现在我们对于几何相似的两个流动建立时空相似点的概念。将时间 t 和空间坐标 r 看成是四度空间中的四个变数，每一组 (t, r) 对应于四度空间中的一个点。选择特征长度 L 和特征时间 T ，以 r 除以 L ， t 除以 T ，得无量纲坐标 r/L 及无量纲时间 t/T 。在几何相似的两个流场中取两个四度空间的点，如果这两个点的无量纲坐标及无量纲时间相等则称这两个点是时空相似点。对于时空相似点我们有

$$\frac{r_1}{L_1} = \frac{r_2}{L_2}, \quad \frac{t_1}{T_1} = \frac{t_2}{T_2} \quad (9.3.1)$$

其中指标1代表第一个流动，指标2代表第二个流动。

现在我们对于两个性质完全相同的几何相似流动建立力学相

似的概念。以 f 代表流动中的任一物理量，选择 F 为该物理量的特征量，作无量纲物理量 f/F 。如果在两个几何相似流场中的所有时空相似点上，任何一个无量纲物理量都相等，则称此两几何相似的流动为力学相似。显然对于两力学相似的流动我们有

$$\frac{f_1}{F_1} = \frac{f_2}{F_2} \quad (9.3.2)$$

其中指标 1, 2 如前一样分别代表第一和第二流动。

b) 两粘性不可压缩流体力学相似的充分必要条件

现在我们来推导两粘性不可压缩流体力学相似的充分必要条件。为此，我们首先将方程组及边界条件无量纲化。取直角坐标系，并设外力是重力，重力方向沿 z 轴的负方向，则不可压缩粘性流体运动的方程组及初边条件具有下列形式：

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ & \quad = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ & \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ & \quad = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ & \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \\ & \quad = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9.3.3)$$

边界条件: 1) 在固壁 c 上 $v=0$

2) 在自由面 D 上 $p_{nn} = -p_0, p_{\tau\tau} = 0$ (9.3.4)

3) 在无穷远处 $v = v_\infty$

初始条件: 在 $t=t_0$ 时 $v = v(x, y, z), p = p(x, y, z)$ (9.3.5)

引进特征时间 T , 特征长度 L , 特征速度 V_∞ , 特征压力 P . 将时间, 坐标, 压力 p 及速度 v 除以相应的特征量, 得到无量纲时间 t' , 坐标 x', y', z' , 压力 p' 及速度 v' , 有量纲量和无量纲量之间的关系如下

$$\begin{aligned} t &= T t', & x &= L x', & y &= L y', & z &= L z' \\ u &= V_\infty u', & v &= V_\infty v', & w &= V_\infty w', & p &= P p' \end{aligned} \quad (9.3.6)$$

将(9.3.6)式代入(9.3.3),(9.3.4)及(9.3.5)式中去我们得到下列无量纲形式的方程组及边界条件

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'} = 0 \\ \text{St} \frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} + w' \frac{\partial u'}{\partial z'} \\ &= -E \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} \right) \\ \text{St} \frac{\partial v'}{\partial t'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} + w' \frac{\partial v'}{\partial z'} \\ &= -E \frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} \right) \\ \text{St} \frac{\partial w'}{\partial t'} + u' \frac{\partial w'}{\partial x'} + v' \frac{\partial w'}{\partial y'} + w' \frac{\partial w'}{\partial z'} \\ &= \frac{1}{F} - E \frac{\partial p'}{\partial z'} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2} \right) \end{aligned} \right. \quad (9.3.7)$$

边界条件: 1) 在无量纲化后的固壁 c' 上 $v' = 0$

2) 在无量纲化后的自由面 D' 上

$$p'_{,n} = -\frac{p_0}{\rho}, \quad p'_{,s} = 0 \quad (9.3.8)$$

3) 在无穷远处 $v' = v_\infty / v_\infty$

初始条件: 在 $t' = t'_0$ 时

$$p' = p'(x, y, z), \quad v' = v'(x, y, z) \quad (9.3.9)$$

其中 $St = \frac{L}{V_\infty T}$ 称为斯特鲁哈利数, 表征就地导数和位变导数之

比, $E = \frac{P}{\rho V_\infty^2}$ 称为欧拉数, 表征压力和惯性力之比, $Re = \frac{V_\infty L}{\nu}$

称为雷诺数, 表征惯性力和粘性力之比, $F = \frac{V_\infty^2}{gL}$ 称为弗鲁德

数, 表征惯性力和重力之比。

现在我们利用无量纲化的方程组, 边界条件及初始条件来推导两流体力学相似的充分及必要条件, 先来推导必要条件。

设两个几何相似的流体力学相似, 则由(9.3.2)式有

$$v_i = v_j, \quad p_i = p_j$$

即两个流动的无量纲速度及无量纲压力相等, 由此可得 v', p' 应该满足的无量纲方程(9.3.7), 无量纲边界条件(9.3.8)及初始条件(9.3.9)亦应相等, 于是就得到下列必要条件

$$St_1 = St_2, \quad E_1 = E_2, \quad Re_1 = Re_2, \quad F_1 = F_2$$

力学相似的充分条件是:

$$1) St_1 = St_2, E_1 = E_2, Re_1 = Re_2, F_1 = F_2$$

$$2) \alpha_1 = \alpha_2, \text{ 即来流的冲角相等}$$

$$3) \frac{p_{01}}{\rho_1} = \frac{p_{02}}{\rho_2}$$

$$4) \text{ 初始条件相等}$$

(9.3.10)

设 (9.3.10) 式成立则两个流动应该满足的无量纲微分方程 (9.3.7), 边界条件 (9.3.8) 及初始条件 (9.3.9) 完全相等。如果方程组的解是唯一的, 可推出

$$v'_1 = v'_2, \quad p'_1 = p'_2$$

按定义即两流体力学相似。

以上我们推出了两几何相似的不可压缩粘性流体力学相似的充分及必要条件。两流动相似的充分必要条件合在一起称为相似律。无量纲数 St, E, Re, F 称为相似性准则。

如果在我们所考虑的问题中不存在自由面, 则可取

$$P = \rho V_\infty^2$$

此时欧拉数 $E = 1$, 即欧拉数可以不引进来。在定常问题斯脱鲁哈利数 St 不出现; 在外力可忽略的情形下弗鲁特数 F 不出现。

从两不可压缩粘性流体运动力学相似的充分和必要条件, 推出无量纲的速度和无量纲的压力除了与无量纲的时间和无量纲的坐标有关外, 只依赖于 St, F, Re, E 这些相似性准则, 即

$$\begin{aligned} v' &= v'(St, F, Re, E, x', y', z', t') \\ p' &= p'(St, F, Re, E, x', y', z', t') \end{aligned} \quad (9.3.11)$$

对于物体所受的力, 例如阻力系数则有

$$C_x = C_x(St, F, Re, E, t') \quad (9.3.12)$$

现证, 在相似性准则 St, F, Re, E 中只有 St, F, Re 三个是独立的, E 是 St, F, Re 的函数。为此我们写出特征压力系数的表达式

$$C_p = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2} = f(St, F, Re, E, t')$$

即

$$2E = f(St, F, Re, E, f')$$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

由此推出

$$E = g(St, F, Re, f')$$

这样，在充分必要条件(9.3.10)式中的 $E_1 = E_2$ 可以去掉，而只要求 St, Re, F 相等就可以了。

c) 研究相似律的意义

有了相似律我们就可以回答本节一开始提出的问题。为了使实物和模型所产生的运动力学相似，模型尺寸和实验条件应如何选择呢？相似律告诉我们首先模型应该做得和实物几何相似；其次必须保证相似性准则相等及(9.3.10)的其他条件相等。在飞机做等速平飞时则要求实验时模型和真飞机在气流中的相对位置应相同，即攻角 $\alpha = \alpha'$ 。此外，模型试验的雷诺数应该和飞行条件下的雷诺数相等。即

$$\frac{V_{\text{模}} L_{\text{模}}}{\nu_{\text{模}}} = \frac{V_{\text{实}} L_{\text{实}}}{\nu_{\text{实}}}$$

如果 $\nu_{\text{模}} = \nu_{\text{实}}$ (例如用的都是空气， μ, ρ 都相等)，则当模型较实物缩小若干倍时为了保证雷诺数相等，就必须要求 $V_{\text{模}}$ 较 $V_{\text{实}}$ 大若干倍。在低速风洞中，风速是有一定限制的，通常不可能比飞行速度大很多，而模型往往比原物体小得很多。因此事实上 $Re_{\text{模}}$ 总是比 $Re_{\text{实}}$ 小。例如乘坐50人左右的运输机它在地面起飞时机翼的雷诺数均在 10^7 左右，而一般的风洞试验雷诺数只能保持在 2×10^6 左右。可见，相似律不是严格满足的，这对空气动力特性是有影响的。例如，对飞机来说，会使最大升力系数降低，最小阻力系数升高。但只要 $Re_{\text{模}}$ 不太小于 $Re_{\text{实}}$ ，在一定的范围内($Re_{\text{模}}$ 在150万以上)，可根据一些经验的办法加以修正，使实验得出的数据，仍能应用到实际中去。 $Re_{\text{模}}$ 如果过分小于 $Re_{\text{实}}$ ，那么风洞实验的结果就只有参考价值了。为此，在实验室中大家都想法建造可以得到大 Re 数的风洞。最直接的方法，就是增大风洞的直径，从而可以增大模型的尺寸而得到大 Re 数。此外也有用改



变空气的密度使之增大，从而达到加大风洞实验模型雷诺数的目的。

除了上述作用外，相似律还可以指导我们更好地进行实验研究和整理实验数据。以绕流或管流为例，设 ν, ρ, L, V 分别代表流体的粘性系数、密度、特征长度（管径或物体长度）和特征速度，则物体所受的阻力或管流的阻力显然只依赖于 ν, ρ, L, V ，即

$$W = f(L, V, \nu, \rho) \quad (9.3.13)$$

可见阻力 W 是四个参数的函数。如果用实验方法求 W 和 L, V, ν, ρ 的关系，则我们必须对不同的 L, V, ν, ρ 进行大量的实验，并将实验数据整理成四个参数的图表。过去大量的水力学实验就是这样做的。对于不同流体，用不同管径的圆管，在不同流速下测量管路的摩擦阻力。在此基础上编出了厚厚的水力学手册。现在，我们如果应用相似律，情况就变得好多了。由方程(9.3.12)我们看到阻力系数实际上只是一个无量纲参数，即雷诺数 $Re = LV/\nu$ 的函数。于是

$$C_x = f(Re) \quad (9.3.14)$$

(9.3.14)式告诉我们，如果我们不求阻力 W ，而求阻力系数，则它只是雷诺数 Re 的一个参数的函数，也就是惯性力和粘性力之比（雷诺数）完全决定了阻力的大小。这个简单的结论对于实验研究具有非常大的指导意义。现在我们不必对不同的 V, L, ρ, ν 进行工作量极大的实验，而只须要选取一个管径的圆管，对一种流体，在不同流速下测出摩擦阻力就可以了。因为根据这少数的实验结果就可以画出曲线 $C_x = f(Re)$ 。有了(9.3.14)式，对于任何一组其他的 L, V, ν, ρ 值都可以根据下式求出阻力 W

$$W = \frac{1}{2} \rho V^2 f\left(\frac{LV}{\nu}\right) \quad (9.3.15)$$

这样，厚厚一本水力学手册就变成了简单的一个公式，一条曲线。实验的工作量大大减少，而且实验数据整理起来也方便多了。

通过相似律的应用我们看到了理论研究在指导科学实验过程

中的巨大威力。

d) 雷诺数

上面已经指出雷诺数是惯性力和粘性力之比，现在把这个意思说得更清楚些。以位变导数中的 $u \frac{\partial u}{\partial x}$ 代表惯性力，粘性项中的

$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 代表粘性力。 u , $\frac{\partial u}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 的量阶分别是 V_∞ , $\frac{V_\infty}{L}$ 及 $\frac{V_\infty}{L^2}$ ，所谓量阶就是指能代表该物理量在整个区域内平均数值的量，于是

$$\frac{\text{惯性力}}{\text{粘性力}} = \frac{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}}{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \sim \frac{\rho V_\infty^2}{\mu \frac{V_\infty}{L^2}} = \frac{\rho V_\infty L}{\mu} = \frac{V_\infty L}{\nu} = \text{Re} \quad (9.3.16)$$

由此可见，雷诺数确实是所研究的区域内特征的惯性力和特征的粘性力之比。雷诺数是1908年索末菲 (Sommerfeld) 为纪念雷诺给参数 $V_\infty L/\nu$ 取的名字。在此以前，甚至雷诺本人及追随他的英国科学家们都未曾给无量纲参数 $V_\infty L/\nu$ 规定过专门名称。按照分子运动论，粘性系数 μ 与 $\rho c \lambda$ 成正比，其中 c 是分子运动的平均速度， λ 是分子的平均自由程。这样，Re 数又和下面的量相差一个比例因子

$$\frac{V_\infty}{c} / \frac{\lambda}{L}$$

分子运动的平均速度 c 和音速 a 同量阶，于是 V_∞/c 相当于马赫数 M ； λ/L 代表分子自由程及特征长度之比，是表征气体稀薄程度的一个参数，称为克努生数，以 K_n 表之。于是

$$\text{Re} \sim \frac{M}{K_n}$$

当流动是低速时， M 很小， K_n 很小，这两个数以组合 M/K_n 即雷

雷诺数出现，当流速接近音速，气体很稀薄时， M 及 K_n 都将以独立参数的姿态出现。

雷诺数是粘性流体运动中最重要也是最基本的一个相似准则。在粘性流动中，一切无量纲物理量必将依赖于雷诺数 Re ，因为粘性项以及惯性项或压力梯度项必定会出现在方程中，因此雷诺数不可避免地将会出现。仅仅根据相似律而不需要解出方程组就可以知道无量纲物理量与那些无量纲参数有关，这对于理论研究是十分重要的。

9.4 层流和湍流

雷诺数 Re 不仅是相似准则，而且还是区别粘性流体属于什么运动形态的唯一的参数。实验表明，粘性流体运动有两种形态，即层流和湍流。这两种形态的性质绝然不同。层流的特征是流体运动规则，各部分分层流动互不掺混，质点的轨线是光滑的，而且流场稳定。湍流的特征则完全相反，流体运动极不规则，各部分激烈掺混，质点的轨线杂乱无章，而且流场极不稳定。这两种截然不同的运动形态在一定条件下可以相互转化。

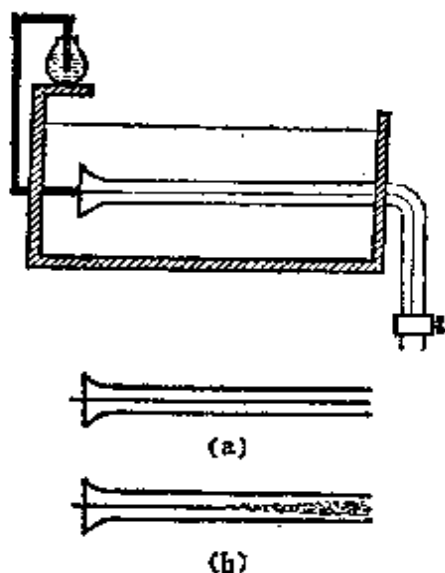


图 9.4.1

雷诺最早对湍流现象进行系统研究。1883 年他对圆管内的粘性流体运动进行了实验。为了清楚地识别管内流体的流动状况，用滴管在流体内注入有色颜料（图 9.4.1）。当流体的速度不大时，管内呈现一条条与管壁平行清晰可见的有色细丝，管内流体分层流动互不掺混，质点的轨线是与管壁平行的直线。上述特征说明此时流体的运动处在层流状态。逐渐增加管内流体的速度，有色细丝变粗，开始出现

波浪，随着管内流体速度的增加，波浪的数目和振幅逐渐增加，当速度到达某一数值时有色细丝突然分裂成许多运动小涡旋，向外扩散，很快消失不见，整个流体蒙上一层淡薄的颜色。这时管内流体各部分相互剧烈掺混，轨线紊乱，说明流体的运动已是湍流状态。雷诺对于不同直径的圆管及不同粘性系数的流体进行大量实验，发现管内运动呈现层流或湍流主要取决于雷诺数 $Re = vd/\nu$ 的大小，其中 v 是管流的平均速度， d 是圆管的直径， ν 是运动学粘性系数。由层流过渡到湍流的雷诺数称为临界雷诺数以 Re_{cr} 表之。大量实验表明临界雷诺数不是一个固定的常数，它依赖进行实验的外部条件，如流体在进口时的扰动大小、圆管入口处的形状及管壁粗糙度等。如果圆管入口处扰动小，外界扰动小则临界雷诺数较大；反之，若入口处扰动大，外界扰动亦大则临界雷诺数较小。但临界雷诺数有一个下界，约为 2000。当 $Re < 2000$ 时，不管外部的扰动多大管内流动保持稳定的层流状态。临界雷诺数没有上界，改善实验条件，摆脱一切扰动的影响，临界雷诺数的数值可以不断提高，现在已经达到的最高临界雷诺数是 50000。当然这样的层流状态是极不稳定的，稍有扰动便立即变为湍流。

Re 数作为层流过渡到湍流去的决定参数并不是奇怪的事情， Re 数代表惯性力和粘性力之比。当 Re 数较小时粘性力比惯性力大，此时流动稳定，扰动是衰减的；当 Re 数变大时，惯性力较粘性力大，此时流动比较不稳定，扰动容易发展增强，形成湍流。

层流和湍流无论在现象、规律及处理方法上都有着巨大的差别，必须分别进行处理。下面我们先研究层流运动，而后在第三部分研究湍流运动。

(B) 层流运动

层流运动是一种宏观上说来规则的粘性流体运动，因此可以

直接从纳维-斯托克斯方程出发通过解方程把流场求出来，做法和理想流体情形相同。

9.5 粘性不可压缩流体方程组的讨论，解题的几种途径

粘性不可压缩流体方程组的解的存在和唯一性问题是一个很难的课题，迄今为止还没有全面解决，只是对于某些最简单的情形才得到了证明。这个问题比较专门，是一个数学问题，所以我们这里不打算详细地讨论它。

粘性不可压缩流体方程组是一个二阶非线性偏微分方程，压力项及粘性项都是线性的，而惯性项却是非线性的。这一非线性项的存在使得我们在解方程时碰到很大的困难。在理想不可压缩流体中虽然也存在着非线性的惯性项，但是因为相当一部分实际问题都是无旋的，而对于无旋运动，问题可归结为解线性的二阶拉氏方程，且压力可由拉格朗日积分或伯努利积分求出，于是问题得到很大简化。在粘性不可压缩流体中，如上所述，运动都是有旋的，不存在速度势而且也不存在伯努利积分或拉格朗日积分，因此不能如同理想流体那样地处理问题，这时必须去解原始的二阶非线性偏微分方程组。数学家们没有向我们提供解非线性偏微分方程的普遍有效的方法，因此我们不得不根据力学考虑，做近似，简化方程以便找出有一定准确度的解来。在流体力学中解决了上述非线性方程组通常有两种主要途径：

a) 准确解 在一些简单的问题中，由于问题的特点，非线性的惯性项等于零或者采取非常简单的形式，此时方程组或者化为线性方程，或者化为简单的非线性方程组，从而可以找出方程组的准确解来。具有准确解的问题为数很少，而且一般说来很少能直接地用到实际问题中去。

b) 近似解 根据问题的物理特点，略去方程中某些次要项，从而得出近似方程。在某些情形下可以得出近似方程的解。这种途径称为近似方法。近似方法还可以分为两种情况：

1) 小 Re 数情形. 此时粘性力较惯性力大得多, 可以全部或部分地忽略惯性力得到简化的线性方程.

2) 大 Re 数情形, 此时惯性力较粘性力大得多, 似乎可以全部略去粘性项. 但是这是不允许的, 因为如果将粘性力全部略去, 粘性流体方程组就转化为一阶的理想流体方程组, 而一阶方程组的解一般说来不可能同时满足固壁上的两个边界条件, 即粘附条件 $v_n=0, v_t=0$. 但是以后我们可以看到, 实际上只要在贴近物面的很薄的一层边界层中考虑粘性的影响就可以了, 边界层外仍可将粘性全部忽略. 据此可以部分地略去粘性力中的某些项从而简化原有方程. 但经过简化得到的边界层方程, 仍是非线性的.

对于中等 Re 数的情形, 惯性力和粘性力都必须同时保留, 此时必须通过其他途径简化问题, 或者利用数值计算方法求纳维-斯托克斯方程的数值解.

9.6 节中将结合圆管中粘性不可压缩流体的运动讲述准确解. 9.7 与 9.11 节中以圆球绕流问题及润滑理论为例讲述小 Re 数情形的近似解. 之后将在 9.8, 9.9 与 9.10 节中以较多的篇幅讲述大 Re 数情形, 即层流边界层理论.

9.6 准确解

在这一节中我们将以粘性不可压缩流体在柱形管道内的定常运动以及两同心旋转圆柱间的定常运动为例, 说明在某些简单的问题中, 方程中的非线性项亦即惯性项会自动地消失, 粘性流体的方程组成为线性的, 而且可以找到它的准确解.

现在我们考虑不可压缩粘性流体在无限长柱形管道内的定常运动. 已知管截面的形状以及某两个截面 a 和 b 上的压力. 要求速度分布剖面、流量及管道中的阻力系数.

我们取直角坐标系 xyz , x 轴与来流方向重合, 原点取在截面 a 上 (参看图 9.6.1). 在这样的坐标系中, 显然有 $v=w=0$. 于是我们要求的未知函数只有 $u=u(x, y, z)$ 及 $p=p(x, y, z)$. 现在

让我们先从物理直观考虑得出确定 u 及 p 的方程. 先考虑动量方程在 y, z 方向的分量. 因为在 y 与 z 方向没有流体的运动,

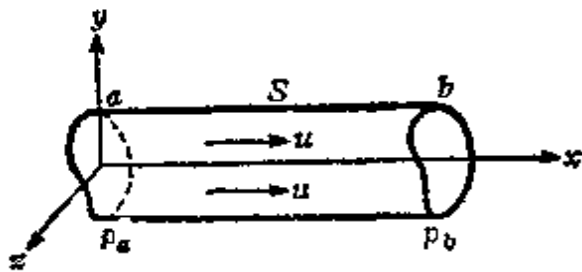


图 9.6.1

x 轴的直线, 速度 u 是不变的, 即 u 不依赖于 x , 于是 $u = u(y, z)$. 既然沿 x 方向 u 不改变, 这说明 x 方向没有加速度, 这样 x 方向的动量方程中作为非线性项出现的惯性力就自动地消失, 方程因而变为线性的, 剩下的就是压力项及粘性项. 这说明不可压缩粘性流体所以会在管道内运动是因为 a 截面上的压力大于 b 截面上的压力, 压力差 $p_a - p_b$ 克服了粘性力从而使流体保持着常速

因此 y, z 方向的惯性力及粘性力皆为零. 根据动量方程推出压力在 y, z 方向的梯度为零, 亦即压力不依赖于 $y, z, p = p(x)$. 其次考虑动量方程在 x 方向的分量. 根据不可压缩流体连续性方程容易理解, 沿管道内任一平行

不可压缩粘性流体的运动方程组是

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w \end{aligned} \right. \quad (9.6.1)$$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

在我们所考虑的问题中，运动是定常的，而且速度只有沿着 x 方向的分量，于是

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad v = w = 0$$

考虑到上式，方程组(9.6.1)变为

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 & (a) \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u & (b) \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} & (c) \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} & (d) \end{aligned} \right. \quad (9.6.2)$$

边界条件:

1) 在固壁 S 上

$$u = 0$$

2) 在截面 a 即 $x=0$ 处

$$p = p_a$$

在截面 b 即 $x=l$ 处 $p = p_b$, 而且

$$p_a > p_b$$



(9.6.3)

(9.6.4)

此外根据问题的性质还要求:

3) 速度 u 处处是有限的.

(9.6.5)

由(9.6.2)式中的(a)推出 $u = u(y, z)$, 由(9.6.2)式中的(c)及(d)推出 $p = p(x)$, 由(b)式得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (9.6.6)$$

等式左边是 y, z 的函数, 等式右边则是 x 的函数, 两者相等唯一的可能性是它们都等于与 x, y, z 无关的同一常数 $-P$. 于是我们得到下式确定 P 及 u 的方程

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = -P \quad (9.6.7)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -P \quad (9.6.8)$$

将(9.6.7)式积分出来, 得出

$$p = -\mu Px + C_1 \quad (9.6.9)$$

待定常数 P 及 C_1 由边界条件(9.6.3)及(9.6.4)确定. 由 $x=0, p = p_a$ 推出 $C_1 = p_a$; 由 $x=l, p = p_b$ 推出

$$P = -\frac{p_b - p_a}{\mu l} = \frac{p_a - p_b}{\mu l} > 0 \quad (9.6.10)$$

于是(9.6.9)式可改写为

$$p = -\frac{p_a - p_b}{l} x + p_a \quad (9.6.11)$$

这说明压力函数 $p = p(x)$ 是线性函数, 线性常数是 $-(p_a - p_b)/l$ 及 p_a . 随着 x 的增加, 压力将线性地减少, 每单位长度减少 $(p_a - p_b)/l$.

速度分量 u 由方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -P \quad (P \text{ 由 (9.6.10) 式确定})$$

确定, 这个方程是经典的泊桑方程. 边界条件是: 在固壁 S 上 $u = 0$, 而且 u 处处有限.

在下列两种特殊情形下, 自变数可以减少一个, 于是方程 (9.6.8) 化为常微分方程.

1) 平面流动. 即两个平行 $x-z$ 坐标面的无限长平面间的粘性流体运动, 此时 $\frac{\partial}{\partial z} = 0$.

2) 轴对称流动. 即圆心在原点的圆管中的粘性流体运动, 此时 $\partial/\partial\theta = 0$.

下面我们先考虑圆管中的不可压缩粘性流体运动, 然后再研究两无限平板间的粘性流体运动.

a) 圆管内的定常流动

取柱坐标系 x, r, θ . 圆管的方程是 $r = a$ (图 9.6.2). 将 (9.6.8) 式在极坐标 r, θ 中写出有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -P$$

考虑到流动的轴对称性:

$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0, u = u(r)$, 上式化为

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = -P$$

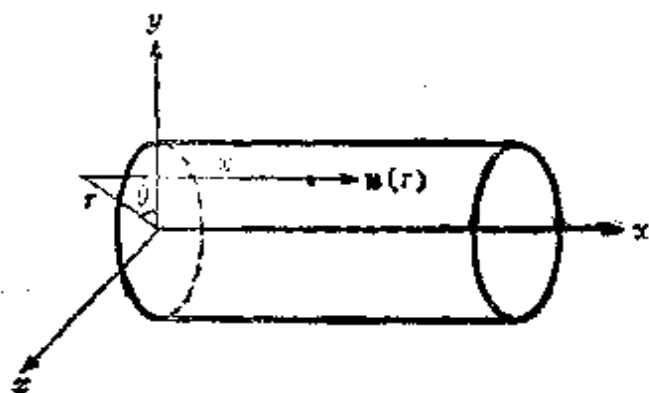


图 9.6.2

积分一次得

$$r \frac{du}{dr} = -P \frac{r^2}{2} + C_1 \quad \text{或} \quad \frac{du}{dr} = -P \frac{r}{2} + \frac{C_1}{r}$$

再积分一次得

$$u = -\frac{P}{4} r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

其中 C_1, C_2 是积分常数，由边界条件 $r=a$ 时 $u=0$ 及速度处处有限的条件确定。当 $r=0$ 时 $\ln r \rightarrow \infty$ ，为了维持速度是有限的，要求 $C_1=0$ 。其次由 $r=a, u=0$ 推出

$$C_2 = \frac{P}{4} a^2$$

于是，我们最终得到下列形式的速度分布函数

$$u = \frac{P}{4} (a^2 - r^2) = \frac{p_a - p_b}{4\mu l} (a^2 - r^2) \quad (9.6.12)$$

(9.6.11)与(9.6.12)式给出本问题的解。有了它们我们可求出感兴趣的速度分布剖面、流量及阻力系数。

1) 速度分布剖面

由(9.6.12)式可以看出，速度分布剖面是回转抛物面，在管壁 $r=a$ 处速度取极小值 $u=0$ ，在管轴 $r=0$ 处取极大值（见图 9.6.3）

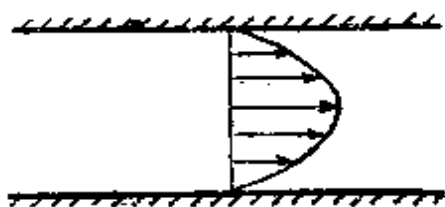


图 9.6.3

$$u_{\max} = \frac{p_a - p_b}{4\mu l} a^2 \quad (9.6.13)$$

2) 流量 Q 及平均速度 $u_{\text{平}}$

单位时间内通过圆管截面的流

量 Q 根据定义显然是

$$Q = 2\pi \int_0^a u r dr$$

将(9.6.12)式的 u 的表达式代入上式得

$$\begin{aligned}
 Q &= 2\pi \int_0^a \frac{P}{4} r (a^2 - r^2) dr \\
 &= 2\pi \cdot \frac{P}{4} \left(\frac{a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^a \\
 &= \frac{\pi}{8} P a^4 = \frac{\pi a^4 (p_a - p_b)}{8\mu l} \quad (9.6.14)
 \end{aligned}$$

由(9.6.14)式可以看出，流量 Q 与压力差 $p_a - p_b$ 成正比，与半径 a 的四次方成正比，而与粘性系数 μ 及圆管长度 l 成反比。

有了流量 Q 可以求出平均速度 $u_{\text{平}}$ ，它是

$$u_{\text{平}} = \frac{Q}{\pi a^2} = \frac{p_a - p_b}{8\mu l} a^2 \quad (9.6.15)$$

考虑到(9.6.13)式有

$$u_{\text{平}} = \frac{1}{2} u_{\text{max}} \quad (9.6.16)$$

由此可见圆管流动中平均速度是最大速度的一半。

3) 阻力系数

切应力是

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{p_a - p_b}{2l} r$$

切应力是 r 的线性函数。在管轴 $r=0$ 上 $\tau=0$ ，在管壁上最大，它是

$$\tau_{\text{max}} = -\frac{p_a - p_b}{2l} a$$

利用(9.6.15)式亦可写成

$$\tau_{\text{max}} = -\frac{4\mu}{a} u_{\text{平}} \quad (9.6.17)$$

定义

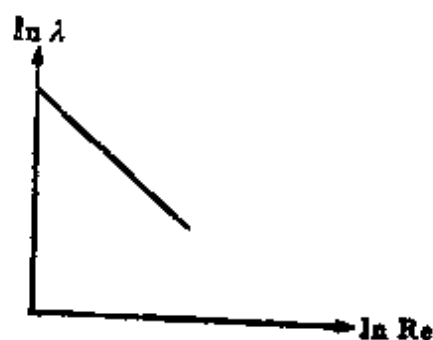


图 9.6.4

$$\lambda = \frac{|\tau_{w+r}|}{\frac{1}{2} \rho u_{\bar{r}}^2}$$

为圆管的阻力系数，将(9.6.17)式代入上式得

$$\lambda = \frac{8\mu}{\rho u_{\bar{r}} a} = 8 \frac{\nu}{u_{\bar{r}} a} = \frac{8}{Re} \quad (9.6.18)$$

其中 $Re = u_{\bar{r}} a / \nu$ 是针对平均速度 $u_{\bar{r}}$ 而言的雷诺数，由此可见，圆管中的阻力系数是和雷诺数成反比的，即阻力和速度的一次方成正比（见图9.6.4）。

圆管中的流量规律(9.6.14)实验上是由德国人海根(Hagen) (1839年)和法国人泊肃叶(Poiseuille, 1840年)同时发现的。泊肃叶是一位医生兼物理学家，他是在研究血液在血管中流动的规律时发现这个公式的，物理学家通常称粘性不可压缩流体在圆管中的流动为泊肃叶流动。我们上面所讲的理论解法是首先由魏

德迈(Wiedemann, 1856年)给出的。

上述理论结果，无论在速度剖面、流量或阻力系数等方面都和实验结果十分符合。下面对阻力系数 λ 画出了海根的实验结果与理论结果的比较图9.6.5。

从图上可以看出符合的情况是十分良好的。

应该指出，上述结果只是在 $Re < Re_{cr}$ 的层流情形才是正确的。此外，

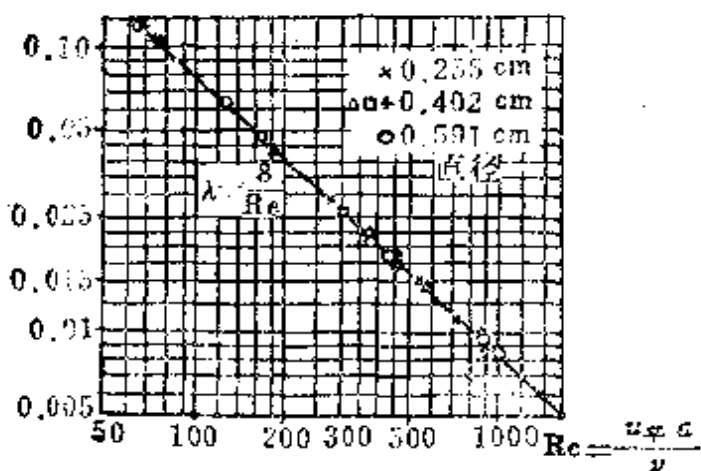


图 9.6.5

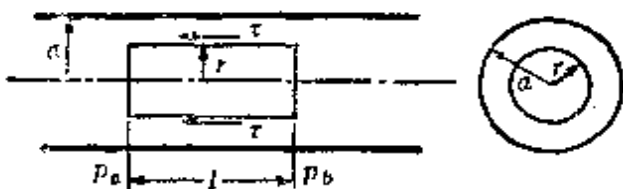


图 9.6.6

在管长有限的情形下只是在离进口截面一定距离之后流动才遵循上述规律。

泊肃叶流动在流体力学理论发展史上有过不可磨灭的功绩。根据推广牛顿公式写出纳维-斯托克斯方程，并认为壁面上的条件是粘附条件，这在一开始并没有被大家所公认，只是在利用这样的方程和边界条件求出了粘性不可压缩流体在圆管中流动的准确解，并和实验非常符合之后，才肯定了推广牛顿公式和粘附条件的正确性。在实际应用方面还可以利用粘性不可压缩流体在圆管中流动的流量公式(9.6.14)来测定流体的粘性系数。

最后，我们不从方程出发，直接利用牛顿定律比较直观地导出上述结果，这种方法在一些简单问题中十分简便有效，且物理概念清晰。

在圆管中取一半径为 r ，长度为 l 的圆柱体 V ，如图 9.6.6 所示。考虑周围流体作用在此圆柱体内流体的作用力。因为速度分量 u 沿轴向不变且运动定常，因此惯性力等于零。此时压力梯度和粘性力平衡。作用在 V 上的压力为 $(p_a - p_b)\pi r^2$ ，作用在圆柱面上的粘性切应力为 $\tau 2\pi r l$ 。此两种力根据牛顿定律应相互平衡，于是

$$\tau = \frac{p_a - p_b}{l} \frac{r}{2}$$

根据 τ 的公式， $\tau = -\mu du/dr$ ，有

$$\frac{du}{dr} = -\frac{p_a - p_b}{\mu l} \frac{r}{2}$$

积分之，并考虑边界条件后得

$$u = \frac{p_a - p_b}{4\mu l} (a^2 - r^2)$$

这个速度分布公式和 9.6.12 式完全一样。以后的做法和前面相同，不再重复。

b) 两平行平板间的定常流动及库塔流

考虑由两个无穷长平行平板组成的二维渠道。粘性不可压缩

流体在压差作用下在渠道内作定常流动，板间的距离为 $2h$ ，取如图 9.6.7 所示的直角坐标系，则根据 (9.6.6) 式，并考虑到

$\frac{\partial}{\partial z} = 0$ 后得

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad (9.6.19)$$

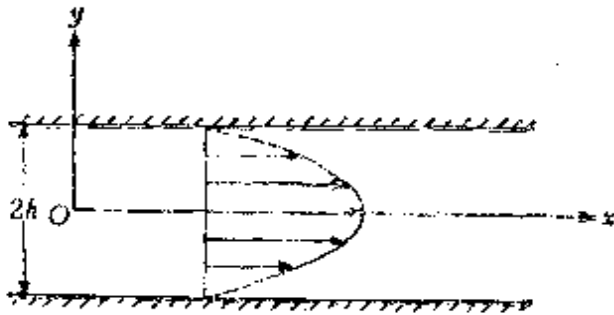


图 9.6.7

边界条件为 $y = \pm h$ 时 $u = 0$ 。积分两次，并令边界条件满足，很容易得到 (9.6.19) 式的解为

$$u = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (h^2 - y^2) \quad (9.6.20)$$

由此计算出

$$u_{max} = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} h^2,$$

$$Q = \int_{-h}^h u dy = -\frac{2}{3\mu} \frac{dp}{dx} h^3$$

$$u = \frac{Q}{2h} = -\frac{1}{3\mu} \frac{dp}{dx} h^2 = -\frac{2}{3} u_{max} \quad (9.6.21)$$

$$\tau_{max} = \frac{dp}{dx} h = -\frac{3\mu u_{max}}{h}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{\tau_{max}}{\rho u_{max}^2} = 6 \frac{\mu}{\rho u_{max} h} = \frac{6}{Re}$$

其中 $Re = u_{max} h / \nu$ 。(9.6.20) 与 (9.6.21) 式说明二维渠道内的速度剖面与阻力系数和圆管内相似，亦呈抛物型并和 Re 成反比，不同的是系数，并由此引出最大速度和平均速度之间取不同的比值。圆管中最大速度是平均速度的二倍，而在二维渠道则是一倍半。

二维渠道内的平行流也称二维泊肃叶流动。

如将 Ox 轴移至下平板，并将板间的距离 $2h$ 改写为 h ，则 (9.6.20) 式应取下列形式

$$u = -\frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (9.6.22)$$

研究另一简单情形。设想下平板不动，上平板以常速 U 沿 x 轴方向运动。若 $\frac{dp}{dx} = 0$ ，流体在上平板粘性拖动下流动，则此运动满足

$$\frac{d^2u}{dy^2} = 0$$

及边界条件 $y=0$ ； $u=0$ ； $y=h$ ； $u=U$ 。解之得

$$u = \frac{y}{h}U \quad (9.6.23)$$

此即纯剪切流的速度分布。

将纯剪切流和二维泊肃叶流动叠加起来，得到既有压差作用又有上平板粘性拖动作用的库塔 (Couette) 流，它的速度剖面为

$$\begin{aligned} \frac{u}{U} &= \frac{y}{h} - \frac{h^2}{2\mu U} \frac{dp}{dx} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right) \\ &= \frac{y}{h} - P \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right) \end{aligned} \quad (9.6.24)$$

其中

$$P = -\frac{h^2}{2\mu U} \frac{dp}{dx}$$

无量纲速度剖面 u/U 依赖于 P 的关系画在图 9.6.8 中。从图上可以看出，当压力沿流动方向减少，即 $P > 0$ 时，整个横截面上的速度值都是正的；当压力沿流动方向增加，即 $P < 0$ 时，则可能在静止壁面附近产生倒流。这主要发生在 $P < -1$ 的情形，此

时在下平板附近，上平板的拖动作用不足以克服逆压的影响，因而在部分区域内产生了倒流。此类具有压力梯度的库塔流在润滑理论中具有一定意义，因为轴承和轴套之间狭缝内的粘性流体运动具有和这类库塔流大体相同的特性。

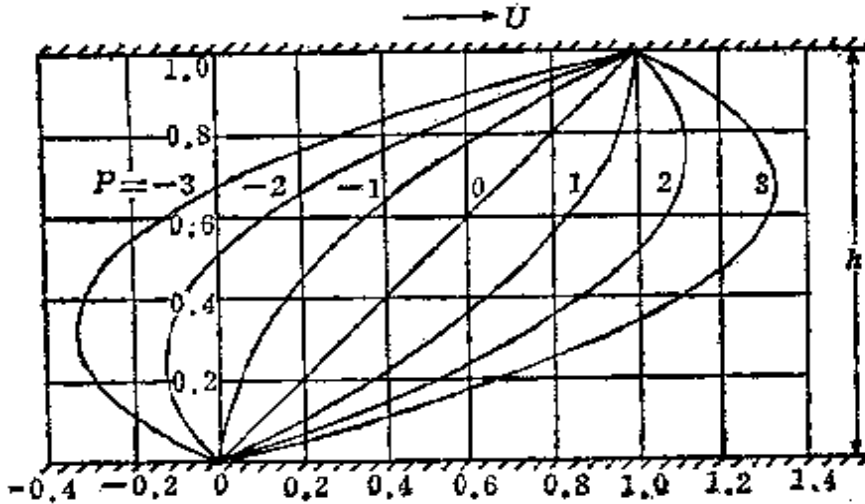


图 9.6.8

c) 两同心旋转圆柱间的定常流动

两无穷长同心圆柱之间充满着粘性不可压缩流体。内圆柱半径为 r_1 ，以常角速度 ω_1 旋转；外圆柱半径为 r_2 ，以常角速度 ω_2 旋转(见图 9.6.9)。取柱坐标 (r, θ, z) ， z 轴与圆柱轴线重合。则根据 z 方向对称性易见，圆柱转动引起的流体定常运动，其所有的流线都是圆形的，即满足

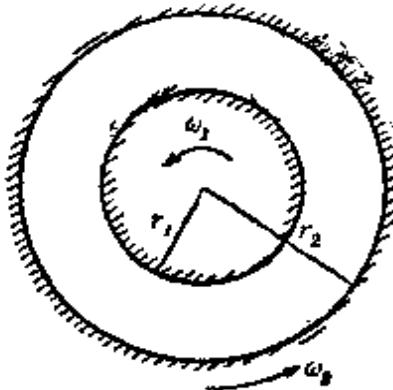


图 9.6.9

的要求，于是未知函数只有 v_θ 及 p 。根据 θ 方向的对称性，它们与 θ 无关，即

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0, \quad v_z = 0, \quad v_r = 0$$

的要求，于是未知函数只有 v_θ 及 p 。根据 θ 方向的对称性，它们与 θ 无关，即

$$v_\theta = v_\theta(r), \quad p = p(r)$$

考虑到这些，柱坐标系统中的运动方程组(9.1.9)或(3.6.16)简

超星浏览器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

化为

$$\frac{v_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} \quad (9.6.25)$$

$$\mu \left(\frac{d^2 v_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_\theta}{dr} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) = \frac{1}{2\pi r^2} \frac{d}{dr} (2\pi r^2 p_{r,\theta}) = 0 \quad (9.6.26)$$

其中

$$p_{r,\theta} = \mu \left(\frac{dv_\theta}{dr} - \frac{v_\theta}{r} \right)$$

边界条件为：

$$r = r_1, u = r_1 \omega_1; \quad r = r_2, u = r_2 \omega_2$$

(9.6.25)式表明惯性离心力和径向压力梯度平衡，而(9.6.26)式则表明流体内作用在柱形壳体内外表面上的粘性应力矩处于平衡状态。这一性质从下述论证可以很容易看出：半径为 r 的柱外流体作用在柱内流体的力矩为

$$M = 2\pi r^2 p_{r,\theta} = 2\pi \mu r^2 \left(\frac{dv_\theta}{dr} - \frac{v_\theta}{r} \right) \quad (9.6.27)$$

于是由(9.6.26)式得

$$\frac{dM}{dr} = 0, \quad M = \text{常数}$$

即作用在内外表面上的粘性应力矩大小相等方向相反。

现在解(9.6.26)式。为此将它改写为

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r v_\theta) \right] = 0$$

积分两次得

$$v_\theta = Ar + \frac{B}{r}$$

利用边界条件可定出 A 及 B 为

$$A = \frac{\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad B = \frac{(\omega_1 - \omega_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

超星浏览器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

于是

$$v_{\theta} = \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \left[r(\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2) - \frac{r_1^2 r_2^2}{r} (\omega_2 - \omega_1) \right] \quad (9.6.28)$$

而

$$M = -4\pi\mu B = 4\pi\mu \frac{(\omega_2 - \omega_1) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad (9.6.29)$$

考虑两个特例情形. 第一种情形, 外圆柱静止, 内圆柱以 ω_1 的角速度旋转; 第二种情形, 内圆柱静止, 外圆柱以 ω_2 的角速度旋转. 令

$$\chi = r_1/r_2, \quad s = r_2 - r_1, \quad x = r/r_2$$

则第一、第二两种情形的速度剖面可分别表为

$$(1) \frac{v_{\theta}}{v_{\theta_1}} = \frac{\chi}{1-\chi^2} \cdot \frac{1-x^2}{x} \quad (\text{内转外静}) \quad (9.6.30)$$

$$(2) \frac{v_{\theta}}{v_{\theta_2}} = \frac{\chi}{1-\chi^2} \left(\chi - \frac{\chi}{x} \right) \quad (\text{外转内静}) \quad (9.6.31)$$

其中 $v_{\theta_1} = \omega_1 r_1, v_{\theta_2} = \omega_2 r_2$ 分别对应于内柱和外柱的周向速度. 图 9.6.10 以 $x'/s = (r - r_1)/s$ 为自变量画出了上述两种情形的速度

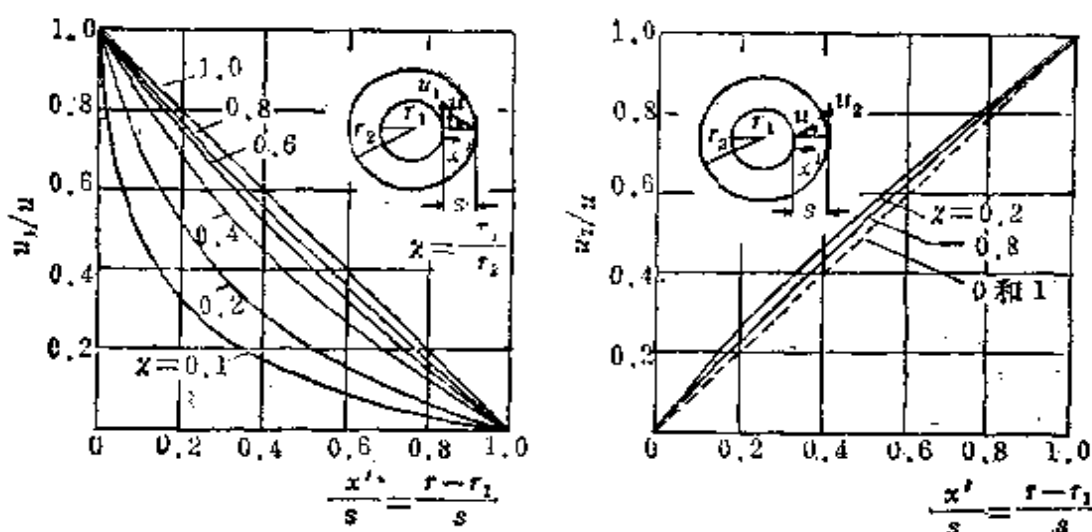


图 9.6.10



分布。值得指出的是第一种情形的速度分布强烈地依赖于半径比 $\lambda = r_1/r_2$ ，而第二种情形则很少随 λ 改变。当 $\lambda \rightarrow 1$ 时，两种情形都趋于两平板间库塔流的线性分布。在第二种情形中令 $r_1 = 0$ ， $\lambda = 0$ ，得圆柱 $r = r_2$ 内充满着粘性不可压缩流体情形。当圆柱以 ω_2 角度旋转时，根据(9.6.28)， $v_\theta = \omega_2 r$ ， $M = 0$ 。此时圆柱内流体象刚体一样地旋转，速度是线性分布，而且为了支持柱内粘性流体的运动不须要外力矩。由此我们看到当 $\lambda = 0$ 和 1 时速度都是线性分布。这可能就是为什么 $0 < \lambda < 1$ 时，速度分布很少偏离直线的原因。在第二种情形中令 $r_2 \rightarrow \infty$ ， $\omega_2 = 0$ ，我们得到圆柱在无界流体中旋转的特殊情形。此时 $v_\theta = r^2 \omega_1 / r$ ， $M = 4\pi\mu r^2 \omega_1$ 。速度分布和无粘性流体中强度为 $\Gamma_1 = 2\pi r^2 \omega_1$ 的点涡所感生的一样 ($v_\theta = \Gamma_1 / (2\pi r) = r^2 \omega_1 / r$)。这就是粘性流体运动具有无旋性的极为个别的特例。

力矩公式(9.6.29)可以被用来测定流体的粘度。当内柱静止不动时，只要测出作用在内柱上的力矩值 M 以及 r_1 ， r_2 ， ω_2 ，按(9.6.29)式就可确定流体的 μ 。

9.7 小雷诺数情形的近似解法。粘性流体绕圆球的运动

我们知道，粘性不可压缩流体方程组的复杂性在于惯性力那一项是非线性的，从而使整个方程组成为非线性的方程组。而数学上要解一个非线性方程组却是非常困难的。上面我们已经看到在一些简单的问题中，由于流动的特点，惯性项是零或得到极大的简化，因此非线性方程化为线性方程，或十分简单的非线性方程，在某些情况下可得到它们的准确解。研究准确解的重要性我们已在上一节的末尾公正地指出。但是不可否认，具有准确解的流动问题一般说来都是十分简单的问题，而工程实际所提出来的问题却往往是比较复杂的，因此准确解常常不能满足工程的要求。为了能够解决工程实际提出来的实际问题，我们必须解决原始的非线性方程。由于上面所指出的数学上解决非线性方程组的



困难性，力学工作者被迫采用近似方法去解决问题。所谓近似方法，就是根据问题的特点，抓住现象的主要方面忽略其次要方面从而使方程组或边界条件得到简化的一种方法。这种方法是在力学中被大量采用且行之有效的，是我们必须学会的一种基本训练。下面我们讨论在不可压缩粘性流体运动问题中根据问题所固有的特性有几个可能简化问题的途径。大家知道在不可压缩粘性流体中出现在运动方程中一共有三种力，即惯性力、压力差及粘性力(重力忽略不计)。压力是受惯性力及粘性力制约的反作用力，起平衡作用。所以实际上起主导作用的是两种力，即惯性力及粘性力。表征这两种力之间的关系特征参数是 $Re = VL/\nu$ 。它是惯性力和粘性力之比，其中 V ， L 分别是所研究问题中的特征速度及特征长度， ν 是流体的运动学粘性系数。我们看到这里存在着两种极端：一是小 Re 数的情形；一是大 Re 数的情形。如果在我们所研究的问题中特征速度及特征长度都比较小，流体的粘性系数比较大时， Re 就比较小。例如小尺度物体以低速在粘性很大的流体中运动的问题，或粘性很大的流体在细长管道中以低速流动的问题都是这种情形。 Re 小意味着粘性力的量阶比惯性力的量阶大得多，即粘性力此时对流动起主导作用，而惯性力则是次要因素。作为零级近似，可以将惯性力全部略去；作为一级近似则可保留非线性惯性项中的主要部分而将次要部分略去，这样就可以将方程简化成线性方程或较简单的非线性方程。如果在我们所研究的问题中特征速度和特征长度都比较大，流体的粘性系数比较小的时候， Re 就比较大。例如大尺度物体以较高的速度在粘性较小的流体中运动的问题或粘性较小的流体在细长管道中以较高速度流动的问题都是这种情形。 Re 大的意思就是惯性力的量阶比粘性力的量阶大得多，作为零级近似可将粘性力全部去掉。但是如将粘性力全部略去就变成理想不可压缩流体的方程了，显然它的解一般说来不能满足粘附性的边界条件，因此全部忽略粘性力是不合适的。此时只能根据问题的特点忽略粘

性项中的某些次要部分从而将方程组简化。上面我们讨论了小 Re 数及大 Re 数这两种极端情形。若 Re 数不大也不小，即惯性项和粘性项同阶，它们对流动所起的作用差不多，此时就不能对方程作任何近似，而必须从其他途径出发简化问题或者直接解原来的方程。

在这节中我们将讨论小雷诺数情形下的近似解法。

假设在我们所研究的问题中 Re 小，作为零级近似我们将惯性项全部略去，此时运动方程组简化为下列形式

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \\ \operatorname{grad} p = \mu \Delta \boldsymbol{v} \end{cases} \quad (9.7.1)$$

这是一个线性方程组，它是小雷诺数情形下零级近似的出发方程组。现在我们以圆球在无界粘性不可压缩流体中的运动为例说明在小 Re 情形下是如何具体地解决问题的。

有一个半径为 a 的圆球在无界粘性不可压缩流体中以速度 V_∞ 作等速直线运动（见图 9.7.1）。设本问题中的 Re 小，求速度、压力及圆球所受的阻力。

根据伽利略相对性原理，上述问题等价于无穷远处速度为 V_∞ 的粘性不可压缩流体绕圆球的定常流动。取球坐标系 r, θ, φ ， θ 的起算轴线 x 的方向取成和来流方向重合。根据定常及圆球绕流问题的轴对称性，我们有

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0, \quad v_\varphi = 0$$

考虑到上式，方程组(9.7.1)采取下列形式

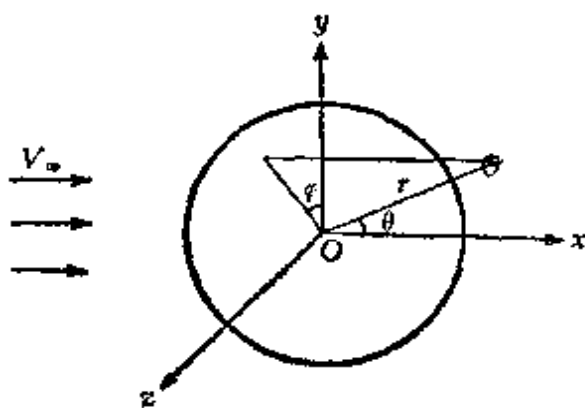


图 9.7.1

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2 \cot \theta}{r^2} v_\theta \right)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right)$$



边界条件是

1) 在圆球 $r=a$ 上

$$v_r = 0, \quad v_\theta = 0 \quad (9.7.3)$$

2) 在无穷远处

$$v_r = V_\infty \cos \theta, \quad v_\theta = -V_\infty \sin \theta \quad (9.7.4)$$

(9.7.2) 式是一个由三个偏微分方程组成的线性偏微分方程组, 用来确定三个未知函数 $v_r(r, \theta)$, $v_\theta(r, \theta)$ 及 $p(r, \theta)$. 现在我们采用数理方程中经常采用的分离变量法解此方程组, 为此将未知函数表成下列形式:

$$v_r = f(r)F(\theta), \quad v_\theta = g(r)G(\theta), \quad p = \mu h(r)H(\theta) + p_\infty \quad (9.7.5)$$

将(9.7.5)式代入(9.7.4)式我们得到

$$V_\infty \cos \theta = f(\infty)F(\theta), \quad -V_\infty \sin \theta = g(\infty)G(\theta)$$

由此推出

$$F(\theta) = \cos \theta, \quad G(\theta) = -\sin \theta$$

$$f(\infty) = V_\infty, \quad g(\infty) = V_\infty$$

于是 v_r, v_θ 可改写为

$$v_r = f(r) \cos \theta, \quad v_\theta = -g(r) \sin \theta$$

将上式及(9.7.5)式中的 p 的表达式代入(9.7.2)及(9.7.3)式,

我们得到

$$\begin{aligned}
 & \cos \theta \left[f' - \frac{g}{r} + \frac{2f}{r} - \frac{g}{r} \right] = 0 \\
 & H(\theta)h'(r) \\
 & = \cos \theta \left[f'' - \frac{f}{r^2} + \frac{2f'}{r} - \frac{f}{r^2} + \frac{2g}{r^2} - \frac{2f}{r^2} + \frac{2g}{r^2} \right] \\
 & H'(\theta) \frac{h}{r} \\
 & = \sin \theta \left[-g'' + \frac{g}{r^2} - \frac{2g'}{r} - \frac{g}{r^2} \cot^2 \theta \right. \\
 & \quad \left. - \frac{2f}{r^2} + \frac{g}{r^2} \csc^2 \theta \right]
 \end{aligned} \tag{9.7.6}$$

边界条件是

$$f(a)=0, \quad g(a)=0, \quad f(\infty)=V_{\infty}, \quad g(\infty)=V_{\infty}$$

从上面写出的方程组中容易看出, 要将 θ 变数分离出来 $H(\theta)$ 应取成 $\cos \theta$. 于是(9.7.5)式变成

$$v_r = f(r) \cos \theta, \quad v_{\theta} = -g(r) \sin \theta, \quad p = \mu h(r) \cos \theta + p_{\infty} \tag{9.7.7}$$

而(9.7.6)式则变为

$$\begin{cases}
 f' + \frac{2(f-g)}{r} = 0 & \text{(a)} \\
 h' = f'' + \frac{2}{r}f' - \frac{4(f-g)}{r^2} & \text{(b)} \\
 \frac{h}{r} = g'' + \frac{2}{r}g' + \frac{2(f-g)}{r^2} & \text{(c)}
 \end{cases} \tag{9.7.8}$$

边界条件是

$$f(a)=0, \quad g(a)=0, \quad f(\infty)=V_{\infty}, \quad g(\infty)=V_{\infty} \tag{9.7.9}$$

现在我们在边界条件(9.7.9)下解方程组(9.7.8). 容易看出, 由(9.7.8)中的(a)式可将函数 g 通过 f 表示出来

$$g = \frac{r}{2}f' + f \quad (9.7.10)$$

将(9.7.10)式代入(9.7.8)中的(c)式,得到 h 通过 f 表示出来的下
列表达式

$$h = \frac{1}{2}r^2 f''' + 3r f'' + 2f' \quad (9.7.11)$$

将(9.7.10)及(9.7.11)式代入(9.7.8)中的(b)式则得确定 f 的下
列微分方程

$$r^2 f'''' + 8r^2 f''' + 8r f'' - 8f' = 0 \quad (9.7.12)$$

由(9.7.12)式解出 f 后将之代入(9.7.10)与(9.7.11)式就可以分
别求出函数 g 及 h 。(9.7.12)式是大家熟知的欧勒方程,解具有 r^k
的形式, k 是下列代数方程的解

$$k(k-1)(k-2)(k-3) + 8k(k-1)(k-2) + 8k(k-1) - 8k = 0$$

解之得 $k=0, 2, -1, -3$. 于是(9.7.12)式的普遍解是

$$f = \frac{A}{r^3} + \frac{B}{r} + C + Dr^2 \quad (9.7.13)$$

将(9.7.13)式代入(9.7.10)及(9.7.11)式得 g 及 h 的表达式是

$$g = -\frac{A}{2r^3} + \frac{B}{2r} + C + 2Dr^2 \quad (9.7.14)$$

$$h = \frac{B}{r^2} + 10rD \quad (9.7.15)$$

(9.7.13), (9.7.14), (9.7.15)式的任意常数 A, B, C, D 由边界
条件(9.7.9)式确定,经过一些简单运算后我们得到

$$A = \frac{1}{2}V_{\infty}a^3, \quad B = -\frac{3}{2}V_{\infty}a, \quad C = V_{\infty}, \quad D = 0$$

将之代入(9.7.13), (9.7.14), (9.7.15)式中去得

$$\begin{cases} f = \frac{1}{2}V_{\infty}\frac{a^3}{r^3} - \frac{3}{2}V_{\infty}\frac{a}{r} + V_{\infty} \\ g = -\frac{1}{4}V_{\infty}\frac{a^3}{r^3} - \frac{3}{4}V_{\infty}\frac{a}{r} + V_{\infty} \\ h = -\frac{3}{2}V_{\infty}\frac{a}{r^2} \end{cases}$$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

将上式代入(9.7.7)式得到最终的结果

$$\begin{cases} V_r(r, \theta) = V_{\infty} \cos \theta \left[1 - \frac{3}{2} \frac{a}{r} + \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3} \right] \\ v_{\theta}(r, \theta) = -V_{\infty} \sin \theta \left[1 - \frac{3}{4} \frac{a}{r} - \frac{1}{4} \frac{a^3}{r^3} \right] \\ p(r, \theta) = -\frac{3}{2} \mu \frac{V_{\infty} a}{r^2} \cos \theta + p_{\infty} \end{cases} \quad (9.7.16)$$

现在我们来求圆球所受的力，特别是圆球所受的阻力。我们知道作用在圆球上的粘性力是 p_{rr} ，它的三个分量具有下列表达式

$$\begin{cases} p_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \\ p_{r\theta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} - \frac{v_{\theta}}{r} \right) \\ p_{r\varphi} = \mu \left(\frac{\partial v_{\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_{\varphi}}{r} \right) \end{cases} \quad (9.7.17)$$

由对称性 $v_{\varphi} = 0$ 及 $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ ，我们有 $p_{r\varphi} = 0$ 现在我们求物体表

面上 p_{rr} 和 $p_{r\theta}$ 的值。为此我们需要知道 $\frac{\partial v_r}{\partial \theta}$ ， $\frac{\partial v_r}{\partial r}$ ， $\frac{\partial v_{\theta}}{\partial r}$ 及 v_{θ} 在物体表面上的值。由粘附条件知在球面上 $v_r = v_{\theta} = 0$ ，于是推出在球面上有

$$\frac{\partial v_r}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$$

其次，从(9.7.2)式中的连续性方程推出在球面上 $\partial v_r / \partial r = 0$ 。将这些结果代入(9.7.17)式得

$$p_{,r} = -p, \quad p_{,r\theta} = \mu \frac{\partial v_\theta}{\partial r}, \quad p_{,r\varphi} = 0$$

将(9.7.16)式的结果代入上式，并在球面上取值得球面上的 $p_{,r}$ 、

$p_{,r\theta}$ ，它们取下列值

$$p_{,r} = \frac{3}{2} \frac{\mu V_\infty}{a} \cos \theta - p_\infty$$

$$p_{,r\theta} = -\frac{3\mu V_\infty}{2a} \sin \theta$$

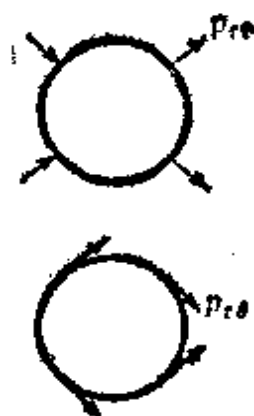


图 9.7.2

因为整个流动对 x 轴是对称的，因此与 x 轴垂直方向的合力为零。作用在圆球上的作用力全部沿 x 轴，因此合力即阻力，且可按下列公式求出（参看图 9.7.2）

$$W = \int_S (p_{,r} \cos \theta - p_{,r\theta} \sin \theta) dS$$

其中 S 代表整个球面，对上式实现积分

$$\begin{aligned} W &= \int_0^\pi (p_{,r} \cos \theta - p_{,r\theta} \sin \theta) 2\pi a^2 \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi a^2 \int_0^\pi \left[\frac{3\mu V_\infty}{2a} \cos^2 \theta + \frac{3\mu V_\infty}{2a} \sin^2 \theta \right] \sin \theta d\theta \\ &\quad - 2\pi a^2 p_\infty \int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= 3\pi \mu V_\infty a \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 6\pi \mu V_\infty a \end{aligned} \quad (9.7.18)$$

由此可见，圆球所受的阻力和来流的速度 V_∞ 成正比，和圆球的半径 a ，粘性系数也成正比。此式首先由斯托克斯得出，故称为斯托克斯阻力公式。根据(9.7.18)式可计算出圆球的阻力系数：

$$C_x = \frac{W}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 \pi a^2} = \frac{12\nu}{aV_\infty} = \frac{24}{Re}$$

其中 $Re = dV_\infty/\nu$, d 是圆球的直径. 此式说明阻力系数和雷诺数成反比.

上面我们得到了粘性不可压缩流体绕圆球流动的零级近似结果, 此时我们将惯性项全部略去. 为了说明在什么区域内惯性项略去是合理的, 什么区域内惯性项略去是不合适的, 我们采用已求出的零级近似解(9.7.16)估计一下惯性项和粘性项的量阶. 为了方便起见我们在对称轴 $\theta = 0$ 上估阶. 此外, 因粘性项的表达式较复杂, 我们以与之同阶的压力项代替. 于是

$$\begin{aligned} \left(\frac{dv}{dt}\right)_{\theta=0} &= \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r}\right)_{\theta=0} \\ &= V_\infty^2 \left[1 - \frac{3}{2} \frac{a}{r} + \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3}\right] \left[\frac{3}{2} \frac{a}{r^3} - \frac{3}{2} \frac{a^3}{r^4}\right] \\ &= \frac{3}{2} V_\infty^2 \frac{a}{r^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{3}{2} \frac{a}{r} + \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3}\right) \\ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{\theta=0} &= \frac{3\nu V_\infty a}{r^3} \end{aligned}$$

两者之比是

$$\frac{\text{惯性项}}{\text{压力项}} = \frac{V_\infty r}{2\nu} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{3}{2} \frac{a}{r} + \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3}\right) = A$$

我们看出, 在圆球附近即当 r 接近于 a 时, A 很小, 因此惯性项较压力项小得多, 是可以加以忽略的. 但当 r 甚大时, $A \sim V_\infty r/2\nu$. 此时 A 就不是小量, 即惯性项比起压力项来不是小量, 因此忽略惯性项就显得不合理了.

为了改进上述零级近似结果中的缺点, 奥新(Oseen)将速度写成

$$v = v_{\infty} + v'$$

其中 v' 在无穷远处附近是一小量，将上式代入惯性项 $(v \cdot \nabla)v$ 中去，并忽略二级微量项得

$$(v_{\infty} \cdot \nabla)v = V_{\infty} \frac{\partial v}{\partial x}$$

这就是无穷远处附近惯性力的主要线性项。以 $V_{\infty}(\partial v/\partial x)$ 代替惯性力，可以想象在无穷远处是好的。而在物体附近因惯性项比粘性项小得多，因此以 $V_{\infty}(\partial v/\partial x)$ 代 dv/dt ，或忽略 dv/dt 是差不多的。这样，我们可以预料，不全部略去惯性项而以线性主要部分 $V_{\infty}(\partial v/\partial x)$ 代替 dv/dt 将得到较好的结果。这时方程组是

$$\begin{cases} \operatorname{div} v = 0 \\ v_{\infty} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta v \end{cases}$$

这个方程组仍然是线性的，奥新求出了上述方程组在圆球绕流问题时的解。据此可求出圆球所受的阻力，它是

$$W = 6\pi\mu V_{\infty} a \left(1 + \frac{3aV_{\infty}}{8\nu} \right)$$

相应的阻力系数是

$$C_x = \frac{1}{2} \frac{W}{\rho l^2 V_{\infty}^2 \pi a^2} = \frac{24}{\operatorname{Re}} \left(1 + \frac{3}{16} \operatorname{Re} \right)$$

上式称为奥新阻力公式，它是斯托克斯公式的修正。

下面我们将理论和实验进行比较，结果如下表所示。

Re	C _x		
	斯托克斯公式	奥新公式	实验结果
0.0531	451.2	456.5	475.6
0.2437	98.5	103.1	109.6
0.7277	32.96	38.23	38.82
1.493	16.07	22.32	19.40

无论从图 9.7.3 上或表上都看到，斯托克斯公式在 $Re < 1$ 时与实验相当符合。奥新公式的适用范围略广，它在 $Re \leq 5$ 都能采用。但是从阻力的角度来看，奥新近似较斯托克斯近似并无特别显著的改进。下面我们画出斯托克斯近似和奥新近似下，圆球在粘性不可压缩静止流体中运动的流线图案。

图 9.7.4 中的两个流线图案很明显地表示出斯托克斯近似和奥新近似的差别。斯托克斯近似的流线对 y 轴是对称的，它很

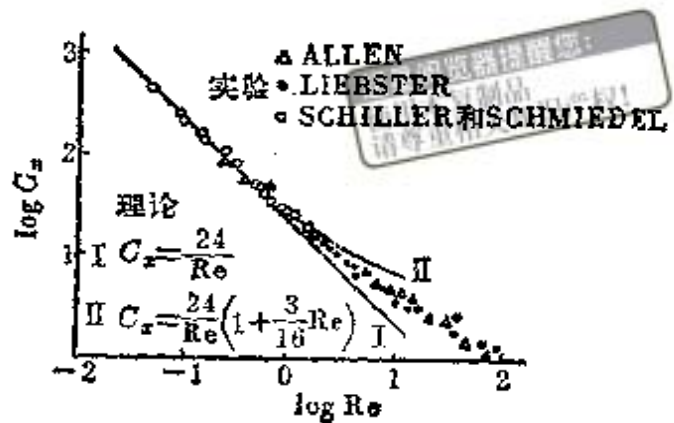
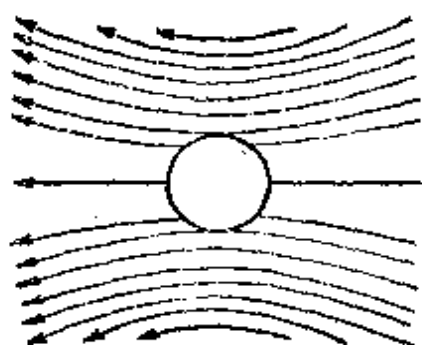


图 9.7.3

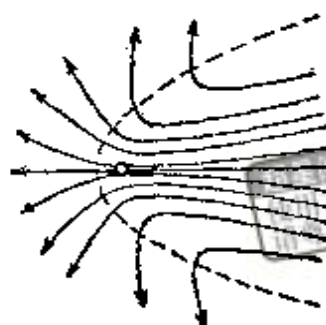
接近于点源所引起的流动，而奥新近似的流线则不同，它在虚线所示的抛物线前相当于点源所引起的流动，这点和斯托克斯近似相似。而在抛物线后，特别是圆球后面则显著地不同于点源流动。实验表明，奥新近似在定性方面是与实际结果符合的。事实上圆球前涡旋强度很小相当于势流，而在物体后面，涡旋强度很大，呈现出明显的涡旋性质，因此前后流动图案应该有所不同。通过上面讨论可以看到，奥新近似在流动图案上较斯托克斯近似有了很大的改进，基本上反映了实际情况。在这里顺便指出，如果我们处理二维圆柱绕流问题，那么全部忽略惯性力的斯托克斯方程的解并不存在，而保留了惯性力的线性主要项的奥新方程却是存在着解的。

最后，我们讨论一下斯托克斯公式的适用范围。上面已经提到，斯托克斯阻力公式在 $Re < 1$ 时才合用。这也就是说流体的粘性系数要很大或者物体的尺寸很小，运动得很慢。为了具体地说明物体尺寸及速度大小，考虑一球形水滴在空气中下落的问题。在小水滴上作用有重力、浮力和空气的阻力。设空气阻力可按斯

托克斯公式计算，且重力与浮力和阻力抵消，水滴在空气中以等速 v 下降，于是



斯托克斯近似



奥森近似

图 9.7.4

$$\frac{4}{3}\pi a^3(\rho_1 - \rho_2)g = 6\pi\rho_2\nu va$$

其中 a 是水滴半径， ρ_1, ρ_2 分别是水及空气的密度。因为空气的密度较水的密度小得多，我们忽略左边的第二项，于是得

$$v = \frac{2}{9} \frac{\rho_1}{\rho_2} g a^2$$

引进雷诺数

$$Re = \frac{va}{\nu}$$

上式可改写成

$$a^3 = \frac{9}{2} \frac{\nu^2}{g} \frac{\rho_1}{\rho_2} Re, \quad v^3 = \frac{2}{9} g \nu Re^2 \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

将 $\nu = 0.133$ 厘米²/秒， $g = 981$ 厘米/秒²， $\rho_1/\rho_2 = 770$ ， $Re < 1$ 代入得

$$a < 0.0047 \text{ 厘米}, \quad v < 28 \text{ 厘米/秒}$$

由此可见，水滴的半径要小于 5/1000 厘米，所以说是很小的，相当于雾滴的大小。

斯托克斯公式在气象学及测定电荷的密利根方法中常被采

用。此外还可应用斯托克斯公式测定流体的粘性系数。

9.8 普朗特边界层方程



从这一节开始，我们将讲述大 Re 数情形下的近似解法即边界层理论。大家知道，粘性不可压缩流体运动的方程组的准确解为数甚少，远不能满足工程实际的需要。上一节所讲述的小 Re 数情形的近似解也只能包括一部分实际问题，例如气象中的雨滴降落 ($Re \leq 1$)，轴承中的滑润理论 (Re 数等于几百) 等等，应用范围较狭。大量工程问题如航空、宇宙飞行、水利等方面所遇到的课题绝大部分都是大 Re 数情形。这是因为大自然中最主要的流体是水及空气，它们的粘性系数 μ 都很小，如果物体的特征尺度及特征速度不太小的话，那么 Re 数就可以达到很高的数值。例如在空气动力学的绕流问题中，若翼弦 $L=1$ 米，流速为 $V=100$ 米/秒，空气的动粘性系数 $\nu=0.133$ 厘米²/秒，则雷诺数约为七百万左右 ($Re \sim 7 \times 10^6$) 可见 Re 数的确非常大。由此可见，研究大 Re 数情形具有重大的实际意义。自从边界层理论建立 (1904 年) 的时候算起到现在不过数十年光景，但是由于它的应用范围极为广泛，因此发展得异常迅速，早已成为粘性流体主要的发展方向。

边界层理论最主要的任务是计算物体在流体中运动时所遭受到的摩擦阻力和热传递率。同时要求它附带地阐明理想流体所不能解释的一些现象如脱体，理想流体理论在压力分布、速度分布及举力等方面为什么和实验结果相当附合等问题。

若在我们所研究的问题中特征速度和特征长度大，而粘性小时，则由这些物理量所组成的特征雷诺数将很大。雷诺数大的意思就是：在大部分流动区域内，惯性力大大地大于粘性力，惯性力起主导作用。根据处理小雷诺数流动的经验，我们首先会很自然地想到是否可以将方程中的粘性力全部忽略作为描写大雷诺数流动的零级近似方程，这样做似乎应该得到很好的结果，但是实际情况并非如此。将诺维-斯托克斯方程中的粘性力全部忽略，我

们就得到一阶理想流体方程组，而欧拉方程一般说来是不能同时有两个固壁上的边界条件，即粘附条件。这就说明这种近似处理对于固壁附近的流动是不适合的。勉强这样做数学上就会得到解不存在的矛盾。那么为什么在大 Re 数情形不能全部忽略粘性力？究竟应当怎样才能正确地处理大 Re 数流动呢？要正确解决这些问题必须根据流体力学的观点，仔细地分析研究粘性不可压缩流体的实验结果，从客观实际理解大 Re 数流动的物理实质，并由此找出正确答案，一句话必须贯彻“从实际中来”的原则。

a) 边界层的概念

将平板或有曲度的物体放在风洞里吹风。假设 Re 数很大，用皮托管测量各个截面上的速度分布。根据实验测出的速度分布曲线，整个流场可以明显地分成性质很不相同的两个区域（见图 9.8.1）。一个是紧贴物面非常薄的一层区域称为边界层；另一个是边界层外的整个流动区域称为外部流动。根据实验结果可以看到在外部流动区物面对于流动的滞止作用大大地削弱，各个截面上 x 方向上的速度分量变化得很缓慢， $\partial u / \partial y$ 很小，因此粘性应力 $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ 在大 Re 数情形的确较惯性力小得很多（ μ 也很小），可以将粘性力全部略去，把流体近似地看成是理想的。而且因为考虑的是均匀气流绕物体的流动，所以整个外部流动不仅理想，而且还是无旋的。从实验测出的速度分布亦可看出整个速度分布和理想流体绕物体的速度分布十分接近，在平板情形就是均匀来流 U 。边界层中情况恰好相反。实验测出的数据表明，在边界层内速度

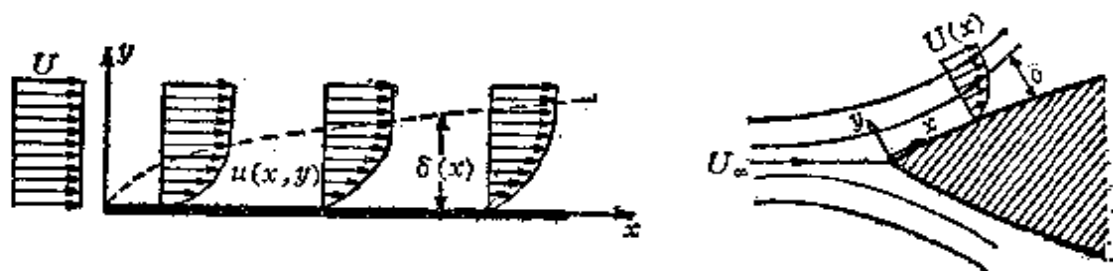


图 9.8.1

分量 u 沿物面的法向变化非常迅速，它比起沿切向变化高一个数量阶。这是因为，一方面流体必须粘附在物面上，它在物面上的相对速度等于零；另一方面，当流体离开物面很短一段距离到达边界层外部边界时，速度立即取外部流动的势流值。速度从相当高的势流值连续降低到物面上的零值是在非常狭窄的边界层内完成的，因此它的变化异常急剧，坡度 $\partial u / \partial y$ 甚大。虽然在大 Re 数情形，流体的粘性系数 μ 很小，但因 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 很大，粘性应力 $\tau =$

$\mu \frac{\partial u}{\partial y}$ 仍然可以达到很高的数值。此时，粘性力不是如同外部流动那样显著地小于惯性力，而是一个与惯性力同阶的量，它所起的作用与惯性力同等重要，必须一起加以考虑。由此不难看出，在边界层内绝不能全部忽略粘性力，而必须研究粘性流体在薄边界层内的流动，否则的话，就不符合实际情况，也难期望得到正确的结果。此外，我们也可看到，边界层内的流动因 $\partial u / \partial y$ 很大，将是一个强烈的剪切运动，每点都有强度很大的涡旋。这样，可以确信，边界层内的流体不仅有粘性，而且还呈现出强烈的涡旋运动。对实验数据进行上述分析后可以肯定整个大 Re 数流动可以分成理想无旋的外部流动区和粘性有旋的边界层区域，这两个区域在边界层边界上衔接起来。现在让我们来研究两个区域的衔接线，即边界层区域问题。通常用边界层沿物体表面法线方向的距离即边界层的厚度 δ 表征边界层的区域。由于边界层内的流动趋于外部流动是渐近的而不是截然的，因此划分边界层和外部流动的边线也是不确定的，具有一定任意性。为了唯一地定义边界层厚度，还需要做一些规定，通常人为地约定与来流速度相差 1% 的地方就是外部边界。用这种规定计算出来的 δ 就是一个唯一确定的量了。请特别注意，边界层边线不是流线，流线是速度矢量和切线方向重合的那种线，而边界层边线即是与来流相差 1% 的那些点的连线，两者性质不同互不相关。实际上流线多和

边界层边线相交，穿过它进入边界层。现在我们再来考察一下边界层厚度 δ 随坐标 x ，来流 U_∞ 和粘性系数 ν 的变化规律。我们知道，当物体在静止流体中起动时，在物体的表面上形成了强烈的涡旋（即剪切流动）。涡量的主要部分将以一定的速度沿物面法线方向向无旋的静止流体扩散， t 秒钟后已扩散到与 $\sqrt{\nu t}$ 成正比的距离处。现在我们将坐标系固定在物体上，考虑绕流问题。于是，一方面贴近物面的涡旋运动以一定速度向外扩散涡量；另一方面来自无穷远处的无旋流动以 U_∞ 的速度绕物体流过来，这样就把有涡旋的流体裹在物面附近非常薄的一层流体内，这层流体所处的区域就是边界层，它和基本上是无旋的外部流动接壤。显然 t 秒钟后涡量的主要部分扩散了 $\delta \sim \sqrt{\nu t}$ 的距离。另一方面，流体质点由于来流的流通，往下游移动了 $x = U_\infty t$ 的距离。将 t 表成 x/U_∞ ，即得涡量主要部分的边界。于是，边界层的边界满足下列关系式

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \quad (9.8.1)$$

上式表明，边界层的厚度和 \sqrt{x} 成正比，在物体前缘边界层厚度为 0 或取有限值，愈往下游受到粘性阻滞的流体愈来愈多，因此边界层的厚度也就愈来愈厚；其次，边界层厚度还和 $\sqrt{\nu}$ 成正比，这是因为当粘性系数 ν 大时，扩散速度就大，涡量分布范围也即边界层厚度也就愈大；最后 (9.8.1) 式还表明 δ 和 $\sqrt{U_\infty}$ 成反比， U_∞ 愈大，来流就把边界层内的流体裹在更小的区域内，因此，边界层的厚度也就愈小。

在 (9.8.1) 式中令 $x = L$ ，得物体后缘处最大的边界层厚度约为

即

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu L}{U_\infty}}$$

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}} \quad (9.8.2)$$

超星阅读器提醒您：
请勿长时间连续使用，以免对您的眼睛造成伤害。

其中 $Re = LU_{\infty}/\nu$ 。由此可见，边界层厚度和物体的特征长度之比与 \sqrt{Re} 成反比，当 Re 很大时 δ 比起特征长度将是一个非常小的数值。例如对于翼剖面而言，设翼弦 $L=2$ 米，来流 $U_{\infty}=100$ 米/秒，空气的 $\nu=0.133$ 厘米²/秒，则边界层厚度约为几个厘米。透平叶片边界层厚度因特征长度小，取更小值，约为几毫米。对于长达几百米的轮船而言，边界层厚度则可高达一米。如果以实际尺寸画图，则边界层的边界几乎和物面重合。上面所画的流动图都已将边界层厚度的尺寸放大了，因为如果不放大我们就无法画出边界层内部的流动图案来。

现在我们可以回答上面提出的两个问题。为什么不能在整个流动区域内忽略粘性力呢？通过上面所做的分析道理变得很清楚了。因为在广大的外部流动区域内，粘性力的确大大地小于惯性力，可以忽略粘性力，但是在狭小的边界层内部必须考虑粘性影响，因为在那里粘性力和惯性力同等重要。而且也只有考虑流体的粘性才能满足粘性流体所特有的粘附条件。边界层所占有的区域虽小，但是却非常重要，物理量在物面上的分布、摩擦阻力及物面附近的流动都和边界层内流动紧密地联系在一起。因此不能笼统地忽略粘性，而应该采用具体分析，分别对待的方法。以为边界层很狭小，可以根本不予考虑，在边界层内忽略粘性力，就必然得不到与实际符合的结果，甚至产生上述数学矛盾。那么究竟应该怎样做才能正确地处理大 Re 数流动呢？答案也是十分清楚的。根据实际流动情况，应当把整个流场分成外部的理想流体运动和边界层内的粘性流体运动这两部分。第一部分流动属于理想流体范围，它的解法已在第七章详细地讨论过，因此我们可以认为外流的解已经求出，特别地求出了边界层外部边界上的压力分布和速度分布，它将作为边界层流动的外边界条件。第二部分流动属于粘性流体范围，是本节以及以下各节的主要研究对象。本来描写边界层内粘性流体运动的是纳维-斯托克斯方程，但是因为边界层厚度 δ 比特征长度小得多，而且 x 方向速度分量沿法



向的变化比切向大得多，所以纳维-斯托克斯方程在边界层内可以得到相当大的简化。简化后的方程被称为普朗特边界层方程，是处理边界层流动的基本方程，现在就让我们来推导它。

b) 普朗特边界层方程

实验结果告诉我们，大 Re 数情形下的边界层流动有下面两个主要性质：

- 1) 边界层的厚度 δ 较物体的特征长度 L 小得多，即 $\delta' = \delta/L$ 是一小量。
- 2) 边界层内粘性力和惯性力同阶。

现把它们当作推导边界层方程的基本假定。

下面我们先对平板推导二维边界层方程，当我们通过简单情形了解到推导的基本精神后再简略地导出有曲率物体的二维边界层方程。取直角坐标系 Oxy ， x 轴与平板重合， y 轴垂直平板。在这个坐标系内写出粘性不可压缩流体的基本方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{cases} \quad (9.8.3)$$

引进无量纲量

$$\begin{cases} u' = \frac{u}{V}, \quad v' = \frac{v}{V}, \quad p' = \frac{p}{\rho V^2} \\ x' = \frac{x}{L}, \quad y' = \frac{y}{L}, \quad t' = \frac{t}{T} \end{cases} \quad (9.8.4)$$

其中 V 是特征速度， L 是特征长度， T 是特征时间。它们可以是来流的速度、平板的长度和振动的周期。将方程 (9.8.3) 无量纲化后得

超星浏览器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0$$

$$\text{St} \frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right) \quad (9.8.5)$$

$$\text{St} \frac{\partial v'}{\partial t'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right)$$

现在我们在边界层内对(9.8.5)式中包含的每一项估计它们的量阶. 在估阶前, 首先对量阶作几点说明: (1) 估阶必须有个标准, 量阶都是相对于这个标准而言的, 标准改变后, 整个物理量的量阶可以完全不同. 例如在薄翼的大雷诺数绕流问题中, 如果以相对厚度 τ 作为估阶的标准, 那么, 翼剖面的坡度 dF/dx 将是 τ 的量阶, 当 $\tau \rightarrow 0$ 时, $dF/dx \rightarrow 0$. 但是如果我们以边界层的相对厚度 $\delta' = \delta/L$ 作为标准, 那么, dF/dx 却是一阶的量了 $O(1)$, 因为当 $\delta' \rightarrow 0$ 时 dF/dx 仍然是有限的量. (2) 所谓量阶不是指该物理量或几何量的具体数值, 而是指该量在整个区域内相对于标准小参数而言的平均水平. 所以允许一阶或更高阶量在个别点上或区域内取较低的值甚至等于零, 重要的是它的平均水平高. 正如同球队比赛时分甲乙丙等级, 甲级队总的来说比乙级队水平高, 但是不排斥甲级队中个别队员不如乙级队中某些队员技术好, 水平高. 这里, 情况不同, 但道理是一样的.

在边界层问题中, 我们取 $\delta' = \delta/L$ 为估阶标准.

1) u' 及其各级导数 $\frac{\partial u'}{\partial y'}, \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}, \frac{\partial u'}{\partial x'}, \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}$ 的量阶

十分明显, 在边界层内 u 与 V 同量阶, 因此 u' 与 1 同量阶, 以 $u' \sim 1$ 表之. 其次, 当 y' 由 0 变到 δ' 时, u' 由 0 变到与 1 同阶的量, 由此可见, $\partial u'/\partial y'$ 的量阶是 $1/\delta'$, 即

$$\frac{\partial u'}{\partial y'} \sim \frac{1}{\delta'}$$

同样地可证

$$\frac{\partial u'}{\partial y'^2} \sim \frac{1}{\delta'^2}$$

现在考察 $\frac{\partial u'}{\partial x'}$ 的量阶，当 x' 由平板端点移动到与 1 同阶的量时， u' 变化了与 1 同阶的量，因此 $\frac{\partial u'}{\partial x'}$ 的量阶是 1，即

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} \sim 1$$

同样地可证

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} \sim 1$$

总结起来，我们有

$$u' \sim 1, \quad \frac{\partial u'}{\partial x'} \sim 1, \quad \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} \sim 1, \quad \frac{\partial u'}{\partial y'} \sim \delta', \quad \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \sim \delta'^2$$

2) v' 及其各级导数 $\frac{\partial v'}{\partial y'}$, $\frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2}$, $\frac{\partial v'}{\partial x'}$, $\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2}$ 的量阶

根据(9.8.5)式中的连续性方程推出

$$\frac{\partial v'}{\partial y'} = -\frac{\partial u'}{\partial x'} \sim 1$$

于是

$$v' = \int_0^{y'} \frac{\partial v'}{\partial y'} dy' \sim \delta'$$

即 v' 是 δ' 的量阶，由此易证

$$\frac{\partial v'}{\partial x'} \sim \delta', \quad \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} \sim \delta', \quad \frac{\partial v'}{\partial y'} \sim 1, \quad \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \sim \delta'$$

通过对 u' , v' 及其导数的估阶，我们看出：(1) 在边界层内 v' 比 u' 低一阶，它是一个 δ' 量阶的小量；(2) 对速度分量 u' , v' 而言，

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

y' 方向的偏导数 $\frac{\partial}{\partial y'}$ 比 x' 方向的偏导数 $\frac{\partial}{\partial x'}$ 高一阶。

3) $St \frac{\partial u'}{\partial t'}$ 及 $St \frac{\partial v'}{\partial t'}$ 的量阶

假设 $St \frac{\partial u'}{\partial t'}$ 及 $St \frac{\partial v'}{\partial t'}$ 分别与它们的位变导数同阶或比它们更小，也就是说假定在我们所研究的问题中没有很大的局部导数，即没有由局部导数引起的急剧的加速度，例如突然起动、高频振荡、压缩波等，则

$$St \frac{\partial u'}{\partial t'} \sim u' \frac{\partial u'}{\partial x'} \sim 1, \quad St \frac{\partial v'}{\partial t'} \sim u' \frac{\partial v'}{\partial x'} \sim \delta'$$

4) $\frac{\partial p'}{\partial x'}$ 及 $\frac{\partial p'}{\partial y'}$ 的量阶

压力梯度是被动的力，起调节作用，它们的量阶由方程中其他类型力中的最大量阶决定。我们知道，方程中一共有两种主动力量，即惯性力及粘性力，而惯性力和粘性力同阶，因此 $\frac{\partial p'}{\partial x'}$ 及 $\frac{\partial p'}{\partial y'}$ 的量阶分别为

$$\frac{\partial p'}{\partial x'} \sim 1, \quad \frac{\partial p'}{\partial y'} \sim \delta'$$

将上面分析出来的各项的量阶附写在方程组(9.8.5)上得

$$\begin{matrix} 1 & 1 \\ \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & \delta' & \frac{1}{\delta'} & 1 & 1 & \frac{1}{\delta'^2} \end{matrix}$$

$$St \frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right) \quad (9.8.6)$$

$$\delta' \quad 1 \quad \delta' \quad \delta' \quad 1 \quad \delta' \quad \delta' \quad \frac{1}{\delta'}$$

$$\text{St} \frac{\partial v'}{\partial t'} + u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right)$$

根据粘性力和惯性力同阶的假定，首先推出

$$\frac{1}{\text{Re} \delta'^2} \sim 1$$

由此得

$$\delta' \sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}$$

或

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu L}{U}}$$

上式表明边界层厚度与 $1/\sqrt{\text{Re}}$ 同阶。在大 Re 数情形， δ 很小，此结果和上面定性分析所得的结论完全一致。

现在我们根据方程组 (9.8.6) 式中各项的量阶忽略其中的高阶小量，从而简化纳维-斯托克斯方程。

1) $\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}$ 及 $\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2}$ 的量阶较 $\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}$ 及 $\frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2}$ 低二阶，故可略去；

2) $\frac{\partial p'}{\partial x'}$ 及 $\frac{\partial p'}{\partial y'}$ 的量阶分别为 $\frac{\partial p'}{\partial x'} \sim 1$ ， $\frac{\partial p'}{\partial y'} \sim \delta'$ ，这说明压力沿法

线方向的梯度 $\frac{\partial p'}{\partial y'}$ 较物面方向的梯度 $\frac{\partial p'}{\partial x'}$ 低一阶，与 $\frac{\partial p'}{\partial x'}$ 相比，在

一级近似范围内可认为

$$\frac{\partial p'}{\partial y'} = 0 \quad (9.8.7)$$

即压力数值穿过边界层并不改变^①。

我们以方程(9.8.7)代替 y 方向的动量方程。物理上这意味着 y 方向的动量方程较次要，可忽略不计。

由(9.8.7)式立即推出如下重要结果：边界层内压力沿物面法线方向不发生变化，它等于边界层外部边界上的压力。根据理想流体理论，边界层外部边界上的压力分布是确定的。于是边界层内的压力函数 p' 变成了 x, t 的已知函数。如果我们认为 p' 是已知函数，取外流的值，就可以不写出(9.8.7)式。

考虑到1)与2)两个重要的简化，得到下列简化方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \\ St \frac{\partial u'}{\partial t'} + u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \end{cases}$$

转换到有量纲形式，我们有

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases} \quad (9.8.8)$$

现在我们讨论方程组(9.8.8)的边界条件及初始条件。

边界条件：

- 1) 在物面 $y=0$ 上满足粘附条件 $u=v=0$;
- 2) 在边界层外部边界 $y=\delta$ 上, $u=U(x)$, 其中 $U(x)$ 是边界层外部边界上外流的速度分布。

根据边界层渐近地趋于外流的性质，条件2)还可用下面的

^① 其实从 $\frac{\partial p'}{\partial y'} \sim \delta'$, 即 $p' = p'_i(x, t) + O(\delta'^2)$, 其中 p'_i 是边界层外部边界的压力, p' 是层内压力, 亦可看出, 层内压力 p' 和外流压力 p'_i 差二阶小量。在一级近似下, 可认为穿过边界层压力不变。

条件来代替，即

$$2)' \quad y \rightarrow \infty \text{ 时 } u = U(x)$$

因方程(9.8.8)的解具有渐近性，它在 $y = \delta$ 的值与 $y = \infty$ 的值已相差很少，故在 $y = \delta$ 处或在 $y = \infty$ 处提外部条件所得的解将相差不大。关于这一点当我们在解决平板问题时可以看得很清楚。具有边界条件2)的边界层理论有时称为有限厚度理论，具有边界条件2)'的边界层理论则称为渐近理论。这两种提法以后都会用到。

初始条件：

3) 在 $t = t_0$ 时，给出速度函数 u 及 v 。

边界层内的粘性流体运动和理想外流是相互影响，紧密关联的。由于边界层内粘性流体的滞止作用，流管有了扩张，流线向外移动把外流排挤出去一段距离，所以理想外流所绕流的物体已不是原物体而应是考虑了流线位移效应后加厚了的等效物体。而等效物体的形状只有把边界层内的解找出来之后才知道。由此可见，外流取决于边界层内流动，这是一方面，另一方面，要解边界层方程也必须知道边界层边界上外流的压力分布及速度分布，因此，边界层内的流动也取决于外流。所以说，外流和边界层内流动是相互干涉的，应该把它们联合起来求解。但是这样做是十分困难的，因为我们须要解两组相互影响的方程组，即理想流体方程组及边界层方程组。为了克服上述困难，普朗特考虑到大 Re 数时，边界层很薄的事实，认为流线的位移效应很小，等效物体和原物体相差不大。作为初步近似可以忽略边界层对外流的影响，把外流当作是边界层不存在时绕原物体的流动，这样外流就可独立于边界层之外运用解理想流体流动的方法求出。确定外流后再按方程(9.8.8)及其边界条件和初始条件求边界层内解。采用这种近似方法就可以把原来是相互影响的两个问题化成可以逐步求解的两个问题，从而简化了数学提法。一般来说用上述初步近似求出的结果已完全满足工程的要求，只是在脱体点附近及

边界层较厚的地方，需要考虑边界层对外流的影响。此时，我们采用逐次修正的方法，以边界层一级近似的解为基础考虑位移效应求出等效物体，然后解理想流体绕等效物体的流动，求出边界层外部边界上的修正压力分布及速度分布，然后再以此分布求边界层内的解。如此继续下去，逐次修正。计算表明，通常只须求一次修正就够了。如果边界层对外流的影响太强烈以致逐次修正的方法不很有效，那就必须用实验方法测出压力分布或速度分布作为计算边界层的基础。

根据普朗特建议的方法，边界层边线上的压力分布即边界层内的压力分布就是理想流体绕原物体流动中物面上的压力分布，而理想流体的运动方程在物面上采取下列形式：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

于是方程组(9.8.8)亦可写成

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases} \quad (9.8.9)$$

边界条件及初始条件为：

$$\begin{cases} \text{在物面 } y=0 \text{ 上} & u=v=0 \\ \text{在 } y=\delta \text{ 或 } y \rightarrow \infty \text{ 时} & u=U(x) \\ \text{当 } t=t_0 \text{ 时} & \text{已知 } u, v \text{ 的分布} \end{cases} \quad (9.8.10)$$

其中 $U(x)$ 是理想流体绕物体流动问题中物面上的速度分布。一般我们都采用(9.8.9)与(9.8.10)式解边界层问题。

(9.8.8)式或(9.8.9)式是由两个非线性偏微分方程组成的方程组，用来确定两个未知函数 $u(x, y, t)$ 及 $v(x, y, t)$ 。方程组(9.8.9)称为普朗特边界层方程。在普朗特之前，边界层现象已有不

少人认识到，但第一个对此现象进行理论分析并导出边界层内的简化方程却是著名的德国力学家普朗特，他在1904年汉堡举行的第三届国际数学家学会上报告了自己的论文，可以说这是他一生中最重要的贡献之一，从此之后，摩擦阻力就有可能在数学上进行分析，从而成为流体力学中重要的部分，并在近几十年来获得了蓬勃的进展。现在这个部门的内容已非常丰富充

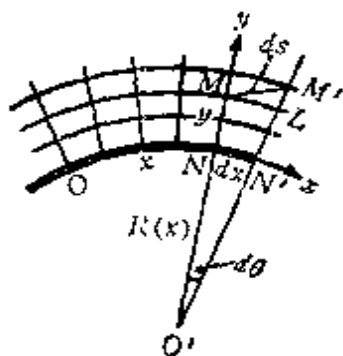


图 9.8.2

实，硕果累累。

上面导出的二维边界层方程仅适用于平板或楔形物体。实际问题中，物面大多是弯曲的，因此有必要导出曲面物体上的边界层方程。取下列正交曲线坐标系，任一点 M 的位置在这个坐标系中由 x, y 两个坐标确定，自 M 点作物面的垂线与物面交于 N 点，则坐标 x 是物面上某参考点 O 至垂足 N 的距离，坐标 y 则是 M 至 N 的距离，如图 9.8.2 所示。换言之，我们取物面为曲线坐标 x ，与物面垂直的坐标为 y 。这样的正交曲线坐标系通常习惯地称之为边界层坐标系。现求边界层坐标系的拉梅系数。在 M 点邻近取一点 M' ，计算 MM' 的弧长 ds ，显然

$$ds^2 = \overline{ML}^2 + \overline{LM'}^2$$

$$\overline{ML} = (R + y)d\theta$$

其中 R 是物面的曲率半径，而

$$d\theta = \frac{dx}{R}$$

于是

$$\overline{ML} = \frac{R + y}{R} dx$$

其次

$$\overline{LM'} = dy$$

这样

$$ds^2 = (1 + y/R)^2 dx^2 + dy^2$$

另一方面

$$ds^2 = H_1^2 dx^2 + H_2^2 dy^2$$

由此推出，拉梅系数为

$$H_1 = 1 + y/R, H_2 = 1$$

有了拉梅系数后，根据(9.1.5)式可以写出下列形式的边界层坐标系中无量纲形式的纳维-斯托克斯方程：

$$\begin{aligned}
 & \text{St} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{R}{R+y} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{uv}{R+y} \\
 & = -\frac{R}{R+y} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{R^2}{(R+y)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{R+y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u}{(R+y)^2} + \frac{2R}{(R+y)^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{R}{(R+y)^3} \frac{dR}{dx} v + \frac{Ry}{(R+y)^3} \frac{dR}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} \right\} \\
 & \text{St} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{R}{R+y} u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{u^2}{R+y} \quad (9.8.11)
 \end{aligned}$$

$$\delta \quad 1/\delta$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{R^2}{(R+y)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial y^2} \right.$$

$$\left. - \frac{2R}{(R+y)^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R+y} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v}{(R+y)^2} \right.$$

$$\left. + \frac{R}{(R+y)^2} \frac{dR}{dx} u + \frac{Rv}{(R+y)^2} \frac{dR}{dx} \frac{\partial v}{\partial x} \right\}$$

$$\left(\frac{R}{R+y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{R+y} \right) = 0$$

这里除了按(9.8.4)式对物理量及几何量无量纲化而外, 还将曲率半径 R 除以特征长度 L . 为了简化书写, 将无量纲量上的指标“/”全部省去.

现在我们假设物面的曲率半径 R 较边界层的厚度大得很多, 即 R 的量阶为

$$R \gg O(1) \quad (9.8.12)$$

此外还假设, 曲率半径 R 随 x 的变化率 dR/dx 不太大, 其量阶为

$$\frac{dR}{dx} \leq O\left(\frac{1}{\delta}\right) \quad (9.8.13)$$

这样, 方程(9.8.11)中各项的量阶分别为其上方所附写的那样

(为了确定起见, 在估阶时, 我们取 R 量阶的下界, $\frac{dR}{dx}$ 量阶的

上界. 此外, 与平板情形一样, 也假设 $\text{St} \frac{\partial u}{\partial t} = O(1)$, $\text{St} \frac{\partial v}{\partial t} =$

$O(\delta)$), 根据粘性力和惯性力同阶的假设, 得到和平板情形一样的结论

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

忽略 δ 以上的小量, 并将其转换为无量纲形式得

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ -\frac{u^2}{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (9.8.14)$$

由(9.8.14)的第二式推出

$$p(x, y, t) - p(x, \delta, t) = \rho \int_y^\delta \frac{u^2}{R} dy = O(\delta)$$

可见, 边界层内的压力和外部边界上外流压力相差一个 $O(\delta)$ 量阶的量, 因此在一级近似下, 仍然可以认为 p 穿过边界层是常数. 于是, 上面写出的方程组可改写为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (9.8.15)$$

其边界条件及初始条件和(9.8.10)一样, 不再写出.

我们发现, 对于曲率半径不太小, 曲率半径变化不太大的曲面, 边界层方程就其形式而言和平板情形完全一样. 只是平板情形的方程组是在直角坐标系中导出的, 而曲面情形取的是边界层坐标系. 由此得出如下结论: (9.8.9)式的边界层方程同时适用于平板及满足(9.8.12)与(9.8.13)等条件的曲面物体.

总结起来, 我们在这一小节中主要做了一件事, 即推导了边

边界层方程，同时对于边界层内流动的特性也有了定性的了解，这些性质归纳起来可列表如下：

边界层厚度	$\delta' = O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)$
速度及其导数	$u' = O(1)$ $\frac{\partial}{\partial x'} = O(1), \frac{\partial}{\partial y'} = O\left(\frac{1}{\delta'}\right), \frac{\partial}{\partial y'} \gg \frac{\partial}{\partial x'}$
压力及其导数	穿过边界层压力不变 $\frac{\partial}{\partial y'} = O(\delta'), \frac{\partial}{\partial x'} = O(1), \frac{\partial}{\partial x'} \gg \frac{\partial}{\partial y'}$
惯性力和粘性力	同阶

c) 脱体现象

利用边界层的概念及边界层内流动的特性可以阐明一些现象，这些现象应用理想流体理论不能得到解释。大家已经知道，对于翼剖面的不脱体绕流问题而言，用理想流体理论求得的物面上的压力分布和实验数据符合得很好。物面紧贴着边界层，那里的压力分布理应用粘性流体理论求解，为什么理想流体的结果能这么好地反映实质上是粘性流体的结果呢？这个疑问过去用理想流体模型不能找到答案，现在利用边界层的概念可以得到明确的解释。原来压力穿过边界层是不变的，因此，物面上的压力分布和边界层外部边界上理想外流的压力分布完全一样。由于边界层很薄，边界层外部边界上压力分布和理想流体绕翼剖面流动中物面上的压力分布相差甚微。由此立即得出结论：边界层内物面的压力分布基本上等于用理想流体理论求出的物面上的压力分布。这就说明了上述疑问。理想流体绕翼剖面流动的压力分布和实际情况很符合，反过来也说明了边界层理论的重要推论：压力穿过边界层不变的事实是正确的。

现在让我们来谈谈边界层的脱体现象。实验告诉我们，当流

体流过非流线型物体时，边界层内流动从物面分离出来在物体后面形成尾涡区，从而形成很大的尾涡阻力。但是如果物体是平板或流线型物体（如翼剖面），则在一定的冲角下常常观察不到脱体现象，即便有亦限制在后缘附近不大的区域内，此时尾涡阻力很小，阻力主要由摩擦阻力组成，它比非流线型物体的尾涡阻力小得很多。我们知道，当物体在流体中运行时，为了提高效率总是希望尽可能地减少阻力，因此研究边界层为什么会从物面分离，应该如何防止或推迟脱体现象的产生，就成为十分重要的现实问题了。

以圆柱这样的非流线型物体为例定性地说说明边界层脱体现象产生的原因。如图 9.8.3 所示，当

圆柱在流体中自静止状态起动时，在圆柱面上形成边界层。由于刚起动时边界层还来不及生长，因此这时边界层非常非常薄。边界层外的外流和理想流体绕圆柱的流动几乎完全一样。在上游 DE 段，流体质点的速度由 D 点的零值加速至 E 点的最大值，而后顺着下游，由 E 点的最大值减速至 F 点的零值。因此，压力将自 D 点向 E 点递减，

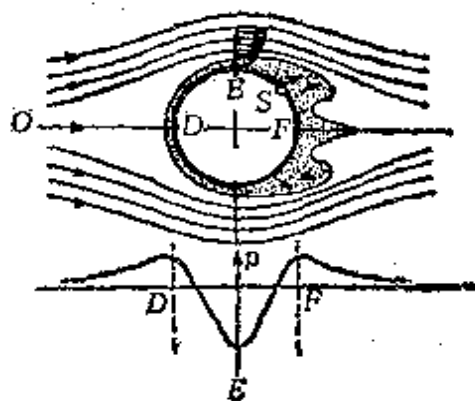


图 9.8.3

而后沿 EF 方向递增， $\frac{dp}{dx} < 0$ 和 $\frac{dp}{dx} > 0$ 的区域

分别称为顺压区及逆压区。在顺压区压力能转化为动能，在逆压区，动能反过来转化为压力能。根据压力穿过边界层不变的性质，边界层内压力分布情况和理想外流一样，可分顺压区和逆压区两部分。在边界层内的顺压区，压力梯度将推动流体质点前进，使之加速，同时在运动过程中流体质点还受到物面及流体的粘性滞止作用，它力图使流体停滞不前。由于压力梯度的作用强于物面及粘性滞止作用，因此流体质点还是克服了阻力加速地自 D 向 E 流动。在逆压区，情形就不相同了。压力梯

度阻止流体质点前进，在物面滞止作用和粘性作用的复合影响下，流体质点将不断地减速。当圆柱起动不久，流体质点的惯性力还能克服阻力减速地流至 F 点，过了一段时间，当边界层生长起来，变得相当厚时，惯性力便再也不能克服相反的阻力首先在后驻点停止下来，而后速度为零的脱体点很快地向上游推移，当圆柱以常速 U_∞ 稳定地在静止流体中运动时，脱体点就固定在 S 点上不再向前移动。一旦流体在边界层内停止下来，下游的流体在逆压的作用下将倒流过来，它们在来流的冲击下又将顺流回来，这样就在分离点附近形成明显可见的大涡旋。这涡旋象楔子一样将边界层和物体分离开来（见图 9.8.4）。当边界层和固体分离后，它就象自由射流一样注入外流中，这样在外流和物面附近的流动之间形成一条分界线，这条分界线就是从物面离开的零流线。在此分界线之内便是尾涡区的开始。脱体的边界层在外流的携带下，将漂向下流和物体后面的流体混合在一起形成整个尾涡区。由于涡旋损耗动能，因此产生了尾涡阻力，这点从图 9.8.5 中的压力分布亦可看出。脱体后涡旋的存在使圆柱表面的压力分布和理想流体情形大不相同，从图上可以看出尾涡区的压力偏小，那里有显著的吸力，从而使物体遭受到尾涡阻力。

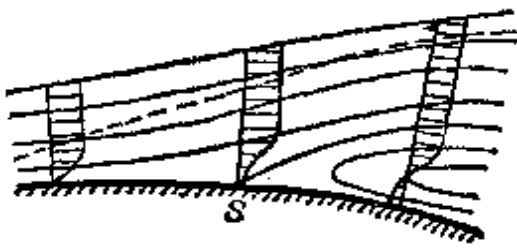


图 9.8.4

在外流中，这样在外流和物面附近的流动之间形成一条分界线，这条分界线就是从物面离开的零流线。在此分界线之内便是尾涡区的开始。脱体的边界层在外流的携带下，将漂向下流和物体后面的流体混合在一起形成整个尾涡区。由于涡旋损耗动能，因此产生了尾涡阻力，这点从图 9.8.5 中的压力分布亦可看出。脱体后涡旋的存在使圆柱表面的压力分布和理想流体情形大不相同，从图上可以看出尾涡区的压力偏小，那里有显著的吸力，从而使物体遭受到尾涡阻力。

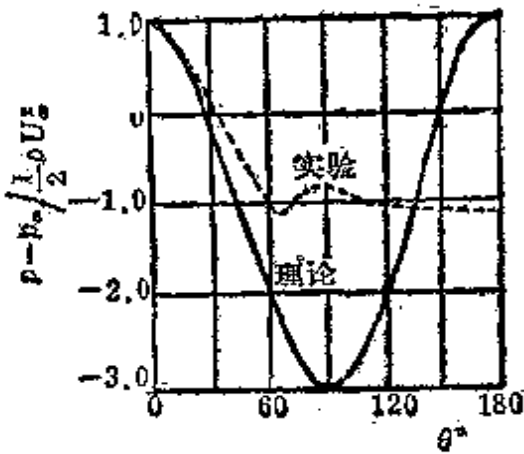


图 9.8.5

流体在逆压的作用下将倒流过来，它们在来流的冲击下又将顺流回来，这样就在分离点附近形成明显可见的大涡旋。这涡旋象楔子一样将边界层和物体分离开来（见图 9.8.4）。当边界层和固体分离后，它就象自由射流一样注入外流中，这样在外流和物面附近的流动之间形成一条分界线，这条分界线就是从物面离开的零流线。在此分界线之内便是尾涡区的开始。脱体的边界层在外流的携带下，将漂向下流和物体后面的流体混合在一起形成整个尾涡区。由于涡旋损耗动能，因此产生了尾涡阻力，这点从图 9.8.5 中的压力分布亦可看出。脱体后涡旋的存在使圆柱表面的压力分布和理想流体情形大不相同，从图上可以看出尾涡区的压力偏小，那里有显著的吸力，从而使物体遭受到尾涡阻力。

脱体的边界层在外流的携带下，将漂向下流和物体后面的流体混合在一起形成整个尾涡区。由于涡旋损耗动能，因此产生了尾涡阻力，这点从图 9.8.5 中的压力分布亦可看出。脱体后涡旋的存在使圆柱表面的压力分布和理想流体情形大不相同，从图上可以看出尾涡区的压力偏小，那里有显著的吸力，从而使物体遭受到尾涡阻力。

尾涡阻力。

刚才我们用动量观点阐述了脱体现象的成因。同样地，脱体

现象也可以从能量观点来理解。由于边界层内摩擦力很大，流体质点在从 D 流至 E 的路途中损耗了这样多的动能，以至余下的动能不足以克服从 E 到 F 的逆压作用，在物面滞止作用和逆压的综合作用下，最后终于在某点 S 上滞止下来，速度趋于零，于是产生了脱体现象。

一般说来，边界层方程只适用于脱体点以前。在脱体点的下游，由于边界层厚度大幅度地增加， u, v 的量阶关系发生了根本的变化。因此推导边界层方程的基本假定不再适用，边界层理论失效，此时应从完整的纳维-斯托克斯方程或其他途径出发考虑问题。因此，在研究脱体点以前的边界层流动时，不能采用理想流体位势绕流问题的压力分布。因为当边界层分离时，它向外排挤位势流动，从而大大地改变了物面上的压力分布，这一点可以从圆柱绕流问题的压力分布图中看出。此时必须考虑边界层对外流的影响。在实际解边界层问题中，则常常利用实验测出的物面上的压力分布。

上面我们解释了为什么非流线型物体会产生边界层脱体现象。很自然地我们会接着问，为什么对于流线型物体（如翼剖面）常常不产生脱体现象

呢？这里不是一样有逆压区吗？为了回答这个问题，让我们比较一下，理想流体绕圆柱和翼剖面的压力分布图（图9.8.5及图9.8.6）。从两个图很明显地看出，圆柱和翼剖面的确都有逆压区，但是圆柱上的

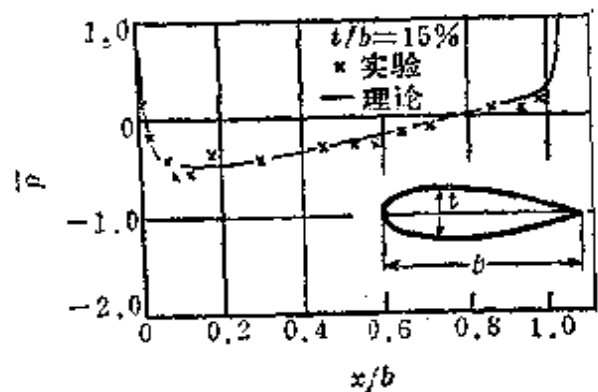
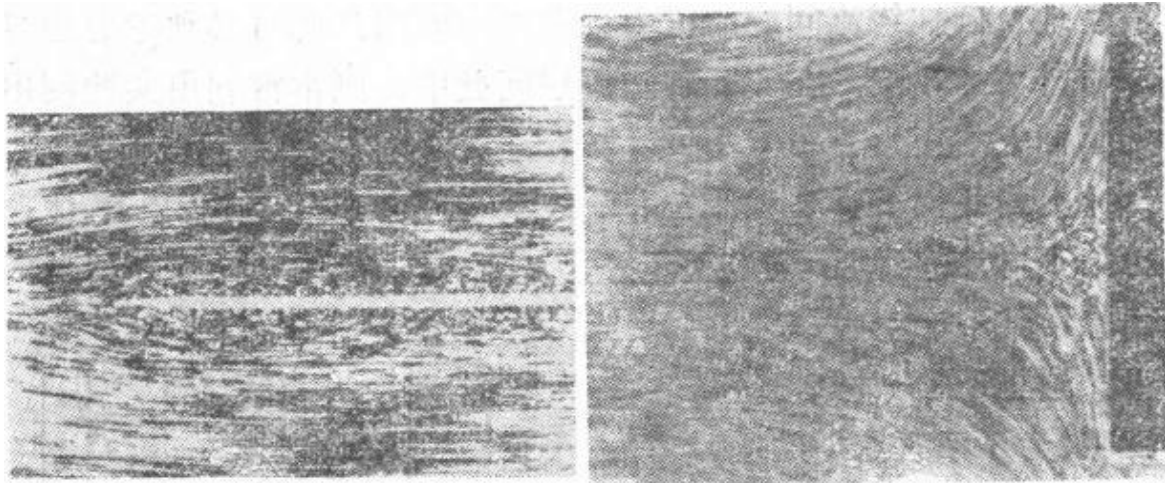


图 9 8.6

的逆压梯度较翼剖面强烈，因此当流体质点在翼剖面边界层内的逆压区中运动时，它受到较小的反推力。惯性力或剩余的动能能够克服逆压及粘性滞止的联合作用流至后缘点不至在中途停步不

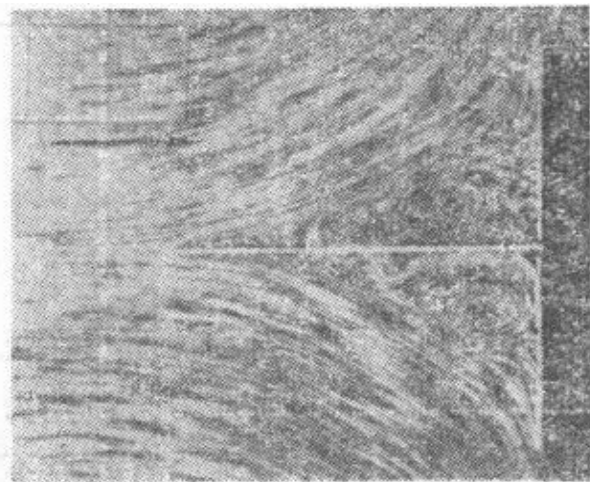
前。有时当翼剖面后部形状较弯或冲角稍大时也可能在物面上脱体，但一般都在后缘附近，因此尾涡区不大，尾涡阻力很小。由此可见，流线型物体(包括翼剖面)在正常情况下尾涡阻力都很小，阻力主要取决于摩阻。因此当流线型物体在流体中运动时，阻力很小。通过上面的讨论可看出，有逆压不一定都有边界层脱体，还要看逆压的大小，逆压愈大，脱体的危险愈大。如果逆压比较小，也可以不产生或延迟脱体的产生。但是如果逆压很大，那么一般说来一定产生分离现象。例如在大于 π 角的绕流中尖角处的逆压无穷大，流动立即在那里分离。在航空、船舶等运输工程中，为了减少阻力常常采用流线型物体：物体的头部曲率较大，很快地流动的速度达到最大值。在速度最大点后，剖面形状变化得很缓慢，使逆压梯度取较小的值。



(1)

(2)

(3)



综合上面所讲的，我们可以确信，边界层脱体是逆压和壁面附近粘性摩擦综合作用的结果，这两个重要因素缺一不可。光有壁面的粘性滞止没有逆压，流体不会倒流分离，因为没有反推力，流体不会往回跑。由此可见，顺压区一定不会产生脱体现象，要产生脱体一定在逆压区。其次，在平板无冲角绕流问题中，因没有压力梯度 $dp/dx=0$ ，所以也一定不会产生边界层脱体。另一方面，如果只有逆压，而没有壁面附近的粘性滞止作用，那么也不会产生脱体，例如在理想流体绕翼剖面流动的逆压区域，粘性流体绕圆柱绕流问题中零流线 OD 上（图9.8.3），情况就是如此，那里都存在逆压，但没有壁面滞止作用，因此就不产生分离现象。为了更清楚地说明这个问题，我们再引三张照片（见上页），照片（1）与（2）是平板绕流和流体垂直地冲击到墙面的照片。平板绕流用来代表只有壁面影响没有逆压的情形，而垂直绕流的对称轴线则代表只有逆压没有壁面影响的情形。从照片上明显地看出这两种情形都没有脱体。现在如果我们在墙面垂直绕流问题的对称轴线上放置一平板，如照片（3）所示那样，那么立刻在平板和墙面的夹角处产生尾涡，边界层从板面分离，因为那里既有逆压亦有壁面滞止作用。应该强调指出，有了逆压和壁面滞止作用这两要素并不一定产生分离，还要看逆压大小，逆压小可以不产生分离。因此逆压和壁面存在乃是脱体的必要条件而非充分条件。

最后来探讨一下数学上确定脱体点位置的条件以及顺压区和逆压区中速度剖面的性质。在脱体点前，流体质点都是向前流的，

因此在物面上显然有 $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} > 0$ ；在脱体点后，发生了倒流现象。

流体质点向后流，于是在物面上有 $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} < 0$ 。由此推出，在脱体点上必须有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \quad (9.8.16)$$

这就是确定边界层脱体点位置的方程（参看图 9.8.7），解出边界层方程后，可按(9.8.16)式确定脱体点的位置。在边界层理论建立以前，只有当流体流过尖缘时，才能肯定流动脱体，现在有了边界层理论，对于没有尖缘的物面也可计算脱体产生的位置。

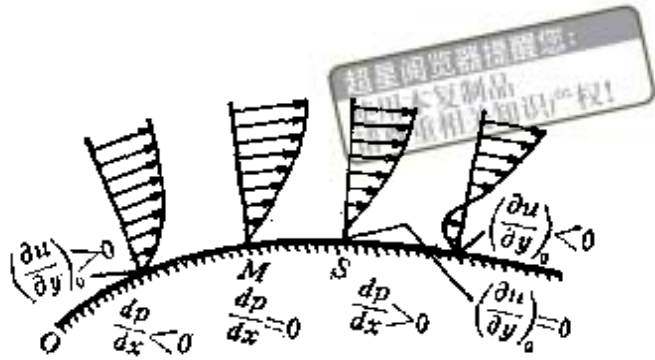


图 9.8.7

现在研究边界层内速度剖面的形状。从边界层方程(9.8.14)推出，在物面 $y=0$ 上有

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \frac{dp}{dx} \quad (9.8.17)$$

这里已经考虑到 $y=0$ 上 $u=v=0$ 的事实。(9.8.17)式表明，在物面附近速度剖面的曲率只依赖于压力梯度。随着压力梯度的变号，速度剖面的曲率亦将改变它的符号。在顺压区 $\frac{dp}{dx} < 0$ ，此时

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} < 0$$

另一方面当流体质点趋于边界层边界时， $\partial u / \partial y$ 不断减少并趋于零，因为在外边界上没有摩擦阻力。因此当 $y \rightarrow \delta$ 时

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$$

由此推出，在加速区即顺压区， $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 永远是负的，边界层内速度

剖面是一条没有拐点的光滑曲线。与此相反，在逆压区 $\frac{dp}{dx} > 0$ ，

此时在物面上

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0} > 0$$

同时根据刚才的考虑，当 $y \rightarrow \delta$ 时

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$$

于是在 $0 < y < \delta$ 的某点上 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 将等于零。由此可见，在减速区或逆压区，边界层内的速度剖面永远有一拐点（图 9.8.8），拐点的

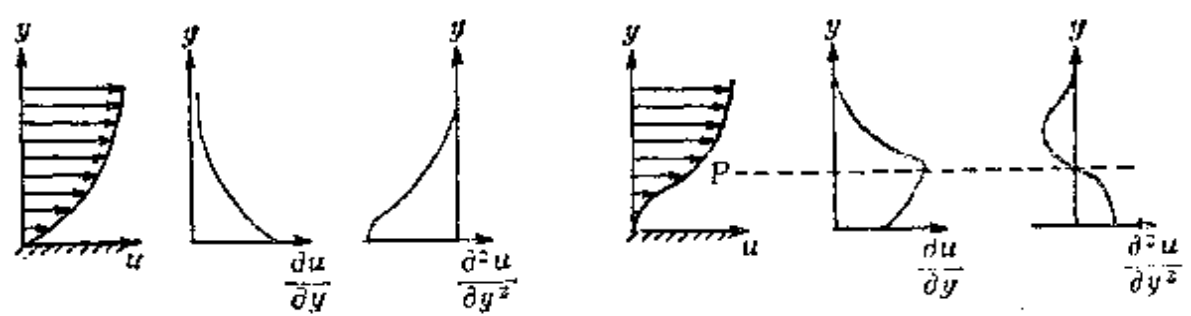


图 9.8.8

存在对于层流的稳定性有着重要的作用。现考虑逆压区拐点的变化，易见，在 $dp/dx=0$ 的最大速度点上，速度剖面的拐点位于物面上，随着物面向下游移动，拐点向边界层外部边界上挪动。最后顺便指出下列事实，因为在脱体点上有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$$

所以分离点上的速度剖面必有拐点。由此推出，分离只可能在逆压区发生。这个结论和上面直观考虑得出的结论完全一致。

有了速度剖面的形状后，就可更细致地来分析脱体产生的原因。在边界层内的顺压区取一如图 9.8.9 所示的微元，考虑 x 方

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

向的作用力. 作用在 AB, CD 上的压力是 $p dy$ 及 $(p + \frac{dp}{dx} dx) dy$,

合起来将有指向正 x 方向

的顺压梯度 $-\frac{dp}{dx} dx dy$

作用在微元上. 其次, AC 上方的流体力图拉着微元向前跑, 它由摩擦力

$(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy) dx$ 体现出

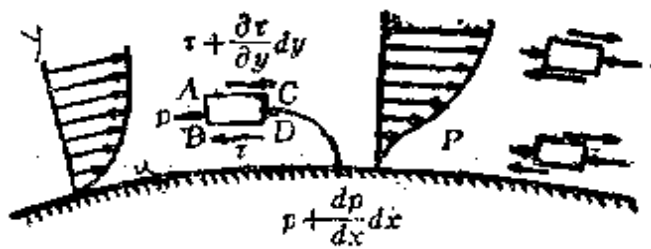


图 9.8.9

来. 而 BD 下方的流体则死劲拖住微元不肯放, 这种拖后腿的力量由摩擦力 τdx 代表. 因为在顺压区, 愈靠物面 τ 愈大, 所以拖的力量将比拉的力量大. 抵消的结果, 将有阻止运动的反推力

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} dx dy = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx dy$$

作用在微元上. 于是最终作用在微元上的力是 (沿正 x 方向)

$$\left(-\frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx dy$$

在同一 x 的整个截面上 $\frac{dp}{dx}$ 取同一值, 而 $-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 则由物面的极大值

单调地向外缘递减 (见图 9.8.8). 在物面上, $\frac{dp}{dx}$ 刚好等于 $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$,

于是流体质点粘附在它上面不动. 离物面愈远, $-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 愈小, 也

就有愈来愈多的力推着微元向前运动. 由此可见, 流体质点除物面那点外, 都将由通过驻点的零流线开始加速地向前运动,

到 $\frac{dp}{dx}=0$ 的 E 点则达极大值。只是这个极大值，愈靠近外缘愈大，且分布不均匀。在边界层的逆压区，要分两种情形考虑。在拐点上方，作用在微元上的力还是

$$\left(-\frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx dy$$

但此时压力梯度及粘性力都阻止流体向前运动。在拐点下方，由于拉的力量大于拖的力量，即 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0$ ，于是粘性的作用将有利于微元向前运动，它将抵消一部分逆压的作用。总之，不管拐点上方或下方，流体质点都将顶着反推力向前运动，因此流体质点的速度是渐减的。此外，因流体在物面附近受壁面的滞止作用，动量较小，因此虽然受到的反推力较拐点上部为小，但还是靠近物面的质点率先停滞下来，而后 $\frac{\partial u}{\partial y}=0$ 的点才往物面上方移动。这就是说，脱体首先在物面上发生。最后强调指出，脱体点并不是指物面上速度为零的那一点，因为在物面上流体质点的速度都是等于零的。而是指贴近物面速度等于零那一点，换句话说，也就是 $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}=0$ 的点。

d) 边界层方程的一般性质

普朗特边界层方程和纳维-斯托克斯方程相比，有了重大的简化。原来有三个未知函数 u, v, p 及三个方程，现在只有两个未知函数 u, v 及两个方程（连续性方程和沿 x 方向的动量方程），此外粘性项也少了一些，这些都是简化的地方。但是另一方面也应该看到，边界层方程依旧是一个二阶的非线性偏微分方程组，方程的非线性的性质仍然保留，这就使得数学上求它的解还是相当困难的，当然比起纳维-斯托克斯方程来说已经好多了。由于

各国科学家们几十年来的努力，目前解边界层方程的方法已经相当丰富，数量很多，这里只介绍一些最基本的也是最重要的方法，那就是求相似性准确解的方法及积分关系式的近似方法，在 9.9 及 9.10 中将分别介绍它们。

在具体地解问题之前，先考察一下边界层方程的某些一般性质。首先应该指出，把纳维-斯托克斯方程简化为普朗特方程，方程的类型发生了根本的变化。大家知道纳维-斯托克斯方程是椭圆型的，而普朗特方程则是抛物型的。从椭圆到抛物，解的性质也随之发生深刻的变化，这样的变化不能不人为地使边界层方程的解具有某些数学上的奇异性质，而且也不能期望用边界层理论求出的结果永远和实际情况符合。现在我们来介绍一下边界层内的流动和雷诺数的关系。写出二维定常情形的边界层方程及其边界条件：

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (9.8.18)$$

$$\begin{cases} y=0 \text{ 时} & u=v=0 \\ y \rightarrow \infty \text{ 时} & u=U(x) \end{cases} \quad (9.8.19)$$

引进下列无量纲量：

$$x = Lx', \quad y = \frac{L}{\sqrt{\text{Re}}} y', \quad u = Vu', \quad v = \frac{V}{\sqrt{\text{Re}}} v'$$

$$U = VU', \quad \text{Re} = \frac{VL}{\nu}$$

代入 (9.8.18) 式及 (9.8.19) 式，得无量纲形式的方程组及边界条件：

$$\begin{cases} u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = U' \frac{dU'}{dx'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \\ \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \end{cases} \quad (9.8.20)$$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

$$\begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \\ \begin{cases} y' = 0 \text{ 时} & u' = v' = 0 \\ y' \rightarrow \infty \text{ 时} & u = U'(x') \end{cases} \end{cases} \quad (9.8.21)$$

我们看到，无量纲形式的方程组及边界条件(9.8.20),(9.8.21)不包含雷诺数，这就表明，无量纲形式的解 u', v' 将只依赖于 x', y' ，而和雷诺数 Re 无关。当雷诺数变化时，边界层内的整个流动图案只遭受到相似性变换，此时，纵向距离 x ，纵向速度 u 不变；而横向距离 y 和横向速度 v 则和 \sqrt{Re} 成反比， \sqrt{Re} 愈大， y 和 v 愈小，如果绕体问题中有脱体点存在，则显然，脱体点的位置 x_s 在层流的范围内将和雷诺数无关，即不管 Re 取什么数，脱体点的位置总在 x_s 处。其次，自 x_s 发出的自由流线的坡度角当雷诺数增加时，将以 $1/\sqrt{Re}$ 的比例缩小。

9.9 半无穷长平板的层流边界层

本节考虑边界层方程的相似性解。何谓相似性解，研究相似性解有那些好处，什么情况下解是相似性的？这些都是我们关心的重要问题，有必要逐个予以解答。如果不同 x 截面上的速度剖面 $u(x, y)$ 只差速度 u 和坐标 y 的尺度因子，则称边界层的解是相似的。更具体地说，如果以位势流动的速度分布 $U(x)$ 为速度 u 的尺度因子，边界层厚度 $\delta(x)$ 为坐标 y 的尺度因子，则在无量纲坐标 $y/\delta(x)$ 上表出的无量纲速度剖面 $u/U(x)$ 对于不同 x 将完全相同，用式子写出来也就是

$$\frac{u\left[x_1, \frac{y}{\delta(x_1)}\right]}{U(x_1)} = \frac{u\left[x_2, \frac{y}{\delta(x_2)}\right]}{U(x_2)} \quad (9.9.1)$$

其中 x_1, x_2 是任取的两个坐标。(9.9.1) 式表明，相似性解只依赖一个组合变数 $y/\delta(x)$ 。如果以 y/δ 为自变数，则原来的偏微

分方程将化为常微分方程。在微分方程理论中处理常微分方程是比较有办法的，总可以采用数值方法或其他分析方法求出它的准确解来。由此可见，边界层方程的解具有相似性能使数学问题得到相当的简化。

什么样的物体形状或外流速度分布具有相似性解呢？根据上节对于顺压区内和逆压区内速度分布的分析不难看出，如果你所研究的物体形状既有加速顺压区也有减速逆压区，那么解一定不可能相似。因为逆压区的速度分布曲线和顺压区的速度分布曲线性质迥异，本来就不相似，不可能通过调整比例尺度使其重合。由此可见，相似性解只有在单一的加速型或减速型的速度分布时才能存在（等速常压情形是其特例）。可以证明，当外流的速度分布具有幂次形式 $U = cx^m$ 或指数形式 $U = ce^{mx}$ 的时候，边界层方程的解一定相似。证明的细节限于基础课的性质不打算在这里叙述。下面只研究半无穷长平板的层流边界层（相当于幂次形式中 $m=0$ 的情形）。以此为例具体地来理解相似性解的问题。平板边界层的解首由德国科学家布拉休斯(Blasius)进行研究，1908年他在哥廷根(Goettingen)的博士论文中详细地讨论了这个问题。在历史上它是第一个应用普朗特边界层理论的具体例子。

有一个既薄又长的平板在辽阔的天空中以等速 U 沿板面方向运动。这个问题可抽象为：无限空间中一均匀气流以速度 U 沿板面方向定常地向一半无穷长且厚度为零的平板流来。显然，在物面上产生了一层薄边界层。这一薄层内的流体运动就是现在我们所要研究的对象。取直角坐标系，原点与平板前缘重合， x 轴沿来流方向， y 轴垂直平板（见图

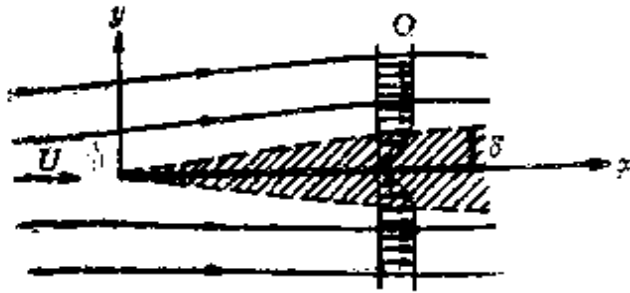


图 9.9.1

面方向定常地向一半无穷长且厚度为零的平板流来。显然，在物面上产生了一层薄边界层。这一薄层内的流体运动就是现在我们所要研究的对象。取直角坐标系，原点与平板前缘重合， x 轴沿来流方向， y 轴垂直平板（见图

超星阅读器提醒您：
使用本产品
请遵守本产品的知识产权！

9.9.1). 因平板没有厚度, 当理想流体沿平板方向流过平板时, 平板对流动没有扰动, 因此外流的速度场是均匀的且等于常数 U . 根据伯努利定理, 压力也均匀

$$p = \text{常数}, \quad \frac{dp}{dx} = 0$$

这样, 我们考虑的将是最简单的等速常压情形. 在这种情形下, 普朗特边界层方程采取下列形式:

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (9.9.2)$$

边界条件是:

$$\begin{cases} y = 0, x \geq 0 \text{ 时} & u = v = 0 \\ y = \infty \text{ 时} & u = U \end{cases} \quad (9.9.3)$$

根据方程组(9.9.2)中的连续性方程, 可引进流函数 $\psi(x, y)$, 使

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

此时连续性方程自动满足. 此外, (9.9.2)中的动量方程变成

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (9.9.4)$$

边界条件(9.9.3)写成:

$$\begin{cases} y = 0, x \geq 0 \text{ 时} & \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \\ y = \infty \text{ 时} & \frac{\partial \psi}{\partial y} = U \end{cases} \quad (9.9.5)$$

引进流函数, 可以用一个函数 ψ 代替两个速度分量函数 u 及 v , 使两个偏微分方程(9.9.2)缩减为一个(9.9.4). 就因为以 ψ 为未知函数有这样的优点, 下面我们从(9.9.4)及(9.9.5)式出发解问题.



将方程(9.9.4)及边界条件(9.9.5)无量纲化。为此, 令

$$\begin{cases} x = Lx', & y = \frac{L}{\sqrt{\text{Re}}} y', & u = Uu' \\ v = \frac{U}{\sqrt{\text{Re}}} v', & \psi = \sqrt{\nu UL} \psi' \text{①} \end{cases} \quad (9.9.6)$$

则得

$$\frac{\partial \psi'}{\partial y'} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x' \partial y'} - \frac{\partial \psi'}{\partial x'} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y'^2} = \frac{\partial^3 \psi'}{\partial y'^3} \quad (9.9.7)$$

$$\begin{cases} y' = 0, & x' \geq 0 \text{ 时 } \psi' = \frac{\partial \psi'}{\partial y'} = 0 \\ y' = \infty \text{ 时 } & \frac{\partial \psi'}{\partial y'} = 1 \end{cases} \quad (9.9.8)$$

方程(9.9.7)及边界条件(9.9.8)中不出现任何参数, 因此无量纲流函数只依赖于无量纲坐标 x' 和 y'

$$\psi' = \psi'(x', y')$$

把它转换到有量纲形式中去则有

$$\psi = \sqrt{\nu UL} \psi' \left(\frac{x}{L}, y \sqrt{\frac{U}{\nu L}} \right)$$

和有限长平板不一样, 半无穷长平板没有特征长度, 因此在最后的解中不应该出现特征长度 L , 这就要求自变量以下列组合

$$\eta = \frac{y'}{\sqrt{x'}} = \frac{y \sqrt{\frac{U}{\nu L}}}{\sqrt{\frac{x}{L}}} = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$$

① 令 $\psi = \Psi \psi'$, 将(9.9.6)式及上式代入 $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ 得

$$Uu' = \frac{\Psi}{L} \sqrt{\text{Re}} \frac{\partial \psi'}{\partial y'}$$

考虑到 $u' = \frac{\partial \psi'}{\partial y'}$, 于是 $\Psi = \frac{UL}{\sqrt{\text{Re}}} = \sqrt{\nu UL}$.

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

出现，而依赖于 η 的函数则以乘积

$$\frac{\psi'}{\sqrt{x'}} = \frac{\psi}{\sqrt{\nu UL}} \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{L}}} = \frac{\psi}{\sqrt{\nu Ux}}$$

的形式出现。这样，无量纲流函数 ψ 的结构应为

$$\begin{aligned} \psi' &= \sqrt{x'} f\left(\frac{y'}{\sqrt{x'}}\right) \\ \psi &= \sqrt{\nu Ux} f\left(y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}\right) \end{aligned} \quad (9.9.9)$$

(9.9.9)式亦可写成

$$\psi = \sqrt{\nu Ux} f(\eta) \quad (9.9.10)$$

其中

$$\eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \quad (9.9.11)$$

流函数采取 (9.9.9) 式的形式，表明边界层的解是相似的。为了使这件事明朗化，对 ψ 微分 y ，于是

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \sqrt{\nu Ux} \sqrt{\frac{U}{\nu x}} f' = U f'(\eta)$$

即

$$\frac{u}{U} = f'(\eta)$$

其次，根据上一节的分析

$$\delta(x) \sim \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

于是

$$\frac{y}{\delta(x)} \sim y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$$

这样

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

$$\frac{u}{U} = F\left(\frac{y}{\delta(x)}\right)$$

可见，无量纲速度 u/U 只依赖于 y/δ 。根据定义(9.9.1)式边界层的解是相似的。这样 $\psi(x, y)$ 满足的偏微分方程(9.9.4)应该可以化成 $f(\eta)$ 满足的常微分方程。这个常微分方程应从(9.9.4)式及(9.9.10)式推出。计算 ψ 的各级导数

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} &= U f'(\eta), \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = U \sqrt{\frac{U}{\nu x}} f''(\eta) \\ \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} &= \frac{U^2}{\nu x} f'''(\eta) \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} f(\eta) - \sqrt{\nu U x} \frac{1}{2} y \sqrt{\frac{U}{\nu x^3}} f'(\eta) \quad (9.9.12) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} (f(\eta) - \eta f'(\eta)) \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= U f''(\eta) \left[-\frac{1}{2} y \sqrt{\frac{U}{\nu x^3}} \right] = -\frac{1}{2} \frac{U}{x} \eta f''(\eta) \end{aligned} \right.$$

代入方程(9.9.4)及边界条件(9.9.5)中得

$$2f''' + ff'' = 0 \quad (9.9.13)$$

边界条件为

$$\begin{cases} \eta = 0 \text{ 时} & f = f' = 0 \\ \eta = \infty \text{ 时} & f' = 1 \end{cases} \quad (9.9.14)$$

$f(\eta)$ 所满足的方程(9.9.13)是一个非线性的三阶常微分方程，形式虽然十分简单，但却无法找出封闭形式的分析解来。布拉休斯当年采用了级数衔接法近似地求出了(9.9.13)的解。而后托柏弗(Töpfer)，哥斯丁(Goldstein)，豪华斯(Howarth)，哈脱利(Hartree)等人分别用数值方法精确度不同地求出了(9.9.13)式的解。现在我们分别介绍一下这两种方法。

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

a) 级数衔接法

布拉休斯将解在 $\eta=0$ 附近展成级数形式，并找出它在 $\eta=\infty$ 附近的渐近展式，然后将两个解衔接起来。将 $f(\eta)$ 在 $\eta=0$ 附近展成泰勒级数

$$f(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \eta^n \quad (9.9.15)$$

现用归纳法证明

$$\begin{cases} f^{(3k)}(0) = 0 \\ f^{(3k+1)}(0) = 0 \\ f^{(3k+2)}(0) = \left(-\frac{1}{2}\right)^k C_k \alpha^{k+1} \end{cases} \quad (9.9.16)$$

其中

$$\alpha = f''(0), \quad C_k = \sum_{r=0}^{k-1} \binom{3k-1}{3r} C_{k-r-1} C_r \quad (9.9.17)$$

当 $k=0$ 时，从(9.9.14)式看出(9.9.16)式成立

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = \alpha$$

且 $C_0 = 1$ 。设 $n \leq k-1$ 时(9.9.16)式成立，现证 $n=k$ 时也对。对(9.9.13)式分别微分 $3k-3, 3k-2, 3k-1$ 次，并根据莱布尼兹公式我们有

$$\begin{aligned} f^{(3k)}(0) = & -\frac{1}{2} \left[f^{(3k-3)}(0) f''(0) \right. \\ & \left. + \binom{3k-3}{1} f^{(3k-4)}(0) f'''(0) + \dots + f(0) f^{(3k-1)}(0) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(3k+1)}(0) = & -\frac{1}{2} \left[f^{(3k-2)}(0) f''(0) \right. \\ & \left. + \binom{3k-2}{1} f^{(3k-3)}(0) f'''(0) + \dots + f(0) f^{(3k)}(0) \right] \end{aligned}$$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

$$f^{(3k+2)}(0) = -\frac{1}{2} \left[f^{(3k-1)}(0) f'''(0) + \binom{3k-1}{1} f^{(3k-2)}(0) f''''(0) + \dots + f(0) f^{(3k+1)}(0) \right]$$

因为，当 $n \leq k-1$ 时(9.9.16)式成立，故

$$f^{(3k)}(0) = 0, f^{(3k+1)}(0) = 0$$

而

$$\begin{aligned} f^{(3k+2)}(0) &= -\frac{1}{2} \sum_{r=0}^{k-1} \binom{3k-1}{3r} f^{(3k-1-3r)}(0) f^{(3r+2)}(0) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{r=0}^{k-1} \binom{3k-1}{3r} \left(\frac{-1}{2}\right)^{k-r-1} C_{k-r-1} \alpha^{k-r} \left(\frac{-1}{2}\right)^r C_r \alpha^{r+1} \\ &= \left(\frac{-1}{2}\right)^k \alpha^{k+1} \sum_{r=0}^{k-1} \binom{3k-1}{3r} C_{k-r-1} C_r \end{aligned}$$

由此推出

$$f^{(3k+2)}(0) = -\left(\frac{1}{2}\right)^k C_k \alpha^{k+1}$$

且

$$C_k = \sum_{r=0}^{k-1} \binom{3k-1}{3r} C_{k-r-1} C_r$$

将(9.9.16)式代入(9.9.15)式， $f(\eta)$ 可表成

$$f(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^k \frac{C_k \alpha^{k+1}}{(3k+2)!} \eta^{3k+2} \quad (9.9.18)$$

系数 $C_k (k \geq 1)$ 可以由 $C_0 = 1$ 出发根据(9.9.17)式逐次地求得，它们是

$$\begin{aligned} C_0 &= 1, C_1 = 1, C_2 = 11, C_3 = 375 \\ C_4 &= 27897, C_5 = 3817137, \dots \end{aligned}$$

(9.9.18) 式中的系数 $\alpha = f''(0)$ 暂时还未确定，它应由 $\eta = \infty$ 时

$f' = 1$ 的条件定出。实际计算表明，级数(9.9.18)在 $\eta < 2$ 时收敛得很快，比较适用，但当 $\eta > 2$ 时收敛得较慢，用它作计算不太准确。若 η 大于收敛半径，则级数(9.9.18)根本不能使用。现在我们研究一下函数 $f(\eta)$ 在大 η 时的渐近展式。设大 η 时 f 的渐近展式可表成

$$f = f_1 + f_2 + \dots \quad (9.9.19)$$

其中 f_1 是主要项， $f_2 \ll f_1$ ，取均匀直线位势流动的解 $f'_1 = u/U = 1$ 为一级近似，于是

$$f_1 = \eta - \beta \quad (9.9.20)$$

其中 β 待定。现求二级近似，将 $f = \eta - \beta + f_2$ 代入方程(9.9.13)，并忽略二级以上微量，得

$$2f_2'' + f_1 f_2' = 0$$

积分一次得

$$\ln f_2' = -\frac{1}{4}(\eta - \beta)^2 + \ln \gamma$$

$$f_2' = \gamma e^{-(\eta - \beta)^2/4}$$

其中 γ 为待定的积分常数。为了保证 $f'(\infty) = 1$ ，要求 $f_2'(\infty) = 0$ 。此外令 $f_2(\infty) = 0$ ，考虑到这一些，我们将 f_2 积分两次得

$$f_2 = \gamma \int_{-\infty}^{\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\eta} e^{-(\eta - \beta)^2/4}$$

于是二级近似的渐近展式为

$$f = \eta - \beta + \gamma \int_{-\infty}^{\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\eta} e^{-(\eta - \beta)^2/4} \quad (9.9.21)$$

f_2 的性质基本上和 $e^{-\eta^2}$ 一样，当 $\eta \rightarrow \infty$ 时，它很快地趋于零。因此 f' 亦将以 $e^{-\eta^2}$ 的速率趋于极限值 1。

为了得到在整个区域内成立的 $f(\eta)$ ，必须将级数(9.9.18)和渐近展式(9.9.21)联接起来。(9.9.18)式只满足两个边界条件，故有一个常数 α 未定，而(9.9.21)式只满足一个边界条件，有两个常数 β, γ 未定。这三个常数应在衔接过程确定出来。可以有

种衔接方法:

1) 选出两个解都合用的某点 $\eta = \eta_1$, 在此点上令两者的 f, f' 及 f'' 相等, 由此定出 α, β, γ . 根据这种办法, 布拉休斯计算出来的结果为

$$\alpha = 0.332, \beta = 1.73, \gamma = 0.231$$

2) 选出两个解都适用的三点, 在这三点上令两者的 f 相等, 由此定出 α, β, γ .

b) 数值积分法

级数衔接法比较粗糙, 为了更精确地求出方程 (9.9.13) 的解, 我们采用数值积分方法. 应该注意到, (9.9.13) 及 (9.9.14) 式是边值问题. 两个边界条件给在 $\eta = 0$ 上, 另一边界条件则给在 $\eta = \infty$ 上. 大家知道, 进行数值积分必须从一头开始, 为此应该在 $\eta = 0$ 上给出三个初值. $f = f' = 0$ 是给定的, 此外还要知道 $f'' = \alpha$ 的值, 但是 α 在问题未解出前并不知道, 这就使数值积分无从开始. 为了解决这个困难, 我们先求方程 $2F''' + FF'' = 0$ 满足边界条件 $F = F' = 0, F'' = 1$ 的解 (相当于 $\alpha = 1$ 的情形). 然后设法建立函数 f 和 F 的关系, 并由此定出 α . 有了 α 后就可以毫无困难地对方程 (9.9.13) 进行数值计算. 从方程 (9.9.13) 及 (9.9.14) 的结构可确信^①

$$f = \alpha^{1/3} F(\alpha^{1/3} \eta) \quad (9.9.22)$$

微分 (9.9.21) 得

$$f' = \alpha^{2/3} F'(\alpha^{1/3} \eta)$$

^① 设 F 满足 $2F''' + FF'' = 0$ 及 $F(0) = F'(0) = 0, F''(0) = 1$, 则由 (9.9.22) 得

$$f''' = \alpha^{4/3} F''', \quad ff'' = \alpha^{4/3} FF''$$

于是

$$2f''' + ff'' = \alpha^{4/3} (F''' + FF'') = 0$$

其次, 由 $F(0) = F'(0) = 0$ 及 $F''(0) = 1$ 得

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'' = \alpha$$

这样我们看到, 由 (9.9.22) 式确定的 $f(\eta)$ 的确满足方程 (9.9.13) 及边界条件 (9.9.14), 因此是它的解. 也就是说, 函数 $f(\eta)$ 和 $F(\eta)$ 以 (9.9.22) 式联系起来.

取极限

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} f' = \alpha^{2/3} \lim_{\eta \rightarrow \infty} F'(\alpha^{1/3}\eta) = \alpha^{2/3} \lim_{\eta \rightarrow \infty} F'(\eta) = 1$$

于是

$$\alpha = \left[\frac{1}{\lim_{\eta \rightarrow \infty} F'(\eta)} \right]^{3/2}$$

当我们用数值方法求出 $F(\eta)$ 后，自然地也求出了 $\lim_{\eta \rightarrow \infty} F'(\eta)$ 及 α 。

在实际计算中不能一直算到 $\eta = \infty$ ，只能算到 F' 已变化很慢的数值，近似地取此数值为 F' 的极限值 $\lim_{\eta \rightarrow \infty} F'(\eta)$ 。这里我们引出托柏弗的计算结果

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} F'(\eta) = 2.0854, \quad \alpha = 0.33206$$

有了 α ，就可以从 $\eta = 0$ 开始用各种数值方法积分方程 (9.9.13) 求出 f, f', f'' 。下面我们引出豪华斯计算的准确度较高的数值结果。

$\eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$	f	$f' = \frac{u}{U}$	f''	$\eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$	f	f'	f''
0	0	0	0.33206	3.2	1.56911	0.87609	0.13913
0.4	0.02656	0.13277	0.53147	3.6	1.92954	0.92333	0.09809
0.8	0.10611	0.26471	0.52739	4.0	2.30576	0.95552	0.06424
1.2	0.23795	0.39378	0.31659	4.4	2.69238	0.97587	0.03897
1.6	0.42032	0.51676	0.29667	5.0	3.28329	0.99155	0.01591
2.0	0.65003	0.62977	0.26675	6.0	4.27964	0.99898	0.00240
2.4	0.92230	0.72899	0.22809	7.0	5.29926	0.99992	0.00022
2.8	1.23099	0.81152	0.18401	8.0	6.27923	1.00000	0.00001

现在我们根据数值计算结果，分析平板边界层内的主要物理量。

1) 速度剖面

根据数值计算表格，图 9.9.2 绘出了纵向速度分布 $u/U = f'(\eta)$ 。

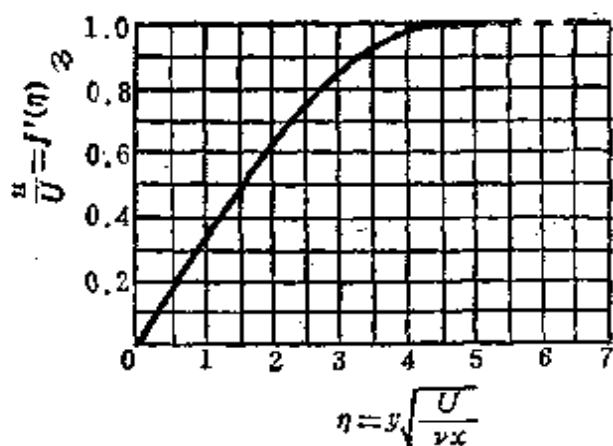


图 9.9.2

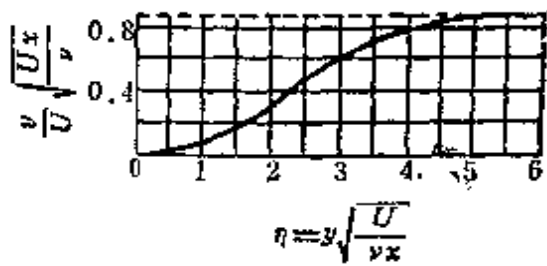


图 9.9.3

这是一条光滑曲线，在板面附近曲率很小，接近于直线，而后较陡地趋近于水平直线 $u/U=1$ 。在板面上，曲线有一拐点，因为在 $y=0$ 处 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 。其次从图上可以看出 $u/U=f'(\eta)$ 的确以指数规律很快地趋于无穷远处的渐近值。实际上当 $\eta=5$ 时它已非常接近于 1 了。

依照(9.9.12)式，横向速度由下式确定

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U}{x}} (\eta f' - f)$$

利用上表计算了 v 在不同 η 的数值，计算结果画在图 9.9.3 上。横向速度从板面上的零值很慢地上升，然后较快地增加，在无穷远处趋于

$$v_{\infty} = 0.865 U \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} \quad (9.9.23)$$

这就表明，在边界层外部边界有一向外流去的流体运动，它是由于板面粘性滞止作用使边界层厚度增长从而把流体从板面附近排挤出去所造成的。应该指出，在边界层外部边界上，横向速度并不等于外流的零值，这恰好反映了边界层对外流的影响。

因为平板边界层没有逆压

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} > 0$$

所以不存在分离现象。

2) 边界层厚度

上面已经说过，我们规定纵向速度分量 u 和外流值 U 相差 1% 的地方为边界层厚度。从数值计算表格看出，对应的 η 约等于 5。于是边界层厚度为

$$\delta \approx 5.0 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

这个结果和上面引出的定性分析结果完全一致。这里只是针对平板情形把比例因子求了出来。

边界层厚度和横坐标 x 的根号成正比，以图 9.9.4 表之则是一抛物线关系。

3) 摩擦阻力

板面上局部摩擦阻力为

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \mu \sqrt{\frac{U^3}{\nu x}} f''(0)$$

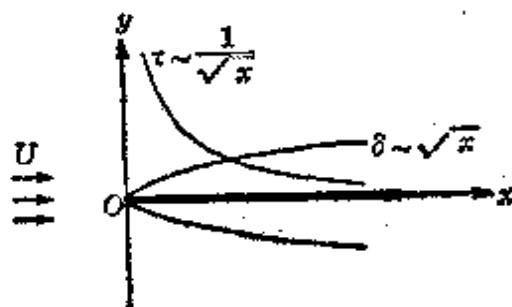


图 9.9.4

根据表格

$$a = f''(0) = 0.332$$

于是

$$\tau = 0.332 \mu U \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \quad (9.9.24)$$

引进局部阻力系数

$$C_x = \frac{\tau}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 0.664 \sqrt{\frac{\nu}{U x}}$$

即

$$C_x = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \quad (9.9.25)$$

其中

$$Re_x = \frac{Ux}{\nu}$$

长为 L , 宽为 b 且两边浸润在流体中的平板, 它所遭受到的总摩擦阻力为

$$\begin{aligned} W &= 2b \int_0^L \tau dx = 2f''(0)b\sqrt{\mu\rho U^3} \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= 1.328b\sqrt{\mu\rho U^3 L} \end{aligned} \quad (9.9.26)$$

于是总的阻力系数为

$$C_f = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho U^2 \cdot 2bL} = \frac{1.328}{\sqrt{Re}} \quad (9.9.27)$$

(9.9.24), (9.9.25)式及(9.9.26), (9.9.27)式表明, 摩擦阻力和 \sqrt{Re} 成反比, 亦即摩擦阻力和来流速度的 $3/2$ 次方成正比。我们知道, 在小 Re 数流动中, 摩阻是和速度的一次方成正比。因此大 Re 数的摩阻较大。其次从(9.9.24)式看出板面摩阻以 $1/\sqrt{x}$ 的规律沿板面衰减。这是因为在平板下游边界层较厚, 板面的剪切力相应地较小, 因此阻力较前缘为小。局部摩阻变化曲线和边界层厚度在一起画在图9.9.4上。

上述结果首先由布拉休斯(Blasius)研究, 所以常称为布拉休斯解。

布拉休斯结果在层流范围内和实验结果符合得很好。下面我们将尼古拉才测出的速度分布, 汉森(Hasen)测出的边界层厚度和李普曼(Liepmann)及达温(Dhawan)测出的局部阻力系数和布拉休斯的理论结果在图9.9.5中进行比较。

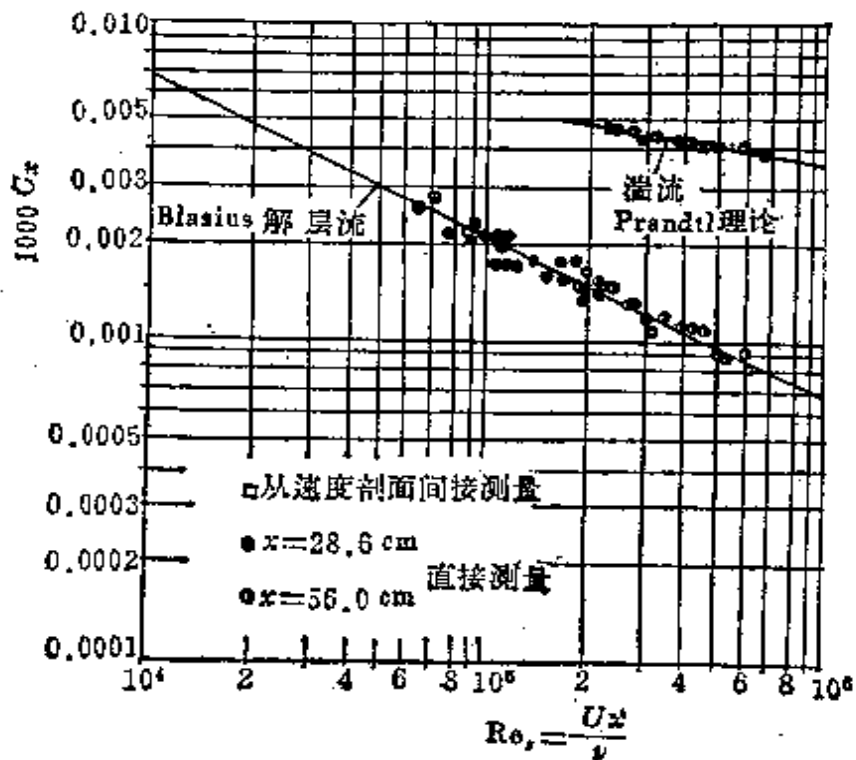
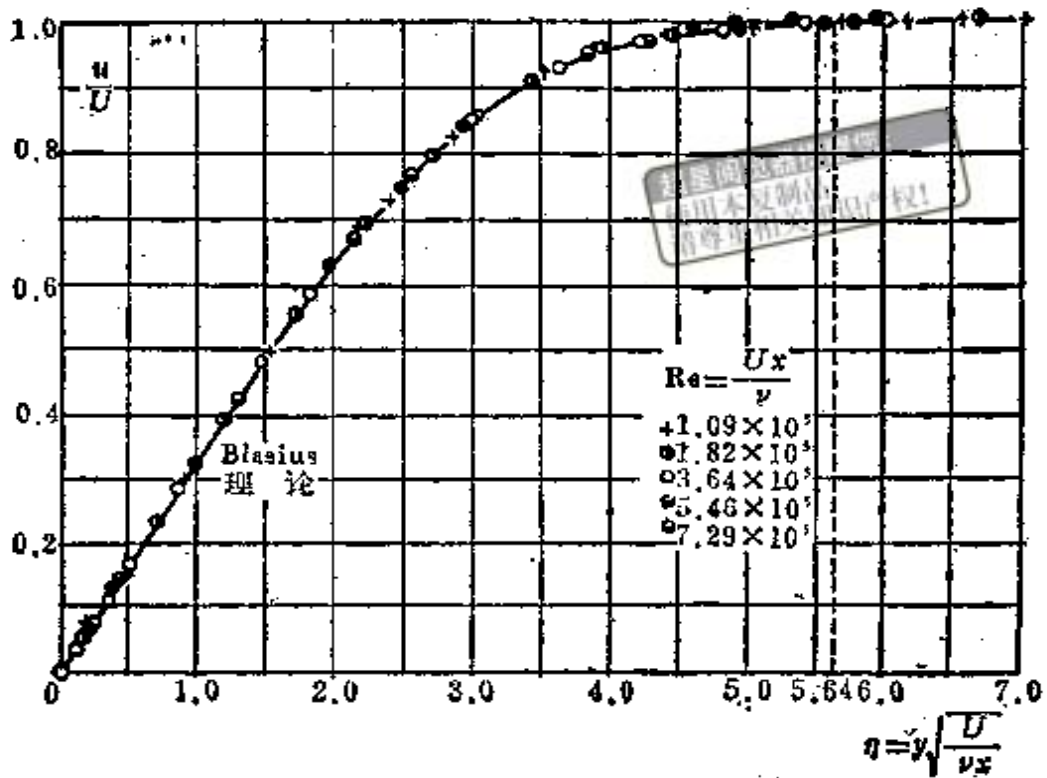


图 9.9.5

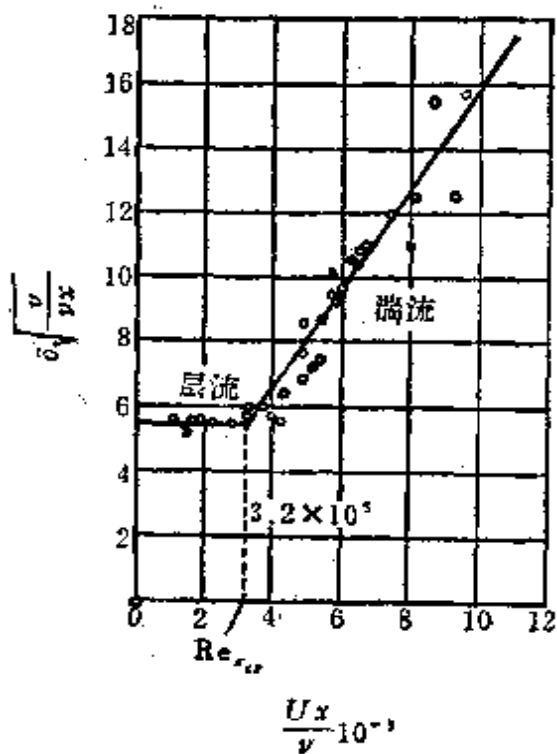


图 9.9.6

尼古拉才测量了几个截面上的速度分布曲线，它们几乎完全落在理论曲线上，这说明平板边界层的速度剖面的确是相似的，而且理论和实验结果符合得很好。

边界层厚度及摩阻的实验结果在层流范围内也和实验结果出色地符合。当 Re 超过临界值时(约为 2×10^5 到 6×10^5)，层流边界层转化为湍流边界层。此时，边界层内空气动力学的规律完全改观，这点从图 9.9.6 上看得很清楚。

最后我们对于布拉休斯解进行一些必要的讨论。

1) 当局部雷诺数 Re_x 较小，等于或小于 100 时，上述边界层理论不再适用。例如在平板的前缘附近，情况就是如此。因为那里 x 很小，根据 x 作出的雷诺数 Re_x 也就不大。为什么在前缘附近，布拉休斯解不能用呢？原来在平板前缘，速度沿板面由前缘点零值很快变到来流的量阶，因此，沿 x 方向的速度变化将和沿 y 方向的速度变化同样重要，对它作边界层近似显然并不合适。勉强用边界层方程求解，就会在解中人为地出现奇性。考察 v 及 τ 的表达式(9.9.23), (9.9.24)，我们就会看到，在平板前缘处 $x=0$ ， v 及 τ 都趋于无穷。这奇性显然不反映实际情况，是我们不正确作近似带来的后果。为了正确处理前缘附近小 Re 数流动，有两条途径：(1) 从纳维-斯托克斯方程出发考虑问题。这条路柯钦(Кочин)做了尝试，但没有做完，比较困难；(2) 对边界层方程作进一步修正，以 $1/\sqrt{Re}$ 为小参数求纳维-斯托克斯方程的高级

近似。因为一级近似边界层方程中有奇性，所以在求高级近似时需要设法处理它们。我国著名力学家郭永怀在1952年出色地用PLK方法(K就是郭永怀)解决了这个问题。他得到了前缘附近和实际情况符合的流动状态，并求出了修正的摩阻系数公式

$$C_f = \frac{1.328}{\sqrt{Re}} + \frac{4.18}{Re}$$

这个公式在大雷诺数情况和布拉休斯解一样，因为修正项 $4.18/Re$ 起的作用很小。但在小雷诺数时， $4.18/Re$ 起愈来愈大的作用，开始和布拉休斯阻力曲线偏离而和实验结果靠拢。从图9.9.7上可见，一直到 $Re=10$ ，它都和实验结果符合得很好。

2) 上面我们处理的是半无穷长平板，实际的平板当然都是有限的。有限平板处理起来相当困难，因为有特征长度，相似性解将不存在，不得不从原始的普朗特方程出发解决问题，这样就比较麻烦了。对于较长的平板我

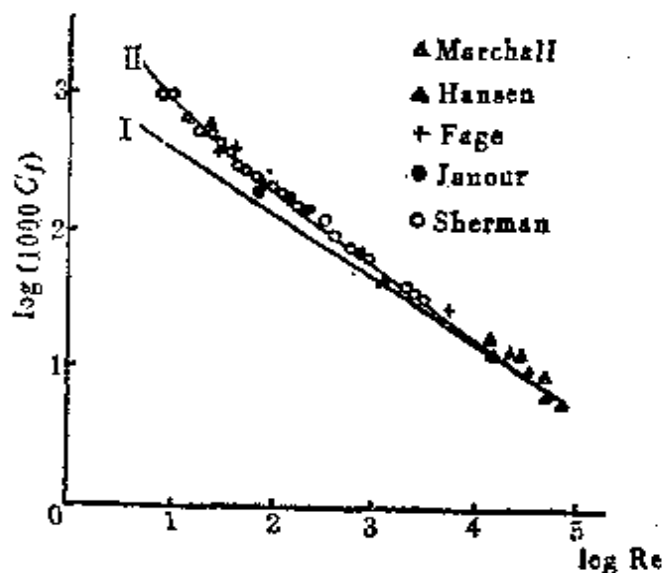


图 9.9.7

们仍然可以近似地利用布拉休斯解求摩擦阻力等结果。后缘端点存在对流场及特征量是有影响的，但是这影响对于摩阻而言是 $O(\delta^2)$ 的量阶，可以忽略。

9.10 动量积分关系式方法

边界层方程虽然比纳维-斯托克斯方程简单，但是仍然是非线性的，只有在少数几种情形例如平板、楔形物体、源流等才能找到

相似性的准确解. 这些流动都比较简单, 比较特殊. 工程中遇到的现实情形大多是任意翼型绕流问题, 而在外流速度分布任意的情况下直接积分普朗特方程一般说来相当困难. 为此人们不得不采用近似方法. 近几十年来各种近似法及其变种象雨后春笋一样发展起来, 要全面介绍它们需要很大的篇幅. 这里我们只向大家介绍一种计算量较小, 工程中广泛采用的动量积分关系式方法. 动量积分关系式方法是卡曼(Karman)在1921年首先提出的, 由波尔豪森(Pohlhausen)具体地加以实现. 它的基本思想如下: 用一个只依赖于 x 的单参数剖面族近似地代替真实剖面 $u(x, y)$, 为了使近似剖面尽可能地接近真实, 我们这样选择它, 使其满足壁面和边界层外部边界上的主要边界条件. 于是, 当 x 取不同数值时, 将得到各个不同截面上的速度剖面, 有的描绘了加速区的情况, 有的反映了减速区有拐点的速度曲线. 用单参数剖面族代替真实剖面在数学上相当于用一个单元函数逼近二元函数. 原来的二元函数满足偏微分方程组, 现在单参数剖面族只须满足一个常微分方程就可以了. 为了确定上述参数和纵向坐标 x 的关系, 卡曼利用了动量积分, 它可以用动量定理求出, 也可以通过沿边界层厚度的方向积分普朗特方程得到. 这样做的意思就是不要求每个流体质点细致地满足边界层方程, 而只要求平均地, 总体地满足沿边界层厚度的动量积分关系. 解出常微分方程后得到参数和 x 的关系, 于是速度剖面也就完全知道, 据此可计算各种感兴趣的物理量. 根据上面所提出的基本思想, 动量积分关系式方法包括如下几个主要步骤: (1) 导出卡曼动量积分, 在这个积分中将出现两个新的量, 即位移厚度及动量损失厚度, 因此在推导前首先需要阐明这两个厚度的物理意义; (2) 研究近似速度剖面族应该满足的边界条件. 把这些准备工作做完之后, 我们采用动量积分关系式方法处理平板边界层问题作为第一步, 通过和布拉休斯准确解的比较, 检验近似方法的准确度. 然后再应用这个方法处理任意物体上的边界层.

a) 位移厚度及动量损失厚度

在动量积分方程中将自然地出现两个长度量纲的物理量，位移厚度

$$\delta^* = \int_0^{\delta^*} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (9.10.1)$$

及动量损失厚度

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta^*} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (9.10.2)$$

δ 相当于有限厚度理论， ∞ 则对应于渐近理论。这两个厚度都有明显的物理意义，分别与流量和动量有着密切的关系。下面分别比较细致地考察它们的物理含意。

1) 位移厚度

理想流体吹过曲面物体(或平板)时流线Ⅱ如图9.10.1所示。如果考虑粘性流体绕曲面(或平板)的流动，则在物体贴近拉起一层薄边界层。在边界层内由于壁面粘性滞止作用，流速减小，为了保证通过流管的流量相等，流线必须向外偏移。此外，由于边界层存在，流线向外偏移排挤了外流，从而对外流发生作用，于是边界层外理想流体的绕流图案已和没有边界层时有所不同，流线亦将向外偏移。只有在无穷远处，因边界层对外流的影响逐渐消失，流线仍处在原来的位置，没有变化。粘性流体情形的流线形状如Ⅱ'所示。现在我们计算边界层边界上流线偏移了多少。显然，理想流体通过流管ⅠⅡ的流量和粘性流体通过流管ⅠⅡ'的流量是相等的。在

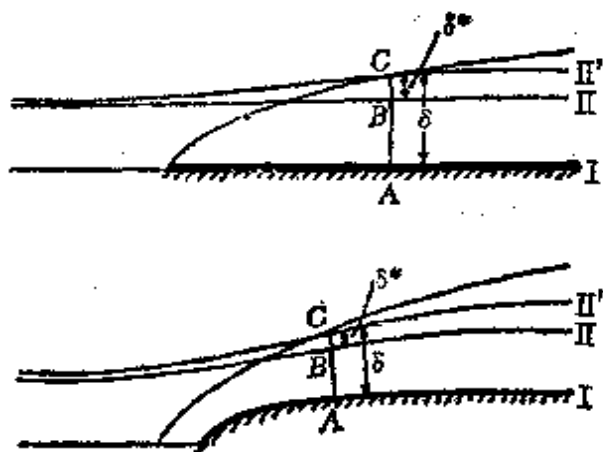


图 9.10.1

外偏移排挤了外流，从而对外流发生作用，于是边界层外理想流体的绕流图案已和没有边界层时有所不同，流线亦将向外偏移。只有在无穷远处，因边界层对外流的影响逐渐消失，流线仍处在原来的位置，没有变化。粘性流体情形的流线形状如Ⅱ'所示。现在我们计算边界层边界上流线偏移了多少。显然，理想流体通过流管ⅠⅡ的流量和粘性流体通过流管ⅠⅡ'的流量是相等的。在

流线 I' 和边界层边界相交的截面上，理想流体通过 AB 的流量为

$$U(\delta - \delta^*) \quad (9.10.3)$$

其中 δ 为边界层厚度， δ^* 为理想流线被排挤出去的距离。因 AB 非常短，理想流动的速度 U 可认为都是常数，取壁面上的值。此外，粘性流体通过 AC 的流量为

$$\int_0^{\delta} u dy \quad (9.10.4)$$

令(9.10.3)式和(9.10.4)式相等得

$$U(\delta - \delta^*) = \int_0^{\delta} u dy \quad (9.10.5)$$

于是

$$U\delta^* = \int_0^{\delta} (U - u) dy \quad (9.10.6)$$

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

如果粘性流体渐近地趋于理想流体，则 $\delta = \infty$ 。于是边界层外部流线的偏移为

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

由此可见，以(9.10.1)式定义的

$$\delta^* = \int_0^{\delta^{\infty}} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

代表理想流体的流线在边界层外部边界上由于粘性作用向外偏排挤厚离。正因为 δ^* 有这样的物理意义，故取名为位移厚度(或移的距离)。

根据(9.10.6)式位移厚度还可以作这样的解释：

$$\int_0^{\delta} (U - u) dy$$

代表由于粘性滞止作用，理想流体中流量的损失，这损失掉的流量若以理想流体的速度 U 向前流动，则需位移厚度的距离 δ^* 才能流尽。上述事实可以用图9.10.2直观地表示出来。速度剖面 OL 下的面积代表积分

$$\int_0^{\delta} (U-u) dy$$

作面积 $ONMP$ 使之和 OLP 相同，则 $ONMP$ 的高就是位移厚度 δ^* 。

2) 动量损失厚度

将(9.10.2)式改写为

$$\rho U^2 \delta^{**} = \int_0^{\delta} \rho u (U-u) dy \quad (9.10.7)$$

首先阐明(9.10.7)式右边积分

$$\int_0^{\delta} \rho u (U-u) dy$$

的物理意义。比较流量相同的流管中由于粘性作用理想流体动量的损失，在流线 II' 和边界层外部边界相交的截面上，理想流体通过流管 $I II$ 的动量为

$$\rho U^2 (\delta - \delta^*)$$

而在同一截面上，粘性流体通过流管 $I II'$ （注意，它在无穷远处与流管 $I II$ 重合，故两个流管的流量相等）的动量则为

$$\int_0^{\delta} \rho u^2 dy$$

于是在流量相同的流管中，由于粘性作用，动量的损失为

$$\rho U^2 (\delta - \delta^*) - \int_0^{\delta} \rho u^2 dy$$

利用(9.10.5)式，亦可写成

$$\int_0^{\delta} \rho u U dy - \int_0^{\delta} \rho u^2 dy = \int_0^{\delta} \rho u (U-u) dy$$

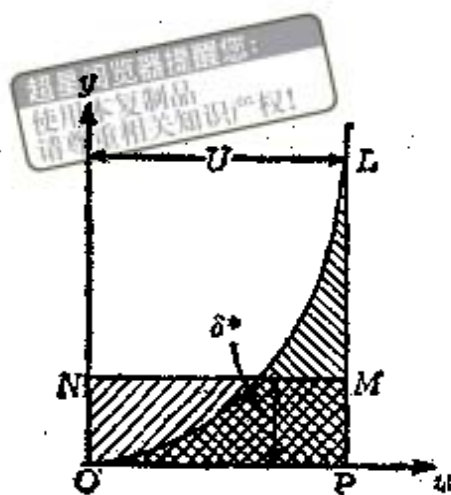


图 9.10.2

这样的动量损失如果以理想流体的动量 ρU^2 向前流去, 所需要的厚度为

$$\frac{1}{\rho U^2} \int_0^{\delta} \rho u(U-u) dy = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

显然这就是动量损失厚度 δ^{**} . 若 $\delta \rightarrow \infty$, 则有

$$\delta^{**} = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

δ^* , δ^{**} 和边界层厚度具有相同的数量阶. 从 (9.10.1), (9.10.5) 及 (9.10.2) 容易看出, $0 < \delta^*, \delta^{**} < \delta$. 为了对 δ^*, δ^{**} 有一个具体的数值概念, 考虑平板边界层中的 δ^*, δ^{**} , 易见

$$\delta^* = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \int_0^{\infty} (1-f') d\eta$$

$$\delta^{**} = \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \int_0^{\infty} f'(1-f') d\eta$$

利用布拉休斯解的数值结果, 经过计算得

$$\delta^* = 1.72 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}, \delta^{**} = 0.664 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

和边界层厚度

$$\delta \approx 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

相比较, 可以看出 δ^*, δ^{**} 的确和 δ 同数量阶, 而且 δ^*, δ^{**} 都小于 δ , 分别约为 δ 的 $1/3$ 和 $1/8$.

和边界层厚度 δ 相比较, 位移厚度 δ^* 及动量损失厚度 δ^{**} 具有不少优点及独特的用途. 首先, δ^*, δ^{**} 具有鲜明的物理意义; 其次, 在渐近理论中当速度分布 $u(x, y)$ 给定后, δ^* 和 δ^{**} 是数学上完全确定的物理量, 而我们知道, 边界层厚度 δ 却具有一定任意性; 最后, 在考虑外流和边界层相互干涉的问题中, 有效物体通

常取作原有物体加上位移厚度 δ^* ，因此考虑边界层对外流的干扰作用时，须要用到位移厚度 δ^* 。此外，容易想象，物体所遭受的阻力则常和动量损失厚度 δ^{**} 联系在一边。

b) 卡曼动量积分方程

我们先采用比较数学的方法从普朗特边界层方程导出动量积分方程，而后再用物理概念十分清楚的动量定理又一次地把它推导出来。

写出二维定常情形的不可压缩流体边界层方程

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (9.10.8)$$

将连续性方程乘以 u 并和动量方程相加得

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

其次，将连续性方程改写为

$$\frac{\partial(Uu)}{\partial x} + \frac{\partial(Uv)}{\partial y} = u \frac{dU}{dx}$$

两式相减得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [u(U-u)] + \frac{\partial}{\partial y} [v(U-u)] + (U-u) \frac{dU}{dx} \\ = -\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned}$$

将上式对 y 积分，积分限为 0 及 ∞ ，或 0 及 δ 得

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial x} [u(U-u)] dy + [v(U-u)] \Big|_0^{\delta} + \frac{dU}{dx} \int_0^{\delta} (U-u) dy \\ = -\nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0^{\delta} \end{aligned} \quad (9.10.9)$$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

考虑到 $y = \delta, \infty$ 时, $u = U, \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, 以及 $y = 0$ 时, $u = v = 0$,

得

$$[v(U-u)] \Big|_0^{\delta, \infty} = 0, \quad -v \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_0^{\delta, \infty} = v \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$$

其次因

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} [u(U-u)] dy = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} u(U-u) dy$$

$$\int_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial x} [u(U-u)] dy$$

$$= \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u(U-u) dy - [u(U-u)]_{y=\delta} \frac{d\delta}{dx}$$

$$= \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u(U-u) dy$$

于是(9.10.9)式变成

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta, \infty} u(U-u) dy + \frac{dU}{dx} \int_0^{\delta, \infty} (U-u) dy$$

$$= v \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (9.10.10)$$

按照位移厚度 δ^* 及动量损失厚度 δ^{**} 的定义(9.10.1)式及(9.10.2)式,并令

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$$

上式可简写为

$$\frac{d}{dx} (U^2 \delta^{**}) + U \frac{dU}{dx} \delta^* = \frac{\tau_w}{\rho}$$

展开后得

超星阅读器提醒您：
使用本书制品
请尊重相关知识产权！

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{1}{U} \frac{dU}{dx} (2\delta^{**} + \delta^*) = \frac{\tau_w}{\rho U^2} \quad (9.10.11)$$

在文献中通常习惯地令

$$H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}$$

这样(9.10.11)式也可采取下列形式

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{U'}{U} \delta^{**} (2+H) = \frac{\tau_w}{\rho U^2} \quad (9.10.12)$$

(9.10.11)式和(9.10.12)式是卡曼在1921年首先推导出来的，故称卡曼动量积分方程。

现在利用动量定理推导有限厚度理论中的卡曼动量积分关系式。取如图9.10.3所示固定在空间中的体积元 $ABCD$ ，它由 x 和 $x+dx$ 处的两个无限邻近的边界层横截面 AB, CD ，壁面 AD 及外部边界 BC 组成。对 $ABCD$ 应用欧拉形式的动量定理。大家知道，动量定理宣称：在定常运动情形，通过 $ABCD$ 的动量流等于作用在 $ABCD$ 上的合力。我们现在写出动量定理在 x 方向的投影。首先计算通过 $ABCD$ 的动量流在 x 方向的投影。单位时间通过 x 截面流入 $ABCD$ 的动量为

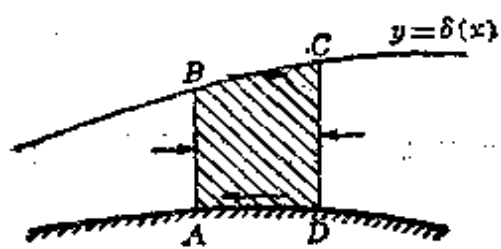


图 9.10.3

$$J = \int_0^{\delta} \rho u^2 dy$$

将 $x+dx$ 截面处流出的动量减去 x 截面流入的动量，得流出的动量为

$$\frac{\partial J}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\delta} \rho u^2 dy \right] dx$$

因 AD 是流线，通过它没有动量流出，所以不必考虑。最后计算

通过 BC 的动量，为此必须首先明确到底有多少流体通过 BC 流入 $ABCD$ 。单位时间内通过 x 截面流入的流体是

$$Q = \int_0^{\delta} \rho u dy$$

因此，将 $x+dx$ 截面上流出的质量减去 x 截面流入的动量得通过 BC 流出的质量为

$$\frac{\partial Q}{\partial x} dx = \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\delta} \rho u dy \right] dx$$

根据质量守恒定理，通过 AB, CD 流出的质量显然等于通过 BC 流进来的质量，于是通过 BC 将有流量

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta} \rho u dy \right] dx$$

流入。因边界层外部边缘上 $u=U$ ，于是通过 BC 流入的动量为

$$U \frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta} \rho u dy \right] dx$$

总起来，通过 $ABCD$ 流出的动量将是

$$\left[\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u^2 dy - U \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u dy \right] dx \quad (9.10.13)$$

其次，考虑作用在 $ABCD$ 上的力在 x 方向投影。作用在 $ABCD$ 上的力因忽略质量力故只有面力，它由作用在 AB, BC, CD, DA 上的力组成，我们约定沿正 x 方向的力取正号，沿负 x 方向的力取负号，于是四个面力分别为：(1) 作用在 AD 上的摩阻力 $-\tau_w dx$ ；(2) 作用在 BC 上的压力(因处在与理想流动接壤的

边界上切应力为零)为 $p \frac{d\delta}{dx} dx$ ；(3) 作用在 AB 及 CD 上的压力 $p\delta$

及 $-p\delta - \frac{d(p\delta)}{dx} dx$ ，这里已考虑到粘性力为零及压力穿过边界

超星阅读器提醒您：
 尊重版权，保护知识产权！

层不变的事实。将这些力加起来，得面力总和为

$$\begin{aligned} p\delta - p\delta - \frac{d(p\delta)}{dx} dx + p \frac{d\delta}{dx} dx - \tau_w dx \\ = \left(-\delta \frac{dp}{dx} - \tau_w \right) dx \end{aligned} \quad (9.10.14)$$

根据动量定理，(9.10.13)式等于(9.10.14)式。于是

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u^2 dy - U \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u dy = -\delta \frac{dp}{dx} - \tau_w$$

将 $\frac{dp}{dx}$ 换成 $-\rho U \frac{dU}{dx}$ ，并作以下变换

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u^2 dy - \frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho U u dy + \frac{dU}{dx} \int_0^\delta \rho u dy \\ - \frac{dU}{dx} \int_0^\delta \rho U dy = -\tau_w \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho u(U-u) dy + \frac{dU}{dx} \int_0^\delta \rho(U-u) dy = \tau_w \quad (9.10.15)$$

(9.10.15)式和(9.10.10)式完全一样，经过和前面一样的运算工作再一次得到卡曼动量积分关系式

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{U'}{U} (2+H) \delta^{**} = \frac{\tau_w}{\rho U^2}$$

由此可以确信(9.10.11)式或(9.10.12)式就是边界层内动量定理在 x 方向投影的数学表达。

容易看出，虽然在(9.10.11)式中有三个量 δ^* , δ^{**} , τ_w 。但当单参数速度剖面给出后，三个量中只包含一个未知函数，而(9.10.12)式就是确定单参数的常微分方程。

c) 速度剖面在边界上应该满足的条件

在边界层外部边界上，粘性流体的速度分量 $u(x, y)$ 应该和

位势外流的速度 U 相衔接，函数及各级导数都相等。换句话说，要求当 $y=\delta, \infty$ 时

$$\begin{cases} u=U, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \\ \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=0, \quad \dots, \quad \frac{\partial^n u}{\partial y^n}=0, \quad \dots \end{cases} \quad (9.10.16)$$

超星浏览器拦截
使用本文制品
请尊重相关知识版权!

这就是速度剖面在边界层外部边界上应该满足的条件。现在进一步考察速度剖面在壁面上应该满足什么条件，为此将纵向速度分量 $u(x, y)$ 在壁面 $y=0$ 附近展成泰勒级数

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} y + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0} y^2 \\ & + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_{y=0} y^3 + \dots \end{aligned} \quad (9.10.17)$$

这里已考虑到壁面粘附条件 $(u)_{y=0}=0$ 。将上式代入连续性方程得横向速度 $v(x, y)$ 的泰勒展开式为

$$\begin{aligned} v(x, y) = & \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)'_{y=0} y^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)'_{y=0} y^3 \\ & + \frac{1}{4!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)'_{y=0} y^4 + \dots \end{aligned} \quad (9.10.18)$$

式中“'”代表对 x 的微分。将展式(9.10.17)及(9.10.18)代入边界层方程的动量方程

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (9.10.19)$$

然后令 y 的同幂次系数相等得

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \text{可自由选择, 它是一个参数} \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0} = -\frac{UU'}{\nu} \end{cases} \quad (a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_{y=0} = 0 \\ \left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{y=0} = 3\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)'_{y=0} \text{ 可自} \\ \dots\dots \end{array} \right. \quad \text{(b) (9.10.20)}$$

由选择, 亦是一个参数

由此可见, 速度剖面在壁面上必须满足 (9.10.20(a)) 及 (9.10.20(b)) 等条件(将 $y=0$ 时 $u=v=0$ 的条件代入边界层方程 (10.10.19) 及它对 y 微分后的方程, 可以直接得到条件 (9.10.20(a)) 及 (9.10.20(b))), 其中

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}, \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0}, \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_{y=0}, \dots\dots$$

等都是可以自由选择参数, 其他系数则可通过它们表出。

在壁面上应满足的条件中, 除粘附条件外, 当推 (9.10.20 (a)) 最重要, 它控制速度剖面在顺压区无拐点, 在逆压区必有拐点, 符合实际情况, 因此在曲面物体的绕流问题中, 应该尽量使近似速度剖面满足这个条件, 否则就不会有好结果。一般说来, (9.10.16) 及 (9.10.20) 中愈靠前的边界条件愈重要, 应该首先满足。

d) 平板边界层的近似解

1) 速度剖面的选取

平板边界层具有相似性解, 因此 $\frac{u}{U}$ 只依赖于组合变数 $\eta = \frac{y}{\delta}$,

即

$$\frac{u}{U} = f(\eta)$$

现在我们选取 $f(\eta)$ 的逼近函数, 使它尽量和真实剖面吻合, 为此必须尽可能多地满足边界上的条件 (9.10.16) 及 (9.10.20), 在平板情形 ($U = \text{常数}$) 这些条件可写成

$$y=0 \text{ 时 } u=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=0, \quad \dots \quad (9.10.21)$$

$$y=\delta \text{ 时 } u=U, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad \dots$$

通常取多项式 $\sum_0^n a_n \eta^n$ 逼近 $f(\eta)$, 其中的 n 个系数 a_n 可以这样确

定: 选取 (9.10.21) 中最重要 n 个边界条件, 令多项式函数满足它们, 得到 n 个代数方程, 把它们解出来即得 a_n . 下面以一次到四次多项式和三角函数为例写出逼近函数.

i) 线性多项式 $f(\eta) = a\eta + b$

由 $f(0)=0, f(1)=1$, 定出 $a=1, b=0$. 于是

$$f(\eta) = \eta$$

ii) 二次多项式 $f(\eta) = a\eta^2 + b\eta + c$

由 $f(0)=0, f(1)=1, f'(1)=0$, 定出 $a=-1, b=2, c=0$.

于是

$$f(\eta) = 2\eta - \eta^2$$

iii) 三次多项式 $f(\eta) = a\eta^3 + b\eta^2 + c\eta + d$

由 $f(0)=0, f(1)=1, f''(0)=0, f'(1)=0$, 定出 $a=-(1/2), b=0, c=3/2, d=0$. 于是

$$f(\eta) = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3$$

iv) 四次多项式 $f(\eta) = a\eta^4 + b\eta^3 + c\eta^2 + d\eta + e$

由 $f(0)=0, f''(0)=0, f(1)=1, f'(1)=0, f''(1)=0$, 定出 $a=1, b=-2, c=0, d=2, e=0$. 于是

$$f(\eta) = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4$$

v) $f(\eta) = \sin \frac{\pi}{2} \eta$

显然它满足三次多项式满足的那些条件.

选定 $f(\eta)$ 的逼近函数，并不是速度剖面就完全确定了，因为在 η 中还包含边界层厚度 δ ，它是 x 的函数。当 δ 依赖于 x 的函数关系没有确定以前，我们便不知道在各个不同 x 截面上应取什么速度剖面。由此可见，为了完全确定速度剖面，还要求出单参数 δ 和 x 的关系。

2) 单参数 $\delta(x)$ 的确定

确定 $\delta(x)$ 的常微分方程由卡曼动量方程(9.10.11)提供。现在它采取下列形式($U = \text{常数}$)

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U^2} \quad (9.10.22)$$

其中

$$\delta^{**} = \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy, \quad \tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \quad (9.10.23)$$

将速度剖面写成

$$\frac{u}{U} = f(\eta) \quad (9.10.24)$$

其中 $f(\eta)$ 是选定的 η 的已知函数，它的形式可以是 η ， $2\eta - \eta^2$ ， $\frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3$ ， $2\eta - 2\eta^3 + \eta^4$ 或 $\sin(\pi\eta/2)$ 中任一个。将(9.10.24)式代入(9.10.23)式及(9.10.1)式得

$$\delta^* = \delta \int_0^1 (1-f) d\eta = \gamma \delta \quad (9.10.25)$$

$$\delta^{**} = \delta \int_0^1 f(1-f) d\eta = \alpha \delta \quad (9.10.26)$$

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{\nu U}{\delta} \left[\frac{\partial(u/U)}{\partial(y/\delta)} \right]_{y=0} = \frac{\nu U}{\delta} f'(0) = \frac{\nu U}{\delta} \beta \quad (9.10.27)$$

这里我们令

$$\gamma = \int_0^1 (1-f) d\eta, \quad \alpha = \int_0^1 f(1-f) d\eta, \quad \beta = f'(0) \quad (9.10.28)$$

它们是完全确定的常数，当 f 的具体形式给出之后，可以根据

(9.10.28)式容易地求出它们的数值来。我们将(9.10.26)式及(9.10.27)式代入(9.10.22)式得

$$\alpha \frac{d\delta}{dx} = \frac{\nu}{\delta U} \beta$$

于是确定 $\delta(x)$ 的常微分方程为

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{\nu}{U}$$

这个方程非常容易积分，它的解显然是

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{2\beta}{\alpha}} \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \quad (9.10.29)$$

$\delta(x)$ 的形式和准确结果完全一样，只是系数略有不同。

3) 结果

有了 δ 和 x 的关系(9.10.29)，可以确定所有感兴趣的物理量。将(9.10.29)代入(9.10.24)得速度剖面为

$$\frac{u}{U} = f\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2\beta}} y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}\right)$$

局部摩阻根据(9.10.27)为

$$\tau_w = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{2}} \mu U \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$$

于是作用在长为 L 宽为 b 的一段平板上的总摩阻为

$$W = 2b \int_0^L \tau_w dx = 2b \sqrt{2\alpha\beta} \sqrt{\mu\rho LU^3}$$

总摩擦阻力系数为

$$C_f = \frac{W}{2bL \cdot \frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{2\sqrt{2\alpha\beta}}{\sqrt{\text{Re}}} \quad (9.10.30)$$

依照(9.10.25)及(9.10.26)可定出排出厚度及动量损失厚度

$$\delta^* = \nu \sqrt{\frac{2\beta}{\alpha}} \sqrt{\frac{\nu x}{U}}, \quad \delta^{**} = \sqrt{2\alpha\beta} \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \quad (9.10.31)$$



最后我们将逼近函数选为一次到四次多项式及三角函数 $\sin \frac{\pi}{2} \eta$ 时所计算出来的结果列表如下。

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

$f(\eta)$	α	γ	β	$\delta \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$	$\delta^* \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$	$\frac{\tau}{\mu U} \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$	$C_f \sqrt{Re}$
η	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	1	3.46	1.732	0.289	1.155
$2\eta - \eta^2$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$	2	5.48	1.825	0.365	1.460
$\frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^2$	$\frac{39}{280}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{2}$	4.64	1.740	0.323	1.292
$2\eta - 2\eta^3 + \eta^4$	$\frac{37}{315}$	$\frac{3}{10}$	2	5.83	1.752	0.343	1.372
$\sin \frac{\pi}{2} \eta$	$\frac{4-\pi}{2\pi}$	$\frac{\pi-2}{\pi}$	$\frac{\pi}{2}$	4.79	1.742	0.327	1.310
准确解				5	1.729	0.332	1.328

上表说明，和准确解相比较，积分关系式方法一般说来给出令人满意的结果。除线性分布及二次函数外，阻力结果相当精确，与准确解比较误差不超过3%。

通过平板边界层求近似解，我们了解到利用积分关系式方法求边界层方程解的主要步骤，同时也初步体会到这个方法的优点，计算简单，且具有一定的准确度。下面我们进一步利用此方法处理更复杂的曲面边界层问题。

e) 曲面物体边界层的近似解

1921年波尔豪森利用卡曼动量积分方程处理了具有压力梯度的曲面物体边界层问题。他选取四次多项式逼近真实的速度剖面，即

$$\frac{u}{U} = f(x, \eta)$$

$$= a(x) + b(x)\eta + c(x)\eta^2 + d(x)\eta^3 + e(x)\eta^4 \quad (9.10.32)$$

其中 a, b, c, d, e 是待定的系数。由于曲面物体的边界层一般说来没有相似性解，所以 u/U 不仅依赖于 η 而且还和 x 有关，因此 a, b, c, d, e 都是 x 的函数。为了使 (9.10.32) 尽量和实际剖面接近，波尔豪森令 (9.10.32) 满足下列五个边界条件

$$\begin{cases} y=0 \text{ 时} & u=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{UU'}{\nu} \\ y=\delta \text{ 时} & u=U, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \end{cases} \quad (9.10.33)$$

由此定出五个函数。在这些条件中，当推 $y=0$ 时

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{UU'}{\nu}$$

为最重要。一切有压力梯度的物体都必须满足该条件，它反映了速度剖面在顺压区没有拐点，在逆压区必有拐点的性质。(9.10.33) 式中的第二组条件说明边界层内的速度剖面和外流的速度剖面在边界层边界上二阶密切。

将 (9.10.32) 式代入 (9.10.33) 式，经过简单运算后得到 a, b, c, d, e 满足的下列方程

$$\begin{cases} a=0 \\ c = -\frac{1}{2} \frac{U' \delta^2}{\nu} \\ a+b+c+d+e=1 \\ b+2c+3d+4e=0 \\ 2c+6d+12e=0 \end{cases} \quad (9.10.34)$$

引进无量纲参数

$$\lambda(x) = \frac{U'(x)\delta^2(x)}{\nu} = \frac{-\frac{d\rho}{dx}c}{\frac{\mu U}{\delta}}, \quad \delta = \sqrt{\frac{\nu \lambda}{U'}} \quad (9.10.35)$$

参数 $\lambda(x)$ 和边界层厚度 $\delta(x)$ 相互依赖, 有一个知道, 另一个就可以按(9.10.35)式定出. 它的物理意义可解释为压力和粘性力之比. 解出方程组(9.10.34)得

$$a=0, \quad b=\frac{12+\lambda}{6}, \quad c=-\frac{\lambda}{2}$$

$$d=-\frac{4-\lambda}{2}, \quad e=\frac{6-\lambda}{6}$$

而速度剖面可写成下列形式

$$\begin{aligned} \frac{u}{U} &= f(\eta, \lambda) = F(\eta) + \lambda G(\eta) \\ &= 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 + \frac{1}{6}\eta(1-\eta)^3\lambda \end{aligned}$$

显然这是一个以 λ 为单参数的剖面族. 当 λ 指定后, $u/U = f(\eta, \lambda)$ 的曲线形状便完全

确定. 下面在图9.10.

4 中我们画出了各种不同 λ 时速度剖面的形状. $\lambda=0$ 相当于没有压力梯度时平板情形的四次速度剖面.

由于速度剖面必须满足 $0 < u/U < 1$ 的条件, 因此从图9.10.4

上容易看出, 当 λ 太大或过小时, 虚线所

绘的剖面都是实际上不存在的. 这就是说, 对曲面边界层这个实际问题来说, λ 有一定的变化范围. 现在我们就来确定 λ 的下界和上界. 为此计算 $f'(\eta)$:

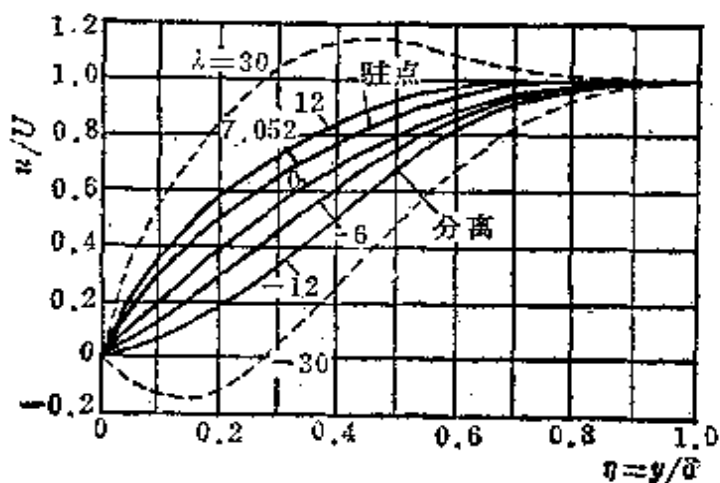


图 9.10.4

$$f'(\eta) = (1-\eta)^2 \left[2 + 4\eta + \frac{\lambda}{6}(1-4\eta) \right]$$

在脱体点上 $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$, 即

$$f'(0) = 2 + \frac{\lambda}{6} = 0$$

于是, 对应的 $\lambda = -12$. 当 $\lambda < -12$ 时, 速度剖面已进入尾涡区, 此时边界层不很适用. 由此可见, λ 的下界应定为 -12 . 其次实际存在的剖面因单调递增只是在 $\eta = 1$ 或 $\eta = 0$ 时才等于零, 这就必须要求, 在 $0 < \eta < 1$ 中 $f'(\eta) \neq 0$. 或者说

$$2 + 4\eta + \frac{\lambda}{6}(1-4\eta) = 0$$

即

$$\eta = \frac{2 + \lambda/6}{\frac{2\lambda}{3} - 4}$$

不在 $0 \leq \eta \leq 1$ 之中. 不难看出当 $\lambda \geq 12$ 时 $\eta \leq 1$, 于是 λ 的上界应为 12. 这样 λ 的变化范围限制在

$$-12 \leq \lambda \leq 12 \quad (9.10.36)$$

之间. 知道了单参数速度剖面的形状, 还没有最终解决问题. 因为每一个截面上究竟该取什么形状的剖面取决于对应的 λ 取什么值. 因此紧跟着的一个问题就是要确定 $\lambda(x)$. 现在我们从卡曼动量积分

$$-\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{U'}{U}(2\delta^{**} + \delta^*) = \frac{\tau_w}{\rho U^2} \quad (9.10.37)$$

导出定 $\lambda(x)$ 的一个常微分方程. 为此首先计算 δ^* , δ^{**} 及 τ_w

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \int_0^1 (1-f) d\eta = \frac{1}{120}(36-\lambda) = H^*(\lambda)$$

$$\frac{\delta^{**}}{\delta} = \int_0^1 f(1-f) d\eta$$

$$= \frac{1}{315} \left(37 - \frac{\lambda}{3} - \frac{5\lambda^2}{144} \right) = H^{**}(\lambda) \quad (9.10.38)$$

$$\frac{r_w}{\mu U} = \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = 2 + \frac{\lambda}{6} = b(\lambda)$$

将(9.10.38)式代入(9.10.37)式得

$$H^{**} \frac{1}{\delta} \frac{d\delta}{dx} + \frac{dH^{**}}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dx} + \frac{U'}{U} (2H^{**} + H^*)$$

$$= \frac{\nu}{U\delta^2} b(\lambda) = \frac{U'}{U} \frac{b(\lambda)}{\lambda}$$

依照(9.10.35)式显然

$$\frac{1}{\delta} \frac{d\delta}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dx} - \frac{U''}{U'} \right)$$

代入上式经过简单的运算后得

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{U'}{U} g(\lambda) + \frac{U''}{U'} k(\lambda) \quad (9.10.39)$$

其中

$$g(\lambda) = \frac{b - \lambda(2H^{**} + H^*)}{\lambda \frac{dH^{**}}{d\lambda} + \frac{1}{2} H^{**}}$$

$$= \frac{15120 - 2784\lambda + 79\lambda^2 + \frac{5}{3}\lambda^3}{(12 - \lambda) \left(37 + \frac{25}{12}\lambda \right)}$$

$$k(\lambda) = \frac{\frac{1}{2}\lambda H^{**}}{\lambda \frac{dH^{**}}{d\lambda} + \frac{1}{2} H^{**}} = \frac{444\lambda - 4\lambda^2 - \frac{5}{12}\lambda^3}{(12 - \lambda) \left(37 + \frac{25}{12}\lambda \right)}$$

为了后面的需要，将(9.10.39)式的形式改换一下，为此引进新的参数

$$z = \frac{\delta^2}{\nu} \quad (9.10.40)$$

它与 λ 的关系为

$$\lambda = zU' \quad (9.10.41)$$

于是(9.10.39)变成

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{U} g(\lambda) + U'' h(\lambda) z^2 \quad (9.10.42)$$

其中

$$\begin{aligned} h(\lambda) &= \frac{k(\lambda) - \lambda}{\lambda^2} = \frac{-\frac{dH^{**}}{d\lambda}}{\lambda \frac{dH^{**}}{d\lambda} + \frac{1}{2} H^{**}} \\ &= \frac{8 + \frac{5}{3}\lambda}{(12 - \lambda)\left(37 + \frac{25}{12}\lambda\right)} \end{aligned}$$

(9.10.42)式中 λ 是一参数。考虑到 $\lambda = zU' = \lambda(z, x)$ ，(9.10.42)式亦可写成更规则的形式

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{U(x)} g(z, x) + U''(x) h(z, x) z^2 \quad (9.10.43)$$

对翼剖面这样的曲面边界层，我们一般从驻点开始积分(9.10.43)，所以需要给出 $x=0$ 处的两个初始条件。从(9.10.39)式看出，常微分方程(9.10.39)在驻点 $U=0$ 及压力极小点 $U'=0$ 上有奇点。而方程(9.10.43)只在驻点 $U(x)=0$ 处有鞍形奇点。因此取(9.10.43)式较为有利。现求(9.10.43)式在 $x=0$ 处的两个初始条件。显然，在驻点 $U=0$ 处 δ 及 $d\delta/dx$ 有限，因而 dz/dx 也是有限的。这就要求 $g(\lambda)=0$ ，即

$$15120 - 2784\lambda_0 + 79\lambda_0^2 + \frac{5}{3}\lambda_0^3 = 0$$

λ_0 的三个根是 $\lambda_0 = 7.052, 17.80, -72.26$. $17.80, -72.26$ 都是在 λ 的变化范围(9.10.36)式以外, 因此驻点处的 λ_0 只能取 7.052. 于是当 $x=0$ 时

$$z = \frac{7.052}{U'} \quad (9.10.44)$$

λ_0 确定后, $\left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=0}$ 的值可计算如下:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=0} &= \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{g(\lambda)}{U} + U'' h(\lambda) z^2 \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{g'(\lambda)\lambda'}{U'} + \frac{U''}{U'^2} h(\lambda)\lambda^2 \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left[g'(\lambda) \left(\frac{U''}{U'^2} \lambda + \frac{dz}{dx} \right) + \frac{U''}{U'^2} h(\lambda)\lambda^2 \right] \end{aligned}$$

合并 $\left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=0}$ 得

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=0} = \frac{1}{1 - \lim_{z \rightarrow 0} g'(\lambda)} \left\{ \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{U''}{U'^2} (\lambda g'(\lambda) + h(\lambda)\lambda^2) \right] \right\}$$

将 λ_0 的值代入得

$$x=0 \text{ 时 } \frac{dz}{dx} = -5.391 \frac{U''}{U'^2} \quad (9.10.45)$$

(9.10.44)式与(9.10.45)式组成常微分方程(9.10.43)的两个初始条件. 波尔豪森利用斜线法数值地求出方程(9.10.43)的解. 当 $z(x)$ 求出后可以按下列步骤求出所有物理量

- 1) 由(9.10.41)式定出 $\lambda(x)$;
- 2) 因而速度 $\frac{u}{U} = f(\lambda, \eta)$ 可求出;

3) 根据(9.10.38)式及(9.10.40)式求出 $\delta(x)$, $\delta^{**}(x)$ 与 $\delta^*(x)$, $\tau(x)$;

4) 由 $\lambda(x) = -12$, 定出脱体点位置 x_s .

波尔豪森利用上述方法计算了圆柱绕流问题中的边界层, 他取希曼茨(Hiemenz)用实验测出的圆柱上的压力分布为外流解. 计算结果, 脱体角为 82° , 实验结果则为 84° . 理论和实验结果符合得较好. 但是从速度剖面的观点来说, 它只在顺压区与实验结果符合得很好, 而在最小压力点开始的逆压区中误差就比较大, 且愈靠近分离点, 误差越大. 由此可见脱体点的结果较好有一定偶然性. 为了进一步考验波尔豪森方法, 计算了长短轴为2.96:1的椭圆柱体的横向绕流问题. 休鲍威(Schubauer)用实验测出的分离点在 $x/b = 1.99$ 的地方(b 为椭圆短轴), 而计算的结果则根本没有分离点. 图9.10.5比较了椭圆柱上速度分布的理论结果(波尔豪森)和实验结果(休鲍威). 在顺压区符合得很好. 但在逆压区, 如在 $x/b = 1.946$ 的截面上, 差别就比较大. 实验观察到的速度剖面已有十分明显的拐点, 而波尔豪森的剖面则在物面附近刚刚显示出拐点. 通过上述比较可以相信, 波尔豪森方法在增速区给出令人满意的结果, 但在减速区, 特别在脱体点附近给出相当差的结果. 因此采用此法计算脱体位置一般说来不甚可靠, 有时甚至算不出来.

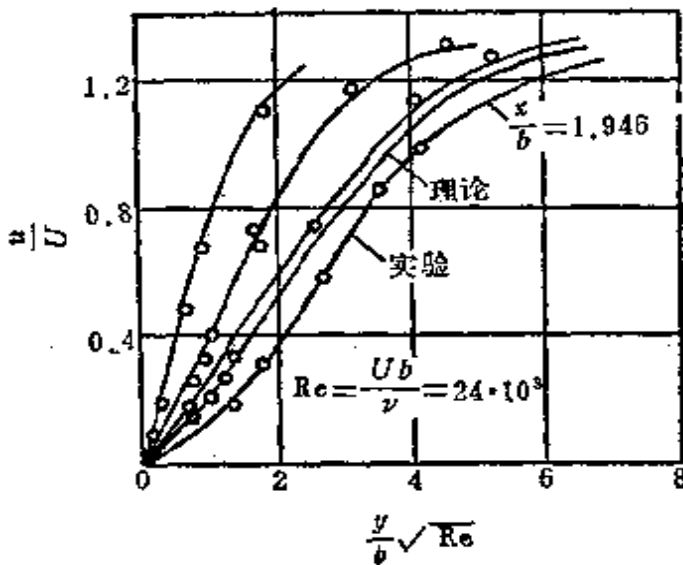


图 9.10.5

波尔豪森方法可以简化, 1940—1942年期间不少作者, 如霍

尔斯坦(Holstein)及鲍莱(Bohlen), 华尔茨(Walz), 洛强斯基(Лойцянский)等人发现如果用新的参数

$$A = \frac{U' \delta^{**2}}{\nu} \quad (9.10.46)$$

代替

$$\lambda = \frac{U' \delta^2}{\nu}$$



那么 A 满足的常微分方程数值积分起来较容易, 而且可以通过近似方法积分成有限形式. 下面先导出 A 满足的常微分方程, 然后再求出它的近似解.

写出卡曼积分关系式

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{U'}{U} (2 + H) \delta^{**} = \frac{\tau_w}{\rho U^2} \quad (9.10.47)$$

显然

$$A = \frac{U' \delta^2}{\nu} \frac{\delta^{**2}}{\delta^2} = \lambda H^{**}$$

而 H^{**} 根据(9.10.38)式是 λ 的函数, 于是 $A = A(\lambda)$. 反解之有 $\lambda = \lambda(A)$. 这样在卡曼动量积分中的

$$H = \frac{H^*(\lambda)}{H^{**}(\lambda)} = H(\lambda) = H(A)$$

$$S = \frac{\partial(u/U)}{\partial(y/\delta^{**})} = \frac{\delta^{**}}{\delta} \left(\frac{\partial u/U}{\partial y/\delta} \right) = H^{**}(\lambda) b(\lambda) = S(A)$$

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{\nu}{U \delta^{**}} \frac{\partial u/U}{\partial y/\delta^{**}} = \frac{\nu}{U \delta^{**}} S(A)$$

将(9.10.47)式改写为

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{U'}{U} (2 + H(A)) \delta^{**} = \frac{\nu}{U \delta^{**}} S(A)$$

上式两边乘以 $U \delta^{**} / \nu$ 得

$$U \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta^{**2}}{\nu} \right) = 2[S(\lambda) - \lambda(2 + H(\lambda))]$$

与(9.10.40)式类似令

$$z^{**} = \frac{\delta^{**2}}{\nu}$$

此外令

$$F(\lambda) = 2[S(\lambda) - \lambda(2 + H(\lambda))]$$

于是

$$\frac{dZ^{**}}{dx} = \frac{F(\lambda)}{U} \quad (9.10.48)$$

因

$$\lambda = Z^{**} U'$$

于是

$$\frac{dZ^{**}}{dx} = \frac{1}{U'} \frac{d\lambda}{dx} - \frac{U''}{U'^2} \lambda$$

代入(9.10.48)式得

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{U'}{U} F(\lambda) + \frac{U''}{U'} \lambda \quad (9.10.49)$$

(9.10.48) 式和 (9.10.42) 式相比有如下优点：(1) 事先需要求出的函数由两个 $h(\lambda)$, $g(\lambda)$ 减少到一个 $F(\lambda)$ ；(2) 积分 (9.10.48) 式只须外流速度函数 U 及其一级导数 U' ，而不须要二级导数 U'' ，但积分 (9.10.42) 式则必须要 U'' 。我们知道，外流速度分布常常以数值形式给出，用数值微分法求 U'' 很不精确。因此从数值解法的观点来看，(9.10.48) 式较 (9.10.42) 式合用。最后我们发现，函数 $F(\lambda)$ 几乎和直线一样，完全可以用线性关系

$$F(\lambda) = a - b\lambda \quad (9.10.50)$$

很好地近似它，其中 $a=0.45$, $b=6$ (见图 9.10.6) (请注意 (9.10.42) 式中的函数 $g(\lambda)$, $h(\lambda)$ 不能用线性函数替代)。将 (9.10.50) 代入式 (9.10.49) 式得



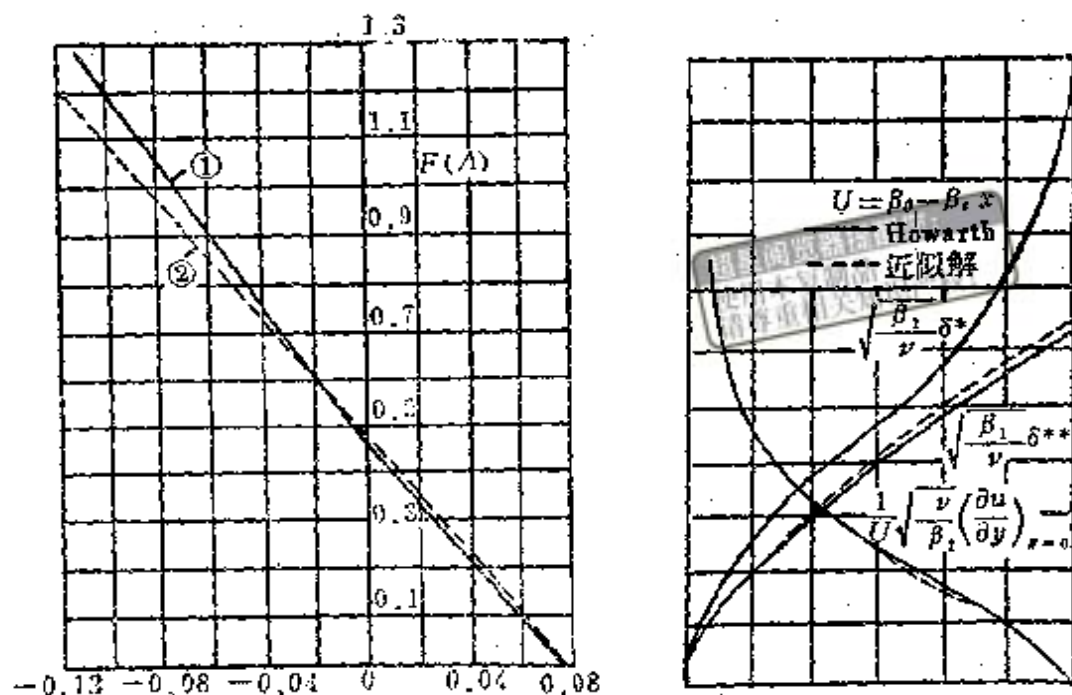


图 9.10.6

$$\frac{dA}{dx} = a \frac{U'}{U} + \left(\frac{U''}{U'} - b \frac{U'}{U} \right) A$$

积分之有

$$A(x) = \frac{aU'(x)}{[U(x)]^b} \int_0^x [U(\xi)]^{b-1} d\xi \quad (9.10.51)$$

这里已利用 $x=0$ 时 $U=0$ 的条件。(9.10.51)式就是(9.10.48)式的近似解。求出 $A(x)$ 可求出任何其他物理量。

斯危茨(Zhwaites)曾利用(9.10.51)式,对外流 $U = \beta_0 - \beta_1 x$ 的情形进行了计算。和豪华斯(Howarth)的准确解相比较,除分离点稍有误差而外,一般都很接近。

自从(卡曼-波尔豪森)动量积分方法出现到现在不过几十年光景,但是在航空及宇宙飞行事业蓬勃发展的推动下,使它得到了很大的进展。目前已有许多改进的方法。主要的途径是选

取更好的剖面，满足更多的方程。例如在单参数剖面的范围内，选用较四次更高的多项式、三角函数或某特殊问题中的速度剖面等等，或将波尔豪森参数转变成另外一些更能控制剖面形状的参数。由于边界层内的速度剖面变化多端，一个参数往往掌握不住，为此有人建议进一步选用双参数剖面或多参数剖面来逼近真实情形，同时用动量与能量两个方程或动量矩方程确定它们随 x 的变化。这样做较精确，但工作量大，近来苏联科学家达罗尼骏（Дородинцын）发展了波尔豪森的方法，用达罗尼骏积分关系式方法数值地解边界层方程。这种方法原则上可十分精确地解边界层方程，但需要应用快速电子计算机。

*9.11 润滑理论

研究轴承和轴套之间润滑油的运动具有重要的工程意义。设想轴承和轴套之间的狭缝中充满了润滑油。当轴承以高速旋转时

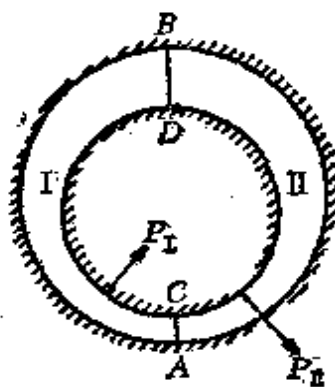


图 9.11.1

产生了巨大的压差，轴承被油层托起，形成偏心圆环，使轴承和轴套之间避免直接接触，从而起到润滑的作用。润滑理论属于粘性力起主要作用的小雷诺数流动，理应放在 9.7 中讲述，但考虑到润滑油在狭缝内的流动在很多方面都和边界层内流动十分相似，因此放在边界层理论之后再介绍可能更为妥当。

将狭缝分成如图 9.11.1 所示的 I 与 II 两部分。第 I 部分轴承是向最小间距方向运动，第 II 部分则是向最大间距方向运动。理论和实验都告诉我们，A 与 B 处的压力是相等的，不妨用 p_0 表示。由于轴承的半径比狭缝的宽度大得多，所以作为一级近似可以把 AB 与 CD 近似地用平板来代替。这样润滑油在轴承和轴套之间薄层内的流动可近似为下述倾斜平板之间的粘性流体运动。

令无界的导板平面 Oxz 在 x 轴方向上以常速 U 运动。距此平板不远处有一有限长的固定不动的平板，它与 Oxz 平面倾斜成很小的 α 角。在两平板间充满了润滑油。两端压力都取常数值 p_0 。取如图 9.11.2 所示的坐标系 $Oxyz$ 。设两平板间的高度为 $h(x)$ ，它在两端缘处分别取 h_1 和 h_2 值。其次设固定平板在 Ox 轴上的投影为 l ，则

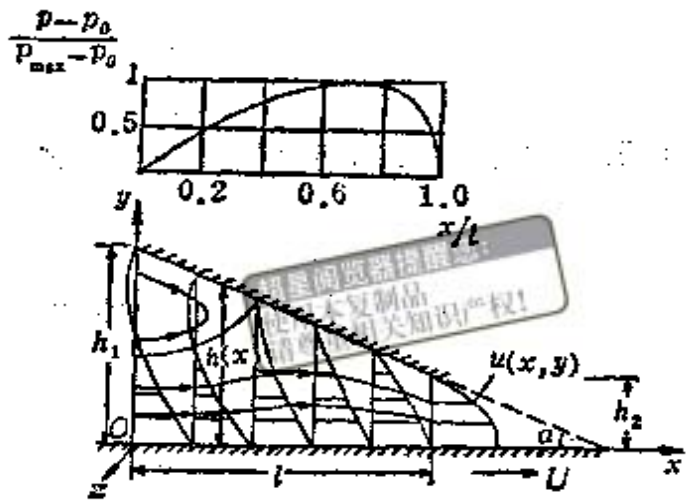


图 9.11.2

$$h(x) = h_1 - mx \quad (9.11.1)$$

其中

$$m = \tan \alpha = \frac{h_1 - h_2}{l} \quad (9.11.2)$$

我们假设 $h(x)$ 大大地小于 l ，即 $\varepsilon = h_1/l$ 或 h_2/l 是小量。此外，固定平板在 z 轴方向两头都伸展到无穷远处，因此运动可以认为是二维平面的。考虑到 $h_1 \ll l$ ，和边界层中量阶估计完全一样地我们有

$$1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} / \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = O(\varepsilon^2);$$

$$2) \quad \frac{\partial p}{\partial y} / \frac{\partial p}{\partial x} = O(\varepsilon). \text{ 可近似地认为 } \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \text{ 即认为压力穿}$$

过薄层不变， $p = p(x)$ 。

于是润滑油在两倾斜平面薄层间的平面定常运动的方程组 (9.1.7) 可简化为

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (9.11.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (9.11.4)$$

现在估计惯性力和粘性力之比的量阶

$$\frac{\text{惯性力}}{\text{粘性力}} = \frac{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}}{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} = \frac{\rho U^2}{l} \cdot \frac{l^2}{\mu U} = \frac{\rho U l}{\mu} \left(\frac{h_1}{l}\right)^2 = Re \varepsilon^2$$



其中 $Re = \rho U / \nu$. 为了对 $Re \varepsilon^2$ 的大小有一个具体的了解, 取以下反映实际情况的数据:

$$U = 12.2 \text{ 米/秒}, \quad l = 0.1 \text{ 米}, \quad \nu = 0.37 \times 10^{-6} \text{ 米}^2/\text{秒}$$

$$h_1 = 0.0002 \text{ 米}, \quad h_2 = 0.0001 \text{ 米}$$

计算后得 $Re = 25000$, $\varepsilon = 0.002$, $Re \varepsilon^2 = 0.1$. 可见惯性力的确比粘性力小得很多, 可忽略不计. 忽略惯性力后, (9.11.3) 可写为

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (9.11.5)$$

连续性方程(9.11.4)可用每一个横截面上流量等于常数的条件代替

$$Q = \int_0^{h(x)} u dy = \text{常数} \quad (9.11.6)$$

边界条件为

$$y=0; \quad u=U; \quad y=h_2; \quad u=0 \quad (9.11.7)$$

$$x=0; \quad p=p_0; \quad x=l; \quad p=p_0 \quad (9.11.8)$$

和两平行平板间库塔流不同的是, 现在 $\frac{dp}{dx}$ 不再是常数, 而是 x 的函数. 对方程(9.11.5)积分两次, 并考虑到边界条件(9.11.7)后我们得到

$$u = U \left(1 - \frac{y}{h}\right) - \frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (9.11.9)$$

现在我们利用方程(9.11.6)及边界条件(9.11.8)定 $\frac{dp}{dx}$ 。为此将(9.11.9)代入(9.11.6)得

$$Q = \frac{Uh}{2} - \frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx}$$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

即

$$\frac{dp}{dx} = 12\mu \left(\frac{U}{2h^2} - \frac{Q}{h^3} \right) \quad (9.11.10)$$

设 $\frac{dp}{dx} = 0$ 处的 h 用 h^* 表示, 则容易得到下列 Q 与 h^* 的关系

$$Q = \frac{U}{2} h^* \quad (9.11.11)$$

将之代入(9.11.10), 并考虑到 $\frac{dh}{dx} = -m$ 后有

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{6\mu U}{m} \left(\frac{1}{h^2} - \frac{h^*}{h^3} \right)$$

积分之得

$$p = \frac{6\mu U}{m} \left(\frac{1}{h} - \frac{h^*}{2h^2} \right) + C$$

积分常数 C 及 h^* 可根据边界条件(9.11.8)式定出, 于是

$$h^* = \frac{2h_1 h_2}{h_1 + h_2} \quad (9.11.12)$$

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \frac{6\mu U}{m} \left[\frac{1}{h} - \frac{1}{h_1} - \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_1^2} \right) \right] \\ &= p_0 + 6\mu U l \frac{(h_1 - h)(h - h_2)}{h^2 (h_1^2 - h_2^2)} \quad (9.11.13) \end{aligned}$$

运动壁面上的粘性切应力为

$$\begin{aligned}\tau_0 &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 = -\frac{\mu}{h} U - \frac{1}{2} h \frac{dp}{dx} \\ &= -\frac{\mu U}{h} \left(4 - \frac{3h^*}{h} \right)\end{aligned}\quad (9.11.14)$$

有了(9.11.13)及(9.11.14)式很容易计算出作用在长为 l 的运动板面上的合压力与合粘性应力, 以及两者的比值, 合力矩和合压力作用点的位置 x_c , 它们分别为

$$\left\{ \begin{aligned} P &= \int_0^l (p - p_0) dx = \frac{6\mu U l^2}{(k-1)^2 h_2^2} \left[\ln k - \frac{2(k-1)}{k+1} \right] \\ F &= - \int_0^l \tau_0 dx = \frac{\mu U l}{(k-1) h_2} \left[4 \ln k - \frac{6(k-1)}{k+1} \right] \\ \frac{|F|}{|P|} &= \frac{\left| 2 \ln k - 3 \frac{k-1}{k+1} \right| (k-1) h_2}{\left| \ln k - 2 \frac{k-1}{k+1} \right|} \frac{1}{l} \\ L &= \int_0^l (p - p_0) x dx \\ &= \frac{h_1}{m} P + \frac{6\mu U h_2}{m^3} \left[\frac{1}{2} (1-k) + \frac{k}{k+1} \ln k \right] \\ x_c &= \frac{L}{P} = \frac{l}{2} \left[\frac{2k}{k-1} - \frac{k^2 - 1 - 2k \ln k}{(k^2 - 1) \ln k - 2(k-1)^2} \right]\end{aligned}\right.\quad (9.11.15)$$

其中 $k = h_1/h_2$.

合压力 P 的大小依赖于 k 的数值, 当 $k=1$ 及 ∞ 时, $P=0$. 因此在这个区间中一定有 P 的极值. 取导数后易得取极值的 k 应满足下列超越方程

$$k^3 + 5k^2 - 5k - 1 - 2k(k+1)^2 \ln k = 0$$

数值解之近似地得 $k=2.2$. 易检验此时 P 取极大值. 将 $k=2.2$ 代入(9.11.5)得 P 取极大值时各物理量的大小为

$$\begin{cases} P = 0.16 \frac{\mu U l^2}{h_2^2}, & F = 0.75 \frac{\mu U l}{h_2} \\ \frac{|F|}{|P|} = 4.7 \frac{h_2}{l}, & x_c = 0.57l \end{cases} \quad (9.11.16)$$

为了画出压力分布我们求 p_{\max} , 将 $h = h^*$ 代入(9.11.13)得

$$p_{\max} - p_0 = 6\mu U l \frac{h_1 - h_2}{4h_1 h_2 (h_1 + h_2)} \quad (9.11.17)$$

于是

$$\frac{p - p_0}{p_{\max} - p_0} = \frac{4h_1 h_2 (h_1 - h)(h - h_2)}{h^2 (h_1 - h_2)^2} \quad (9.11.18)$$

其次易证

$$\frac{h^*}{\frac{h_1 + h_2}{2}} = \frac{4h_1 h_2}{(h_1 + h_2)^2} < 1 \quad (9.11.19)$$

图9.11.2画出了速度分布、压力分布和流线谱。从图上可以看出倒流发生在静止固壁附近压力升高的区域。这一点是和图9.6.8中库塔流的情形类似。

根据(9.11.15), (9.11.16), (9.11.17), (9.11.19)及图9.11.2, 我们可以看出:

1) 取前述数据可得

$$p_{\max} - p_0 \approx 10^6 \text{ 公斤/米} \cdot \text{秒}^2$$

和空气绕圆球的小雷诺数流动中的最大压力(9.7.16)

$$p_{\max} - p_\infty = \frac{3}{2} \frac{\mu U}{a} \approx 8 \text{ 公斤/米} \cdot \text{秒}^2$$

相比大得不可比拟。在缓慢的变薄层粘性流动中产生高压是润滑型流动的显著特点之一。

2) 根据(9.11.19)式, 最大压力作用点靠近最小截面处。

3) $|F|/|P|$ 正比于小量 h_2/l , 即变厚度薄层中的粘性流体运动能产生远大于总摩阻的支撑力。支撑力 $|P|$ 的量阶为 $(l/h_2)^2$,

是一个很大的量。

4) 当 P 取极大值时, 合压力作用点在 $(0, l)$ 的中点附近, 略向最窄的右端靠拢。

应该指出, 如果平面不是朝着窄口方向, 而是朝着宽口方向运动, 则所有公式中的 U 都应改为 $-U$, 结果得到的不是力图推开平板的支撑力, 而是将平板压向平面的反向力。

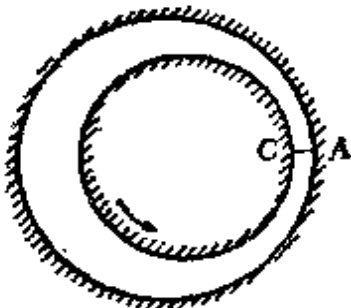


图 9.11.3

上述近似结果可用来解释轴承在轴套中运动时, 润滑油的作用。如图9.11.1所示, I与II两部分分别受到垂直壁面的合压力 P_I 及 P_{II} , 而且 P_I 与 P_{II} 反向。这两个力和载荷不能平衡, 于是轴承在它们的作用下将向右移动, 一直到 AC 近似地处于水平位置, 合压力

和外载荷平衡时为止(图9.11.3)。

在上述理论计算中我们假设是二维运动, 事实上轴承在 z 方向的尺度是有限的, 由于压力在 z 方向上的减少人们发现支撑力较二维情形将有显著的减少。其次在计算中假设粘性系数是常数, 这显然是一种近似。由于摩擦生热, 润滑油的温度是在升高的, 随之油的粘度和支撑力将急剧地减低。

随着高速和高温(低粘度)的出现, $Re\epsilon^2$ 可以接近甚至超过1, 这就意味着惯性力变得和粘性力可以比拟, 一级近似即完全忽略惯性力的做法须要进行修正。可以采用类似于求奥新解的逐次逼近法来改进它。根据一级近似计算出被忽略的惯性力, 然后放入二级近似的方程作为外力, 再找出二级近似的解。卡兰尔特(Kahlert)完成了这样的计算, 他发现一直到 $Re\epsilon^2=5$, 惯性修正不超过10%。

上述理论可推广到两偏心圆柱间的粘性流体运动和有 z 方向速度分量的三维流动中去。

(C) 湍流运动

9.12 雷诺方程

上面已经说过，粘性流体运动有层流和湍流这两种性质绝然不同的运动形态，两种运动形态在一定条件下可以相互转化。雷诺对圆管内的粘性流体运动进行实验发现层流转化为湍流的条件是雷诺数的数值。当雷诺数到达临界值时就发生层流转化为湍流这一量变过渡到质变的飞跃过程。而且临界值不是固定不变的，它依赖于外部扰动条件。实验证明，临界值有一下界约为2000，当 $Re < 2000$ 时，不管外部扰动多小，管内的流动保持稳定的层流状态。但是上界却是没有限制的，改善实验条件可以不断地予以提高。

除圆管外在边界层内也存在两种不同运动形态及其转化。参照圆管情形作雷诺数 $Re_\delta = \delta U / \nu$ ，其中 U 是边界层外部位势流动的速度，相当于圆管的流速； δ 是边界层的厚度，相当于圆管的直径； ν 是流体的粘性系数。对于平板边界层进行了大量实验，发现在平板的前部即 Re_δ 不大时，边界层的厚度及阻力系数与层流边界层理论计算出来的结果相符合，说明边界层处在层流状态。从某一截面开始 Re_δ 到达某一数值，实验测量出来的边界层的厚度及阻力突然增加，此时边界层内的流动显然已不是层流而是湍流了。从层流过渡到湍流的雷诺数称为临界雷诺数，对应于临界雷诺数的坐标点 x 称为转换点。由此可见，平板边界层中，转换点前是层流边界层，转换点后则是湍流边界层，而在转换点附近有一段很短的过渡区。和圆管情形相似，临界雷诺数不是一个固定的常数值，它依赖于实验的外部扰动条件。最小的临界雷诺数约为3500。当 $Re < 3500$ 时，边界层处在稳定的层流形态，外部扰动不管多大不能促使其转化为湍流运动。临界雷诺数没有上

界，当外部扰动尽量减少时可以到达很高的数值，在现有实验水平下已达到9300。

湍流运动中每一点的速度有一平均值。不同时刻的速度在平均速度附近作不大的但急促的跳跃。真实速度和平均速度之差称为脉动速度或称涨落。从频率分析知道，脉动的频率在每秒 10^2 到 10^5 之间，振幅小于平均速度的百分之十。脉动能量虽小，但对流动却起决定性作用。在湍流运动中，宏观的流体质点团之间通过脉动相互剧烈地交换着质量、动量和能量，从而产生了湍流扩散，湍流摩阻和湍流热传导，它们的强度比起分子运动所引起的扩散，摩阻和热传导要大得多。由于上述特性，当湍流一旦发生之后，其运动性质就和层流不大相同。对管流来说，当运动处于层流状态，速度分布是抛物型，平均速度是最大速度的一半，而维持这种运动的压力梯度与平均速度一次方成正比。当运动过渡到湍流时，由于激烈掺混的结果，管内速度几乎是一常数，只有在管壁

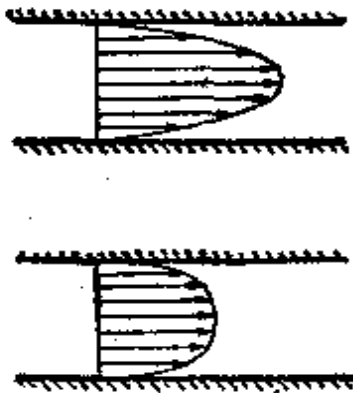


图 9.12.1

附近才出现极大的速度梯度（见图 9.12.1），形成对数型曲线，这时平均速度约为最大速度的80%，90%左右，而压力梯度几乎与速度平方成正比。这是由于湍流摩阻额外损耗大量动能所致。从速度剖面的斜率比层流为大也可看出。对于边界层来说，湍流的特征也表现在速度在板面附近的迅速上升，这就意味着阻力加大。而且由于湍流边界层

内的流体与外流相互掺混，使层内受阻流体增多，所以边界层的厚度也要比层流大。

利用湍流的性质也可以解释圆球阻力突然下降的原因。实验表明，当 $Re = Ud/\nu = 3 \times 10^5$ 左右时（ U 是来流速度， d 是圆球直径），圆球的阻力会突然下降，如图 9.12.2 所示。这个反常现象可这样解释：

当 $Re < 3 \times 10^5$ 时, 边界层是层流状态, 脱体点在 80° 左右; 当 $Re > 3 \times 10^5$ 时, 转捩点前移到脱体点之前, 这时在脱体点附近已是湍流边界层, 由于层内和层外流体通过脉动发生强烈的动量交换, 所以动量较大的边界层外部流体将有力地帮助层内流体克服逆压和粘性滞止作用而向前运动, 这样就可以推迟

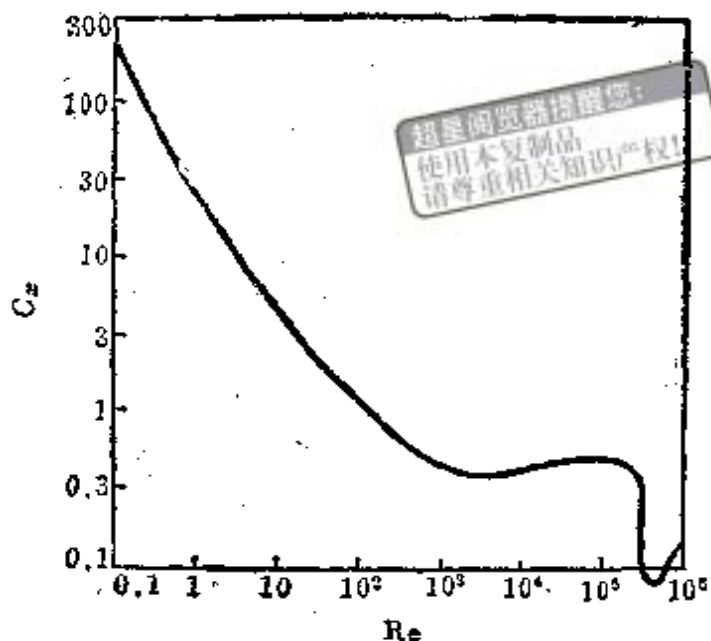


图 9.12.2

脱体现象产生, 使脱体点后移至 116° 左右的地方, 从而缩小了尾涡区, 使压差阻力大大减小. 虽然湍流边界层的摩阻较层流大, 但压差阻力的减小大大超过摩阻的增大, 因此总阻力仍急剧下降.

湍流是自然界和工程中最普遍存在的流体运动. 无论是江河海洋的水流或是天空中的气流, 无论是管渠流动或是边界层内的流动, 多半都是湍流运动. 因此研究湍流运动的重要性是十分清楚的.

湍流理论研究主要有两方面的问题: (1) 研究湍流产生的原因; (2) 研究已经形成的湍流运动的规律. 下面我们先讨论第二类问题.

我们知道, 湍流运动极不规则, 极不稳定, 每一点的速度随时间和空间随机地变化着. 对于这类随机现象, 人们对每点的真实速度并不感兴趣, 而把注意力集中在平均运动上. 我们把流场中任一点的瞬时物理量看作是平均值和脉动值之和, 然后应用统计平均的方法从纳维-斯托克斯方程出发, 研究平均运动的变化规律. 工程中感兴趣的和实验测量出来的物理量(如速度, 摩阻等)

也都是平均意义下的数值，因此这样的处理方法完全能满足实际的需要。

下面我们对物理量的平均值下定义，研究平均运算的法则。在此基础上推导平均运动满足的方程组。

对物理量作平均化运算时可以取对时间的平均，也可以取对空间体积的平均；也可以两者一起平均。对时间的平均值比较容易通过实验测量，因此下面我们采用对时间的平均。设 $f(x, y, z, t)$ 代表任一物理量，定义函数 \bar{f} 为物理量 f 对时间的平均值

$$\bar{f}(x, y, z, t) = \frac{1}{T} \int_{t-(T/2)}^{t+(T/2)} f(x, y, z, \tau) d\tau \quad (9.12.1)$$

其中 T 称为平均周期，它是一个常数。一方面应比湍流的脉动周期大得多，以便得到稳定的平均值，另一方面又要比流动作不定常运动时的特征时间小得很多。引进平均物理量 \bar{f} 后， f 可表成

$$f = \bar{f} + f' \quad (9.12.2)$$

f' 称为物理量相对平均值而言的脉动（或涨落）。

平均化运算具有下列法则：

$$1) \quad \overline{\bar{f}} = \bar{f} \quad (9.12.3)$$

若平均值 \bar{f} 与时间无关即平均运动是定常的则上式显然正确。若 \bar{f} 依赖于时间，则由于平均周期 T 比特征时间小得很多，因此在这段时间内可以近似地认为 \bar{f} 不改变。这样我们有 $\overline{\bar{f}} = \bar{f}$ 。

$$2) \quad \overline{\bar{f} \cdot g} = \bar{f} \cdot \bar{g} \quad (9.12.4)$$

$$\overline{\bar{f} \cdot g} = \frac{1}{T} \int_{t-(T/2)}^{t+(T/2)} \bar{f} \cdot g d\tau$$

因为 \bar{f} 在平均周期 T 内可认为不变，于是

$$\overline{\bar{f} \cdot g} = \bar{f} \frac{1}{T} \int_{t-(T/2)}^{t+(T/2)} g d\tau = \bar{f} \cdot \bar{g}$$

$$3) \quad \overline{\bar{f} + g} = \bar{f} + \bar{g} \quad (9.12.5)$$

$$\overline{f+g} = \frac{1}{T} \int_{t-(T/2)}^{t+(T/2)} (f+g) d\tau$$

$$= \frac{1}{T} \int_{t-(T/2)}^{t+(T/2)} f d\tau + \frac{1}{T} \int_{t-(T/2)}^{t+(T/2)} g d\tau = \overline{f} + \overline{g}$$

$$4) \overline{f'} = 0 \quad (9.12.6)$$

由(9.12.2)式 $f' = f - \overline{f}$, 于是由(9.12.5)式及(9.12.3)式有

$$\overline{f'} = \overline{f - \overline{f}} = \overline{f} - \overline{\overline{f}} = \overline{f} - \overline{f} = 0$$

$$5) \overline{f \cdot g} = \overline{f} \cdot \overline{g} + \overline{f' \cdot g'} \quad (9.12.7)$$

$$\overline{f \cdot g} = \overline{(\overline{f} + f')(\overline{g} + g')} = \overline{\overline{f} \overline{g} + f' \overline{g} + \overline{f} g' + f' g'}$$

$$= \overline{\overline{f} \cdot \overline{g}} + \overline{f' \cdot \overline{g}} + \overline{\overline{f} \cdot g'} + \overline{f' \cdot g'}$$

$$= \overline{f} \cdot \overline{g} + \overline{f' \cdot g'}$$

$$6) \frac{\partial \overline{f}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \overline{f}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \overline{f}}{\partial z} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial z} \quad (9.12.8)$$

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial x} = \frac{1}{T} \int_{t-(T/2)}^{t+(T/2)} \frac{\partial f}{\partial x} d\tau = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{T} \int_{t-(T/2)}^{t+(T/2)} f d\tau \right] = \frac{\partial \overline{f}}{\partial x}$$

同理可以证明后面两个式子.

$$7) \frac{\partial \overline{f}}{\partial t} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial t} \quad (9.12.9)$$

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{T} \int_{t-(T/2)}^{t+(T/2)} f(x, y, z, \tau) d\tau \right]$$

$$= \frac{1}{T} \left[f\left(x, y, z, t + \frac{T}{2}\right) - f\left(x, y, z, t - \frac{T}{2}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{T} \int_{t-(T/2)}^{t+(T/2)} \frac{\partial f}{\partial \tau} d\tau = \frac{\partial \overline{f}}{\partial t}$$

现在我们从纳维-斯托克斯方程出发,利用平均化运算的法则推导平均物理量满足的方程组.

我们只考虑不可压缩流体情形,假设体力可以忽略,此时,纳维-斯托克斯方程具有下列形式

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (9.12.10)$$

利用(9.12.10)式中的连续性方程,运动方程可改写为

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (9.12.11)$$

对方程组(9.12.11)中各式的两边进行平均化运算,并且利用(9.12.5), (9.12.7), (9.12.8)及(9.12.9)等式我们得到

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \Delta \bar{u} \end{aligned} \right.$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v \quad (9.12.12)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$$

考虑到(9.12.12)的第四式，方程组(9.12.12)中的头三个方程可改写成另一种形式，把脉动项移至右边，最后我们得到

$$\left\{ \begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \\ & = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \Delta \bar{u} + \frac{\partial (-\rho \overline{u'^2})}{\partial x} + \frac{\partial (-\rho \overline{u'v'})}{\partial y} + \frac{\partial (-\rho \overline{u'w'})}{\partial z} \\ & \rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) \\ & = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \Delta \bar{v} + \frac{\partial (-\rho \overline{u'v'})}{\partial x} + \frac{\partial (-\rho \overline{v'^2})}{\partial y} + \frac{\partial (-\rho \overline{v'w'})}{\partial z} \\ & \rho \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) \\ & = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \Delta \bar{w} + \frac{\partial (-\rho \overline{u'w'})}{\partial x} + \frac{\partial (-\rho \overline{v'w'})}{\partial y} \\ & \quad + \frac{\partial (-\rho \overline{w'^2})}{\partial z} \\ & \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \end{aligned} \right. \quad (9.12.13)$$

如果我们将上式和应力形式的运动方程对比

$$\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \text{div } \bar{P}$$

其中 \bar{P} 是应力张量, 则我们发现

$$\bar{P} = -\bar{p}I + 2\mu\bar{S} + P'$$

其中 I 是单位张量; \bar{S} 是平均运动的变形速度张量; P' 是对称的两阶张量, 它的表达式如下:

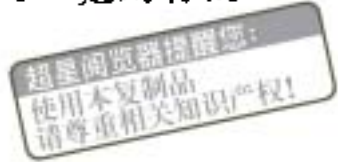
$$P' = \begin{bmatrix} \tau'_{xx} & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{yx} & \tau'_{yy} & \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} & \tau'_{zy} & \tau'_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho \overline{u'^2} & -\rho \overline{u'v'} & -\rho \overline{u'w'} \\ -\rho \overline{u'v'} & -\rho \overline{v'^2} & -\rho \overline{v'w'} \\ -\rho \overline{u'w'} & -\rho \overline{v'w'} & -\rho \overline{w'^2} \end{bmatrix}$$

(9.12.14)

我们看出, 在湍流运动中除了平均运动的粘性应力而外, 还多了一项由于脉动所引起的应力, 这种新型应力称为湍应力或雷诺应力。

这样可以得到下列结论: 如果我们在粘性应力之外还加上补充的湍应力, 则平均流动元所满足的运动方程可以写成和粘性流体运动方程组相同的形式. 平均流动元所满足的方程(9.12.13)称为雷诺方程。

应该强调指出, 方程组(9.12.13)是不封闭的. 方程的个数只有四个, 而未知函数却有十个, 即 \bar{v} , \bar{p} 及六个湍应力分量. 为了使方程组封闭, 必须在湍应力及平均速度之间建立补充关系式, 这方面的理论工作主要沿着两个方向进行. 一个方向是湍流的统计理论, 试图利用统计数学的方法及概念来描绘流场, 探讨脉动元的变化规律, 研究湍流内部的结构从而建立湍流运动的封闭方程组. 迄今为止只是在均匀各向同性湍流理论方面获得了一些比较满意的结果, 但距离应用于实际问题还相差甚远. 另一个方



向是湍流的半经验理论，它是根据一些假设及实验结果建立湍应力和平均速度之间的关系从而建立起封闭方程组。半经验理论在理论上具有很大的局限性及缺陷，但在一定条件下往往能够得出与实际符合的较满意的结果，因此在工程技术中得到广泛的立用。下面我们只讲半经验理论，关于湍流的统计理论读者可以阅读相应的专著。

9.13 普朗特混合长理论. 无界固壁上的湍流运动

这一节我们介绍一个最古老也是最重要的半经验理论，它是1925年普朗特提出的，称为普朗特混合长理论。

现在中心问题是建立雷诺应力和平均速度之间的关系从而得到封闭的运动方程组。湍应力是由于宏观流体团的脉动引起的，它和分子微观运动引起粘性应力的情况十分相似。因此，自然地会联想到是否可以借用分子运动论中建立粘性应力和速度梯度之间的关系的方法来研究湍流中雷诺应力和平均速度之间的关系。下面让我们遵循这条思路介绍混合长理论。

为了简单起见，我们只限于考虑湍流的平均运动是平面平行定常运动的情形，此时

$$\bar{u} = \bar{u}(y), \quad \bar{v} = \bar{w} = 0$$

在湍流运动中普朗特引进了一个与分子平均自由路程相当的长度 $l'/2$ ，并假设在 $l'/2$ 距离内流体团将不和其他流体团相碰，因而保持自己的物理属性（例如保持动量不变）。只是在走了 $l'/2$ 这么长的距离后才和那里的流体团掺混，改变了自己的动量。

在流体中取两个平行 x 轴的流

体层，其边界分别为 $(y + \frac{l'}{2}, y)$ ， $(y, y - \frac{l'}{2})$ （见图9.13.1）。

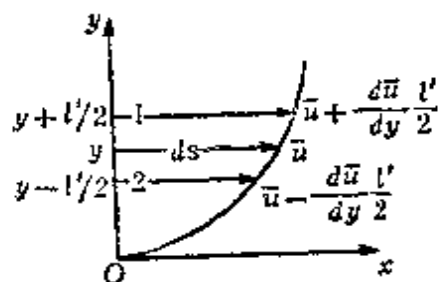


图 9.13.1

由于 y 方向存在脉动速度分量 v' , y 截面上上下两层流体 1 与 2 之间将交换动量因而产生湍应力。这里 y 方向的脉动速度 v' 相当于分子运动论中的平均速度 c 。设 1 层的流体团, 由于脉动的结果, 以 $v' < 0$ 的速度沿 y 轴向下移动了距离 $l'/2$ 落到 2 层, 此时它和 2 层内的流体团相碰传递了动量, 使 2 层得到 $\rho v' \left[\bar{u} - \frac{d\bar{u}}{dy} \frac{l'}{2} \right]$ 的动量; 另一方面, 2 层内的流体团由于脉动速度 $v' > 0$, 移动了 $l'/2$ 落入 1 层, 使其失去 $\rho v' \left[\bar{u} - \frac{d\bar{u}}{dy} \frac{l'}{2} \right]$ 的动量。这样, 单位时间内和单位面积上流体层 2 内动量改变对时间的平均值为

$$\begin{aligned} & \overline{\rho v' \left[\bar{u} + \frac{d\bar{u}}{dy} \frac{l'}{2} \right] - \rho v' \left[\bar{u} - \frac{d\bar{u}}{dy} \frac{l'}{2} \right]} \\ & = \overline{\rho v' l' \frac{d\bar{u}}{dy}} \end{aligned}$$

于是

$$\tau'_{xy} = -\overline{\rho u' v'} = \overline{\rho v' l' \frac{d\bar{u}}{dy}} = \rho \overline{v' l'} \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (9.13.1)$$

这里利用了性质(9.12.4), 由此得

$$u' = l' \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (9.13.2)$$

和粘性应力情形一样, 令

$$A = \overline{\rho v' l'}, \quad \epsilon = \overline{v' l'} \quad (9.13.3)$$

于是

$$\tau'_{xy} = A \frac{d\bar{u}}{dy} = \rho \epsilon \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (9.13.4)$$

A 和 ϵ 分别称为湍流粘性系数和动湍流粘性系数, 或称为湍流交换系数和动交换系数。实验表明, 除了固壁附近而外, 湍流交换系数较粘性系数大上万倍, 因此在一般情形下湍应力起主导作

用。

为了将脉动速度 v' 也和平均速度联系起来，普朗特进一步假定 u' 和 v' 同阶，即

$$u' \sim v' \quad (9.13.5)$$

由(9.13.2)式有

$$v' \sim l' \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (9.13.6)$$

这个假定的合理性可以从下述直观考虑加以理解，设两个流体团由于横向脉动速度 v' 的作用分别从 $y+l'$ ， $y-l'$ 进入 y 层。

$y+l'$ 层内流体团的速度是 $\bar{u} + \frac{d\bar{u}}{dy} l'$ ，进入 y 层后，使 y 层内流体产生沿 x 轴正方向的脉动速度

$$u' = \frac{d\bar{u}}{dy} l'$$

同样地， $y-l'$ 层内流体团在进入 y 层后使 y 层流体产生沿 x 轴负方向的脉动速度

$$u' = \frac{d\bar{u}}{dy} l'$$

这样，这两个流体团就以相对速度 $2u'$ 向相反的方向运动。远离的结果就使得一部分空间空了出来。为了填补这个空间，四周流体纷纷流来，于是便产生了脉动速度 v' 。从刚才叙述的脉动速度分量 v' 的产生过程容易理解 v' 是和 u' 成正比的，因为 u' 愈大，空出来的空间愈大，填空的过程进行的速度也愈快，即 v' 愈大。

将(9.13.5)式代入(9.13.1)式得

$$\tau'_{xy} \sim \rho l'^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2$$

或写成

$$\tau'_{xy} = \rho \beta l'^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2$$

其中 β 是比例常数。令 $l^2 = \beta l'^2$ ， l 称为混合长，则有

$$\tau'_{xy} = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 \quad (9.13.7)$$

因为 τ'_{xy} 与 $\frac{d\bar{u}}{dy}$ 同号, 为了使得等式两边符号一致, 上式应改写为

$$\tau'_{xy} = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (9.13.8)$$

其中混合长 l 目前还是不确定的量, 它将在不同的具体问题中通过新的假定及实验结果再来决定。

下面利用普朗特的混合长理论处理无界固壁附近的湍流运动。

设无界平板 AB 上充满着不可压缩粘性流体, 流体在等压条件下沿板面方向作定常湍流运动。若板面上的切应力 τ_w 已知, 求湍流运

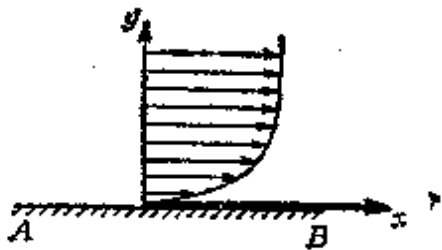


图 9.13.2

动的速度分布。

取板上任一点为坐标原点, x 轴与平板重合, y 轴垂直于平板且指向流体内部, 如图9.13.2所示。显然平均运动与 x 无关, 即 $\bar{u} = \bar{u}(y)$ 。动量传递仅在 y 方向进行。此时雷诺方程简化为

$$\mu \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} + \frac{d\tau'_{xy}}{dy} = 0$$

这里为了方便起见已将平均物理量上的横线“—”省略, 其中

$$\tau'_{xy} = -\rho \overline{u'v'} \quad (9.13.9)$$

积分后得

$$\mu \frac{d\bar{u}}{dy} + \tau'_{xy} = C$$

其中 C 是积分常数。在板面 $y=0$ 上 $u' = v' = 0$, 且

$$\tau = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} = \tau_w$$

于是 $C = \tau_w$ ，代入上式后有

$$\mu \frac{du}{dy} + \tau'_{xy} = \tau_w \quad (9.13.10)$$

下面应区分两种不同区域求方程(9.13.10)式的解。

1) 在固壁附近的区域内，那里 τ'_{xy} 很小(在固壁上等于零)，而 $\mu \frac{du}{dy}$ 取较大的值。因此粘性应力起主导作用，可以忽略 τ'_{xy} 。此时粘性流体运动处在层流状态，称为层流子层。这个区域的尺度非常小。

2) 在层流子层外部区域内，那里 τ'_{xy} 较 $\mu \frac{du}{dy}$ 大几万倍，因此可以完全忽略粘性应力的作用，流动处于完全的湍流状态，这个区域称为湍流核心区。

在层流子层及湍流核心区之间有一个过渡区，这里粘性应力和湍应力起同等重要的作用。当雷诺数很大时，过渡区的尺寸很小，可以忽略不计，此时可认为层流子层和湍流核心区在边界上直接相连。下面分别求层流子层区和湍流核心区内的解。

1) 层流子层区

方程组(9.13.10)简化为

$$\mu \frac{du}{dy} = \tau_w$$

积分之得

$$u = \frac{\tau_w}{\mu} y + C_1$$

考虑到边界条件 $y=0, u=0$ 后得积分常数 $C_1=0$ ，于是

$$u = \frac{\tau_w}{\mu} y \quad (9.13.11)$$

为了方便将(9.13.11)式写成无量纲形式。为此引进特征速度 U_* 及特征长度 l_* 。它们由下式确定

$$U_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad l_* = \frac{\nu}{U_*} = \sqrt{\frac{\nu}{\tau_w/\rho}} \quad (9.13.12)$$

这样(9.13.11)式可改写为

$$\frac{u}{U_*} = \frac{y}{l_*} \quad (9.13.13)$$

设 δ_e 是层流子层与湍流核心区的边界, 其上的速度是 u_e , 则由(9.13.13)式有

$$\frac{u_e}{U_*} = \frac{\delta_e}{l_*} = \alpha, \quad u_e = U_* \alpha, \quad \delta_e = l_* \alpha \quad (9.13.14)$$

此式说明 u_e, δ_e 中只有一个待定的未知量 α .

2) 湍流核心区

方程组(9.13.10)简化为

$$\tau'_{xy} = \tau_w$$

利用普朗特混合长理论的结果, 即(9.13.7)式我们有

$$\rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 = \tau_w$$

由(9.13.12)式得

$$l \frac{du}{dy} = U_* \quad (9.13.15)$$

现在需要根据问题的特点对混合长 l 作假设. 根据观察, 普朗特假设 l 不受粘性影响, 则唯一有长度量纲的量是 y , 于是十分自然地假设

$$l = \chi y \quad (9.13.16)$$

其中 χ 是待定的比例常数. 当 $y=0$ 得 $l=0$, 即 $\tau'_{xy}=0$. 这是和固壁上湍应力等于零的物理事实吻合的.

将(9.13.16)式代入(9.13.15)式得

$$\frac{du}{dy} = \frac{U_*}{\chi} \frac{1}{y}$$

积分之得

$$u = \frac{U_*}{\chi} \ln y + C_2$$

在湍流核心区与层流子层区接壤的边界 $y = \delta_r$ 上, $u = u_r$. 由此可定出 C_2 , 它等于

$$C_2 = u_r - \frac{U_*}{\chi} \ln \delta_r$$

代入上式得

$$u - u_r = \frac{U_*}{\chi} \ln \frac{y}{\delta_r}$$

将(9.13.14)式中 u_r, δ_r 的表达式代入得

$$u - \alpha U_* = \frac{U_*}{\chi} \ln \frac{y}{l_* \alpha}$$

或改写为

$$\frac{u}{U_*} = \frac{1}{\chi} \ln \frac{y U_*}{\nu} + \alpha - \frac{1}{\chi} \ln \alpha \quad (9.13.17)$$

上式包含两个待定常数 χ 及 α , 它们将由实验确定.

(9.13.17)式表明, 湍流核心区内速度剖面是对数曲线, 这样的速度剖面称为对数速度剖面, 它和层流流动中速度剖面是直线在结构上有很大的不同.

上面研究的无界固壁附近的湍流运动是一种理想化了的情形, 实际上并不存在, 它只是固壁附近流动的一种近似表示(其他壁面的影响可忽略). 虽然如此, 它所揭示出来的湍流区域中“对数速度分布”却具有普遍意义. 大量实验证明, 不仅管、槽 ($\frac{dp}{dx} \neq 0$) 内的速度分布满足这个规律, 而且二维湍流边界层内的速度分布也大体具有这种形式.

9.14 圆管内的湍流运动

在工程中遇到的不同湍流运动中，圆管内的流动具有特别重大的实际意义。这不仅因为它在工程中应用得非常广泛，而且也因为它所揭示的规律对于理解更复杂条件下的湍流运动也很有帮助。

现在考虑离进口截面较远，速度剖面已经稳定不变的圆管内的湍流运动。圆管直径 d ，流体的密度 ρ ，粘性系数 ν 都是已知的，此外，还知道流量 Q 。现在要求速度剖面形状和阻力系数。

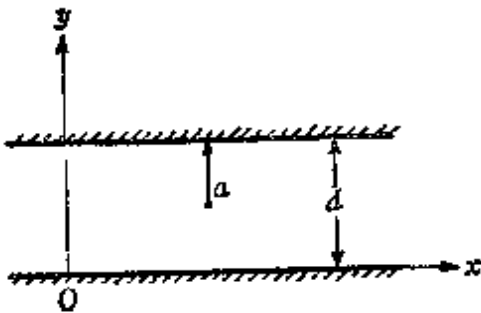


图 9.14.1

取如图9.14.1所示的直角坐标系。

分两步讨论。先研究光滑圆管中的湍流运动，然后再研究粗糙度的影响。

a) 光滑圆管中的湍流运动

1) 速度剖面

尼古拉才(Nikuradse)对不可压缩粘性流体在细长光滑圆管内的湍流运动进行了大量的实验研究。实验结果表明，圆管中湍流核心区的速度分布和无界固壁附近的速度分布(9.13.17)式完全一样，也是对数形式的速度剖面。如果取 $\kappa=0.4, \alpha=11.5$ ，并将自然对数换成以10为底的对数，则(9.13.17)式取下列形式

$$\frac{u}{U_*} = 5.75 \log \frac{yU_*}{\nu} + 5.5 \quad (9.14.1)$$

这时，上式和实验结果几乎完全重合。只是在

$$\log \frac{yU_*}{\nu} = 1$$

附近对数剖面与实验结果相差较远，说明那里已是过渡区与层流子层区了(见图9.14.2)。

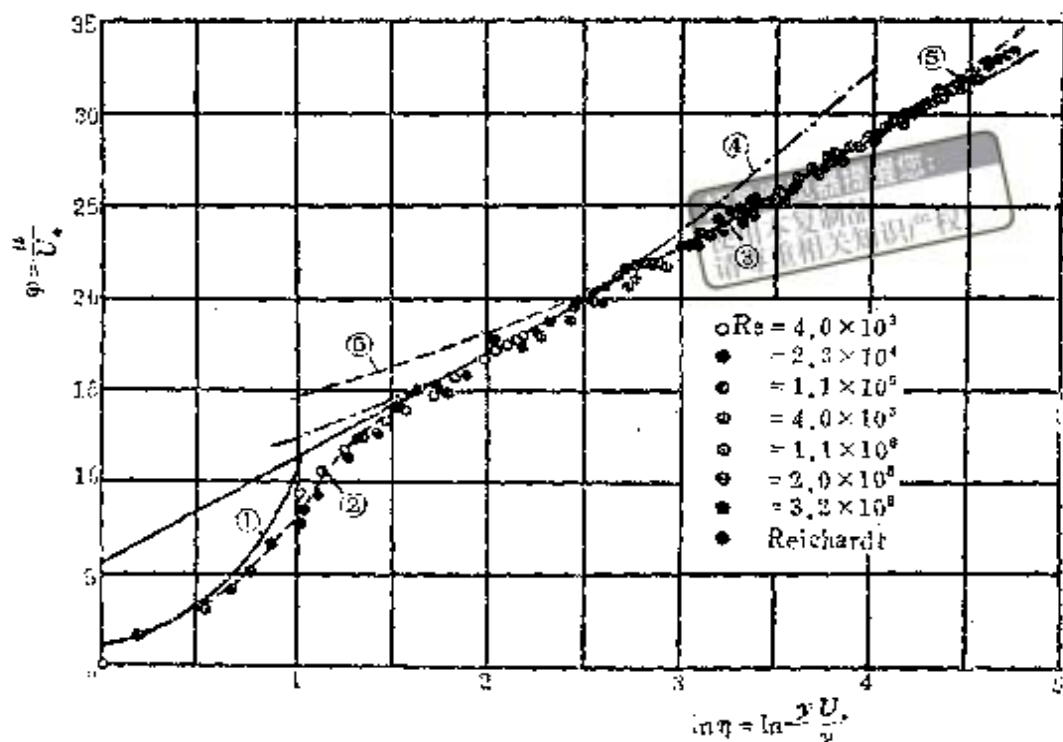


图 9.14.2

必须强调指出，(9.14.1)是通用的速度剖面，它对所有的雷诺数都是适用的。此时粘性和雷诺数的影响已经完全包含在 U_* 与 l_* 中去了。

(9.14.1)中的 $U_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$ 目前是未知的量，它需要通过已知量 $u_{\text{平}}$ (即 Q) 表示出来。

2) $u_{\text{平}}$ 与 U_* 的关系

根据平均速度的定义，我们有

$$\begin{aligned} u_{\text{平}} &= \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a u \cdot 2\pi(a-y) dy \\ &= \int_0^a 2u \left(1 - \frac{y}{a}\right) d \frac{y}{a} \end{aligned}$$

因为层流子层和过流区非常小，所以在求 $u_{\text{平}}$ 时可以用对数剖面 (9.14.1) 代替真实剖面，产生的误差可忽略不计。

将(9.14.1)代入得

$$\begin{aligned} \frac{u_{\text{平}}}{U_*} &= \frac{2}{\chi} \int_0^a \left(\log \frac{yU_*}{\nu} \right) \left(1 - \frac{y}{a} \right) d \frac{y}{a} + 5.5 \\ &= \frac{1}{\chi} \log \frac{aU_*}{\nu} + 5.5 + \frac{2}{\chi} \int_0^a \left(\log \frac{y}{a} \right) \left(1 - \frac{y}{a} \right) d \frac{y}{a} \\ &= 5.75 \log \frac{aU_*}{\nu} + 5.5 - 3.75 \end{aligned}$$

即

$$\frac{u_{\text{平}}}{U_*} = 5.75 \log \frac{aU_*}{\nu} + 1.75 \quad (9.14.2)$$

这就是 $u_{\text{平}}$ 与 U_* 的关系。此外，由(9.14.1)式求出管轴上的最大速度 u_{max} 为

$$\frac{u_{\text{max}}}{U_*} = 5.75 \log \frac{aU_*}{\nu} + 5.5$$

将它与(9.14.2)式相减得

$$\frac{u_{\text{max}} - u_{\text{平}}}{U_*} = 3.75 \quad (9.14.3)$$

这个最大速度和平均速度之间的关系与实验结果符合得很好（见图9.14.3）。

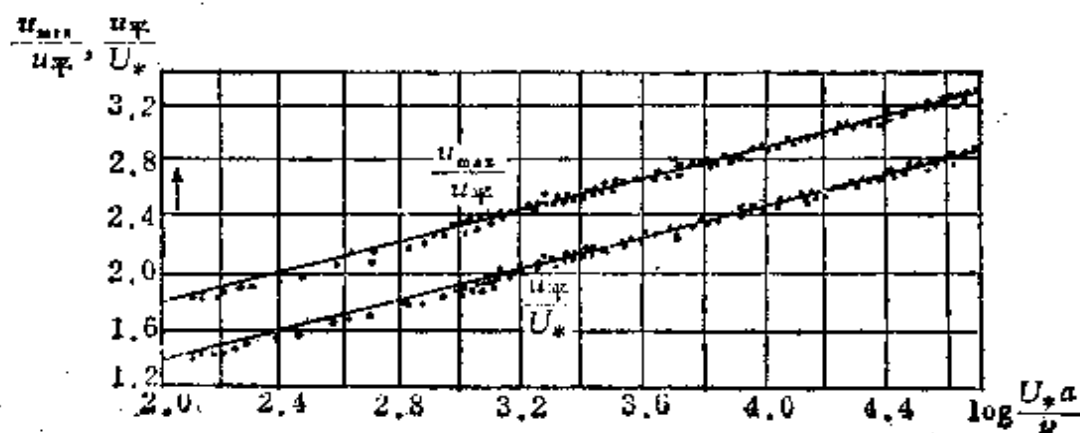


图 9.14.3

在 9.6 节中我们看到, 在层流中 $u_{\max}/u_{\text{平}} = 2$. 而在湍流中, 这个比值随着雷诺数的增加而减小, 由小雷诺数时的 1.3 ($Re \sim 5000$) 到较大雷诺数时的 1.15 ($Re \sim 3000000$). 因此湍流情况下的速度剖面比层流时要饱满得多, 而且饱满的程度随雷诺数的增加而增加, 这可以从图 9.14.4 中十分清楚地看出来.

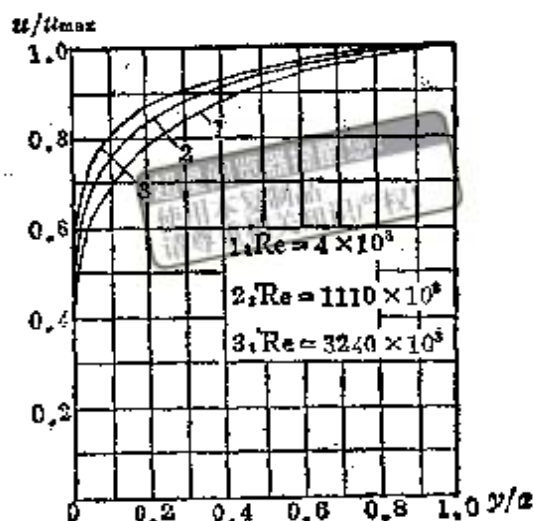


图 9.14.4

3) 阻力公式

与 9.6 节类似地, 我们引进过圆管的阻力系数

$$\lambda = \frac{|\tau_{\max}|}{\frac{1}{2} \rho u_{\max}^2} = \frac{\Delta p}{l} \frac{2d}{\rho u_{\text{平}}^2}$$

根据 x 方向力的平衡, Δp 和 τ_w 之间存在着下列关系

$$\Delta p \cdot \pi a^2 = 2\pi a l \tau_w$$

即

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{2\tau_w}{a}$$

所以

$$\lambda = \frac{8\tau_w}{\rho u_{\text{平}}^2} = 8 \frac{U_*^2}{u_{\text{平}}^2}$$

或

$$\frac{u_{\text{平}}}{U_*} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}} \quad (9.14.4)$$

将(9.14.2)式代入, 经过简化后得

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.035 \log (Re \sqrt{\lambda}) - 0.91 \quad (9.14.5)$$

其中 $Re = du_{\pi}/\nu$. 实验结果给出

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log (Re \sqrt{\lambda}) - 0.8 \quad (9.14.6)$$

可见两者相当符合. (9.14.6)通常称为普朗特公式, 它是隐函数形式. 为了能将 λ 表成 Re 的显式, 尼古拉才建议下列经验公式

$$\lambda = 0.0032 + \frac{0.221}{Re^{0.237}} \quad (9.14.7)$$

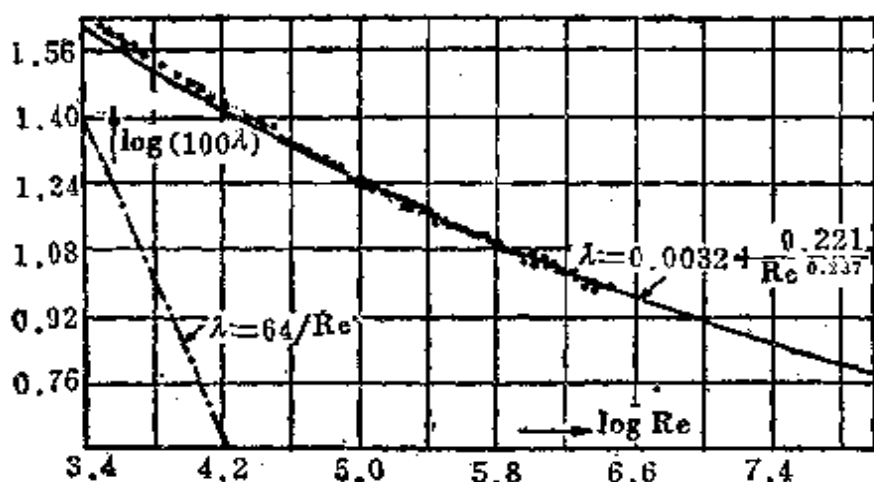


图 9.14.5

它和实验结果很符合 (参看图 9.14.5). 在 $Re < 10^5$ 的范围内, 此式和水力学中广泛使用的公式

$$\lambda = \frac{0.3164}{Re^{0.25}} \quad (9.14.8)$$

很接近.

4) 计算步骤

(1) 根据所给体积流量 Q , 定出 u_{π} , 作雷诺数

$$Re = \frac{u_{\pi} d}{\nu}$$

(2) 由(9.14.5)式或(9.14.7)式求出阻力系数 λ ;

(3) 知道 u_{π} 及 λ 后, 利用(9.14.4)式求出 U_* , 于是速度剖

面(9.14.1)就可求出,

(4) 管长为 l 的压力降可用下式算出

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho u_{\text{平}}^2}{2}$$

在圆管流动中,除了应用上述对数速度剖面而外,还常常利用纯经验的幂次剖面.例如当 $Re < 1000000$ 时,下述很方便的 $1/7$ 幂次公式

$$\frac{u}{U_*} = 8.74 \left(\frac{y U_*}{\nu} \right)^{1/7} \quad (9.14.9)$$

和实验结果符合得很好.随着雷诺数的增大,速度 u 与 $y U_* / \nu$ 的 $1/8, 1/9, 1/10$ 次幂成正比.幂次剖面的优点在于它使用起来很方便,它的缺点主要是不通用,随着雷诺数的变化要选用不同的幂次.

下面推导与 $1/7$ 幂次剖面(9.14.9)相对应的阻力公式.利用(9.14.9)式我们有

$$\begin{aligned} \tau_w = \rho U_*^2 &= (8.74)^{-7/4} \rho u^{7/4} \left(\frac{\nu}{y} \right)^{1/4} \\ &= 0.0225 \rho u^2 \left(\frac{\nu}{u y} \right)^{1/4} \end{aligned}$$

把这个公式用到管轴处,那里 $y = a, u = u_{\text{max}}$. 于是

$$\frac{\tau_w}{\rho u_{\text{max}}^2} = 0.0225 Re_{\text{max}}^{-1/4} \quad (9.14.10)$$

其中 $Re_{\text{max}} = u_{\text{max}} a / \nu$, 上式称为布拉修斯阻力公式.它在 $Re < 1000000$ 时与实验很符合.

完全同样地可推出,和 $1/8, 1/9$ 幂次剖面相对应的阻力公式.式中的幂次分别为 $-2/9, -1/5$.

b) 粗糙圆管中的湍流运动

上面讨论了光滑圆管中的湍流运动.实际圆管的管壁不会是绝对光滑的,或多或少都有些粗糙度.因此有必要研究一下粗糙

度对圆管中湍流运动的影响。为了讨论方便起见，我们把粗糙度的概念加以理想化，认为粗糙壁面由差不多同一尺寸的颗粒组成。用 k (以毫米计) 表示粗糙峰的平均高度，称为绝对粗糙度，而把 k 与管径 a 之比 k/a 称为相对粗糙度。尼古拉才对于内表面由沙粒组成的粗糙管进行了大量细致的实验，对于相对粗糙度从 0.2% 到 5% 的各种情形测出了阻力系数和速度剖面。图 9.14.6 画出了以相对粗糙度的倒数 a/k 为参数的阻力曲线图。从图上可以看出：

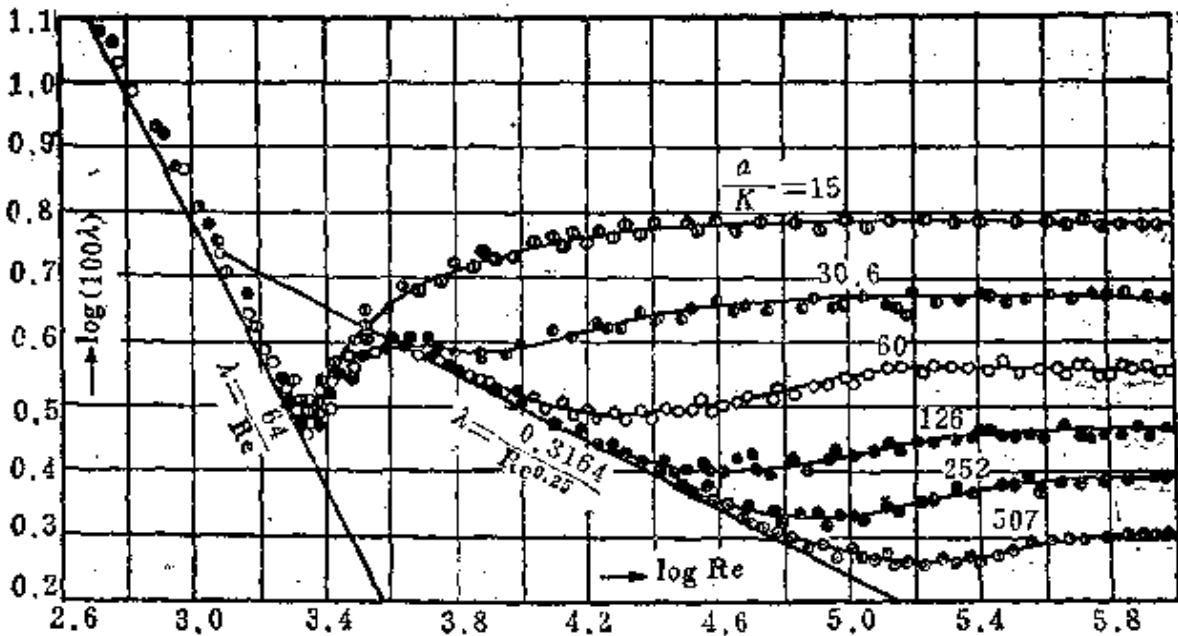


图 9.14.6

- 1) 在层流区，粗糙圆管和光滑圆管的阻力系数相同；
- 2) 在过渡区，临界雷诺数与粗糙度无关（约为 2000 左右），过渡状态也几乎和相对粗糙度无关；

3) 在湍流区，对于每一个相对粗糙度，都有一个区域（对应较小雷诺数），在那里粗糙圆管的阻力系数和光滑圆管一样，即阻力系数只和雷诺数有关。当雷诺数增大到某一数值时，两者开始

不同，粗糙圆管的阻力系数大于光滑圆管。此时阻力系数既和 Re 有关，也和 k/a 有关。相对粗糙度越大，这种偏离发生得越早，即发生偏离的雷诺数越小。当雷诺数超过某一数值后，阻力系数变成某一常数（平方阻力规律），此时 λ 只和 k/a 有关，而与 Re 无关。

根据阻力系数的上述特点可以看出，粗糙度对层流和过渡区几乎没有任何影响，因此当我们考虑圆管内的层流运动和过渡区流动时不必区分光滑管和粗糙度，但是对于圆管内的湍流运动就必须加以区分，因为此时粗糙度严重地影响阻力系数的数值。

不同的粗糙度呈现出不同的湍流运动，其阻力规律是和绝对粗糙度 k 及层流子层区的高度 δ_e 之间的比值密切相关，正因为如此引进 k/δ_e 是合适的。根据(9.13.14)

$$\frac{k}{\delta_e} = 11.5 \frac{kU_*}{\nu}$$

k/δ_e 可以用 kU_*/ν 代替。

现在我们可以根据湍流区阻力系数和粗糙度的关系将粗糙圆管分成三种不同类型，分别对应于管内的三种不同的湍流运动状态。

1) 流体动力光滑圆管，对应于粗糙度不显示状态。此时

$$0 \leq \frac{kU_*}{\nu} \leq 5, \quad \lambda = \lambda(Re)$$

粗糙峰全部埋在层流子层内，对湍流核心区的流动不发生影响，所以阻力系数和光滑圆管完全一样。在这种管子中，阻力系数只和 Re 有关，而和粗糙度无关。

2) 完全粗糙圆管，对应于粗糙度完全显示状态。此时

$$\frac{kU_*}{\nu} > 70, \quad \lambda = \lambda\left(\frac{k}{a}\right)$$

所有粗糙峰几乎全部高出层流子层区，它突出在湍流核心区形成

许多小涡旋，阻力完全由粗糙峰的形阻组成，所以阻力是平方规律。在这种管子中，阻力系数只和粗糙度有关，而和Re无关。

3) 过渡型圆管，对应于过渡状态。此时

$$5 \leq \frac{kU_*}{\nu} \leq 70, \lambda = \lambda\left(\frac{k}{a}, Re\right)$$

部分粗糙峰高出层流子层区。阻力由光滑圆管的阻力和部分粗糙峰的形阻组成。在这种管子中，阻力系数既和Re有关，也和粗糙度有关。

下面我们研究一下这三种状态的速度剖面和阻力系数。

因为粗糙度并不影响混合长理论的使用，所以对数形状的速度剖面仍然有效

$$\frac{u}{U_*} = \frac{1}{\chi} \ln y + C \quad (9.14.11)$$

其中 $\chi = 0.4$ 。为了将粗糙度考虑进去，我们将上式改写为

$$\frac{u}{U_*} = \frac{1}{\chi} \ln \frac{y}{k} + B \quad (9.14.12)$$

对流体动力光滑管，上式应和光滑管的速度剖面(9.14.1)一样，比较这两式后得

$$B = 5.5 + 5.75 \log \frac{U_* k}{\nu}$$

此时速度剖面和阻力规律与光滑圆管情形完全一样。

对于完全粗糙管，B应取8.5 (图9.14.7)，此时

$$\frac{u}{U_*} = 2.5 \ln \frac{y}{k} + 8.5$$

下面计算阻力系数。不难验证，速度剖面取(9.14.11)式，下式仍成立

$$\frac{u_{\max}}{U_*} - \frac{u_{\pi}}{U_*} = 3.75$$

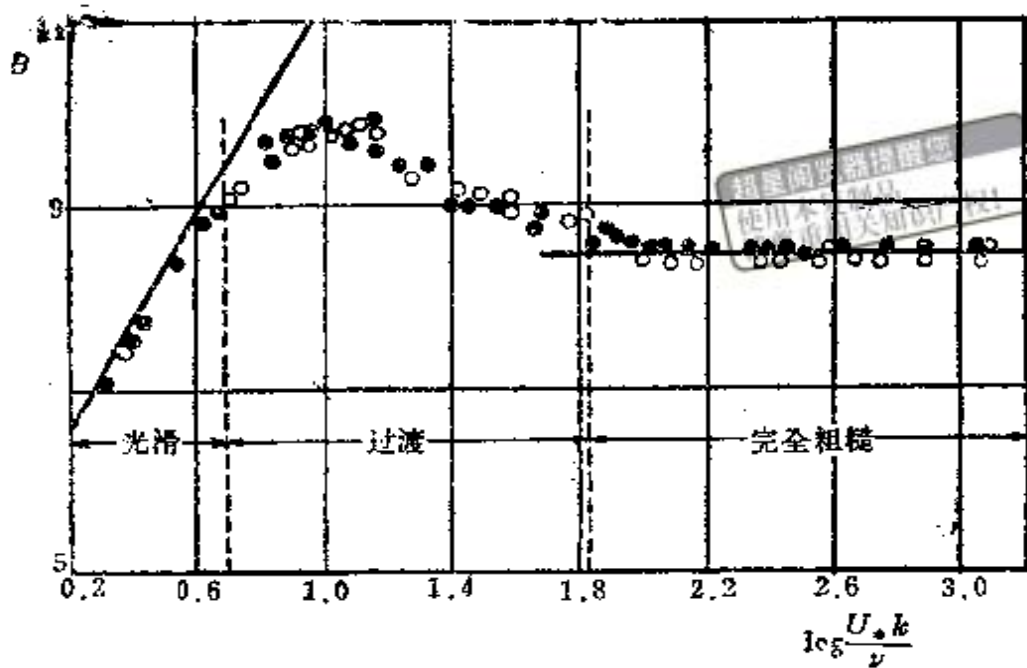


图 9.14.7

其次，由(9.14.11)式得

$$\frac{u_{10\Delta z}}{U_*} = 2.5 \ln \frac{a}{k} + 8.5$$

代入上式得

$$\frac{u_{\nabla}}{U_*} = 2.5 \ln \frac{a}{k} + 4.75$$

根据阻力系数定义有

$$\lambda = 8 \left(\frac{U_*}{u_{\nabla}} \right)^2 = \left(2 \log \frac{a}{k} + 1.68 \right)^{-2}$$

如果将上式的系数 1.68 换成 1.74, 有

$$\lambda = \left(2 \log \frac{a}{k} + 1.74 \right)^{-2} \quad (9.14.13)$$

则与实验结果符合得很好 (图9.14.8).

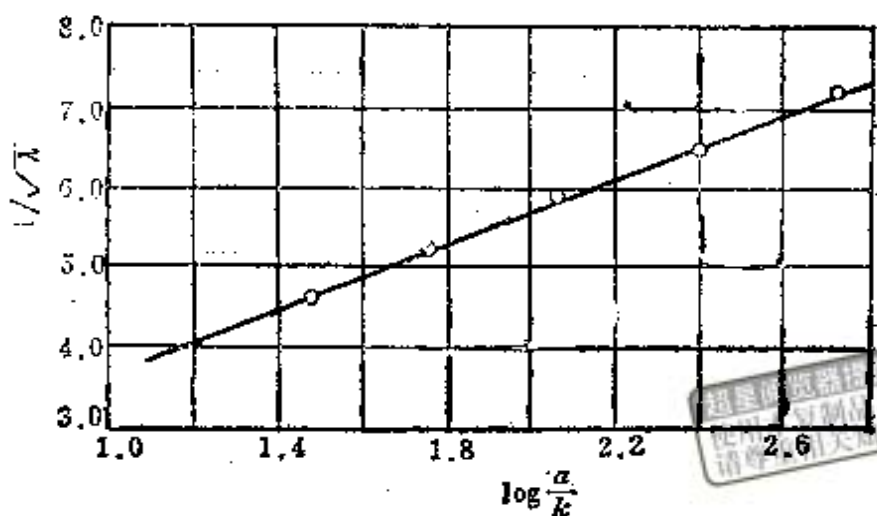


图 9.14.8

过渡区比较复杂，这里只引出阻力系数的经验公式

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.74 - 2 \log \left(\frac{k}{a} + \frac{1.87}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} \right)$$

对于工程实际中遇到的粗糙表面，粗糙颗粒的尺寸十分不同，而且形状也极不规则，因此通常不可能从表面的形状推得粗糙度 k 的可靠数值。不过(9.14.11)中的常数 C 可以由实验确定。再由关系式

$$\frac{u}{U_*} = 2.5 \ln \frac{y}{k} + 8.5 = 5.75 \log y + C$$

即 $C = 8.5 - 5.75 \log k$ ，算出“等效粗糙度” k_s 。

9.15 平板湍流边界层

平板纵向绕流是湍流边界层中最简单也是最重要的情形。只要不发生显著的脱体现象，曲面情形的摩擦阻力和平板情形相差不多。因此平板湍流边界层的结果在计算船体、机翼、机身、和透平叶片的摩阻中仍然是很有用的。

考虑不可压缩粘性流体以匀速 U 从远前方沿平板方向流来。假设湍流边界层是从平板前缘开始的。和层流情形一样，可以推导出平板湍流边界层中平均运动应满足的边界层方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \tau}{\partial y} \\ \tau = (\mu + A) \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \quad (9.15.1)$$

和层流情形相比，方程组的形式完全一样，只是粘性应力中多了一项湍应力。直接解此方程组有很大困难，因为我们对湍流区和层流子层区的衔接，以及过渡区的性质都不很清楚，另外在混合长 l 的确定上也存在着困难。这就迫使我们采取层流边界层中已经采用过的近似方法，即动量积分关系式方法。和9.10中的推导完全一样，我们可以得到平板湍流边界层的动量积分关系式

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U^2} \quad (9.15.2)$$

其中

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad (9.15.3)$$

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$$

和层流情形一样，现在我们需要选取和真实情形尽可能接近的单参数速度剖面，然后利用方程(9.15.2)确定此参数与 x 的关系。这里有两点和层流不同：(1) 湍流边界层的速度剖面和层流不一样；(2) τ_w 不能通过直接微分平均运动的速度剖面求出，因为 τ_w 在子层区，而速度剖面则是湍流区的。这时需要采用经验的或半经验的阻力公式。

湍流边界层内的速度剖面应选什么样子？这个问题的解决只有依靠实验。图9.15.1画出了实验测出的速度剖面

$$\frac{u}{U_*} = f\left(\frac{yU_*}{\nu}\right)$$

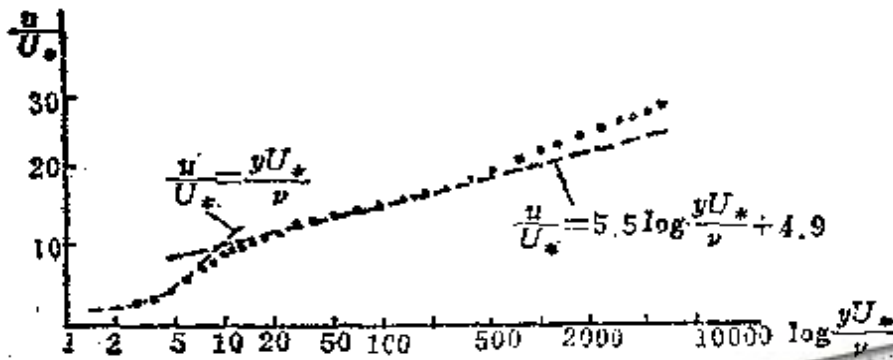


图 9.15.1

从图上可以看出，在板面附近确有层流子层区，速度分布是线性的 ($y/\delta < 0.01$)；而后有一个很小的过渡区；紧接着就是湍流核心区。在核心区的内侧 ($0.01 < y/\delta < 0.20$) 速度满足“对数定律”

$$\frac{u}{U_*} = 5.6 \log \frac{yU_*}{\nu} + 4.9 \quad (9.15.4)$$

这里的常数和圆管速度分布中的相应常数略有不同。当 $y/\delta > 0.20$ 时，速度剖面开始和对数规律偏离。由此可见，如果我们选用对数剖面作为真实剖面的近似还是有一定根据的。虽然在 80% 的湍流核心区和很小的子层区与对数规律有偏离，但是由于我们要求的是总体量（例如 δ^{**} ），所以适当选取 (9.15.4) 式中的两个常数，总体量和真实值的偏差将不会很大。基于这样的考虑，下面我们就选对数剖面作为我们的近似剖面。

从圆管流动我们知道，当 $Re < 1000000$ 时， $1/7$ 幂次剖面以及布拉修斯阻力公式

$$\begin{cases} \frac{u}{U_*} = 8.74 \left(\frac{yU_*}{\nu} \right)^{1/7} \\ \frac{\tau_w}{\rho u_{max}^2} = 0.0225 \left(\frac{\nu}{u_{max} y} \right)^{1/4} \end{cases} \quad (9.15.5)$$

与实验结果很符合。这里也有类似情况，当 $Re = UI/\nu < 10^6$ 时， $1/7$ 幂次公式和对应的阻力公式与平板湍流边界层的结果也很符合。只是圆管中的 u_{max} ， a 应代之以外流速度 U 和边界层厚度 δ ，

于是(9.15.5)式应改写为

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}, \quad \frac{\tau_w}{\rho U^2} = 0.0225 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{1/4} \quad (9.15.6)$$

下面我们先利用 1/7 幂次的速度剖面计算平板的阻力, 然后再利用通用的对数剖面求适用范围更广泛的平板阻力公式。

将(9.15.6)式中的第一式代入(9.15.3)式, 得

$$\delta^{**} = \frac{7}{72} \delta$$

代入(9.15.2)式, 并考虑到(9.15.6)中的第二式有

$$\frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} = 0.0225 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{1/4}$$

引进

$$Re_\delta = \frac{U\delta}{\nu}, \quad Re_x = \frac{Ux}{\nu}$$

有

$$\frac{dRe_\delta}{dRe_x} = 0.231 Re_\delta^{-1/4}$$

积分后得

$$Re_\delta = 0.37 Re_x^{4/5} \quad (9.15.7)$$

此式说明边界层厚度 δ 和 x 的 4/5 次方成正比, 而层流中则与 x 的 1/2 次方成正比, 这说明湍流边界层比层流边界层厚得多。

将(9.15.7)式代入(9.15.6)中的第二式得

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 0.045 Re_\delta^{-1/4} = 0.045 (0.37)^{-1/4} Re_x^{-1/5}$$

即

$$C_f = 0.0578 Re_x^{-1/5} \quad (9.15.8)$$

长为 L , 宽为 b 的平板所受的总阻力系数为

$$C_f = \frac{1}{L} \int_0^L C_{f,x} dx = 0.072 Re_L^{-1/2} \quad (9.15.9)$$

同实验数据相比，如果(9.15.9)式中的0.072改为0.074，这个关系式可以一直适用到 $5 \cdot 10^5 < Re_L < 10^7$ (见图9.15.2)。(9.15.9)式表明，阻力和速度的1.8次方成正比，而层流则与速度的1.5次方成正比。所以说，湍流边界层的摩阻要比层流的大。

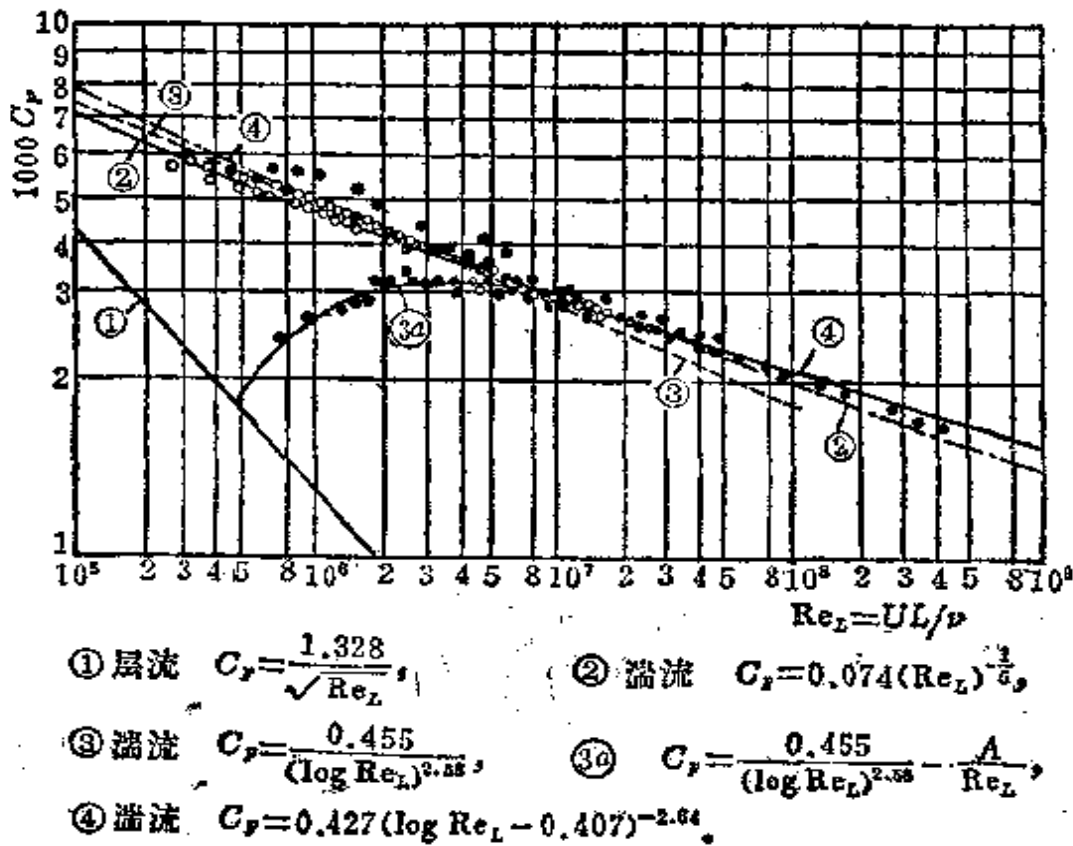


图 9.15.2

当 $Re > 10^7$ 时，(9.15.9)式就不太准确了。这是因为 $1/7$ 幂次速度剖面只适用于一定的雷诺数范围。为了在湍流情况下能得到各种雷诺数都适用的阻力公式，我们利用不依赖于雷诺数的通用的对数速度剖面

$$\frac{u}{U_*} = \frac{1}{\chi} \ln \frac{yU_*}{\nu} + C \quad (9.15.10)$$

式中 $1/\chi$, C 取修正了的常数 2.54 和 5.56. 将 $y=\delta, u=U$ 代入 (9.15.10) 式有

$$\frac{U}{U_*} = \frac{1}{\chi} \ln \frac{\delta U_*}{y} + C \quad (9.15.11)$$

两式相减得

$$\frac{U-u}{U_*} = -\frac{1}{\chi} \ln \frac{y}{\delta}$$

其次, C_f 和 U_* 还存在下列关系

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2} = 2 \frac{U_*^2}{U^2}$$

即

$$\frac{U}{U_*} = \sqrt{\frac{2}{C_f}} \quad (9.15.12)$$

现在我们从 (9.15.2) 式和 (9.15.3) 式求出确定 δ^{**} 与 τ_w 或 $Re_{\delta^{**}}$ 与 C_f 的两个方程. 从 (9.15.2) 式有

$$\frac{dRe_{\delta^{**}}}{dRe_{\delta}} = \frac{1}{2} C_f \quad (9.15.13)$$

从 (9.15.3) 式有

$$\begin{aligned} \frac{Re_{\delta^{**}}}{Re_{\delta}} &= \int_0^1 \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) \\ &= \frac{U_*^2}{U^2} \int_0^1 \frac{u}{U_*} \left(\frac{U-u}{U_*}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) \\ &= -\frac{1}{\chi} \frac{U_*^2}{U^2} \int_0^1 \left(\frac{U}{U_*} + \frac{1}{\chi} \ln \frac{y}{\delta}\right) \ln \frac{y}{\delta} d\left(\frac{y}{\delta}\right) \\ &= \frac{1}{\chi} \frac{U_*}{U} - \frac{2}{\chi^2} \left(\frac{U_*}{U}\right)^2 \end{aligned}$$

$$= 2.54 \sqrt{\frac{C_f}{2}} - 12.9 \frac{C_f}{2} \quad (9.15.14)$$

另一方面由(9.15.12)与(9.15.11)式有

$$\sqrt{\frac{2}{C_f}} = 2.54 \ln \left(\text{Re}_x \sqrt{\frac{C_f}{2}} \right) + 5.56$$



将(9.15.14)式代入上式得

$$\sqrt{\frac{2}{C_f}} = 2.54 \ln \text{Re}_{x^{**}} - 2.54 \ln \left(1 - 5.08 \sqrt{\frac{C_f}{2}} \right) + 3.19 \quad (9.15.15)$$

(9.15.13)和(9.15.15)式组成了决定 $\text{Re}_{x^{**}}$, C_f 的两个方程。一个是微分方程，一个是超越方程。利用边界条件 $\text{Re}_x = 0$ 时 $\text{Re}_{x^{**}} = 0$ ，可对此方程组进行数值积分。容易理解，数值积分的结果使用起来很不方便，为此有人将数值计算结果近似地用下式表示出来

$$C_f = \frac{0.455}{(\log \text{Re}_L)^{2.58}} \quad (9.15.16)$$

根据大量的实验结果，有人建议采用经验公式

$$\frac{1}{2} C_f = 0.00655 \text{Re}_{x^{**}}^{-1/6} \quad (9.15.17)$$

代替复杂的超越方程(9.15.15)。此时方程(9.15.13)可以很容易地积分出来。利用边界条件 $\text{Re}_x = 0$ 时 $\text{Re}_{x^{**}} = 0$ ，可得到

$$\text{Re}_{x^{**}} = 0.0153 \text{Re}_x^{6/7} \quad (9.15.18)$$

将(9.15.18)代入(9.15.17)式有

$$C_f = 0.0263 \text{Re}_x^{-1/7} \quad (9.15.19)$$

总阻力系数为

$$C_F = \frac{1}{L} \int_0^L C_f dx = 0.0307 \text{Re}_L^{-1/7} \quad (9.15.20)$$

(9.15.16)式和(9.15.20)式算出的结果都和实验符合得很好，在很大范围内，两者实际上是重合的。它们比(9.15.9)式适用的雷

雷诺数范围要广得多 (见图9.15.2).

在上面所有的计算中, 我们都假定湍流边界层是从平板前缘开始的. 但是, 实际上在平板前部总存在一段层流边界层, 只是在过渡点后才变成湍流 (见图9.15.3). 层流段的存在减少了总阻力. 为了估计这部分减少的阻力, 我们近似地认为过渡点后的湍流边界层和从平板前缘开始的湍流边界层

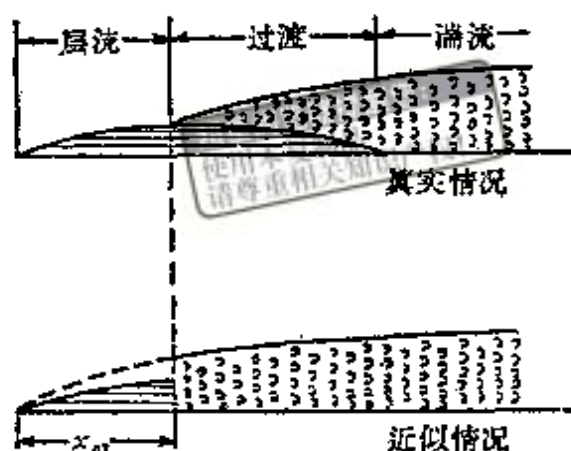


图 9.15.3

一样, 这样减去前缘到过渡点这一段的湍流阻力, 同时加上这一段的层流阻力就可以得到差值. 经过计算, 此差值可表成

$$\frac{A}{Re_x} \quad (9.15.21)$$

式中

$$A = 0.074 Re_{x_{cr}}^{4/5} - 1.328 Re_{x_{cr}}^{1/2}$$

对不同的临界雷诺数, A 应取的数值可列表如下.

$Re_{x_{cr}} = 3 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$	10^6	$3 \cdot 10^6$
$A = 1050$	1700	3300	8700

9.16 层流向湍流的过渡

本节扼要地介绍边界层中层流向湍流过渡的问题. 先谈谈实验结果, 而后简略地介绍理论处理方法.

由于目前理论还不能完全解决问题, 所以在大多数情况下必须用实验方法确定过渡区 (图9.16.1) 的位置.

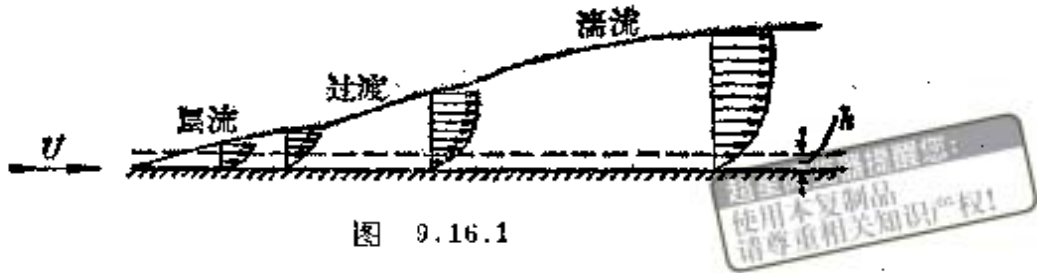


图 9.16.1

实验确定过渡区的位置主要通过测量速度的方法进行。在层流型速度剖面 and 湍流型速度剖面差别最大的地方放置皮托管（见图 9.16.2），然后让它从前缘开始平行壁面地向下游移动。当皮托管处于层流区时，随着 x 的增加，速度是减少的，但是一旦进入过渡区，由于那里的速度剖面较饱满，速度值突然变大。当皮托管进入湍流区后由于边界层增厚，随着 x 的变大，速度值又逐渐减小。图 9.16.3 中标出的速度递增的区间就是过渡区。

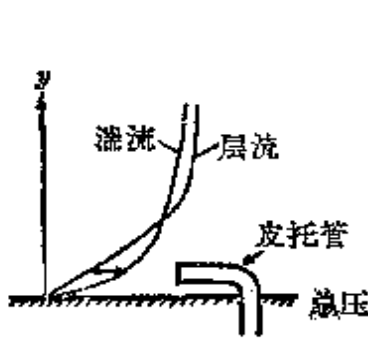


图 9.16.2

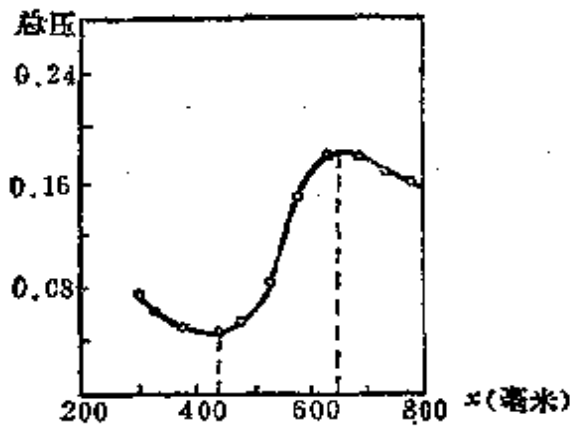


图 9.16.3

过渡区的流动形态呈现出相当复杂的状况。为了搞清楚过渡区中流动的细节在实验中广泛采用了人工产生周期性扰动的振动条板技术。穿过气流放置一薄金属条板，在壁面的另一侧产生一磁场，当交流电通过金属条板时，它在磁场中开始振动，从而产生了扰动，并沿着来流方向向下游传播。当外流的湍流强度较低

时，我们发现过渡区内的流动沿下游方向经历以下几个阶段（参看图 9.16.4）：

1) 当频率在一定范围内时，周期性扰动首先发展成类似波浪的二维运动。这种运动无论在空间或时间上都是周期性的，人们称它为托尔明-许列赫丁 (Tollmien-Schlichting) 波。

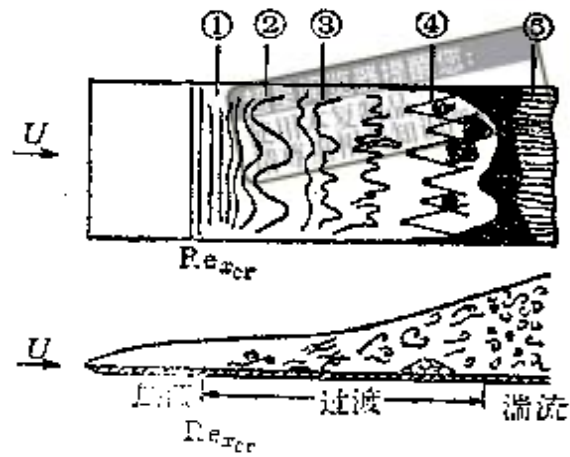


图 9.16.4

2) 当托尔明-许列赫

丁波的振幅增大到某极限值时，二维波变为三维的并形成了旋涡。在平行壁面的侧面方向上，此三维波的振幅不断改变，它们和主流相互作用，结果使速度剖面也具有三维的性质。

3) 随着上述三维波的继续增长，在局部区域内瞬间产生了非常高的剪切区即涡旋区，在这些地方发生了湍流的猝发现象。

4) 在脉动速度大的地方形成了一小块一小块称之为湍流班的湍流区。湍流班的形状是不规则的，它们随机地出现在不同时刻不同位置上。湍流班被脉动很弱的层流流体所围绕，班内的流动类似于完全发展的湍流边界层。当我们在过渡区某固定点测速时，如果有湍流班通过就出现脉动，如果没有便是稳定的。当这些湍流班向下游方向移动时，它们不断地将周围的层流流体卷入其中，并在图 9.16.5 所示的楔形区域内迅速地增长。

5) 当这些湍流班扩大到相当大的时候，它们互相交错而没有留下层流的空隙，层流便过渡到完全的湍流，过渡区到此结束。

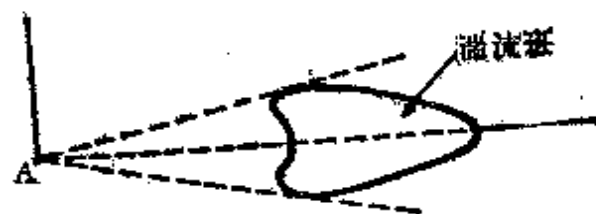


图 9.16.5

自然产生的边界层过渡，其基本过程和人工产生的边界层过渡相似。但是自然过渡时，托尔明-许列赫丁波不总是可以观察到的；其次，不同时刻湍流斑的出现显得更随机些。

必须指出，上面描绘的情况只发生在边界层中，即只发生在和固体边界相邻的剪切流中。当我们考虑没有固壁存在的自由剪切流（例如射流）时，过渡区的情况就和固壁剪切流存在着根本的差别。过渡区的早期基本相似，但是到了后期，就不同了，固壁剪切流有湍流斑，先在局部出现而后影响到全体，而自由剪切流中却没有湍流斑，在整个过渡区中湍流的随机特征几乎在同一时刻以同一速率出现。

翼型上过渡点的位置依赖于来流的雷诺数、湍流度和壁面粗糙度，同时也和外流的压力梯度有关。一般说来，顺压和光滑壁使流动更稳定，而逆压和粗糙壁则相反使流动趋于不稳定，它降低临界雷诺数，从而使过渡点的位置靠前。下面我们着重介绍过渡点和雷诺数及湍流度的关系。

现介绍湍流度的概念。定义

$$\varepsilon = \frac{1}{U} \sqrt{\frac{1}{3} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})}$$

为湍流度，式中 u' 、 v' 、 w' 分别代表来流中扰动速度的三个分量。湍流度可理解为扰动速度的均方根与来流平均速度的比值，用以衡量脉动的大小。现有的风洞湍流度可低达0.02%，对一般的风洞来说，湍流度约为1%。

图9.16.6画出了临界雷诺数依赖于湍流度 ε 的实验曲线。从图上可以看出，当外流的湍流度不超过0.1%时，层流和湍流区的边界与湍流度无关，过渡区约从 $Re_x = 3 \times 10^6$ 开始到 $Re_x = 4 \times 10^6$ 终止。但是当湍流度超过0.1%时，临界雷诺数随湍流度的增加显著地降低。例如在 $\varepsilon = 0.36\%$ 时，层流区的大小可以缩小近一半。所以，当飞机在湍流度甚小的静止空气中飞行时，层流段可以较长。相反地，在透平或压缩机叶片绕流问题中，由于湍

盗版必究
侵权必究
请尊重知识产权!

流度很大，层流段的长度就显得微不足道。

将雷诺数对翼剖面过渡点位置的影响画在图9.16.7上，从图上可看出，随着雷诺数增长，过渡点的位置从脱体点不断地朝压力极小点的方向向前移动，雷诺数相当大时就进入加速区。

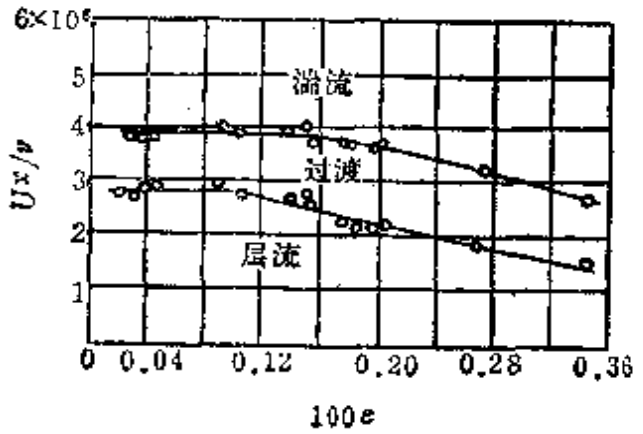


图 9.16.6

关于层流向湍流过渡的理论处理目前比较成熟的有采用小扰动方法的稳定性理论。这种理论认为层流突变为湍流是由于小扰动发展增强最后失去稳定所造成的。设想由于入口干扰，壁面粗糙或外流的湍流内流动产生了某种小的扰动引起管流或边界层动。如果扰动随着时间增长是衰减的，那么主流是稳定的，层流不会向湍流过渡；如果扰动随时间是增长的，那么主流就是不稳定的，存在着转换为湍流的可能性。这就是稳定性理论的主要想法。它的中心课题是在主流给定的情况下确定临界雷诺数的数值。

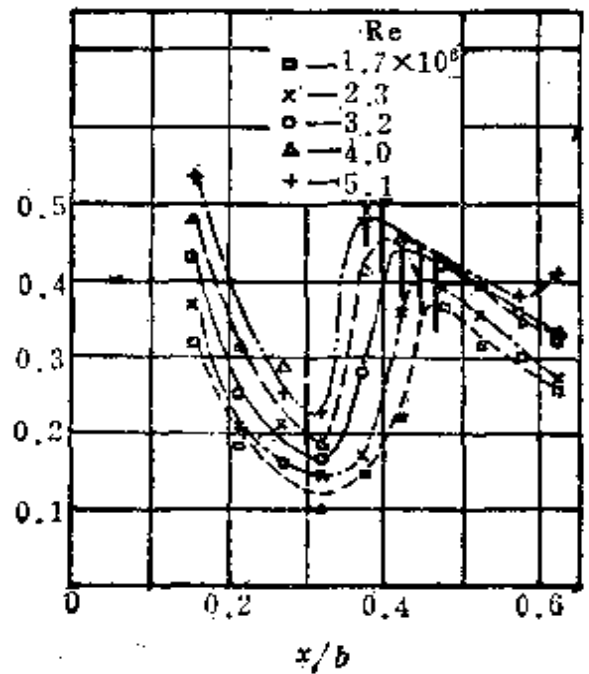


图 9.16.7

作为例子我们只限于考虑两平行平板间的二维库塔流以及二维边界层流动，而且认为扰动也是二维的。引进流函数 ψ ，它与

速度分量的关系为

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (9.16.1)$$

代入涡量表达式

$$\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \Omega_x = \Omega_y = 0$$

得

$$\Omega_z = -\Delta \psi$$

于是(9.1.4)式变为

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} - \nu \Delta \Delta \psi = 0 \quad (9.16.2)$$

这是流函数 ψ 应满足的方程。

假设由于某种原因产生了小扰动，流函数可分解为不依赖于时间的基本流流函数 Ψ 和扰动流函数 ψ' (因扰动是二维的) 之和

$$\psi(x, y, t) = \Psi(x, y) + \psi'(x, y, t) \quad (9.16.3)$$

其中 ψ' 和 Ψ 相比是一个小量，而且 $\Psi(x, y)$ 和 $\psi(x, y, t)$ 都满足方程(9.16.2)。将(9.16.3)式代入(9.16.2)式，忽略二级以上微量，并考虑到 $\Psi(x, y)$ 满足(9.16.2)式后得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial x} + \frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial y} \\ - \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial y} - \nu \Delta \Delta \psi' = 0 \end{aligned} \quad (9.16.4)$$

对于库塔流， Ψ 只是 y 的函数，

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$$

对于边界层流动， $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ 比 $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$ 低一个数量阶，故可近似地认为

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$$

由此可见,不管是哪种情形都有

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

考虑到这点(9.16.4)可简化为

$$\frac{\partial \Delta \psi'}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi'}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \frac{\partial \psi'}{\partial x} - \nu \Delta \Delta \psi' = 0 \quad (9.16.5)$$

设 ψ' 可表成下列形式

$$\psi'(x, y, t) = \phi(y) e^{i(\alpha x - \beta t)} \quad (9.16.6)$$

这是简单振动.任意的二维扰动可展成富氏级数,级数中每一项都是(9.16.6)的形式.式(9.16.6)中 α 是一实数,代表波数; $\lambda = 2\pi/\alpha$ 是扰动的波长;而 β 则是复数,可写成

$$\beta = \beta_r + i\beta_i \quad (9.16.7)$$

其中 β_r 是简单振动的圆频率; β_i 是放大因子,决定放大和衰减的程度.如果 $\beta_i < 0$,则扰动是衰减的,主流稳定;如果 $\beta_i > 0$,则主流是不稳定的.除了 α 与 β 之外,引进它们的比值复数

$$c = \beta/\alpha = c_r + ic_i \quad (9.16.8)$$

是方便的,这里 c_r 表示扰动在 x 方向的传播速度(相速度), c_i 表示放大或衰减的程度.振幅 ϕ 认为只是 y 的函数,因为基本流只依赖或主要依赖于 y .将(9.16.6)式代入(9.16.5)式经过整理后得

$$\begin{aligned} (U - c)(\phi'' - \alpha^2 \phi) - U'' \phi \\ = -\frac{i\nu}{\alpha}(\phi'' - 2\alpha^2 \phi' + \alpha^4 \phi) \end{aligned} \quad (9.16.9)$$

其中 U 是某 $x = x_0$ 处基本流的速度

$$U = \frac{\partial \Psi(x_0, y)}{\partial y}$$

引进特征长度 h (库塔流为板间距离 b ,边界层为边界层厚度 δ),特征速度 U_m (库塔流为最大速度,边界层为边界上外流速度),则(9.16.9)可写为下列无量纲形式(为了简单起见已将无量纲物理量上的“'”省去).

$$(U-c)(\phi'' - \alpha^2 \phi) - U''\phi = -\frac{i}{\alpha \text{Re}}(\phi''' - 2\alpha^2 \phi'' + \alpha^4 \phi) \quad (9.16.10)$$

其中 $\text{Re} = U_m h / \nu$, 这就是层流稳定性理论赖以出发的小扰动满足的微分方程, 通常称之为奥尔-绍莫费尔 (Orr-Sommerfeld) 方程. 边界条件为

库塔流: $\phi(0) = \phi'(0) = \phi(h) = \phi'(h) = 0 \quad (9.16.11)$

边界层流动:

$$\begin{cases} \text{渐近理论} & \phi(0) = \phi'(0) = \phi(\infty) = \phi'(\infty) = 0 \\ \text{有限厚度理论} & \begin{cases} \phi(0) = \phi'(0) = 0, \phi(\infty) < \infty \\ \phi'(h) + \alpha\phi(h) = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (9.16.12)$$

(9.16.12)中的最后一式是这样得来的: 在边界层外的理想流体中 $\nu = 0$, 且 $U'' = 0$, 于是(9.16.10)式变为 $\phi'' - \alpha^2 \phi = 0$, 其解为

$$\phi = \text{常数} \times e^{\pm \alpha y}$$

因我们要求 $\phi(\infty) < \infty$, 故 $e^{\alpha y}$ 应抛弃. 于是有

$$\phi = \text{常数} \times e^{-\alpha y}$$

即 ϕ 满足 $\phi'(h) + \alpha\phi(h) = 0$.

现在稳定性的问题归结为在边界条件(9.16.11)或(9.16.12)下求方程(9.16.10)的特征值的问题. 当基本流的 $U(y)$ 给定后方程(9.16.10)中包含三个参数 α , Re 和 c . α 和 Re 是实数, 分别代表小扰动的波数及基本流动的雷诺数, c 一般说来是复数. 在库塔流及边界层的渐近理论中, 方程(9.16.10)的四个线性无关解应满足四个齐次边界条件(9.16.11), 从而得到四个定任意常数的齐次线性代数方程组. 要使方程有不恒为零的解, 其系数行列式应等于零, 由此得到一个联系 α , Re 和 c 的方程

$$F(\alpha, \text{Re}, c) = 0 \quad (9.16.13)$$

在有限厚度边界层理论中, 可以证明方程(9.16.10)只有三个在

无穷远处有界的线性无关解，它们要满足(9.6.12)中三个齐次边界条件，由此也可得到 α, Re, c 之间的一个关系式。可见不管是什么情形(9.16.13)式总是成立的。对 c 解出(9.16.13)后得

$$c = c(\alpha, Re)$$

分出实数部分和虚数部分得 $c_r = c_r(\alpha, Re)$ 和 $c_i = c_i(\alpha, Re)$ 。 c_r 代表小扰动传播的相速度， c_i 确定扰动是否增长($c_i > 0$)或衰减($c_i < 0$)。对于每一个雷诺数 Re 及扰动波数 α ，根据 $c_i = c_i(\alpha, Re)$ 可得 $\alpha-Re$ 平面上的一个点。当 $c_i < 0$ 时层流是稳定的，当 $c_i > 0$ 时层流是不稳定的，曲线 $c_i = c_i(\alpha, Re) = 0$ 是稳定区和不稳定区的分界线，称为中性稳定曲线。在这条曲线上雷诺数取最小值的点具有重大的意义。因为它说明小于此数，所有小扰动都是衰减的，层流决不会变为湍流；高于此数小扰动在一定的波长范围内是增长的。上述最小雷诺数称为稳定性极限。应该指出，稳定性极限不等于层流转换为湍流的临界雷诺数，因为当流动失稳时，它还要过一段时间或距离才能完全变成湍流。所以临界雷诺数往往比稳定性极限大。

稳定性理论中求特征值问题是一个非常困难的数学问题。奥尔-绍莫费尔以及其后很多著名流体力学家研究了库塔流的稳定性，得到了不会失稳的结论。一直到1945年，林家翘才首次严格地证明了两平板间的库塔流在某些 Re 数下是可以不稳定的。他指正并纠正了以往工作中的错误，正是这些错误使以前所有从事过此问题研究的学者们得不到正确的结果。

最早研究边界层不稳定性问题的是普朗特及铁琴(Tietjens)。假设基本流速度剖面是由直线组成的，他们得到边界层是永远不稳定的与实际矛盾的结论。稍后托尔明证明了如果速度剖面的曲率不是处处为零，则上述矛盾将消除。他具体地研究了基本流速度剖面是由直线段与抛物线组成的情形，也研究了基本流速度剖面取任意形状时的稳定性问题。在1945和1946年的论文中林家翘在 U 的分布是任意的情况下再一次重新计算了边界层中的稳

定性问题。

由于篇幅所限，我们不打算介绍林家翘工作的详细内容，而是只满足于援引他文章中的最后结果。

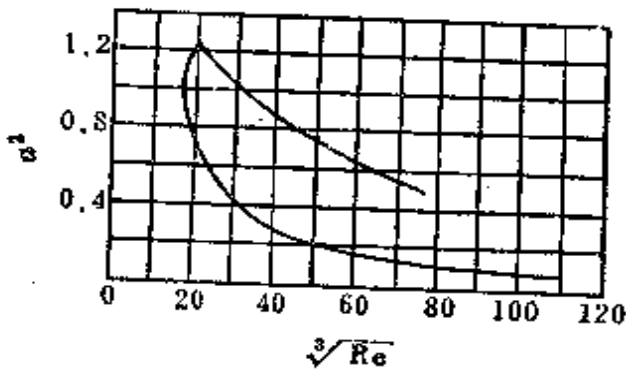


图 9.16.8

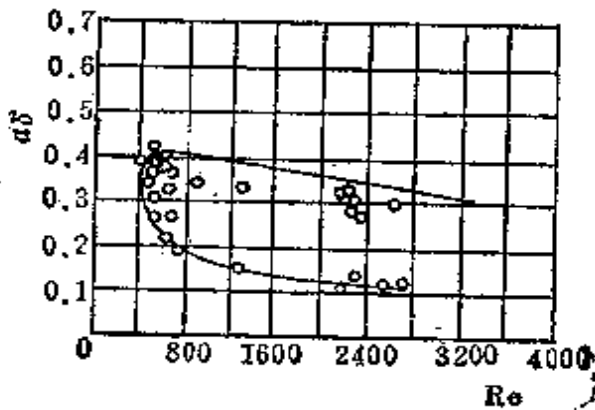


图 9.16.9

图9.16.8给出了两静止平行平板间的库塔流的中性稳定曲线。这里 $U = 2y - y^2$ ，得到

$$Re_{min} \approx 5314$$

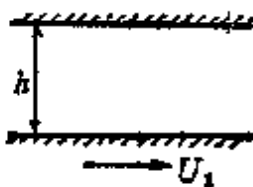
图9.16.9给出了布拉休斯情形下的中性稳定曲线。林家翘取 $U = 2y - 3y^2$ ，他得到的稳定性极限为

$$Re_{min} = 420$$

同图还画出了休鲍威及斯克拉姆斯得脱(Skramstad)的实验结果。应该承认，理论和实验是符合得很好的。

习 题

1. 考虑两个平行板之间的粘性不可压缩流体的运动。设两板为无限平面，间距为 h ，上板不动，下板以常速 U_1 沿板向运动。设板向压力梯度为常数，运动定常，流体所受外力不计。



题 1

- (1) 研究流体的运动规律，即求速度分布、流量、平均速度、最大速度、内摩擦力分布及作用

在运动板上的摩擦力。

(2) 若沿板向没有压力梯度，流体的速度分布如何？

(3) 若沿板向的压力梯度为常数，但两板均不动，流体的速度分布又怎样？

2. 带有自由面的不可压缩粘性流体在倾斜板上由于重力作用发生流动。

设斜板为无限平面，它与水平面的倾角为 α 。设流动是定常的平行直线的运动，

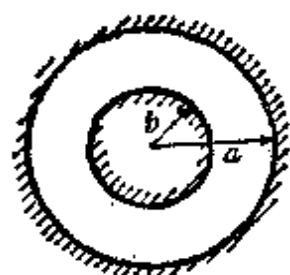
流体深为 h 。求流体速度分布、流量、平均速度、最大速度及作用在板上的摩擦力。



题 2

3. 粘性不可压缩流体在一管轴与竖直方向夹角为 α 的圆管中流动，圆管半径为 R ，长为 L ，两端压力分别为 p_0 和 p_L 。设运动是定常的，管端效应忽略。求速度剖面和体积流量。

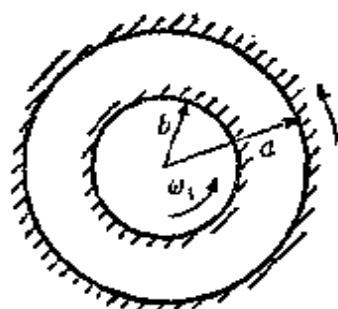
4. 考虑两个同轴圆柱面间的粘性不可压缩流体由于压力梯度而产生的运动。设两圆柱的半径分别为 a 和 b ，长度为无限。试求该流动的速度分布和管壁上所受的粘性摩擦力。设运动定常，不计外力，沿管轴方向的压力梯度为常数。



题 4

5. 设粘性不可压缩流体在椭圆形截面的管道中由于轴向压力而运动。设椭圆的长短轴分别为 a 和 b ，长为无限，运动是定常的，外力不计，轴向的压力梯度保持不变。求该流动的速度分布和平均速度。

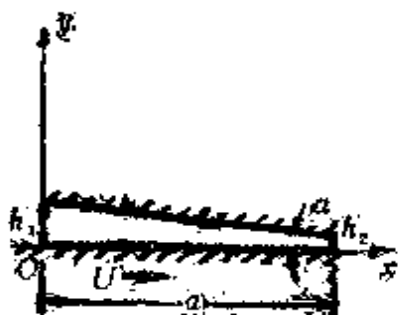
6. 考虑处在两个共轴的圆柱面间的粘性不可压流体，由于柱体的旋转而产生的流动。设两圆柱的半径分别为 a 和 b ，长为无限，旋转角速度分别为



题 6

ω_1 与 ω_2 . 求流动的速度分布及圆柱面受到的摩擦力矩. 设运动是定常的, 外力不计, 压力沿轨迹保持不变.

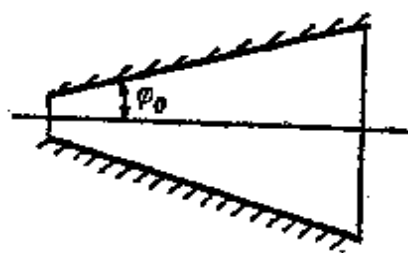
7. 研究非常靠近的两倾斜板之间的缝隙中的粘性不可压缩



题 7

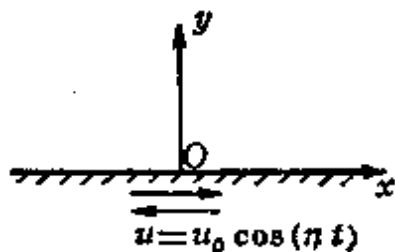
流体, 由于板的运动而引起的流动. 设上板宽有限, 长无限, 与下板倾角为 α , 它在下板上投影宽为 a , 两端通道的距离为 h_1 和 h_2 , 并在运动过程中保持固定不动. 下板为无限平面, 以较小的常速 U 沿正 x 轴方向运动. 若通道进出口处流体压力相等, 求速度分布、压力分布、流量和流体作用在运动板上(处于静止板下的面积上)的总压力. 外力不计.

8. 一半径为 a 的球沉没在很粘的不可压缩流体中, 球绕其本身的直径以很小的常角速度 ω 旋转, 于是流体发生运动. 设外力不计, 压力在运动过程中保持不变, 求作用在球上的总摩擦力矩.



题 9

9. 考虑两个相交平板间的流体辐射运动. 设两平板均为无限平板, 交角 $2\varphi_0$ 很小, 其间的流体是很粘的. 若流体作缓慢流动, 单位宽度截面上通过的流量为常数 Q , 外力不计, 试求流动的速度分布和压力分布.



题 10

10. 一无限平板的上半空间充满粘性不可压缩流体, 原处于静止状态, 从某时刻开始板沿自身方向作周期性的振动. 设运动规律为 $u = u_0 \cos(\pi t)$, 且在运动过程中压力保持不变, 求由板运动而引起的流动状况.

11. 设在某一时刻放一强度为 Γ 的直涡丝于布满整个空间的粘性不可压流体中, 若外力作用不计, 试求涡旋的扩散规律如何?

12. 证明对粘性不可压流体的定常运动, 若外力有势 \bar{V} , 则有以下式成立

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\nu} V \frac{\partial}{\partial s}\right) \left(\frac{p}{\rho} + \bar{V} + \frac{1}{2} V^2\right) = \zeta'$$

其中 s 为沿流线的弧元素, ζ' 为涡量, ν 为粘性系数, V 为流体运动速度, p 为压力, ρ 为密度.

13. 证明对不可压粘性流体的二维运动, 在不计外力的情况下, 流函数 ψ 满足下列方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi - \frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, y)} = \nu \nabla^4 \psi$$

其中

$$\frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi & \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi \end{vmatrix}$$

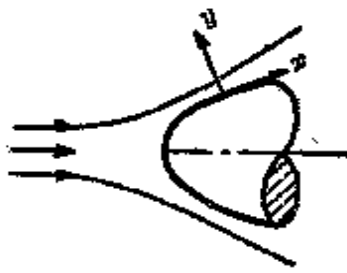
14. 试证在绕流物体的驻点附近的边界层厚度是有限的.

15. 设一半径充分大的平面圆盘, 绕与它垂直的轴线在粘性不可压流体中作等角速度旋转, 试证沿圆盘面边界层厚度是常数.

16. 粘性不可压流体以速度 U 流进一个很细的圆直管, 边界层自管口开始生长. 若取管轴为 x 轴, 原点在管口. 设在离管口 l 处才能实现圆管的泊肃叶层流流动, 问 l 为多少? 并画出 $x < 0$, $0 < x < l$, $x > l$ 三种不同位置的截面的速度剖面图.

17. 试推导轴对称流动中边界层方程组, 并写出边界条件.

提示: (1) 取“边界层坐标”(如图), 设物面方程为 $r_0(x)$; (2) 设边界层很薄, 故边界层内任一点到对称轴的距离 r 可近似



题 17

认为是 r_0 ; (3) 设 k 为曲率, δ 为边界层厚度, 当 $k\delta$ 和 $\delta^2 \frac{dk}{dx}$ 很小时, 边界层方程与普朗特方程一致, 只是连续性方程不再相同了.

18. 利用给定控制面 $ABCD$, 试推导平板边界层的动量积分关系式. 设

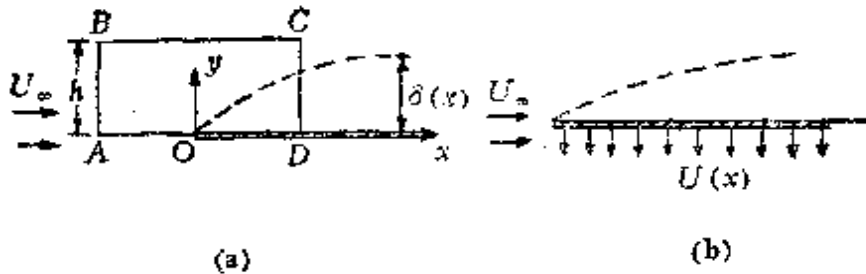
半无穷长平板自 O 点开始沿 AD 方向延伸至无穷, $ABCD$ 是矩形, 高 $h > \delta$, $OD = x$.

如果板上连续分布小孔, 通过小孔吸气, 使流体以速度 $U(x)$ 沿小孔垂直板面流出, 设 $U(x)$ 不超过边界层内横向速度的量阶, 试问这时动量积分关系式有何变化?

如果无穷远流是随时间变化的, 变化规律为

$$U_\infty = U_0 \cos \omega t$$

试问动量积分关系式有何改变?



(a)

(b)

题 18

19. 已知定常流绕过一个半无穷长平板(沿 z 轴位置)的边界层内速度分布为

$$u = U \sin \frac{\pi y}{2h}$$

其中 U 为无穷远流, y 为垂直板面的坐标, 而 h 为待定的边界层厚度. 试用动量积分关系式求边界层厚度分布 $h(x)$ 和平板的局部摩擦系数 C_f .

20. 同上题, 设边界层内速度分布为

$$u = U \frac{3h^2 y - y^3}{2h^3}$$

试证 $h(x) \sim \sqrt{x}$, 且在板两侧每单位宽度, 长为 l 的板的阻力大约为 $1.3 \sqrt{\dot{U}^3 l \mu \rho}$.

第十章 气体动力学基础

气体动力学(更广泛地说可压缩流体动力学)研究压缩性起重要作用时气体(或流体)的运动规律。若流体质点在运动过程中显著地改变自己的密度,则必须考虑压缩性的影响。根据公式

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + V \frac{\partial\rho}{\partial s} \quad (s \text{ 是轨迹方向})$$

可以看出,在高速或密度梯度,密度的局部导数很大时, $d\rho/dt$ 取很大的数值,此时气体是可压缩的。密度梯度大,密度的局部导数大相当于温度或压力的梯度,温度或压力的局部导数较大。因为密度、压力、温度的变化趋势是一致的。例如在绝热过程中

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T}$$

由此不难理解,可压缩流体动力学亦即气体力学包括下列几个主要部分:(1)高速空气动力学。气体以高速绕飞行器流动或在管道内流动。物体和管道的尺寸都不大,因此高速空气动力学的特征尺度较小。经典高速空气动力学包括高速飞机动力学与内空气动力学。近来由于宇宙飞行和火箭技术的发展,又从高速空气动力学中分出化学流体力学、稀薄气体力学及电磁流体力学等新兴学科。(2)气体波动力学。研究气体介质中各种类型波的传播规律。这里物理量的梯度及局部导数有较大的变化。(3)小范围内的大气动力学。由于温度梯度较大,或着眼于研究大气中波的传播现象,必须把流体当作可压缩介质处理。(4)高温气体力学。有较大的温度差。在一般的气体动力学课程中只研究经典的高速空气动力学及气体波动力学这两部分内容。至于小范围内的大气动力学及高温气体力学则另有动力气象、高温气体力学等专门课

程加以研究。气体动力学既研究理想气体的运动也研究粘性气体的运动，但一般的气体动力学课程中习惯于只考虑理想气体的动力学，而把粘性气体运动放在高速边界层理论中去讲授。

根据设计工程师的要求，气体动力学最主要的任务是计算气流吹过物体（飞机或管道）时物面上的压力分布和摩擦阻力以及温度分布与热流矢量，确定各种类型波的传播规律等。为了解决这些问题，须要对于给定时间间隔内的每一时刻求出指定空间中的速度分布、压力分布、密度分布及其他物理量的分布。

本章企图向读者介绍理想气体动力学最基本的知识（气体力学方程组、音速及马赫数，激波的产生及性质、一维管流等），作为进一步研究这门学科的基础。

10.1 气体动力学基本方程组

根据(3.6.10)式，一般形式的流体力学基本方程组为

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{F} - \operatorname{grad} p - \frac{2}{3} \operatorname{grad}(\mu \operatorname{div} \mathbf{v}) + 2 \operatorname{div}(\mu \mathbf{S}) \\ \rho T \frac{ds}{dt} = \Phi + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) = \rho \frac{di}{dt} - \frac{dp}{dt} \\ p = f(\rho, T) \end{array} \right. \quad (10.1.1)$$

这里假设除热传导外没有其他热量的来源，式中 μ 及 k 都是 T 的已知函数， Φ 的表达式为

$$\Phi = -\frac{2}{3} \mu (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + 2 \mu S^2$$

气体动力学主要研究高速空气动力学及气体波动力学。下面对高速空气动力学作些假定导出它的基本方程组，稍后在音速一节中将证明这样的方程组也适用于气体波动力学的情形。

高速空气动力学具有高速和特征尺度小的特点。据此可以对

方程组(10.1.1)做以下几个假设:

1) 忽略粘性作用将流体看成是理想的

动量方程中的惯性力 $\rho \frac{dv}{dt}$ 和粘性力 $-\frac{2}{3} \text{grad}(\mu \text{div} v) - 2 \text{div}(\mu S)$ 的量阶分别为 $\rho V^2/L$ 及 $\mu V/L^2$, 于是

$$\frac{\text{惯性力}}{\text{粘性力}} \sim \frac{\rho \frac{V^2}{L}}{\frac{\mu V}{L^2}} = \frac{\rho V L}{\mu} = \text{Re}$$

在通常条件下高速气流的雷诺数都很大, 可达几十万, 几百万, 因此除去边界层区域以及研究某些和耗损、衰减、扩散相联系的现象而外, 都可以忽略粘性力的影响而将流体看成是理想的.

2) 忽略热传导的作用, 将过程看成是绝热的

能量方程中, 质点携带的热量变化 $\rho \frac{di}{dt} \sim \rho C_p v \cdot \text{grad} T$ 和热传导引起的热量变化 $\text{div}(k \text{grad} T)$ 分别具有量阶 $\rho C_p \frac{VT}{L}$ 和 $k \frac{T}{L^2}$, 于是

$$\frac{\text{携带热}}{\text{传导热}} \sim \frac{\rho C_p \frac{VT}{L}}{k \frac{T}{L^2}} = \frac{\rho V L}{\mu} \cdot \frac{\mu C_p}{k} = \text{Re} \cdot \text{Pr}$$

其中 $\text{Pr} = \mu C_p / k$ 称为普朗特数, 它是 1 的数量阶, 对空气而言 $\text{Pr} \sim 0.737$. 当雷诺数很大时, $\text{Re} \cdot \text{Pr}$ 取很大的值. 于是相对于携带热而言, 传导热可忽略不计, 流动过程可看成是绝热的.

3) 忽略重力的作用

重力 g 和惯性力 $\frac{dv}{dt}$ 之比为

$$\frac{\text{惯性力}}{\text{重力}} \sim \frac{V^2}{Lg} = \frac{V^2}{Lg} = Fr$$

在高速空气动力学中， V 大 L 小，因此 Fr 数很大，于是重力比惯性力小得很多，可忽略不计。

- 4) 假设气体是完全的，且比热是常数
满足克拉伯龙状态方程

$$p = \rho RT \quad (10.1.2)$$

的气体称为完全气体（在热力学中称之为理想气体，因理想这一名称已被无粘性流体所占用，故改称完全气体）。在 3.5 中根据热力学第一及第二定律已经证明：完全气体的内能以及等容比热 C_v ，等压比热 C_p 只是温度 T 的函数，即

$$E = E(T), C_p = C_p(T), C_v = C_v(T)$$

在通常的条件下我们可以将气体当作完全气体处理，和实际情形相差不大。但是如果气体处在低温高压状态，距液化状态很近，那么完全气体中所没有考虑的分子间的吸引力及分子本身所占据的体积将起重要作用，完全气体的假设不再适用，此时必须采用更接近于实际的近似模型。1873 年荷兰科学家范德瓦尔考虑了分子吸引力及分子本身的体积将气体状态方程初步地修正为范德瓦尔方程形式

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - \beta) = RT$$

这方程在低温高压时更接近于实际。其次，如果气体处在高温低压状态，发生了离解和电离现象，则状态方程(10.1.2)也必须修正，因为那时离解和电离增加了质点的个数。综上所述可以作出如下结论：当气体距液化及离解、电离状态不很接近的时候，也就是说，压力和温度不是太大或太小的时候，我们可以近似地将气体看成是完全的。对于空气而言，在下列温度和压力范围内可以用完全气体假设

240°K < T < 2000°K, p < 10大气压

在完全气体假设的范围内, 如果温度不是太高的话, 等压比热 C_p 和等容比热 C_v 随温度的变化很微弱, 可以近似地当作常数来处理. 例如对于空气而言, 在 $T < 1000^\circ$ 时, C_p/R 及 $\gamma = C_p/C_v$ 随温度变化情形见下表.

K'	100	500	700	900	1000
C_p/R	3.5059	3.5882	3.7455	3.906	3.970
$\gamma = C_p/C_v$	1.4017	1.3871	1.3646	1.345	1.336

可见, 虽然 C_p/R 及 $\gamma = C_p/C_v$ 随温度有所变化, 但是变化很缓慢. 例如, 温度从 300°K 上升到 1000°K 时, C_p/R 的数值只从 3.5059 微增至 3.976. 在一般的计算中, 这样的变化是可以忽略不计的. 当然当温度再升高, 在 1000°K < T < 2000°K 之间, 就应当考虑 C_p 和 C_v 随温度的变化了.

根据上述四个假定, 流体力学基本方程组(10.1.1)可简化为

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0 \\ \rho \frac{dv}{dt} = -\text{grad } p \\ \frac{ds}{dt} = 0 \\ p = \rho RT \end{cases}$$

利用完全气体熵的表达式 $s = C_v \ln \frac{p}{\rho v}$, 上式还可写成

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0 \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho v} \right) = 0 \end{cases} \quad (10.1.3)$$

这就是经典的理想气体动力学的基本方程组。五个方程用来确定五个未知函数 v, p, ρ 。当 v, p, ρ 确定后, 温度 T 可由状态方程定出。

应该特别提出, 既然气体动力学是研究可压缩流体的运动规律, 因此这里绝不应该采用不可压缩流体的假定 $d\rho/dt=0$, 当然更不能采用不可压缩均质流体的假定 $\rho = \text{常数}$ 。

在直角坐标系、柱坐标系、球坐标系和曲线坐标系中气体力学方程组分别采取下列形式:

直角坐标系

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) &= 0 \end{aligned} \right. \quad (10.1.4)$$

柱坐标系

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + \frac{\rho v_r}{r} &= 0 \\ \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + v_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + v_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) &= 0 \end{aligned} \right. \quad (10.1.5)$$

球坐标系

超星浏览器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} \\ & \quad + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho v_\lambda)}{\partial \lambda} + \frac{2\rho v_r}{r} + \frac{\rho v_\theta \cot \theta}{r} = 0 \\ & \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \lambda} - \frac{v_\theta^2 + v_\lambda^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ & \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda} \\ & \quad + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\lambda^2 \cot \theta}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (10.1.6) \\ & \frac{\partial v_\lambda}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\lambda}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} \\ & \quad + \frac{v_r v_\lambda}{r} + \frac{v_\theta v_\lambda \cot \theta}{r} = -\frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \\ & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + v_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + \frac{v_\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \end{aligned}$$

曲线坐标系

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial(\rho H_2 H_3 v_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(\rho H_3 H_1 v_2)}{\partial q_2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial(\rho H_1 H_2 v_3)}{\partial q_3} \right] = 0 \\ & \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{v_1}{H_1} \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_2} \frac{\partial v_1}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_3} \frac{\partial v_1}{\partial q_3} \\ & \quad + \frac{v_1 v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{v_1 v_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \frac{v_2^2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \\ & \quad - \frac{v_3^2}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} = -\frac{1}{\rho H_1} \frac{\partial p}{\partial q_1} \end{aligned}$$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识 (10.1.7)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{v_1}{H_1} \frac{\partial v_2}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_2} \frac{\partial v_2}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_3} \frac{\partial v_2}{\partial q_3} \\ + \frac{v_1 v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{v_2 v_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} - \frac{v_2^2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \\ - \frac{v_1^2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} = - \frac{1}{\rho H_2} \frac{\partial p}{\partial q_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_3}{\partial t} + \frac{v_1}{H_1} \frac{\partial v_3}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_2} \frac{\partial v_3}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_3} \frac{\partial v_3}{\partial q_3} \\ + \frac{v_3 v_1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \frac{v_2 v_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} - \frac{v_1^2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \\ - \frac{v_2^2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} = - \frac{1}{\rho H_3} \frac{\partial p}{\partial q_3} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + \frac{v_1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + \frac{v_2}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + \frac{v_3}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0$$

下面我们将气体动力学方程组(10.1.1)无量纲化。令
 $t = T t', r = L r', v = V_\infty v', p = p_\infty p', \rho = \rho_\infty \rho'$
(10.1.8)

其中, T, L 是特征时间及特征长度, $V_\infty, p_\infty, \rho_\infty$ 是流动的特征速度、特征压力和特征密度 (例如可以是无穷远处的来流速度、压力及密度), 将(10.1.8)式代入(10.1.3)式经过无量纲化后得

$$\left\{ \begin{aligned} St \frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \text{div}(\rho' v') &= 0 \\ St \frac{\partial v'}{\partial t'} + (v' \cdot \nabla) v' &= - \frac{1}{\gamma M_\infty^2} \frac{1}{\rho'} \text{grad } p' \\ St \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{p'}{\rho'^\gamma} \right) + v' \cdot \text{grad} \left(\frac{p'}{\rho'^\gamma} \right) &= 0 \end{aligned} \right. \quad (10.1.9)$$

由此可见, 无量纲的物理量将都和 M 数有关, 这是气体力学最重要的相似性准则, 在可压缩流体中它和粘性流体中的 Re 数



具有同样重要的地位，第三节我们将着重研究音速及马赫数的物理意义及其特性。

10.2 无量纲热力学元素和无量纲速度之间的关系

本节考虑定常运动，假设流动是绝热等熵的，流体中没有激波存在。

在定常运动情形下，动量方程具有伯努利第一积分，对于不可压缩流体情形，伯努利积分

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C(\Psi)$$

建立了压力和速度的关系，此时，压力可以通过速度表示出来，对于可压缩流体，情况就不同了，伯努利积分

$$\begin{aligned} \frac{V^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \\ = \left[\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1} = \frac{V^2}{2} + i = \frac{V^2}{2} + C_p T \right] = C(\Psi) \end{aligned} \quad (10.2.1)$$

中出现了三个未知函数 V, p, ρ 。要确定热力学元素 p, ρ, T 和速度 V 之间的关系，只是(10.2.1)式显然是不够的，还须要添加热流方程

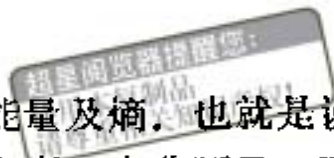
$$-\frac{p}{\rho^\gamma} = \theta(\Psi) \quad (10.2.2)$$

和状态方程

$$p = \rho RT \quad (10.2.3)$$

(10.2.1), (10.2.2), (10.2.3)三个方程联立起来就可以建立热力学元素 p, ρ, T (因而也有 a 与 i) 和运动学元素 V 之间的关系，本节的主要任务就是具体地找出这些关系并加以分析。

伯努利积分(10.2.1)和热流方程(10.2.2)的右边出现了依赖于流线号码的积分常数 $C(\Psi), \theta(\Psi)$ ，它们分别代表每一条流线所包含的总能量及熵，不同流线，总能量及熵可以不同，为了确



定这些常数，必须给出流线上某参考点的能量及焓。也就是说，必须给出流线上某参考点的速度、压力及密度。由此可见，要确定热力学元素和速度之间的关系还应该知道某参考点上的物理量。换句话说，我们现在所要建立的关系实质上是相对某些参考量而言的无量纲热力学元素和无量纲速度之间的关系。下面我们首先介绍几种常用的特征参考量及相应的无量纲物理量，然后再着手建立无量纲热力学元素和无量纲速度之间的关系。

a) 常用的几种特征参考量

伯努利积分(10.2.1)式告诉我们，流体的动能和焓（内能和压力能之和）的总和即流体的总能量沿流线守恒。当动能增加时，焓必然减小，焓转化为动能；反之，当动能减少时焓必然增加，动能转化为焓。由于沿流线的总能量总是有限的，因此速度只能从0变到某有限的最大值。现在我们考察一下，在速度的变化范围(0, V_{max})内有那几种特征参考量。

1) 驻点参考量

在每一条流线上取速度等于零的点上的物理量，即 $V=0$ 时的 $p_0, \rho_0, T_0, i_0, a_0$ 为参考量。我们称之为驻点参考量，因为绕流物体前驻点处 $V=0$ ，那里的热力学元素就是 $p_0, \rho_0, T_0, i_0, a_0$ 。有时也称为滞止参考量，因为它相当于每条流线上的流体绝热等熵地滞止为零时所得的数值。例如气体从大容器中流出，大容器中的气体速度可近似地认为已滞止为零，此时，容器中对应的物理量即为滞止参考量。最后， $V=0$ 处的参考量还可以称为总参考量，因为当 $V=0$ 时 $p_0, \rho_0, T_0, a_0, i_0$ 取最大值，“总”的名称即由此而来。（ i_0, a_0, T_0 是最大值可以很容易地从伯努利积分中看出，至于 p_0, ρ_0 为什么是最大值则需要在本节末尾才能说明）。

将 $V=0$ 时 $p=p_0, \rho=\rho_0, T=T_0, i=i_0, a=a_0$ 代入伯努利积分(10.2.1)式即得伯努利常数 C 和驻点参考量之间的关系

$$C = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} = i_0 = C_p T_0 = \frac{a_0^2}{\gamma-1} \quad (10.2.4)$$

驻点处动能等于零，焓取最大值 i_0 ，称为总焓，驻点焓或滞止焓，此时整个能量以焓的形式表现出来。考虑到(10.2.4)式，伯努利积分可写成

$$\frac{V^2}{2} + i = i_0 \quad (10.2.5)$$

由此可见，总焓表征每条流线上的总能量。

滞止点上的压力 p_0 及温度 T_0 分别称为驻点压力、滞止压力、总压及驻点温度、滞止温度、总温。对于它们伯努利积分具有下列形式

$$T + \frac{V^2}{2C_p} = T_0$$

$$p + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \rho V^2 = p_0$$

为了与 p_0, T_0 区别开来，式中的压力 p 及温度 T 称为静压与静温。不难看出，总压或总温等于静压或静温加上速度降低为零使动能全部滞止下来所增加的压力值或温度值。例如远方空气原有温度为 $T_\infty = 288^\circ\text{K}$ ，飞行速度为 $V_\infty = 450$ 米/秒，则

$$T_0 = 288 + \frac{450^2}{2010} = 388^\circ\text{K}$$

2) 最大速度参考量

上面我们考虑了速度等于零，热力学元素取极大值的极端情形。那时动能等于零，全部能量转化为焓。现在我们再考虑另一极端情形，即焓等于零而速度取最大值 $V = V_{\max}$ 。此时，全部能量变成了动能。由于 $i=0$ ，所以 $T=a=0$ 。再根据状态方程 $p = \rho RT$ 及绝热方程 $p = \theta \rho^\gamma$ 推出 $p = \rho = 0$ 。于是与最大速度 V_{\max} 相对应的热力学元素都等于零，而且都取极小值。不言而喻，当 $p=0, T=0$ 时，流体已成真空状态，分子的微观运动亦已停止下来。现在我们就取

$$V = V_{\max}, \quad p = \rho = T = a = i = 0$$

为特征参考量，并称之为最大速度参考量。显然，由(10.2.1)式得

$$\begin{cases} C = i_0 = \frac{V_{max}^2}{2} \\ V_{max} = \sqrt{2i_0} \end{cases} \quad (10.2.6)$$

此式说明最大速度只和总能量 i_0 有关，总能量愈多，转化的动能也愈多，最大速度也就取愈大的数值。而且由于总能量可以取任意的数值，因此最大速度的数值虽然是有限的，但却是没有限制的。下面为了使读者对 V_{max} 的大小有一个了解，我们举出一个数据：当空气的 $T_0 = 288^\circ\text{K}$ 时，对应的 $V_{max} = 756$ 米/秒。

3) 临界参考量

将伯努利积分写成下列形式：

$$\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1} = C(\Psi) = \frac{V_{max}^2}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma-1}$$

等式两边分别除以积分常数 C ，左边第一项用动能最大值 $V_{max}^2/2$ 代替，左边第二项则用焓的最大值 $a_0^2/(\gamma-1)$ 代替，经过简单运算得

$$\frac{V^2}{V_{max}^2} + \frac{a^2}{a_0^2} = 1$$

在 V - a 平面上，它代表第一象限中的四分之一椭圆（因为 $v > 0$ ， $a > 0$ ，所以其余的四分之三椭圆实际上是不存在的），无论从图10.2.1

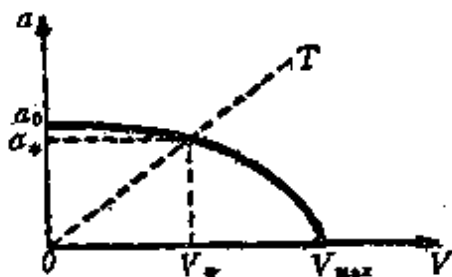


图 10.2.1

或方程都可以看出，当速度从零连续地增加到 V_{max} 时，音速从最大值不断地降低到 0，因此，中间必有一个流速 V 等于音速 a 的地方，它相当于图上第一象限角的二等分线 OT 和椭圆的交点。这一具有特征意义的速度及音速分别称为临界流速和临界音速，并记以 V_*, a_* 。显然

$$V_* = a_*$$

与之对应的其他热力学元素以 p_*, ρ_*, T_*, i_* 表之, 并相应地称之为临界压力、临界密度、临界温度和临界焓。在气体力学中我们常常采用 $V_* = a_*, p_*, \rho_*, T_*, i_*$ 为参考量, 并称之为临界参考量。显然, 临界音速 a_* 和伯努利常数 C 的关系为

$$C = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} a_*^2 \quad (10.2.7)$$

它也只决定于总能量 C 。

4) 指定特征参考量

除了上面指的三种常用的参考量之外, 有时在某些具体问题中还会出现一些具有特殊意义的参考量。例如在绕体问题中无穷远处的物理量就常常被用作特征量。这类参考量我们统一地用下标 1 表示, 于是我们有指定特征参考量 $V_1, p_1, \rho_1, T_1, a_1, i_1$ (特别地有 $V_\infty, p_\infty, \rho_\infty, T_\infty, a_\infty$ 及 i_∞)。伯努利积分 C 和指定特征量关系为

$$C = \frac{V_1^2}{2} + \frac{\gamma RT_1}{\gamma-1} \quad (10.2.8)$$

为了便于记忆和查考, 我们将上述四种特征参考量列表如下。

	V	p	ρ	T	a	i	与 C 的关系
驻点	0	p_0	ρ_0	T_0	a_0	i_0	$C = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{a_0^2}{\gamma-1}$ $= i_0 = C_p T_0$
临界	V_*	p_*	ρ_*	T_*	a_*	i_*	$C = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} a_*^2$
最大	V_{max}	0	0	0	0	0	$C = \frac{V_{max}^2}{2}$
指定	V_1	p_1	ρ_1	T_1	a_1	i_1	$C = \frac{V_1^2}{2} + \frac{\gamma RT_1}{\gamma-1}$

下面对特征量作几点说明:

1) 特征点 (例如驻点、最大速度点、临界点等等) 可以实

际存在，也可以实际不存在，纯粹是虚拟的。例如在所研究的流场中没有速度等于零的驻点，没有临界速度(亚音速流动)等等。但是这并不影响它们被选为特征参考量，也不影响最后结果。

2) 上面提出的所有特征量一般说来都依赖于流线号码 ψ ，不同流线取不同值。只有在均能流体中(即所有流线上的能量都相等的流体)，这些特征量才真正是一个常数，在整个流场上取同一个数值。

最后我们将(10.2.4)，(10.2.6)，(10.2.7)及(10.2.8)式代入(10.2.1)式得

$$\begin{aligned} \frac{V^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} &= \frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1} = \frac{V^2}{2} + i = \frac{V^2}{2} + C_p T \\ &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{a_0^2}{\gamma-1} = i_0 = C_p T_0 = \frac{V_{\max}^2}{2} \\ &= \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} a_*^2 = \frac{V_1^2}{2} + \frac{\gamma R T_1}{\gamma-1} \end{aligned} \quad (10.2.9)$$

b) 无量纲物理量

现在针对上一小节提出的特征量，提出相应的无量纲速度和无量纲热力学元素。

1) 无量纲速度

从上表可以看出，能够取作速度参考量的有当地音速 a ，临界音速 a_* ，最大速度 V_{\max} ，指定特征速度 V_1 ，以及驻点音速 a_0 ，指定音速 a_i 等(驻点速度因等于零不能取作参考量)。在这些速度参考量中通常采用的是前四种，现分别引出之。

i) 用当地音速作参考量得 V/a ，用 M 数表之并称为马赫数，于是

$$M = \frac{V}{a} \quad (10.2.10)$$

$M \geq 1$ 分别称为超音速、音速和亚音速。当流体静止 $V=0(a \neq 0)$

或流体不可压缩 $a = \infty (V \neq 0)$ 时 $M = 0$, 这是 M 数的下界. 其次, 如果速度达到最大值 $V = V_{\max}, a = 0$, 则相应的 $M = \infty$, 这是 M 数上界. 注意, 这里 M 所以趋于无穷不是由于流速等于无穷, 而是因为音速为零. 由此可见, 马赫数 M 的变化范围是 $[0, \infty]$.

ii) 引进马赫数 M 十分自然, 而且物理意义明确, 但是有时也并不方便. 由于参考量 a 每一点都不相同, 因此如果需要根据流速计算流场各点的 M , 或根据 M 数计算流速, 或者检验流体质点的速度是超音速或亚音速时, 就需要首先算出该点的音速, 而且每一点都需要重新计算一次, 在进行大量这类运算时就觉得很麻烦了. 其次在作图时, 如果选用 M 数为横坐标, 则 V_{\max} 附近的情况就不容易反映出来, 因为 $M = \infty$ 是在无穷远处. 正因为这些原因, 我们除了选当地音速为参考量引进 M 数外, 还采用临界音速 a_* 为参考量, 并定义

$$\lambda = \frac{V}{a_*} \quad (10.2.11)$$

称为速度系数. 显然, 当 $\lambda = 1$ 时, V 等于音速; 其次, 从图 10.2.1 中容易看出

$$V > V_* = a_* > a, \quad V < V_* = a_* < a$$

因此当 $\lambda > 1$ 时必有 $M > 1$, 气流是超音速的. 反过来, 如果 $\lambda < 1$ 时, 必有 $M < 1$, 那时气流是亚音速的. 由此可以确信, $\lambda \approx 1$ 乃是流速是否为超音速、音速或亚音速的检验. 当 $V = V_{\max}$ 时,

$$\lambda_{\max} = \frac{V_{\max}}{a_*}$$

根据(10.2.9)式

$$\frac{V_{\max}^2}{2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} a_*^2$$

得

$$\frac{V_{\max}}{a_*} = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}$$

于是

$$\lambda_{\max} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

这样, λ 的变化范围为 $\left[0, \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\right]$. 如果以 λ 为横坐标画图, 则由于 λ_{\max} 是有限值, V_{\max} 附近的情况可以充分地反映出来. 这点正是 M 数所不具有的, 可以说是 λ 数的第一个优点.

λ 和 M 不同之处在于分母用的是临界音速而不是当地音速. 当地音速是坐标点的函数, 而临界音速只依赖于流线号码, 同一条流线取相同的值. 在均能流体中则更为简单, 整个流场取同一常数. 当我们须要在 λ 和 V 之间进行换算或检验流速是超音速或亚音速 ($\lambda \geq 1$) 时, 只须算出流线号码的函数 $a_*(\Psi)$, 一条流线只须算一次. 在均能流体中甚至整个流场只须算一次就行了. 这是 λ 数的第二个优点.

iii) 取最大速度 V_{\max} 为参考量,

$$\tau = \frac{V}{V_{\max}} \quad (10.2.12)$$

当 $V = a_*$ 或 V_{\max} 时,

$$\tau = \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \quad \text{或} \quad 1$$

于是 τ 的变化范围为 $[0, 1]$.

M, τ, λ 三个无量纲数之间存在着一定关系, 相互之间可以转换, 根据伯努利积分(10.2.9)式得

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{V^2}{a^2} = \frac{V^2}{\frac{(\gamma+1)}{2} a_*^2 + (\gamma-1) \frac{V^2}{2}} \\ &= \frac{\lambda^2}{\frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{2} \lambda^2} = \frac{\frac{2}{\gamma+1} \lambda^2}{1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2} \end{aligned}$$

$$\lambda^2 = \frac{V^2}{a_*^2} = \frac{V^2}{2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1} \right)}$$

$$= \frac{M^2}{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} M^2 + \frac{2}{\gamma+1}} = \frac{\frac{\gamma+1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}$$

$$\lambda^2 = \frac{V^2}{a_*^2} = \frac{V^2}{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} V_{\text{max}}^2} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \tau^2$$

$$\tau^2 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2$$

于是

$$\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \tau^2 = \lambda^2 = \frac{\frac{\gamma+1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \quad (10.2.13)$$

$$M^2 = \frac{\frac{2}{\gamma+1} \lambda^2}{1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2} = \frac{2}{1 - \tau^2} \tau^2 \quad (10.2.14)$$

$\lambda(M)$ 最常用, 已作成表格, 读者在需要时可查阅有关书籍. 它的图形如图 10.2.2 所示, 从图上明显地看出:

(1) $\lambda < 1$ 时 $M < 1$, 而且在亚音速范围内有 $\lambda > M$;

(2) $\lambda > 1$ 时 $M > 1$, 而且在超音速范围内有 $\lambda < M$;

(3) $M=0$ 时 $\lambda=0$, $M \rightarrow \infty$ 时

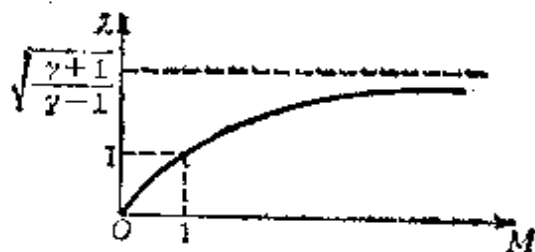


图 10.2.2

$$\lambda = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

最后我们将 M, τ, λ 的变化范围及音速值列表如下。

	最 小	音 速	最 大
M	0	1	∞
λ	0	1	$\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$
τ	0	$\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$	1

iv) 以 V_1 为参考量得 V/V_1 。

2) 无量纲热力学元素

从表中看出，驻点值、临界值和指定值可作为热力学元素参考量，于是有

$$\text{驻点参考量: } \frac{p}{p_0}, \frac{\rho}{\rho_0}, \frac{T}{T_0}, \frac{a}{a_0}, \frac{i}{i_0} \quad (10.2.15)$$

$$\text{临界参考量: } \frac{p}{p_*}, \frac{\rho}{\rho_*}, \frac{T}{T_*}, \frac{a}{a_*}, \frac{i}{i_*} \quad (10.2.16)$$

$$\text{指定参考量: } \frac{p}{p_1}, \frac{\rho}{\rho_1}, \frac{T}{T_1}, \frac{a}{a_1}, \frac{i}{i_1} \quad (10.2.17)$$

c) 无量纲速度和无量纲热力学元素之间的关系

现在我们着手寻求无量纲热力学元素(10.2.15), (10.2.16), (10.2.17)和无量纲速度 M, λ, τ 的关系。首先, 导出 $p/p_0, \rho/\rho_0, T/T_0, a/a_0, i/i_0$ 依赖于 M, λ, τ 的公式, 因为它最简单也最常用; 其次, 再由此出发导出(10.2.16)式, (10.2.17)式和无量纲速度的关系。为了建立(10.2.15)式和 M, λ, τ 的关系, 先设法找出无量纲热力学元素之间的一个联系公式, 然后再选择 T/T_0 和 M, λ, τ 建立关系, 从而最后解决了问题。

将驻点值代入(10.2.2)与(10.2.3)式得

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma \quad (10.2.18)$$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{T}{T_0}$$

令两式相等得

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} = \frac{T}{T_0}$$

于是

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(\frac{i}{i_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}}$$

将之代入(10.2.18)式有

$$\begin{aligned} \frac{p}{p_0} &= \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{i}{i_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ &= \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \end{aligned} \quad (10.2.19)$$

这就是无量纲热力学元素之间的一个内部关系式，只要有一个函数知道，其他函数就可以根据(10.2.19)式确定。现在研究一下它们的变化趋势，为此对(10.2.19)式取对数并微分之得

$$\begin{aligned} \frac{dp}{p} &= \gamma \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T} \\ &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{di}{i} = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{da}{a} \end{aligned} \quad (10.2.20)$$

因为 $p, \rho, T, a, i, \gamma, \gamma-1$ 都是正的量，所以所有热力学元素的变化趋势是一致的，要增加大家一起增加，要减少大家一起减少，取极值一起取极值。其次，在这些量中变化得最快的是 p ，次之是 ρ, T 及 a 。

现在建立(10.2.19)式中热力学元素 T/T_0 和无量纲速度 M ,

λ, τ 之间的关系, 写出(10.2.9)式

$$\underbrace{\frac{V^2}{2}}_1 + \underbrace{\frac{a^2}{\gamma-1}}_2 = \underbrace{\frac{V^2}{2} + \frac{\gamma RT}{\gamma-1}}_3 = \underbrace{\frac{V_{\max}^2}{2}}_4 = \underbrace{\frac{\gamma RT_0}{\gamma-1}}_5 = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} a_*^2 \quad (10.2.21)$$

以 $\frac{a^2}{\gamma-1}$ 除 1, 以与之相等的 $\frac{\gamma RT}{\gamma-1}$ 除 4 得

$$\begin{cases} \frac{\gamma-1}{2} \frac{V^2}{a^2} + 1 = \frac{T_0}{T} \\ \frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-1} \\ \frac{dT}{T} = -\frac{(\gamma-1)M}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} dM \end{cases} \quad (10.2.22)$$

以 $\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} a_*^2$ 除 5 及 2 中第一项, 以与之相等的 $\frac{\gamma RT_0}{\gamma-1}$ 除 2 中第二项得

$$\begin{cases} \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{V^2}{a_*^2} + \frac{T}{T_0} = 1 \\ \frac{T}{T_0} = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2 \\ \frac{dT}{T} = -\frac{2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda}{1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2} d\lambda \end{cases} \quad (10.2.23)$$

以 $\frac{V_{\max}^2}{2}$ 除 3 及 2 中第一项, 以与之相等的 $\frac{\gamma RT_0}{\gamma-1}$ 除 2 中第二项得

$$\frac{V^2}{V_{\max}^2} + \frac{T}{T_0} = 1, \quad \frac{T}{T_0} = 1 - \tau^2, \quad \frac{dT}{T} = -\frac{2\tau}{1-\tau^2} d\tau \quad (10.2.24)$$

将(10.2.22), (10.2.23), (10.2.24)式分别代入 (10.2.19) 及 (10.2.20)式得

$$\begin{aligned}
 \frac{p}{p_0} &= \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{i}{i_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\
 &= \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\
 &= \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = (1 - \tau^2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (10.2.25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dp}{p} &= \gamma \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{di}{i} = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{da}{a} \\
 &= -\frac{\gamma M}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM}{M} = -\frac{\frac{2\gamma}{\gamma+1} \lambda^2}{1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2} \frac{d\lambda}{\lambda} \\
 &= -\frac{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \tau^2}{1 - \tau^2} \frac{d\tau}{\tau} \quad (10.2.26)
 \end{aligned}$$

这就是无量纲热力学元素和无量纲速度之间的两套关系式，非常重要，建议读者熟记。

在记忆中应特别注意，

因子 $1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2$ 的幂次

是负的，而 $1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2$

及 $1 - \tau^2$ 的幂次则是正的，不要记成一样。

图10.2.3中画出了

$\frac{p}{p_0}(\lambda)$, $\frac{\rho}{\rho_0}(\lambda)$, $\frac{T}{T_0}(\lambda)$ 和

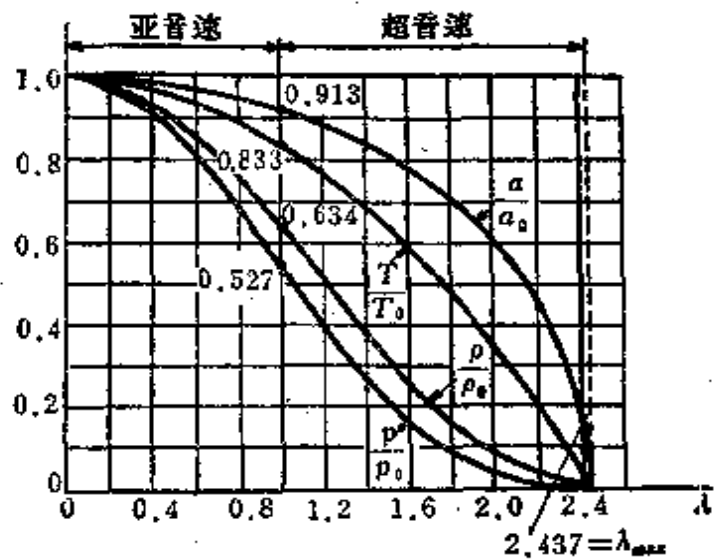


图 10.2.3

$\frac{a}{a_0}(\lambda)$ 的图形。

由图 10.2.3 或(10.2.26)式告诉我们速度的变化趋势和热力学元素的变化趋势恰好相反(注意 $1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2$, $1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2$, $1 - \tau^2 \geq 0$)。当 M, λ, τ 增加或减少时, $p/p_0, \rho/\rho_0, a/a_0, T/T_0$ 减少或

增加。因为当速度增加时, 动能增加, 随着焓减少, 即温度减少。根据热力学元素行动一致的性质, 所有热力学元素都减少。于是, 当速度增加时, 气体发生膨胀, 温度与压力相继减少; 而当速度减少时, 气体则被压缩, 温度与压力的数值相应地得到提高。

以上我们得到了(10.2.15)式和 M, λ, τ 的关系, 由此不难求出(10.2.16), (10.2.17)式与 M, λ, τ 的关系。在(10.2.25)式中取指定参考值或临界参考值得

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{p_0} &= \left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^\gamma = \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \\ &= \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ &= (1 - \tau_1^2)^{\gamma/(\gamma-1)} \end{aligned} \quad (10.2.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{p_*}{p_0} &= \left(\frac{\rho_*}{\rho_0}\right)^\gamma = \left(\frac{T_*}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{a_*}{a_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \\ &= \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \end{aligned} \quad (10.2.28)$$

当 $\gamma=1.4$ 时有

$$p_* = 0.528 p_0, \rho_* = 0.634 \rho_0, T_* = 0.833 T_0, a_* = 0.913 a_0 \quad (10.2.29)$$

(10.2.29)式很重要, 请读者注意。将(10.2.25)式除以(10.2.27)及(10.2.28)式得

$$\begin{aligned}
 \frac{p}{p_1} &= \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^\gamma = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{a}{a_1}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \\
 &= \left[\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}\right]^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left[\frac{1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2}{1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda_1^2}\right]^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\
 &= \left(\frac{1-\tau^2}{1-\tau_1^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left\{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \left[1 - \left(\frac{V}{V_1}\right)^2\right]\right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}
 \end{aligned}$$

(10.2.30)

$$\begin{aligned}
 \frac{p}{p_*} &= \left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)^\gamma = \left(\frac{T}{T_*}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{a}{a_*}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \\
 &= \left[\frac{2}{\gamma-1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)\right]^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\
 &= \left[\frac{\gamma+1}{2} \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2\right)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left[\frac{\gamma+1}{2} (1-\tau^2)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}
 \end{aligned}$$

(10.2.31)

这就是我们所要求的公式，至此本节的任务全部完成。

最后顺便指出，从(10.2.25)式容易推出 M, λ, τ 之间的关系

$$\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-1} = 1 - \tau^2 = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2$$

① 将 $\frac{V^2}{2} + \frac{\gamma R T}{\gamma-1} = \frac{V_1^2}{2} + \frac{\gamma R T}{\gamma-1}$ 两边除以 $\frac{\gamma R T}{\gamma-1}$ 得

$$\frac{T}{T_1} + \left(\frac{V}{V_1}\right)^2 \frac{\frac{V_1^2}{2}}{\frac{a_1^2}{\gamma-1}} = \frac{\frac{V_1^2}{2}}{\frac{a_1^2}{\gamma-1}} + 1$$

即

$$\frac{T}{T_1} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \left[1 - \left(\frac{V}{V_1}\right)^2\right]$$

$$\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \tau^2 = \lambda^2 = \frac{\frac{\gamma+1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}$$

由于因子 $(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2)^{-1}$, $1 - \tau^2$, $1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2$ 已为读者熟知, 因此, τ, λ, M 之间的关系宜于从(10.2.25)式出发间接推出, 不必采用上面叙述的从伯努利方程出发的直接办法。

10.3 小扰动在可压缩流体中的传播. 音速

先直观地探讨一下小扰动传播过程的物理机理. 考虑活塞在一维管道中的不定常运动. 活塞未推动前, 管内气体处于静止状态. 压力、密度、温度分别为 p_0, ρ_0, T_0 . 图 10.3.1 上的空白表示密度到处均匀. 现在向右推动活塞, 使活塞的速度从零迅速地加速到一定数值, 之后便维持等速运动. 假设活塞的扰动速度很小, 于是紧贴着活塞的气体不断地受到小的压缩直到活塞的加速

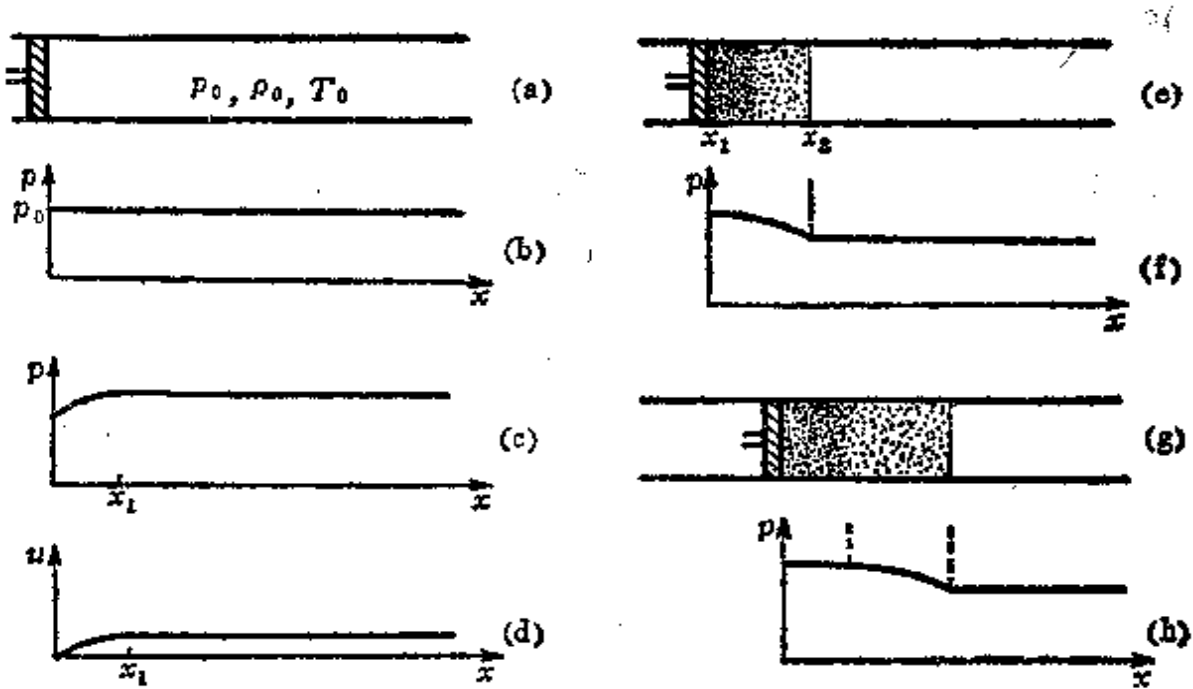


图 10.3.1

过程结束为止。当活塞进入等速运动阶段，活塞后面的气体不再受到扰动。紧贴活塞后气体质点的速度及压力随 x 的变化规律分别如图(d)及(c)所示。 x 处的速度及压力代表活塞运动到那里时，紧贴活塞后气体质点的速度及压力。显然 $[0, x_1]$ 是活塞对气体发生扰动的部分。现在研究小扰动是如何在气体中传播的。当活塞从原点推动到 x_1 处时，活塞后 $[x_1, x_2]$ 处的气体首先受到压缩，密度压力稍有提高。此外，由于密度增加，体积变小，流体质点被活塞推动向右运动，这样就产生了向右运动的扰动速度 u' 。图(e)用点子的密集程度表示密度大小，图(f)表示压力波的形状。当活塞附近 $[x_1, x_2]$ 区域的气体被压缩提高压力后，造成它和紧邻气体的压力差，于是紧邻气体接着被压缩，压力密度提高，且产生纵向速度 u' 。与此同时活塞继续以等速向前运动，高压区内的气体不受扰动，压力、密度、温度及速度维持原值 p_1, ρ_1, T_1 及 u' 不变，压缩过程逐层进行下去，扰动便从活塞附近的气体以相当大的速度迅速地传播到右方去，而流体质点只是在扰动传到它那里时稍稍地向右动了一下，速度很小。图(g)和(h)分别表示下一时刻密度分布和压力分布图。必须指出，扰动传播速度和气体质点的速度是性质不同的两件事，一个是扰动信号（或能量）在介质中的传播速度；另一个则是质点本身的运动速度。它们分别属于两种不同运动形态——波动及质点的机械运动。打一个比方，一队士兵传接力棒，人们可以看到，红白色的接力棒以较快的速度从排头迅速地传至排尾，而每个士兵还是站立在原地不动只是稍稍地挥动了一下胳膊而已。上面我们考虑的是右行压缩波。所谓压缩波指这样的波，波形所到之处，气体被压缩，密度增加。完全同样地可以考虑左行压缩波，为此只须向左推动活塞压缩左方处于静止状态的气体。不管右行压缩波或左行压缩波都有一个共同的特点：流体质点的运动方向和波的运动方向相同，它们都朝着同一个方向，正 x 轴方向或负 x 轴方向。

现在我们在图(a)中向左推动活塞速度从0加速到某一个值，

然后维持等速运动.于是活塞附近 $[x_1, x_2]$ 的气体不断受到膨胀,

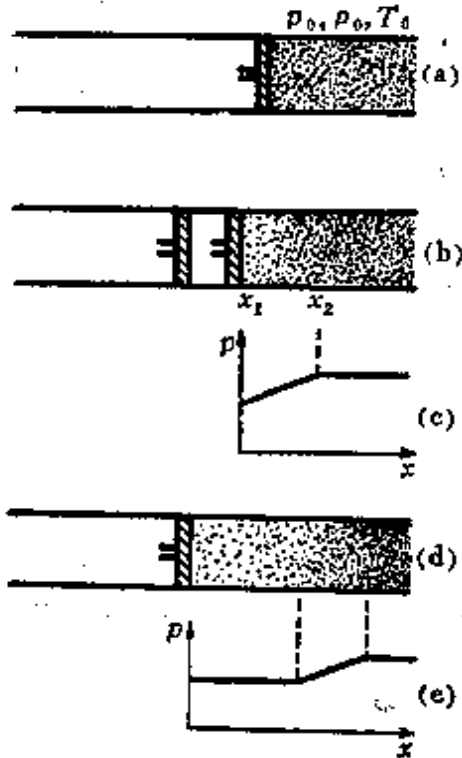


图 10.3.2

密度压力减小,同时气体为了占据活塞向左移动后所腾出的空间必然向左膨胀从而产生了向左的扰动速度 u' .当活塞附近的气体发生膨胀后,压力从 p_0 降下来,这样就自动地造成了一个稍比贴邻气体压力 p_0 为低的压力区,使附近的气体又发生膨胀.同时由于活塞开始以等速向左运动,低压区的气体不再受到扰动,维持原状态.膨胀过程逐层进行下去产生了以一定速度向右方传播的膨胀波.膨胀波所到之处气体质点都向左移动一下.同时由于活塞在加速后维持等速运动使膨胀后的气体维持不变的状态(图 10.3.2 中的 (b), (c), (d) 及 (e) 表示两个不同时刻密度及压力分布图).

刚才考虑的是右行膨胀波,完全同样地可以考虑左行膨胀波.膨胀波的特点是流体质点的运动方向恰好和波的传播方向相反,波形经过之处,气体被膨胀,密度减少.

刚才分别考虑了单纯是压缩和单纯是膨胀的波.现在我们研究既有压缩也有膨胀的波形.设活塞先从静止不断加速到极大值(小量),而后又从极大值逐渐减速到零回复到静止状态.于是先有一段压缩波过去,使流体质点向右稍稍移动一下,接着又有一段膨胀波尾随着扫过去,它反过来使流体质点向左移动.两者相互抵消,逐渐地使流体质点的速度减慢下来最后趋于零.等整个波形过去后,气体恢复静止状态 p_0, ρ_0, T_0 (参看图 10.3.3).

从小扰动传播的物理机理容易理解小扰动的传播速度和流体

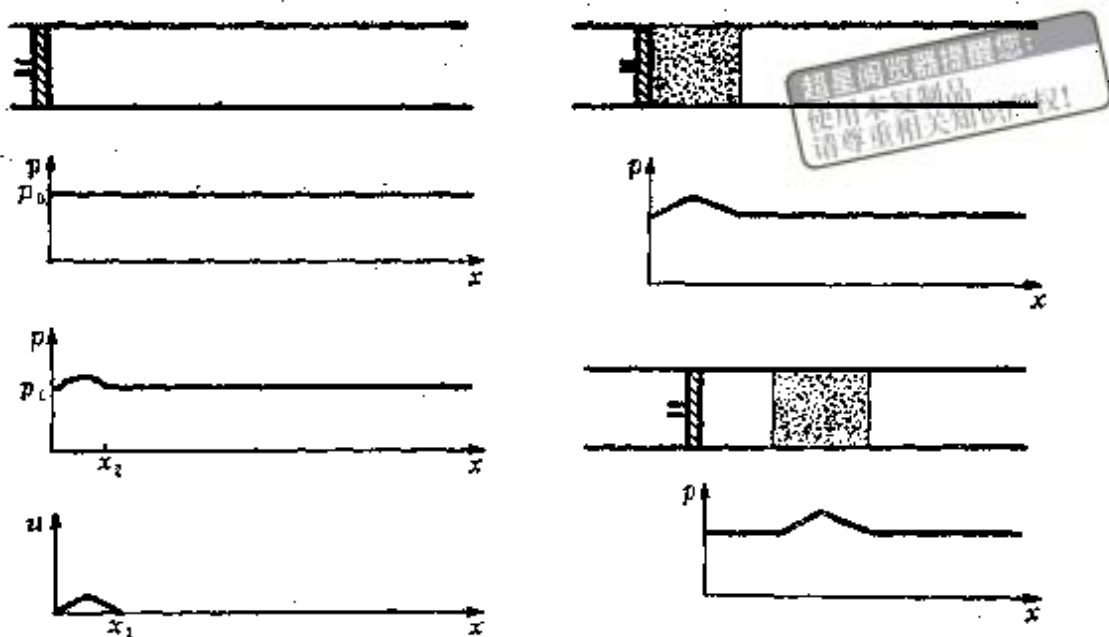


图 10.3.3

的可压缩性（或谓弹性）有关。愈易压缩的流体小扰动的传播速度愈小，愈不易压缩的流体传播的速度愈大，因为压缩气体需要时间。在不可压缩流体的极限情形，小扰动的传播速度趋于无穷。由此很容易理解为什么小扰动在水中的传播速度比空气中的为大。

综上所述，可以得出如下结论：

1) 小扰动通过波动形式以远较流体质点为大的速度在可压缩流体中传播。

2) 小扰动传播的速度依赖于流体的性质。愈易压缩的流体传播速度愈小，反之愈大。

3) 压缩波传播方向和流体质点运动的方向相同，膨胀波传播方向则和流体质点运动方向相反。

上面我们根据流体的性质，定性地分析了小扰动的传播过程，得到了许多重要的结论，为理论分析提供了感性材料。但是为了得到小扰动传播速度的定量公式，研究更复杂的扰动过程，单是直观分析就显得不够了，还必须从反映普遍运动规律的气体

力学方程组出发研究小扰动的传播规律，下面我们就来进行理论分析工作。

设在静止流体中由于某种原因，物理量 v, p, ρ 产生了小的变化，即所谓的小扰动。现在我们研究小扰动在可压缩流体中的传播速度。

设静止流体的压力及密度为常数 p_0, ρ_0 ，今在静止状态 $v=0$ ， p_0, ρ_0 的基础上产生了小扰动 v', p', ρ' ，它们都是一级微量，于是新的 v, p, ρ 为

$$v = v', \quad p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho' \quad (10.3.1)$$

现在我们的任务是确定 v', p', ρ' 所应具有函数形式，由此研究小扰动 v', p', ρ' 的传播速度。 v, p, ρ 满足理想绝热完全气体的基本方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \end{cases} \quad (10.3.2)$$

这是非线性方程组。将(10.3.1)式代入(10.3.2)式，并忽略二级微量以上的量，可得 v', p', ρ' 满足的线性方程组。现在我们把方程(10.3.2)中每个方程逐个地线性化。

$$1) \quad \frac{\partial(\rho_0 + \rho')}{\partial t} + \operatorname{div}[(\rho_0 + \rho')v'] = 0$$

$\rho'v'$ 是二级微量可忽略不计，其次因 $\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$ ，于是

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} v' = 0 \quad (10.3.3)$$

$$2) \quad \frac{\partial v'}{\partial t} + (v' \cdot \nabla) v' = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'} \text{grad}(p_0 + p')$$

$$= -\frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0} + \dots \right) \text{grad} p'$$

式中 $(v' \cdot \nabla)v'$ 及 $\left(-\frac{\rho'}{\rho_0} + \dots\right)\text{grad} p'$ 都是二级微量以上项可略而不计，于是

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \text{grad} p' \quad (10.3.4)$$

3) $s = C_v \ln \left(\frac{p}{\rho^{\gamma}} \right)$ ，故 p 可写成 $p = p(\rho, s)$ 。因 ρ 发生小扰动 ρ' 是在绝热过程下进行的，故 s 不变。将函数 $p = p(\rho, s)$ 在 ρ_0, ρ_0 附近展成泰氏级数，并忽略二级微量以上项有

$$p = p_0 + \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \right]_0 (\rho - \rho_0) + \dots$$

亦即

$$p' = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \right]_0 \rho' \quad (10.3.5)$$

$\left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \right]_0$ 的具体形式由方程 $\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^{\gamma}} \right) = 0$ 确定。为书写简便起见

令

$$a^2 = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \right]_0$$

显然 a 是常数，于是

$$p' = a^2 \rho' \quad (10.3.6)$$

将(10.3.3), (10.3.4), (10.3.6)三式集合起来得到确定 v', p', ρ 的微分方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} v' = 0 \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p' = 0 \\ p' = a^2 \rho' \end{cases} \quad (10.3.7)$$

现在设法解出上述线性方程，首先证明扰动运动 v' 是无旋的，为此对(10.3.7)第二式取旋度得

$$\frac{\partial \operatorname{rot} v'}{\partial t} = 0$$

利用 $t=0$ 时流体静止，因而是无旋的事实得 $\operatorname{rot} v' = 0$ ，于是 $v' = \operatorname{grad} \varphi''$ ，可用一个速度势函数 φ'' 代替三个速度分量 v' ，将 $v' = \operatorname{grad} \varphi''$ 代入(10.3.7)式得

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \Delta \varphi'' = 0 \\ \operatorname{grad} \left[\frac{\partial \varphi''}{\partial t} + \frac{p'}{\rho_0} \right] = 0 \\ p' = a^2 \rho' \\ v' = \operatorname{grad} \varphi'' \end{cases}$$

积分第二式得 $\frac{\partial \varphi''}{\partial t} + \frac{p'}{\rho_0} = f(t)$ ，取 $\varphi' = \varphi'' - \int_0^t f(t) dt$ ，得

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \Delta \varphi' = 0 & (a) \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \frac{p'}{\rho_0} = 0 & (b) \\ p' = a^2 \rho' & (c) \\ v' = \operatorname{grad} \varphi' & (d) \end{cases} \quad (10.3.8)$$

由(a)及(c)消去 ρ' 得

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \Delta \varphi' = 0 \quad (10.3.9)$$

由(10.3.9)及(10.3.8)式的(b)消去 p' , 得

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} - a^2 \Delta \varphi' = 0 \quad (10.3.10)$$

可见速度势应满足经典的波动方程. 求出 φ 后, v', p', ρ' 由(d), (c), (b)式确定. 显然, 它们亦满足波动方程

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} - a^2 \Delta v' = 0, \quad \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - a^2 \Delta p' = 0, \quad \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - a^2 \Delta \rho' = 0$$

令 g' 代表 φ', v', p' 或 ρ' 则

$$\frac{\partial^2 g'}{\partial t^2} - a^2 \Delta g' = 0 \quad (10.3.11)$$

下面为了简单起见, 只限于考虑一维运动的小扰动传播. 设 u', p', ρ' 皆为 x, t 的函数, 于是(10.3.11)式采取下列形式

$$\frac{\partial^2 g'}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 g'}{\partial x^2} = 0 \quad (10.3.12)$$

引进新的特征线变数 ξ, η 代替 x, t , 它们和 x, t 的关系为

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at$$

将自变数由 x, t 转为 ξ, η 后, (10.3.12)式变成

$$\frac{\partial^2 g'}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

积分一次得

$$\frac{\partial g'}{\partial \eta} = F(\eta)$$

式中 $F(\eta)$ 是 η 的任意函数. 再积分一次得

$$g' = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

其中 f_1, f_2 分别是 ξ, η 的任意函数, 具体形式根据边界条件及初始条件确定. 回到原变数 x, t 有

$$g' = f_1(x - at) + f_2(x + at) \quad (10.3.13)$$

应该特别指出, 当 g' 分别取 u', p', ρ' 时, 函数 f_1, f_2 的具体形式是不相同的.

现在我们对解进行分析，先孤立地分析单个函数 f_1 与 f_2 的作用。为此首先令 $f_2=0$ ，于是

$$g' = f_1(x - at)$$

在任何一个 $x = \text{常数}$ 的平面上扰动物理量随时间 t 变化；其次对于任一给定时刻扰动物理量在不同 x 处取不同值。只有在 x, t 满足关系式

$$x = \text{常数} + at$$

时，扰动物理量才是相同的。由此可见，如果在静止流体中，当 $t=0$ 在某点 x 上物理量发生小扰动 g' ，则经过一段时间 t 后，同样的压力扰动在距初始位置 at 处发生。这也就是说，小扰动在可压缩流体中以常速度 a 沿正 x 轴方向运动。整个扰动图案亦以常速 a 沿正 x 轴方向运动。

上面我们指出函数 $f_1(x - at)$ 代表右行的平面进波，完全同样地可以分析 $f_2(x + at)$ 代表左行平面进波，这两种波都是在一个方向上传播的，常称为简单波。

上述结果还可以用几何图形的方法直观地表示出来。设 $x-t$ 平面上 $t=0$ 的初始扰动曲线是正弦分布，则 $f_1(x - at)$ 这一项表示正弦曲线沿斜率为 a 的特征线向右方传播，如图 10.3.4 的左图所示。而 $f_2(x + at)$ 这一项则说明正弦曲线沿斜率为 $-a$ 的另一族特征线向左方传播，如图 10.3.4 的右图所示。它们的传播速度皆为 a 。

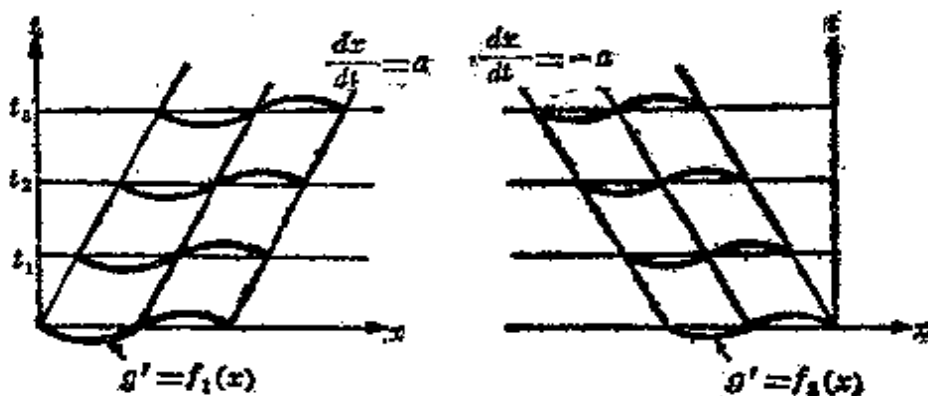


图 10.3.4

上面我们分析了 f_1, f_2 的物理意义, 显然函数 f_1 与 f_2 之和代表两种简单波的叠加.

应该指出, 这里所研究的波属于纵波之列, 因为波的传播和质点的运动方向重合.

小扰动的传播速度

$$a = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \right]} \quad (10.3.14)$$

称为音速, 这是因为声音也是一种小振幅的振动, 它在空气中以 (10.3.14) 式确定的速度传播. 这是一种用个别代表一般的说法. 因为在小扰动的前提下, (10.3.14) 式对任何运动气体而言都是对的, 因此以后我们省去下标 0, 将 a 理解为小扰动相对于运动气体而言的局部音速.

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)} \quad (10.3.15)$$

(10.3.15) 式告诉我们音速大小和扰动过程中压力变化与密度变化的比值有关. 介质愈易压缩, 相应的音速愈小; 反之愈大. 对于不可压缩流体 $\rho = \text{常数}$ 而言, $d\rho = 0, a = \infty$. 也就是说, 小扰动在不可压缩流体中以无穷大的速度传播, 流体中任一点的扰动一瞬间传至流体中任何一点.

因为小扰动传播过程是绝热等熵的, 于是

$$p = \beta \rho^\gamma, \quad \frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}$$

即

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right) = \gamma \frac{p}{\rho}$$

代入 (10.3.15) 式得

$$a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} \quad (10.3.16)$$

利用完全气体的状态方程 $p = \rho RT$. 上式亦可写成

$$a = \sqrt{\gamma RT} \quad (10.3.17)$$

由此可见，小扰动在气体中的传播速度一方面取决于气体的物理属性，体现在不同的气体常数中；另一方面也取决于气体在当时当地所具有的绝对温度 T 。对于 $T = 230^\circ\text{K}$ 的空气而言

$$\gamma = 1.4, R = 848 \text{ g}/\mu \frac{\text{米}^2}{\text{秒}^2 \text{度}}, \mu = 28.96, g = 9.8 \text{ 米}/\text{秒}^2$$

故

$$a = 332 \text{ 米}/\text{秒}$$

和实际相符。

最早计算声音传播速度的人是牛顿。他采用等温过程

$$p = c\rho, \quad \frac{dp}{d\rho} = \frac{p}{\rho}$$

计算出音速为 $a = \sqrt{p/\rho}$ ，求出空气中的音速约为 280 米/秒。为了比较，牛顿在伦敦附近一个射击场测量过音速。他从远处观察了放炮时的闪光和听到炮声的相差时间，并认为光速和音速相比可以无穷大。从测出的相差时间，牛顿确定音速为 330 米/秒。这个数值对应于海平面上通常的温度。理论和实验数值不同，相差 17%。当时牛顿天真地寻找一些理由来说明这一差别。首先，他埋怨空气不干净，认为其中永远有若干浮悬的灰尘颗粒，所以把 10% 的错误归结为这些灰尘的影响；其次，他认为空气中含有水分，阻碍了空气压缩。于是他说那总共 17% 的相差可能就是这两种原因共同造成的。当然牛顿这些想法十分天真可笑，但是我们也应该原谅他，任何人都难免会发生错误，何况那时热力学还没有形成一门科学呢。

拉普拉斯改正了牛顿的错误，他认为音速传播过程是绝热的，从而得到了 (10.3.17) 式的音速公式，解决了牛顿理论和实验数据相差约 17% 的误差。

现在考察流体质点的速度大小，以右行和左行的简单波为

例:

$$u' = \frac{\partial \varphi'}{\partial x} = f'(x \mp at)$$

因

$$\rho' = \frac{1}{a^2} p' = -\frac{\rho_0}{a^2} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = \pm \frac{\rho_0}{a} f'(x \mp at)$$

得

$$\frac{u'}{a} = \pm \frac{\rho'}{\rho_0} \quad (10.3.18)$$

“+”号对应右行简单波;“-”号对应左行简单波。(10.3.18)式说明: 1) 流体质点的速度和小扰动传播速度——音速相比是一级微量。这里体现了波动现象的重要特性: 物理量的扰动以及流体能量以很大的速度(本例是音速)在介质中传播, 另一方面介质中质点的速度相对于音速而言很小, 只是相对原有位置稍微扰动了一下。2) 对右行的简单波而言, 压缩波 $\rho' > 0$ 使流体质点向右运动($u' > 0$), 膨胀波 $\rho' < 0$ 使流体质点向左运动($u' < 0$)。对左行简单波来说, 压缩波 $\rho' > 0$ 对应于流体质点向左运动的情形($u' < 0$), 而膨胀波 $\rho' < 0$ 则对应于流体质点向右运动的情形($u' > 0$)。将这两种情形合在一起再一次得到本节开始定性分析时已经明确的结论: 压缩波传播方向和流体质点的运动方向相同, 而膨胀波的传播方向则和流体质点的运动方向相反。

例 在一维管道中用薄膜隔开两个压力不同的区域(1)及(4), 如图 10.3.5 所示, 设(1)是低压区, 压力为 p_1 , (4)是高压区, 压力是 p_4 , 压力差 $p = p_4 - p_1$ 比起 p_1 或 p_4 来说是一小量。两部分气体都处在静止状态。设想薄膜突然去除(或破裂), 研究由此而产生的小

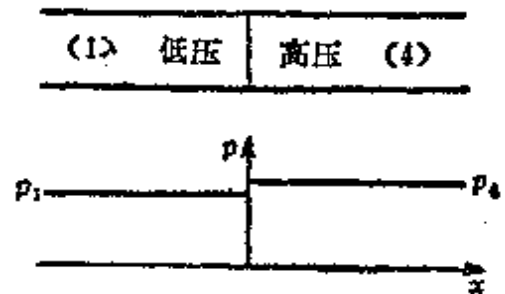


图 10.3.5

扰动的传播运动。当薄膜去除时，区域(1)的气体通过和薄膜贴近的气体的接触感受到区域(2)内气体的压力，贴近薄膜区域

(1)内的气体受到压缩，同时区域(2)内的气体则受到膨胀。于是管内将有两种波在传播：一个是区域(1)中向左传播的压缩波；另一个是区域(2)中向右传播的膨胀波。这两个波的强度由于对称性都将为 $p_0 + (p/2)$ 。但是因为这两种波都是小扰动，所以传播速度皆为音速 a 。压缩波所到之处流体被增压、加密与升温，同时使气体质点向左运动。膨胀波所到之处使流体减压、减密与减温，质点亦向左运动。 t_1 时刻压力及速度分布图如图10.3.6所示。

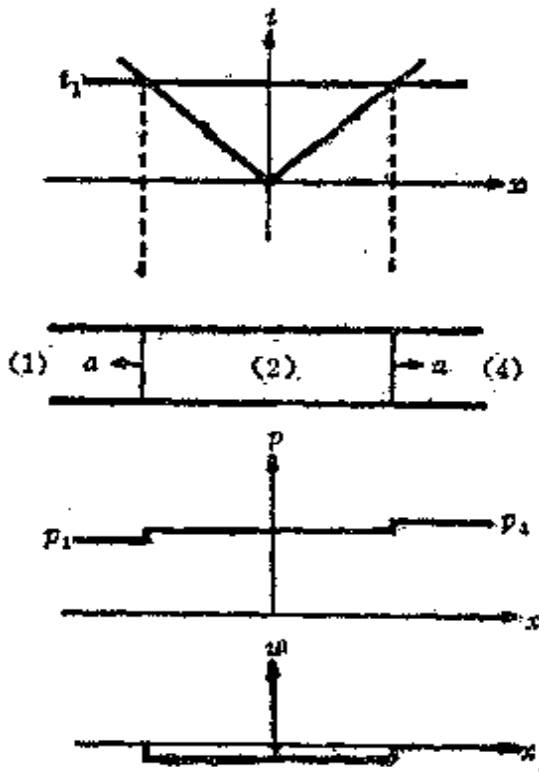


图 10.3.6

下面我们利用声波方程的普遍解求出本问题的结果。

设压力扰动的一般形式解为

$$p' = F(x - at) + G(x + at)$$

则由(10.3.18)式及(10.3.8)式中的(c)得

$$u' = \frac{1}{a\rho_0} [F(x - at) - G(x + at)]$$

利用初始条件 $t = 0$ 时

$$p' = F(x) + G(x) = H(x) = \begin{cases} p, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$u' = \frac{1}{a\rho_0} [F(x) - G(x)] = 0$$

得

$$F(x) = G(x) = \frac{1}{2}H(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}p, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

于是扰动压力及扰动速度为

$$p'(x, t) = \frac{1}{2}H(x - at) + \frac{1}{2}H(x + at)$$

$$= \begin{cases} p, & x > at \\ \frac{1}{2}p, & -at < x < at \\ 0, & x < -at \end{cases}$$

$$u'(x, t) = \frac{1}{2a\rho_0}[H(x - at) - H(x + at)]$$

$$= \begin{cases} 0, & x > at \\ -\frac{p}{2a\rho_0}, & -at < x < at \\ 0, & x < -at \end{cases}$$

图 10.3.6 画了 $t=t_1$ 时压力分布图及速度分布图。我们看到有一压缩波向低压区传播，另有一膨胀波向高压区传播，两种波强度相等。压缩波和膨胀波未到之处气体继续处在低压或高压的静止状态。当它们扫过后，压力变成高压和低压的平均值，并取得微弱的向左运动的质点速度。

附注 研究小扰动在可压缩气体中传播时，我们利用了理想绝热气体的基本方程。对于高速空气动力学，我们已经说明在一定的前题下可以假设气体是理想绝热的。但是对于质点运动速度很小的扰动波的传播问题而言是不是可以采用理

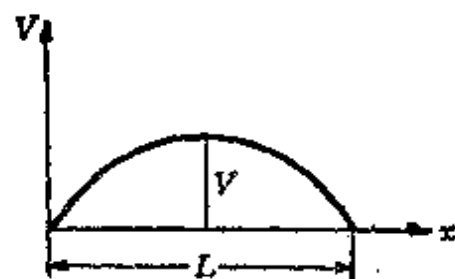


图 10.3.7

想绝热的假定呢？这还是一个不清楚的问题，有必要着重加以探讨。为了明确起见我们以正弦分布的速度扰动为例加以证明。取最大扰动速度 V 为特征速度，波长 L 为特征长度（图10.3.7），于是粘性力的量阶为 $\mu V/L^2$ 。惯性力

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho(v \cdot \nabla)v$$

有二项，局部导数 $\rho \frac{\partial v}{\partial t}$ 取很大的数值，因为当扰动波扫过某点时，其上的速度值在很短的时间间隔 $t = L/a$ 内由 0 变到 V 量阶的值。于是

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} \sim \frac{\rho V}{L} = \frac{\rho V a}{L}$$

其次位变导数 $\rho(v \cdot \nabla)v$ 的量阶为 $\rho V^2/L$ 。由此可见，局部导数大大地超过了位变导数的数值（因为 $a \gg V$ ）。惯性力中主要项是局部导数，应以它为代表和粘性力比较，于是

$$\frac{\text{惯性力}}{\text{粘性力}} = \frac{\frac{\rho V a}{L}}{\frac{\mu V}{L^2}} = \frac{\rho a L}{\mu} = Re_0$$

其中 Re_0 是以音速为特征速度的雷诺数。显然 Re_0 很大，因此在边界层外可忽略粘性力影响而将流体看成是理想的。

同样地，我们可以估计携带热

$$\rho \frac{di}{dt} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p v \cdot \text{grad } T$$

和传导热 $\text{div}(k \text{grad } T)$ 的量阶。携带热中， $\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$ 是主要项，其

量阶为 $\rho C_p \frac{aT}{L}$ ，而 $\text{div}(k \text{grad } T)$ 的量阶为 $k \frac{T}{L^2}$ ，于是

$$\frac{\text{携带热}}{\text{传导热}} \sim \frac{\rho C_p \frac{aT}{L}}{k \frac{T}{L^3}} = \frac{\rho a L C_p \mu}{\mu k} = Re_a \cdot Pr$$

因 $Re_a \cdot Pr$ 很大，所以传导热比携带热小很多可忽略不计，小扰动过程可视为绝热的。

10.4 马赫数，亚音速和超音速的原则差别

我们引进新的无量纲量——气体质点的速度和当地音速之比 V/a ，用符号 M 表示之，并取名为马赫数，于是

$$M = \frac{V}{a}$$

马赫是奥地利的一位物理学教授也是一位唯心主义哲学家，列宁称之为“伟大的物理学家，渺小的哲学家”。1887年他提出 M 数的重要性。以后在科学文献中经常地使用它，但是没有取过名，一直到阿克莱特(Ackeret)才正式冠以马赫数的称号。 M 数是可压缩流体中最重要的相似参数，它控制可压缩流动的特性，所有无量纲物理量都依赖于它。

马赫数标志着气体的压缩程度，根据(6.2.16)式

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 - \frac{1}{2} M^2 + \dots$$

我们得到

$$\frac{\rho'}{\rho_0} \sim -\frac{1}{2} M^2 \quad (10.4.1)$$

其中 $\rho' = \rho - \rho_0$ ，显然相对密度变化 ρ'/ρ_0 表征气体的压缩程度，而 ρ'/ρ_0 和 M 直接由(10.4.1)式联系起来。由此可见， M 数是气体压缩程度的标志。 M 数愈小，气体运动引起的压缩也愈小。当 M 数很小时就可以近似地当作不可压缩流体处理。 M 数愈大，压缩得愈严重，一般应按可压缩流体处理。

马赫数还代表气体的动能和内能之比

$$\frac{\text{动能}}{\text{内能}} = \frac{\frac{V^2}{2}}{C_v T} = \frac{\frac{V^2}{2}}{\frac{1}{\gamma-1} \frac{\rho}{\rho}} = \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} M^2$$

M 数很小说明相对于内能而言，动能很小，速度的变化不会引起显著的温度变化。因此在不可压缩流体中，一般我们都认为温度是常数，不必考虑能量方程。另一方面，如果 M 数很大，此时动能相对于内能来说很大，微小的速度变化都可以引起温度、压力、密度等热力学量的显著变化，当然这个时候就必须考虑热力学关系及能量方程了。

当 $M < 1$ 即流体质点的速度 V 小于音速 a ($V < a$) 时我们称之为亚音速；当 $M > 1$ ，即流体质点的速度 V 大于音速 a ($V > a$) 时称为超音速。如果整个流动都是亚音速的称为亚音速流动；如果整个流动都是超音速称为超音速流动。

亚音速流动和超音速流动有许多深刻的原则差别，这里我们讲它们之间最重要的一个：即扰动影响区域不同的问题。高速空气动力学和气体波动力学中主要考虑气体绕飞行器和管道的流动，以及各种波在气体中的传播。飞行器、管道以及压力冲量都可以看成对气流发生影响的扰动源，它们连续不断地对气流发出扰动。现在我们研究在不同音速范围内扰动的的影响区域问题。为了简单起见，我们把扰动源抽象成没有维度的几何点，它连续不断地对气流发出小扰动（这样做无损于问题的本质）。先假设气流是静止的 ($M=0$)，扰动源 O 发生的小扰动信号以音速向四外对称地传播。 t 时刻后传播到球面 $r=ta$ 的地方（图 10.4.1 上标出 $t=1, 2, 3, 4$ 秒的位置），球面内的整个区域都已接受到扰动信号，而球面外则还没有感觉到扰动源的存在。当时间 t 无限制地增加时，扰动信号可以对称地传播到 O 点外的整个空间中去。现在逐渐增加气流的速度，使扰动源处在亚音速气流中，于是扰动源发出的信号一方面以音速向外传播，另一方面被气流以 V 的速度带

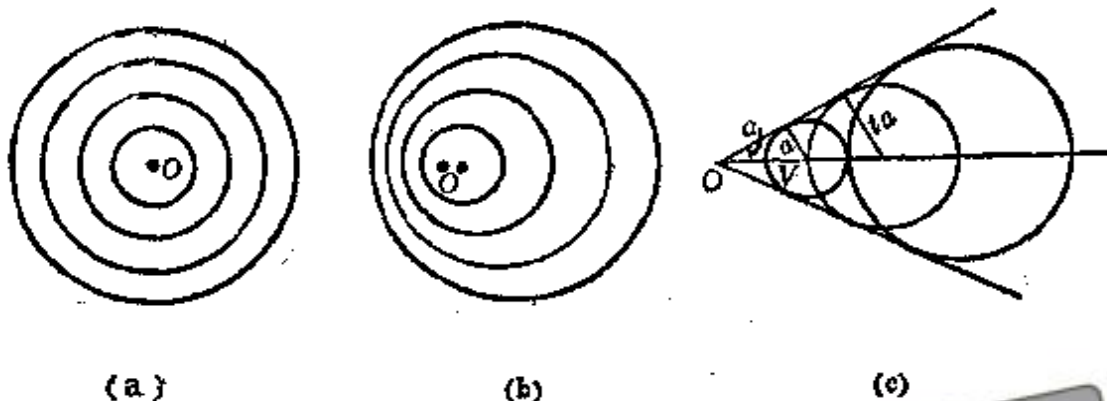


图 10.4.1

向下游.这样,图(a)所示的球面整个地向下游移动了 Vt 的距离.结果,扰动信号向下游传播得更远些,直到 $(a+V)t$ 处,而上游则传播得近些,仅到达 $(a-V)t$ 的地方,从而形成了不对称的图案(见图(b)).由于来流速度 V 小于音速,所以扰动信号还是逆流向前方传播了 $(a-V)t$ 的距离.当时间无限增大时,扰动信号可以传播到 O 点外整个空间中去,整个气流感觉到扰动源的存在.当然,随着速度 V 的增加,向前方传播的速度愈来愈慢,但是只要是亚音速的,时间足够长,总可以达到流场中任何一点.当 $V=a, M=1$,即考虑音速流时,信号不再向前传播,此时, O 点前方整个半无穷空间感觉不到扰动源的存在,信号发不到那里去.由此可见,音速流动的扰动信号只能传播到 O 点下游的半无穷空间内,而不能传到扰动源上游中去.再增加气流速度,我们得到超音速气流($M>1$),此时,由于来流速度大于音速,扰动波的球面被来流整个地带向 O 点的下游,球心移动了 Vt 距离,最远传至下游 $(V+a)t$ 处,最近点在下流 $(V-a)t$ 处,于是扰动信号不可能传到扰动源 O 点的前方.不仅如此,它还只能传到图(c)所示的球面的包络面内.显然球面的包络是圆锥,因为自 O 点向圆球作圆锥切面,所有这些切面半顶角

$$\alpha = \sin^{-1} \frac{ar}{Vr} = \sin^{-1} \frac{a}{V}$$

都是相同的.所以以 O 点为顶点,半顶角为 $\alpha = \sin^{-1}(a/V)$ 的圆

锥是球面族的包络。这样的圆锥称为马赫锥，锥的半顶角 α 称为马赫角。马赫锥有这样的特性：即锥的内部是扰动信号所及的作用区域，而外部则是扰动信号不能到达的寂静区域。现在我们来考察马赫角和马赫数的关系

$$\sin \alpha = \frac{1}{M}, \quad \alpha = \sin^{-1} \frac{1}{M}$$

当 $M=1$ 时， $\alpha=90^\circ$ ，马赫锥退化为通过 O 点且垂直来流的平面，扰动只能传至右半无穷空间内。设 M 数从1逐渐增加时马赫角 α 逐渐减少，马赫锥包含的面积即扰动所及的区域也愈来愈小，当 $M \rightarrow \infty$ 时，圆锥蜕化为通过 O 点与来流方向重合的半无穷长直线，扰动只局限在这条直线上。由此不难看出，超音速气流的速度愈大，马赫锥愈小，扰动的影响区域也就愈窄；反过来，从马赫锥的大小也可以判断出气流速度的大小。

说到这里，我们看到了亚音速流动和超音速流动在扰动影响区域方面的根本差别：在亚音速流动中，小扰动可以达到空间中任何一点，气流没有到达扰动源之前，已经受到了它的扰动。而在超音速流动中，小扰动只能传播到马赫锥的内部，它绝对不能传播到扰动源的上游中去。因此在气流没有到达扰动源之前，没有感受到任何扰动，也不知道有扰动源的存在。

刚才我们考虑扰动源发出的扰动在均匀气流中的传播问题。同样地，如果气流静止不动，扰动源以 V 的速度向前运动，那么小扰动在不同音速范围时的传播情况和上面描述的一样，因为两者只是惯性系不同而已。

我们在日常生活中也常常看到一些现象符合上面所说的根本差别。亚音速飞机的嗡嗡声我们在老远的地方就已经听到。而速度飞快的超音速飞机只有在掠过你的头顶之后才听得见它的声音。陆地运输的交通工具幸亏都是亚音速的，要是超音速的话，车祸一定特别多，情况不堪设想，走在路上，都不知道后面来了车子，按喇叭也无济于事，等你感觉到车来了的时候，也许已经

出事了。

上述亚音速气流和超音速气流的原则性差别在数学上表现为：亚音速气流对应的是椭圆型方程，椭圆型方程的特点是任何一点的影响都可以传播到空间中任何一点上去，超音速气流对应的是双曲型方程，双曲型方程的特点是任何一点的影响只限制在相应的特征锥内部。

10.5 有限振幅波的传播、激波的产生

若初始扰动具有不是很小的有限振幅，则我们不能利用10.3节中的小扰动方法将方程组线性化，而必须求解非线性方程(10.3.2)。本节介绍一维不定常情形下解方程(10.3.2)的特征线方法，通过它阐明有限振幅波的传播规律及其特性，以及它和小振幅波的区别。

写出一维不定常运动的气体力学方程组

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (10.5.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (10.5.2)$$

除此之外，还应有能量方程和状态方程。这里我们采用与之等价的(10.2.19)及(10.2.20)式

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma = \left(\frac{a}{a_0} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)} \quad (10.5.3)$$

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{da}{a} \quad (10.5.4)$$

为了将(10.5.1)和(10.5.2)式改写成便于研究的形式，我们引进函数 $\bar{\Pi}$ ，它的定义为

$$\bar{\Pi} = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho a} \quad (10.5.5)$$

利用(10.5.4)式及 $\frac{dp}{d\rho} = a^2$, 很容易得到

$$d\bar{\Pi} = \frac{dp}{\rho a} = \frac{a}{\rho} d\rho = \frac{2}{\gamma-1} da \quad (10.5.6)$$

于是

$$\bar{\Pi} = \frac{2}{\gamma-1}(a - a_0) \quad (10.5.7)$$

(10.5.1)式两边乘以 a/ρ , 并利用(10.5.6)式可将(10.5.1)和(10.5.2)式改写为下列形式

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x} = 0 \quad (10.5.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x} = 0 \quad (10.5.9)$$

以上两式相加和相减后得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\Pi} + u) + (u + a) \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\Pi} + u) = 0 \quad (10.5.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\Pi} - u) + (u - a) \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\Pi} - u) = 0 \quad (10.5.11)$$

设 $\bar{\Pi} + u$ 取同一值的点, 其坐标随时间的变化规律为 $x = x(t)$, 则该点的运动速度为 dx/dt . 根据

$$\frac{d}{dt}(\bar{\Pi} + u) = \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\Pi} + u) + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x}(\bar{\Pi} + u) = 0$$

并考虑到(10.5.10)后得

$$\frac{dx}{dt} = u + a \quad (10.5.12)$$

由此可见, 以速度 $u + a$ 运动的点, 其上的

$$\bar{\Pi} + u = \text{常数} \quad (10.5.13)$$

同理, 根据(10.5.11)式可以证明, 以速度



$$\frac{dx}{dt} = u - a \quad (10.5.14)$$

超星阅读器
使用本复制品
请尊重相关知识产权!

运动的点，其上的

$$\bar{\eta} - u = \text{常数} \quad (10.5.15)$$

由(10.5.12)和(10.5.14)式确定的曲线分别称为第一族和第二族特征线，(10.5.13)和(10.5.15)式是第一族和第二族特征线上的关系式， $\bar{\eta} + u$ 和 $\bar{\eta} - u$ 称为黎曼不变量。

有限振幅波和小扰动波相比存在着以下两点区别：

1) 小扰动波相对气体的传播速度是未受扰动气体中的音速 a_0 ，它是一个常数；而有限振幅波相对气体的传播速度是当地音速 a ，它是一个变数，依赖于扰动强度。

2) 在小扰动波的传播过程中， u, p, ρ, a 都是不变的；而在有限振幅波的传播过程中， u, p, ρ, a 等可以改变，但必须保持黎曼不变量 $\bar{\eta} + u, \bar{\eta} - u$ 取常数值。

利用第一族和第二族特征线及其上的关系式，通过半图解半分析的特征线方法可以解决各种一维有限振幅波的传播问题。下面通过一个具体例子加以说明。

设想由于活塞突然运动或其他原因，在一维管道的 AB 区域里产生了有限振幅的扰动，此扰动将同时在右方和左方的静止气体中传播。通过 A 与 B 两点作一、二两族特征线(具体的作法见下文)，它们将 $x-t$ 平面分成 I, II, III, IV, III', II' 六个区域(见图 10.5.1)。为了求出这些区域内的解，我们首先介绍以下的基本运算。

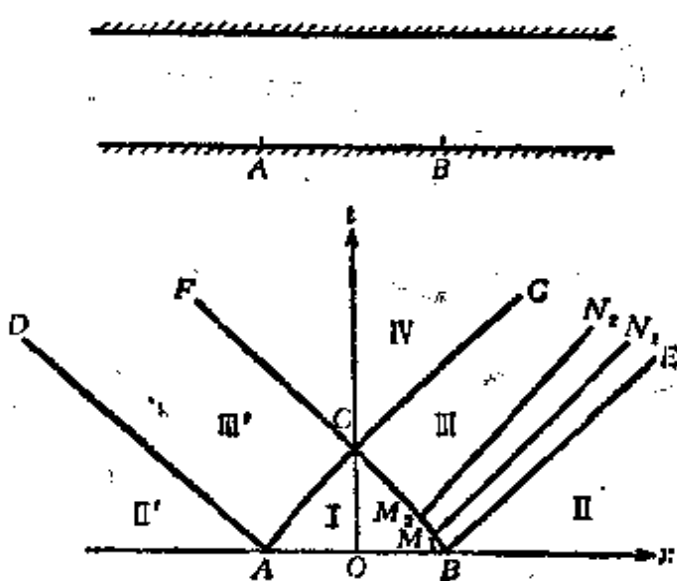


图 10.5.1

基本运算 已知 1 与 2 两点在 $x-t$ 平面上的坐标以及其上的 u 及 \bar{u} , 求从 1 与 2 两点发出的不同族特征线的交点 3(见图 10.5.2)上的 u 及 \bar{u} .

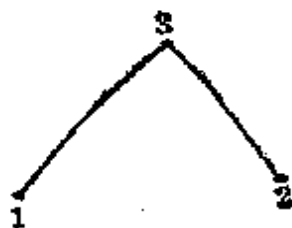


图 10.5.2

根据(10.5.12)及(10.5.14)式有

$$\begin{cases} x_3 - x_1 = (u_1 + a_1)(t_3 - t_1) \\ x_3 - x_2 = (u_2 - a_2)(t_3 - t_2) \end{cases} \quad (10.5.16)$$

a_1, a_2 可根据(10.5.7)式通过 \bar{u}_1, \bar{u}_2 求出.

解上述代数方程得 x_3 与 t_3 .

交点 3 上的 u 及 \bar{u} 可根据特征线上关系式(10.5.13)及(10.5.15)

$$\begin{cases} \bar{u}_3 + u_3 = \bar{u}_1 + u_1 \\ \bar{u}_3 - u_3 = \bar{u}_2 - u_2 \end{cases} \quad (10.5.17)$$

求出. 解上式得

$$u_3 = \frac{1}{2}(\bar{u}_1 + u_1 - \bar{u}_2 + u_2), \quad \bar{u}_3 = \frac{1}{2}(\bar{u}_1 + u_1 + \bar{u}_2 - u_2) \quad (10.5.18)$$

有了 \bar{u}_3 , 根据(10.5.7)式可求出 a_3 , 再根据(10.5.3)可求出 p_3 及 ρ_3 .

注 若 1 与 2 两点都处于未受扰动的状态, 即

$$u_1 = u_2 = \bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 0$$

则根据(10.5.18)式得 $u_3 = \bar{u}_3 = 0$, 说明点 3 也未受扰动.

反复运用基本运算可以解决下述两个边值问题.

a) 第一边值问题(哥西问题)

设在非特征线段 AB 上给定 u 及 \bar{u} , 求自 A 点出发的第一族特征线 AC , 自 B 点出发的第二族特征线 BC 和线段 AB 所组成的三角形 ABC 内的气体运动(见图 10.5.3).

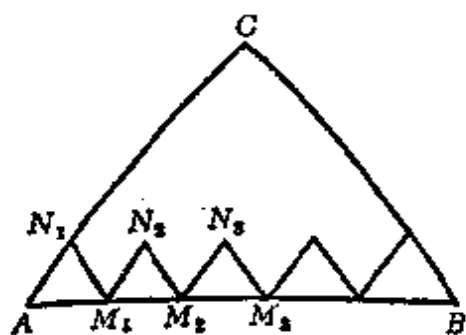


图 10.5.3

在 AB 上取密集点串 M_1, M_2, \dots . 对每两个相邻点完成基本运算, 这样我们就得到 N_1, N_2, \dots 点串上的 u 及 \bar{u} . 重复刚才叙述的步骤, 我们就能求出整个曲线三角形 ABC 内的气体运动, 并在求解过程中得到了 AC 和 BC 的形状.

b) 第二边值问题 (古尔萨问题)

在两条不同族的特征线段 AB 与 AC 上给定 u 及 \bar{u} , 求自 B 点出发的第二族特征线 BD , C 点出发的第一族特征线 CD 和 AB, AC 所组成的曲线四边形 $ABCD$ 内的气体运动 (见图 10.5.4).

在 AB 上取密集点串 M_1, M_2, M_3, \dots , AC 上取密集点串 P_1, P_2, P_3, \dots , 对 M_1, P_1 完成基本运算得 N_1 点上的 u 与 \bar{u} , 对 M_2, N_1 完成基本运算得 N_2 点上的 u 与 \bar{u} . 如此继续下去我们得到 N_1, N_2, \dots 点串上的 u 与 \bar{u} . 重复刚才叙述的步骤我们能够得到四边形 $ABCD$ 内

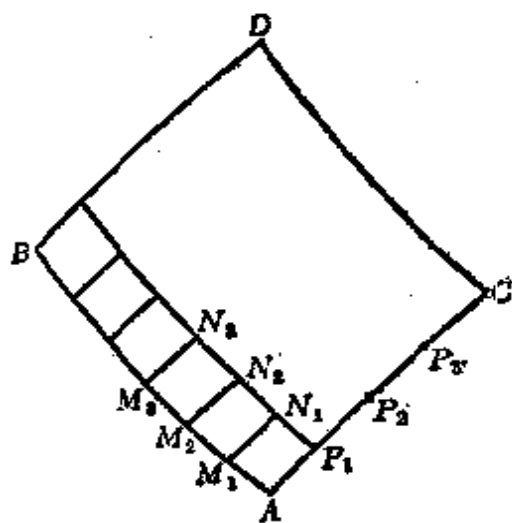


图 10.5.4

的气体运动, 并且在解题过程中作出特征线 BD 和 CD .

注意, 四边形的边界 CD 原则上可以延伸到无穷远处去.

利用第一及第二边值问题和基本运算可以求出 $x-t$ 平面内六个区域内的解. 首先对区域 I 解第一边值问题, 得到 I 内的解, 同时求出 AC 和 BC 的形状及其上的物理量. 根据基本运算中的注解容易看出整个 II 与 II' 内气流未受扰动, $u = \bar{u} = 0$, 而且

的, 区域Ⅱ与Ⅱ'内的解具有一些很好的性质, 因此在这些区域内我们完全可以采用下述处理代替上述较麻烦的方法。

以区域Ⅱ为例. 因为 BE 上 $u = \bar{u} = 0$, 所以所有从 BE 发出的第二族特征线上都有

$$u = \bar{u} \quad (10.5.19)$$

我们知道从 BC 发出的第一族特征线上满足关系式(10.5.13), 将(10.5.19)式代入得

$$u = \text{常数}, \quad \bar{u} = \text{常数}$$

于是根据(10.5.7)及(10.5.3)式, a, p, ρ 也保持常数. 由于沿第一族特征线传播时, u 和 a 都不改变, 因此在第一族特征线的各点上, 特征线的斜率 $u+a$ 取同一数值, 由此可见所有第一族特征线都必须是直线. 这样在区域Ⅱ里情况和小扰动波有些类似: 波的传播速度是常数 (对应于第一族特征线是直线), 在波的传播过程中所有物理量保持常数不变. 这样的波我们称之为简单波. 根据简单波的特点, 区域Ⅱ内可求解如下: 在 BC 上取 M_1, M_2, \dots 各点, 根据其上的 u 及 a 作出第一族直线特征线 $M_1N_1, M_2N_2, \dots, M_1N_1, M_2N_2, \dots$ 上所有点上的 u, p, ρ, a 都取 M_1, M_2, \dots 上的值. 于是Ⅱ内的解全部求出, 比刚才叙述的方法要省事得多.

完全同样地可以讨论区域Ⅱ'内左行简单波. 那里

$$u = -\bar{u} \quad (10.5.20)$$

且沿第二族直线特征线传播时, 所有物理量都不改变.

虽然有限振幅简单波和小扰动波有许多类似之处, 但是它们之间存在着一个重要的差别: 小扰动传播时波形是不变的, 而有限振幅简单波传播时波形是不断改变的. 为了揭示这个差别, 我们仍以区域Ⅱ中右行简单波为例. 考虑到(10.5.7)式, (10.5.19)式可写成

$$a = a_0 + \frac{\gamma-1}{2}u, \quad da = \frac{\gamma-1}{2}du \quad (10.5.21)$$

于是

$$a+u=a_0+\frac{\gamma+1}{2}u, \quad d(u+a)=\frac{\gamma+1}{2}du \quad (10.5.22)$$

根据这两个式子以及公式(10.5.4),我们可以得到如下结论:

1) 当扰动速度相对于右方而言增加时

$$du > 0, \quad da > 0, \quad dp > 0, \quad d\rho > 0$$

我们得到右行压缩波. 对于右行压缩波而言, 扰动速度的增加值 du 越大, 相对波速和绝对波速增加得越快.

2) 当扰动速度相对于右方而言减少时

$$du < 0, \quad da < 0, \quad dp < 0, \quad d\rho < 0$$

我们得到右行膨胀波. 对于右行膨胀波而言, 扰动速度的减少值 du 越大, 相对波速和绝对波速减少得越快.

完全同样地可以对区域 III' 中的左行简单波进行讨论, 此时有

$$a = a_0 - \frac{\gamma-1}{2}u, \quad da = -\frac{\gamma-1}{2}du \quad (10.5.23)$$

及

$$a-u = a_0 - \frac{\gamma+1}{2}u, \quad d(a-u) = -\frac{\gamma+1}{2}du \quad (10.5.24)$$

由此有:

1) 当扰动速度相对于右方而言增加时

$$du > 0, \quad da < 0, \quad dp < 0, \quad d\rho < 0$$

对应的是左行膨胀波. 而且 du 越大, 相对和绝对波速减少得越快.

2) 当扰动速度相对于右方而言减少时

$$du < 0, \quad da > 0, \quad dp > 0, \quad d\rho > 0$$

对应的是左行压缩波. 而且 du 越大, 相对和绝对波速增加得越快.

通过刚才的讨论我们看到, 对于右方是压缩波, 对于左方则为膨胀波. 当管道中有右行压缩波在右方传播时, 必定有一左行

膨胀波同时在左方传播。其次，不管是右行的或是左行的简单波，凡是压缩波，压缩得越厉害，波速增加得越快，凡是膨胀波，膨胀得越厉害，波速减少得越快。这就证明了有限振幅简单波传播时波形是不断改变的这一重要事实。而且导致气体力学中一个重要的物理现象——激波的产生。

设想在 $t=t_1$ 时在区域 \mathbb{I} 内有一如图 10.5.5 所示的扰动速度波形。对于右行简单波而言， BC 是压缩波段， AB 与 CD 是膨胀波段。于是在压缩波段产生了后面的扰动波赶上并超过前扰动波的现象（参看图 10.5.5 中的 (b) 及 (c)）。在图 10.5.5 (c) 中出现了速度取三个不同值的现象，这在物理上显然是不可能的。这个时候实际上在气体中产生了速度间断面即激波。在膨胀波段，后面的扰动波比前面的传得慢，它永远赶不上前面的，因此在膨胀波段不会产生激波。顺便指出，对于小扰动波而言，由于波形不变，因此也不会产生激波。

在日常生活中也常常遇到类似于激波的现象。如在车水马龙的繁华街道中，当十字路口亮出红灯时，前面的车辆率先停下，然后后面的车辆一个紧挨着一个停下，从而形成车辆高度密集的“激波层”。

10.6 正激波理论

在超音速绕体和管流以及间断传播（爆炸、爆震）等问题中都会出现激波。激波产生之后，机械能大量耗损转化为热能，因此出现了新类型的阻力——波阻并且使传热问题变得严重起来。激波可分成正激波和斜激波两种。气流方向和激波面正交的我们

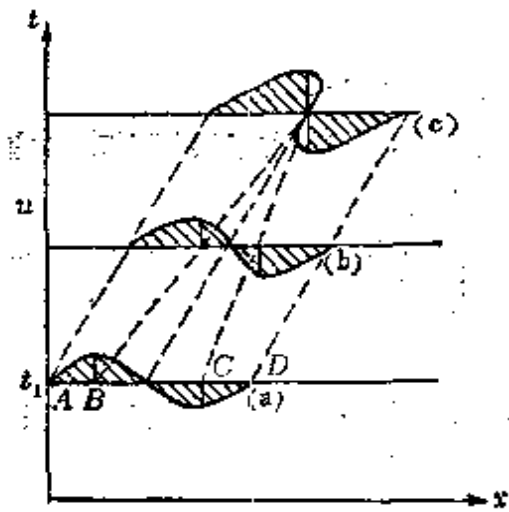


图 10.5.5

使用本复制品
请尊重相关知识产权!

称之为正激波，如一维管道中产生的激波，对称钝体绕流问题中对称轴附近的激波等。若气流方向和激波面斜交则称为斜激波，如尖头体绕流问题中的附体激波，钝体绕流问题中脱体激波的后面部分等都是（参看图10.6.1）。



图 10.6.1

激波并不是数学上没有厚度的间断面，从激波的折光照片中可以看到实

实际上激波是一个有厚度的薄层，只是厚度非常小，以分子自由程计算，只要不是在非常稀薄的气流中，激波的厚度常常可以忽略不计。在这薄层中的物理量（如速度、温度）非常迅速地由激波前的数值连续地变到激波后的数值。速度梯度和温度梯度很大使摩擦和热传导变得十分严重，因此在激波层内必须要考虑粘性和热传导的作用。容易理解，通过激波机械能被摩擦力大量地耗损转化为热能，并且产生高温到低温的不可逆热传导过程，因此熵将增加。现在我们从力学观点考察一下，物理量通过激波后的变化情况。显然，因为机械能通过激波大量损失转化为热能，所以速度将减小，而温度将升高。既然激波后速度减低，根据质量守恒定理，为维持质量在激波前后不变，必须使激波后的密度增加。其次，我们知道，激波后的动量小于激波前的动量，因此根据动量定理，压力通过激波后将升高。由此可见运动学元素速度 V 通过激波将减少，而热力学元素 p, ρ, T, i, s 通过激波都将增加。这个结论将在下面的理论分析中再一次得到证实。

由于激波的厚度以分子自由程计，因此，严格说来，激波内的流体已不能采用连续介质的模型，而必须当作稀薄气体处理。只有在研究了激波内稀薄气体的流动后才能了解物理量的变化情况。

在实际问题中我们对激波内的流动状态不感兴趣，而只需要

知道物理量通过激波后最终变成什么样子就行了。在这种情形下，我们可以对激波作如下的简化理论模型：忽略激波厚度将激波看成是数学上的间断面，通过它物理量发生跳跃。激波前后的气体仍然是理想绝热完全且比热为常数。为了使得采用这个模型后所得出的结果符合实际情况，我们让激波前后的气流满足基本物理规律，即质量、动量、能量守恒和状态方程及热力学第一、二定律。当然由于现在物理量发生了间断，我们不能采用微分形式的基本方程而只能采用积分形式的方程。可以理解，由于激波厚度非常薄，而且我们又用基本规律控制了流动，因此利用这个理论模型求出来的激波后的物理量的数值将基本上符合实际情况。事实证明我们的猜想是对的。无论是实验结果，或者是用粘性热传导的连续介质模型解出激波内流动的理论结果都和采用上述理论模型后得到的结果甚相符合。

先研究正激波。一般说来激波在气体中以一定速度向前运动。为了方便起见，我们把坐标系取在激波上，将激波看成是静止的。于是激波前气流以 v_1 流来，状态函数为 p_1, ρ_1, T_1 ，通过激波后速度变成 v_2 ，状态为 p_2, ρ_2, T_2 。如果激波前后整个区域内流动状态都是均匀的，那么， v_1, p_1, ρ_1, T_1 及 v_2, p_2, ρ_2, T_2 分别代表激波前后整个区域内的物理量。如果不是均匀的，那么指标为 1 的物理量代表左边紧贴激波的函数值，指标为 2 的物理量则代表右边紧贴激波的函数值。激波前后的流动可以是定常的，也可以是不定常的。现在我们的任务是：已知激波前的物理量 v_1, p_1, ρ_1, T_1 ，求激波后的物理量 v_2, p_2, ρ_2, T_2 。

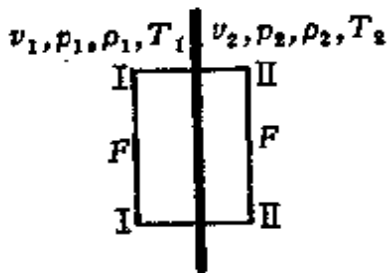


图 10.6.2

取如图 10.6.2 所示的控制面 I I II II，它将激波前后的区域联系起来。底面 I I，II II 的长度有限，它们平行激波面且无限地接近于它，于是 I I，II II 上的物理量就是 v_1, p_1, ρ_1, T_1 及 v_2, p_2, ρ_2, T_2 。此外，控制面中的 I I 垂直

激波面，距离为一无限小量。显然控制面的体积 τ 是小量，而底面积 F 则是有限量

$$\tau = O(\varepsilon), \quad F = O(1)$$

对控制面 I I II II 写出积分形式的流体力学方程组

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \int_S \rho v_n dS &= 0 \\ \int_{\tau} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} d\tau + \int_S \rho v_n v dS &= - \int_S p_n dS \\ \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(C_v T + \frac{v^2}{2} \right) \right] d\tau + \int_S \rho v_n \left(C_v T + \frac{v^2}{2} \right) dS &= - \int_S p v_n dS \end{aligned} \right. \quad (10.6.1)$$

或 $\int_{\tau} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(C_p T + \frac{v^2}{2} \right) \right] d\tau + \int_S \rho v_n \left(C_p T + \frac{v^2}{2} \right) dS = 0$
 $p = \rho RT$

其中 τ 及 S 分别是控制面的体积及界面。由于 $\tau = O(\varepsilon)$ 及被积函数有限，所以方程组(10.6.1)式中所有的体积分都是 $O(\varepsilon)$ 的量，而面积分则是 $O(1)$ 的量。于是体积分相对于面积分而言可以忽略不计。将(10.6.1)式具体地用到控制面 I I II II 上去得

$$\left\{ \begin{aligned} \rho_1 v_1 &= \rho_2 v_2 \\ p_1 + \rho_1 v_1^2 &= p_2 + \rho_2 v_2^2 \\ \frac{v_1^2}{2} + C_p T_1 &= \frac{v_2^2}{2} + C_p T_2 \\ p_2 - p_1 &= R(\rho_2 T_2 - \rho_1 T_1) \end{aligned} \right. \quad (10.6.2)$$

(10.6.2)式称为正激波的相容性条件，四个式子用来确定四个未知量 v_2, p_2, ρ_2, T_2 。为了方便起见，将未知量换成

$$\Delta v = v_1 - v_2, \quad \Delta p = p_2 - p_1, \quad \Delta \rho = \rho_2 - \rho_1, \quad \Delta T = T_2 - T_1$$

并且将(10.6.2)式改写成

$$\begin{cases}
 \Delta \rho = \frac{\rho_1 \Delta v}{v_1 - \Delta v} & (a) \\
 \Delta p = \rho_1 v_1 \Delta v & (b) \\
 \Delta T = \frac{\Delta v}{C_p} \left(v_1 - \frac{\Delta v}{2} \right) & (c) \\
 \Delta p = R(T_1 \Delta \rho + \rho_1 \Delta T + \Delta \rho \Delta T) & (d)
 \end{cases} \quad (10.6.3)$$

将(10.6.3)式中的(a),(b),(c)代入(d)得确定 Δv 的方程为

$$\begin{aligned}
 \rho_1 v_1 \Delta v = R \left[\frac{\rho_1 T_1 \Delta v}{v_1 - \Delta v} + \rho_1 \frac{\Delta v}{C_p} \left(v_1 - \frac{\Delta v}{2} \right) \right. \\
 \left. + \frac{\rho_1 \Delta v}{v_1 - \Delta v} \frac{\Delta v}{C_p} \left(v_1 - \frac{\Delta v}{2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

求解后得 Δv , 并将结果分别代入(10.6.3)式的(a),(b),(c)得

$$\begin{cases}
 \frac{\Delta v}{v_1} = \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{M_1^2} (M_1^2 - 1) \\
 \frac{\Delta p}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \\
 \frac{\Delta \rho}{\rho_1} = \frac{M_1^2 - 1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \\
 \frac{\Delta T}{T_1} = \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} \frac{1}{M_1^2} (M_1^2 - 1)(\gamma M_1^2 + 1)
 \end{cases} \quad (10.6.4)$$

将 $\Delta v, \Delta p, \Delta \rho, \Delta T$ 转回到 v_2, p_2, ρ_2, T_2 中去得

$$\begin{cases}
 \frac{v_2}{v_1} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1)M_1^2} \\
 \frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \\
 \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \\
 \frac{T_2}{T_1} = \frac{2}{(\gamma+1)M_1^2} \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)
 \end{cases} \quad (10.6.5)$$

下面再求几个物理量的跳跃：(1) 熵 s ；(2) 无量纲速度 $\lambda = v/a_*$ 及 $M = v/a$ 。显然

$$\Delta s = s_2 - s_1 = C_v \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{-\gamma}$$

将(10.6.5)式代入得

$$\Delta s = R \ln \left\{ \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \left[\frac{\frac{\gamma+1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right]^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right\} \quad (10.6.6)$$

此外

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\frac{\gamma+1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} = \lambda_2^2$$

于是

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1 \quad (10.6.7)$$

激波前后速度的这个关系特别简单，容易记忆，称为普朗特公式。它告诉我们激波前后的速度若有一个是超音速，则另一个必然是亚音速。有了(10.6.7)式后，根据 λ 和 M 的关系

$$\lambda^2 = \frac{\frac{\gamma+1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \quad (10.6.8)$$

很容易推出 M_1, M_2 的关系如下：

$$M_2^2 = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}} \quad (10.6.9)$$

最后我们推出 p_2/p_1 和 ρ_2/ρ_1 的关系。从(10.6.5)式 $\frac{p_2}{p_1}(M_1)$ 和

$\frac{\rho_2}{\rho_1}(M_1)$ 中消去 M_1 得

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma+1) \frac{\rho_2}{\rho_1} - (\gamma-1)}{(\gamma+1) - (\gamma-1) \frac{\rho_2}{\rho_1}} \quad (10.6.10)$$

称为激波绝热曲线，相当于连续运动情形的绝热曲线 $\frac{p_2}{p_1}$

$$= \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^\gamma.$$

将(10.6.4), (10.6.5), (10.6.6), (10.6.7), (10.6.9), (10.6.10)式集合在一起得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta v}{v_1} &= \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{M_1^2} (M_1^2 - 1) \\ \frac{\Delta p}{p_1} &= \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \\ \frac{\Delta \rho}{\rho_1} &= \frac{M_1^2 - 1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \\ \frac{\Delta T}{T_1} &= \frac{\Delta i}{i_1} = \frac{\Delta a^2}{a_1^2} \\ &= \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} \frac{1}{M_1^2} (M_1^2 - 1)(\gamma M_1^2 + 1) \\ \frac{\Delta s}{R} &= \ln \left\{ \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \right. \\ &\quad \left. \times \left[\frac{\frac{\gamma+1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right]^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (10.6.11)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1$$

$$M_2^2 = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}}$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1)M_1^2}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}$$

(10.6.12)

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{i_2}{i_1} = \frac{a_2^2}{a_1^2}$$

$$= \frac{2}{(\gamma+1)M_1^2} \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma+1) \frac{\rho_2}{\rho_1} - (\gamma-1)}{(\gamma+1) - (\gamma-1) \frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

在定常情形，从(10.6.2)式中的能量方程推出

$$i_{0_1} = i_{0_2}$$

此式表明 i_0 通过激波不变，它反映了总能量通过激波守恒的事实。由 $i_{0_1} = i_{0_2}$ 也可推出

$$T_{0_1} = T_{0_2}, \quad a_{0_1} = a_{0_2}, \quad a_{*1} = a_{*2} \quad (10.6.13)$$

现在我们研究驻点压力 p_0 及驻点密度 ρ_0 通过激波的变化。由状态方程及 $T_{0_1} = T_{0_2}$ 得

$$\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}} = \frac{\rho_{0_2}}{\rho_{0_1}} \quad (10.6.14)$$

其次，根据激波前后熵沿流线不变的事实有

$$\Delta s = s_2 - s_1 = s_{0_2} - s_{0_1} = C_p \ln \left[\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}} \left(\frac{\rho_{0_2}}{\rho_{0_1}} \right)^{-\gamma} \right]$$

考虑到(10.6.14)式及(10.6.11)中最后一式得

$$\frac{\Delta s}{R} = \ln \frac{p_{0_1}}{p_{0_2}} = \ln \left\{ \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \right. \\ \left. \times \left[\frac{\frac{\gamma+1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right]^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \right\} \quad (10.6.15)$$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

现在我们分析正激波的结果：

1) 从普朗特公式 $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ 看出有两种流动状况可能存在。第一，激波前是超音速流，激波后变成亚音速流，同时，压力、密度、温度通过激波后都增加，这种情形称为增密跳跃；第二，激波前是亚音速流，激波后变成超音速流，压力、密度、温度通过激波后都减少，这种情形称为减密跳跃。这两种流动状况到底那一种是客观存在着的呢？从本节开始对激波内流动情况的分析容易确信实际上存在的只能是增密跳跃。因为通过激波由于机械能的损耗，速度应减少，由超音速变成亚音速。下面我们再根据间断面前后绝热流体必须满足热力学第二定律：孤立系熵不减少

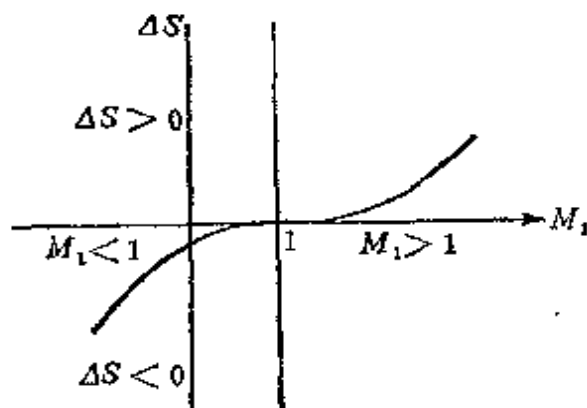


图 10.6.3

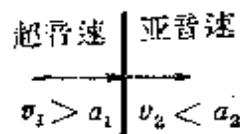


图 10.6.4

($\Delta s \geq 0$)的事实证明减密跳跃是不可能的,也就是说实际上存在着的是增密跳跃. 根据(10.6.11)式中 Δs 和 M_1 的关系画图,得图10.6.3.从图上看,如果激波前是亚音速的($M_1 < 1$),那么,熵将减少, $\Delta s < 0$,这显然违反热力学第二定律,因此减密跳跃不可能产生. 这个结论和实际观测到的结果是符合的. 世界上没有任何一个人看到过通过正激波密度减少,速度增加的现象. 如果激波前是超音速的($M_1 > 1$),也就是说发生增密跳跃情形,那么从图上看熵将增加, $\Delta s > 0$,这和热力学第二定律符合,因此增密跳跃是客观上存在着的流动状态(图10.6.4). 这里顺便提一下:激波一旦产生熵一定增加,不可能有熵保持不变的情形,即 $\Delta s = 0$. 因为从图上看 $\Delta s = 0$ 只有在 $M_1 = 1$ (对应的 $M_2 = 1$),即不发生间断时才存在. 这一点现在看来十分显然,但是当初德国数学家黎曼(1826—1866)第一个人计算激波前后关系式时,却认为激波是等熵过程,经过激波,熵保持不变. 这个错误后来由英国工程师楞基(Rankine)和法国著名弹道学家尤果尼奥(Hugoniot)各自独立地加以纠正,所以激波前后的关系式常称为楞基-尤果尼奥关系.

表1

定常和非定常情形									
v	M	λ	p	ρ	T	a	i	U	s
↘	↘	↘	↗	↗	↗	↗	↗	↗	↗
定常情形									
T_0	a_0	i_0	a_*	p_0	ρ_0				
→	→	→	→	↘	↘				

通过激波熵增加的事实表明有部分机械能转化为热能。在绕体问题中物体顶着激波后的高压前进，因此必须做一定的功，这种和运动方向相反的力称为波阻。

2) 根据(10.6.11)式及增密跳跃的结论，物理量穿过激波后定性的变化情形如表 1 和图10.6.5所示。

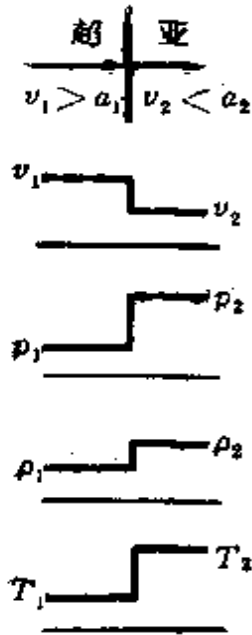


图 10.6.5

我们看到，运动学元素 v, M, λ 经过激波后数值减少，所有热力学元素 p, ρ, T, a, i, U, s 经过激波后数值增加。而定常情形的驻点值 T_0, a_0, i_0 及 a_* 经过激波后保持不变，但是 p_0, ρ_0 则是减少的。

间断值和波前 M_1 的定量关系已做成详细的表格，读者需要的时候可以查阅有关的气体力学教科书。这里我们只引用其中一部分数据（见表 2）。

根据这些数据我们可以画出 $\frac{p_2}{p_1}(M_1)$,

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}(M_1), \frac{T_2}{T_1}(M_1), \frac{p_{02}}{p_{01}}(M_1), M_2(M_1) \text{ 等}$$

图形（图10.6.6）。

无论是图10.6.6或表 2 都告诉我们随着波前气流 M_1 数的增加，波后速度 M_2 及 p_{02}/p_{01} 不断减少，而压力、密度、温度、熵则不断地增加。这事实也是十分自然的。因为如果波前速度愈大，则机械能的损耗也愈大，因此速度减小得愈快，而压力、密度、温度等则提得愈高。所以随着 M_1 升高物理量变化的单调性是容易理解的。由此不难理解，我们可以用 $M_1^2 - 1$ 作为激波强度的标志， $M_1^2 - 1$ 愈大激波愈强；反之愈弱。当然这种标志不是唯一的，例如还可以采用 p_2/p_1 作为激波强度的标志。下面研究 $M_1 \rightarrow \infty$ 时， $M_2, p_2/p_1, \rho_2/\rho_1, T_2/T_1, \Delta s$ 的渐近行为。

从(10.6.12)式我们得到：当 $\gamma = 1.4$ ，且 $M_1 \rightarrow \infty$ 时

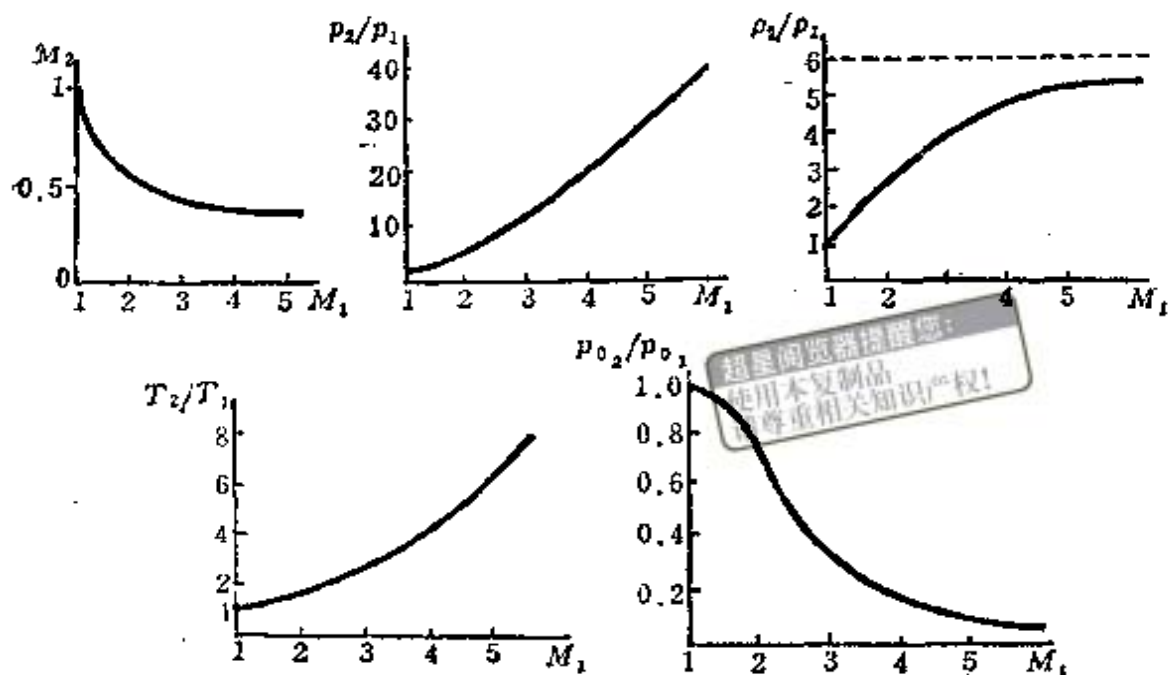


图 10.6.6

表 2

M_1	M_2	$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{\rho_2}{\rho_1}$	$\frac{T_2}{T_1}$	$\frac{a_2}{a_1}$	$\frac{p_{02}}{p_{01}}$
1	1	1	1	1	1	1
2	0.5773	4.500	2.667	1.688	1.299	0.7209
3	0.4752	10.33	3.857	2.679	1.637	0.3283
4	0.4350	18.50	4.571	4.047	2.012	0.1388
5	0.4152	29.00	5.000	5.800	2.408	0.06172
6	0.4042	41.83	5.268	7.941	2.818	0.02965
7	0.3974	57.00	5.444	10.47	3.236	0.01535
8	0.3929	74.50	5.565	13.39	3.659	8.488×10^{-3}
9	0.3898	94.33	5.651	16.69	4.086	4.964×10^{-3}
10	0.3876	116.5	5.714	20.39	4.515	3.045×10^{-3}
100	0.3781	11666.5	5.997	1945.4	44.11	3.593×10^{-6}
∞	0.3780	∞	6	∞	∞	0

$$M_2 \sim \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = 0.378, \quad \frac{p_2}{p_1} \sim \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \sim \frac{\gamma+1}{\gamma-1} = 6, \quad \frac{T_2}{T_1} \sim \frac{2(\gamma-1)\gamma}{(\gamma+1)^2} M_1^2$$

$$\frac{\Delta s}{R} = -\ln\left(\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}}\right) = \frac{2}{\gamma-1} \ln M_1$$

由此可见, 当 $M_1 \rightarrow \infty$ 时, $p_2/p_1, T_2/T_1$ 以 M_1^2 的阶次趋于 ∞ , 而 ρ_2/ρ_1 及 M_2 则为有限值. 在 $\gamma=1.4$ 时, 最大的压缩不超过 6 倍, 而最小的马赫数不能小于 0.378. $M_1 \rightarrow \infty$ 时速度有限和密度有限的事实是由质量守恒定律相互联系着的.

为了使大家对于正激波后的流动参数有一个数值上的了解, 我们考虑 $M_1=10$ 的情况, 表中指出

$$\frac{p_2}{p_1} = 5.714, \quad \frac{T_2}{T_1} = 20.39, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = 116.5, \quad M_2 = 0.3876$$

如果该正激波是飞行器在 16000 米高空飞行时产生的, 则

$$p_1 = 0.1014 \text{ 大气压}, \rho_1 = 0.01686 \frac{\text{公斤-秒}}{\text{米}^3}, T_1 = 216.5^\circ\text{K}$$

于是

$$p_2 = 11.813 \text{ 大气压}, T_2 = 4000^\circ\text{K}, \rho_2 = 0.0964 \frac{\text{公斤-秒}}{\text{米}^3}$$

可见此时正激波后的压力及温度都很高, 分别达到 12 个大气压和 4000°K 左右的数值. 在这样高的温度下, 完全气体的假定已不适用, 必须考虑离解和电离的影响.

上面得出的正激波理论是将坐标系取在激波上, 即激波不动的情形下取得的. 如果另取一静止坐标系, 激波相对此坐标系以 N 的速度向左运动 (如图 10.6.7 所示), 则激波前后的绝对速度将为 $v_1 - N$ 和 $v_2 - N$. 正值代表向右运动, 负值代表向左运动. 而激波前后压力、密度、温度等热力学元素的比值

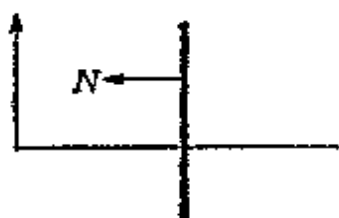


图 10.6.7

仍然和原坐标系一样，因为这些物理量不因坐标系改变而改变其数值。当 $N=v_1$ 时，激波前的速度为零，激波后的速度则为 $v_2-v_1 < 0$ ，气体质点向左运动。此时激波以超音速 v_1 在静止气体中向左运动。激波扫过之后气体质点向左以 v_1-v_2 的速度运动，密度、温度、压力都升高。这和压缩波的情形很类似，因为激波是一种强烈压缩的情形，两种情形定性方面是一致的，但是数量关系并不相同。例如，小扰动压缩波以音速传播，而激波相对激波前速度则以超音速传播。顺便指出，激波相对于波后运动质点而言是以亚音速 $v_1-(v_1-v_2)=v_2$ 运动的。

最后考察一下当激波强度趋于零时，激波运动速度和波后流体质点的速度趋于什么数值。由(10.6.2)的前两式得

$$\rho_1 v_{\text{激}} = \rho_2 (v_{\text{激}} - v_{x2}) \quad (10.6.16)$$

$$p_2 - p_1 = \rho_1^2 v_{\text{激}}^2 \left[\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right] = \frac{\rho_1 v_{\text{激}}^2}{\rho_2} (\rho_2 - \rho_1) \quad (10.6.17)$$

(10.6.17)式表明

$$v_{\text{激}} = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1}}$$

当 $p_2 \rightarrow p_1, \rho_2 \rightarrow \rho_1$ 时

$$v_{\text{激}} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s} \quad (10.6.18)$$

其次，(10.6.16)式告诉我们

$$\frac{v_{x2}}{v_{\text{激}}} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}$$

当 $\rho_2 \rightarrow \rho_1$ 时

$$\frac{v'}{a} = \frac{\rho'}{\rho_1} \quad (10.6.19)$$

(10.6.18)与(10.6.19)式说明当激波强度趋于零时，激波退化

成小扰动波，因此声波可以看作强度无限小的激波。

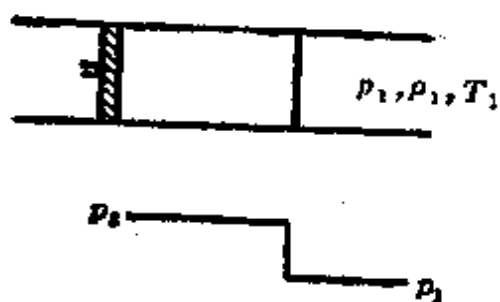


图 10.6.8

例1 上节我们讲到有限振幅的压缩波一定产生激波。现在我们来研究一下，激波产生后将以什么速度向前运动，以及激波扫过后物理量将发生什么变化。设波前的状态为 p_1, ρ_1, T_1 ，产生激波时的压力间断已知，即 p_2/p_1 的数值是给定的

(参看图10.6.8)。于是由(10.6.12)的第四式推出

$$M_1 = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{p_2}{p_1}}$$

这样

$$v_{\text{激}} = M_1 a_1 = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{p_2}{p_1}} a_1$$

其次，由(10.6.12)的第三式推出

$$\frac{v_{\text{激}} - v_{\text{气}}}{v_{\text{激}}} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1)M_1^2}$$

即

$$v_{\text{气}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \cdot \frac{\frac{p_2}{p_1} - 1}{\sqrt{(\gamma-1) + (\gamma+1) \frac{p_2}{p_1}}}$$

知道 M_1 后，激波后其他物理量 ρ_2, T_2 等可由(10.6.12)的五、六两式求出。

表3引出不同的 $\frac{\Delta p}{p_1}$ 值时 $M_1, v_{\text{激}}, v_{\text{气}}, \frac{\Delta \rho}{\rho_1}, \Delta T$ 的数据。设静

止空气的 $\gamma=1.4, p_1=1$ 大气压, $T_1=288^\circ\text{K}$ 。

表3

M_1	$\Delta p/p_1$	$\Delta \rho/\rho_1$	$\Delta T/^\circ\text{C}$	$v_{\text{激}}(\text{米/秒})$	$v_{\text{气}}(\text{米/秒})$
1	0	0	0	340	0
1.47	1.39	0.81	87	500	224
2.94	9.20	2.77	465	1000	734
5.90	40.3	4.20	1925	2000	1611
8.80	92.3	4.58	5940	3000	2880
11.80	165	4.72	7750	4000	3300

为了维持激波以不变的强度向右传播，活塞必须以 $v_{\text{气}}$ 的速度向右跟随，这样活塞和与之相接触的气体质点具有完全相同的速度，对波后气体不产生任何扰动，可使激波以等强度及等速度继续向前传播。从能量观点来说，活塞顶着高压以 $v_{\text{气}}$ 的速度运动，对气体作了功，这个功就给激波扫过后气体质点能量的增加提供了来源。现在设想活塞以大于 $v_{\text{气}}$ 的速度加速向右推，则激波扫过后的气体将继续不断地受到压缩。压缩波相对于激波后运动的流体质点而言以音速传播，因此它的传播速度大于激波传播速度。因为激波相对于波后运动气体是以亚音速传播的，于是过了一段时刻后压缩波将一个个追上激波，从而加强了激波的强度，这样激波将以更快的速度在右方静止气体中传播。现在设想活塞以小于 $v_{\text{气}}$ 的速度减速地运动，则激波后的气体不断受到膨胀，膨胀波相对于运动气体而言亦以音速传播，因此亦将赶上激

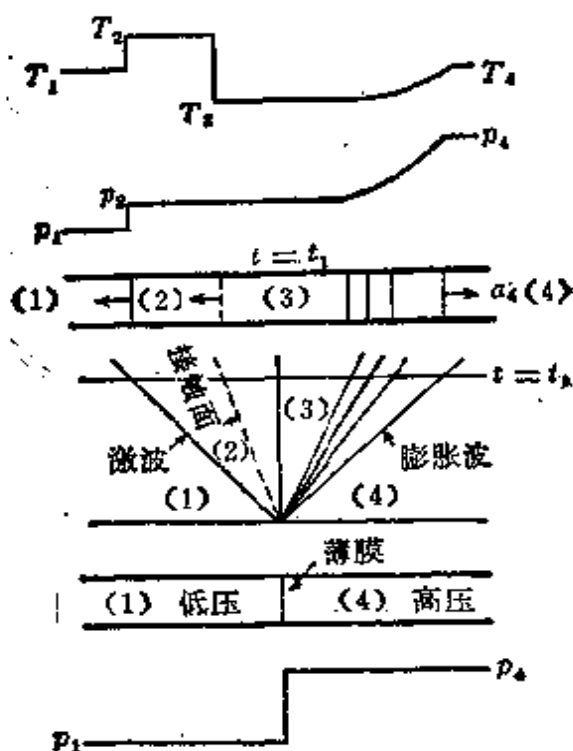


图 10.6.9

波，削弱激波强度，使激波在静止气体中传播速度减慢下来。根据这样考虑不难理解，如果活塞自 v_1 减速下来然后停止运动，那么由于一系列膨胀波不断的削弱作用，激波终将完全消灭。

例2 在一维等截面管道中，一薄膜隔开高压区 p_1, T_1 及低压区 p_2, T_2 ，如图 10.6.9 所示。设想薄膜突然破裂，在薄膜处造成一间断面，于是一方面总压力差中将有一部分 p_2/p_1 以间断面形式向左方低压区传播。激波过后压力温度升高，同时流体质点向左以 u_2 运动。另一方面，余下一部分压力差造成了右方气流膨胀的条件，于是，从薄膜破裂处将发生一系列传播速度一个慢如一个的膨胀波，使压力从 p_2 逐渐削弱到某值 p_3 ，一系列膨胀波过后，温度及密度都降了下来，同时流体质点向左运动。现在我们考虑激波和膨胀波过后的区域。容易理解，在这个区域内由于激波的升高压力和膨胀波降低压力可使压力连续。此外，流体质点的速度不管激波后区域或膨胀波后区域都朝左方运动，因此速度也可以连续。但是，温度及密度一般说来常常是间断的。例如，两区域初始温度相等， $T_1 = T_2$ ，于是激波使波前温度由 T_1 上升到波后 T_2 ，而膨胀波则使静止气体温度从 T_2 降低到 T_3 ，于是 T_1 一定不等于 T_3 ，即 $T_3 \neq T_1$ ，从而有 $\rho_3 \neq \rho_1$ ($p_3 = p_1$)。这样就在激波和膨胀波之间的区域内形成了温度和密度间断面，称为接触间断。这种间断有一特点，就是间断前后的气体互不相混，压力相等（因为 $v_2 = v_3$ ），接触间断的名称即由此而来。接触间断一旦形成它亦将以一定速度传播。通过上面分析，在 $x-t$ 平面上流动图案将如图 10.6.9 所示。在 t 时刻出现了下列现象：激波及一束膨胀波分别向左方及右方传播，当它们扫过之后，两部分气体在接触面上联接起来。

上面我们讲的就是激波管简单的工作原理。激波管是产生短时间超音速气流的实验工具。它所费的能量较小，因此在高速实验中常常采用。当薄膜破裂，激波向左运动时，在它后面就可以产生均匀的超音速气流，模型就放在左方。于是当激波完全扫过

模型后就发生了超音速气流绕过模型的流动。通过特殊的测试设备可以测出感兴趣的流动参数及特征量。

超星阅读器提醒
使用本复制品
请尊重相关知识产权!

10.7 管道中的拟一维定常运动

a) 管道中拟一维定常运动的基本方程组

在等截面的柱形管道中，可压缩流动是真正一维的，速度只有 x 方向的分量，所有物理量仅依赖于 x ，它们满足的基本方程从偏微分方程组退化为常微分方程组。这个时候求数学解比较容易。

如果管道不是柱形而是弯曲的，截面亦不相等，那么管内发生的可压缩流动一般说来是三维的（至少是二维），此时要准确地解出非线性偏微分方程组的解乃是十分困难的一件事。但是如果变截面的弯曲管道和等截面的柱形管道相差不远，也就是说，如果母线的曲率半径很大，曲率的变化缓慢，那么我们可以近似地将管内缓变的流动看成是一维定常运动。这样的管道内的定常流动就称为拟一维定常运动。容易想象，对于上述流动我们有

$$\begin{cases} u(x, y, z) = \bar{u}(x) + u'(x, y, z) \\ \rho(x, y, z) = \bar{\rho}(x) + \rho'(x, y, z) \\ p(x, y, z) = \bar{p}(x) + p'(x, y, z) \end{cases} \quad (10.7.1)$$

其中 $\bar{u}, \bar{\rho}, \bar{p}$ 为横截面上的平均速度、平均密度和平均压力， u', ρ', p' 是平均量基础上的微小扰动，它们都是小量。现在我们忽略 u', ρ', p' ，即不考虑横截面上的细微流动情况，而只研究平均运动的变化规律，这样就可以

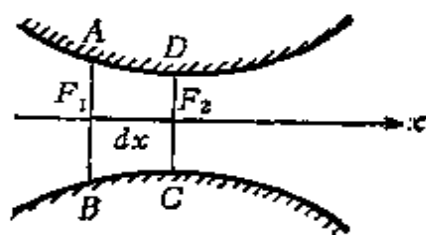


图 10.7.1

把一个偏微分方程组的问题化成常微分方程组，从而显著地简化了数学问题。下面我们从气体力学方程组出发，并考虑到缓变运动的特点(10.7.1)式来推导平均运动应该满足的近似方程。

取如图 10.7.1 所示的控制面 $ABCD$ ，它们由两个相距 dx 的

横截面 F_1, F_2 和侧壁 AD, BC 组成。对 $ABCD$ 应用积分形式的气体力学方程组。

超星阅读器
使用本复制品
请尊重相关知识产权!

根据质量守恒定律得

$$\int_{F_2} \rho u dF - \int_{F_1} \rho u dF = 0$$

即

$$\frac{d}{dx} \int_F \rho u dF = 0$$

将(10.7.1)式代入，并忽略一级微量以上的量有

$$\frac{d}{dx} (\bar{\rho} \bar{u} F) = 0 \quad (10.7.2)$$

再根据 x 方向的动量方程，我们有

$$\int_{F_2} \rho u^2 dF - \int_{F_1} \rho u^2 dF = - \int_{F_2} p dF + \int_{F_1} p dF + p dF$$

即

$$\frac{d}{dx} \int_F \rho u^2 dF = - \frac{d}{dx} \int_F p dF + p \frac{dF}{dx}$$

将(10.7.1)式代入，并忽略一级以上微量项得

$$\frac{d}{dx} \bar{\rho} \bar{u}^2 F = - \frac{d}{dx} \bar{p} F + \bar{p} \frac{dF}{dx} = - F \frac{d\bar{p}}{dx}$$

考虑到(10.7.2)式最终得

$$\bar{\rho} \bar{u} \frac{d\bar{u}}{dx} = - \frac{d\bar{p}}{dx} \quad (10.7.3)$$

最后能量定理告诉我们

$$\int_{F_2} \rho u \left(\frac{p}{\rho^{\gamma}} \right) dF - \int_{F_1} \rho u \left(\frac{p}{\rho^{\gamma}} \right) dF = 0$$

$$\frac{d}{dx} \int_F \rho u \left(\frac{p}{\rho^{\gamma}} \right) dF = 0$$

将(10.7.1)式代入，并只保留主要项得

$$\frac{d}{dx} \left[\rho \bar{u} \left(\frac{\bar{p}}{\rho^{\gamma}} \right) F \right] = 0$$



考虑到(10.7.2)式有

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\bar{p}}{\rho^{\gamma}} \right) = 0 \quad (10.7.4)$$

将(10.7.2),(10.7.3)及(10.7.4)式集合起来, 我们得到拟一维定常运动的基本方程组

$$\begin{cases} \rho \bar{u} F = \text{常数} \\ \rho \bar{u} \frac{d\bar{u}}{dx} = -\frac{d\bar{p}}{dx} \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\bar{p}}{\rho^{\gamma}} \right) = 0 \end{cases} \quad (10.7.5)$$

三个方程用来确定三个未知函数 \bar{u}, \bar{p}, ρ , 截面积随 x 的变化规律 $F(x)$ 是已知的.

今后为了方便起来, 将平均物理量上方的“-”省略. 但是我们不应该忘记, 拟一维定常运动中所研究的物理量都是平均值而不是真值.

b) 速度变化和截面积变化的关系

我们知道, 对于低速的不可压缩流体而言, 当截面积收缩时速度增加, 截面积扩大时则速度减小. 现增加管流速度使管内维持亚音速的可压缩流动, 于是估计情况将和不可压缩流体类似, 因为不可压缩是亚音速的下界, 两种情况应当能够衔接起来. 再增加管流速度, 使管内出现超音速流动, 这个时候截面积变化和速度变化的定性规律将变成什么样子, 是维持亚音速时的情形呢? 还是另有一种截然不同的规律?

本小节就是要研究上面提出来的亚音速和超音速时速度变化和截面积变化的关系, 也就是说要研究不同音速范围下 du/u 和 dF/F 的关系.

在不可压缩流体情形，连续性方程为

$$uF = \text{常数} \quad (10.7.6)$$

两边取对数并微分之得

$$\frac{du}{u} = -\frac{dF}{F} \quad (10.7.7)$$

此式说明截面积变化规律是和速度变化规律相反的，当截面积增加即扩大时速度减小，反之，当截面积减小即收缩时速度增大。这个变化规律我们非常熟悉，而且容易理解。现在我们研究可压缩流体情形，此时连续性方程为

$$\rho u F = \text{常数} \quad (10.7.8)$$

和不可压缩流体情形的连续性方程(10.7.6)式相比，多了一个密度变化的因子，因此情形变得复杂些。令

$$j = \rho u \quad (10.7.9)$$

它的物理意义显然是单位时间通过单位面积的流量，常称为流量密度。于是(10.7.8)式可改写为

$$jF = \text{常数}$$

j 的地位和不可压缩流体中 u 的地位相当，两边取对数并微分之得

$$\frac{dj}{j} = -\frac{dF}{F} \quad (10.7.10)$$

由此看出，当截面积减小时，分配到单位面积上的流量密度就大些，反之则小些。现在我们从(10.7.10)式出发建立 du/u 和 dF/F 的关系，为此需要进一步找出 dj/j 和 du/u 的关系。显然，

$$\frac{dj}{j} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} \quad (10.7.11)$$

现在问题的关键集中在寻求 $d\rho/\rho$ 和 du/u 的关系上。根据(10.7.5)式中的动量方程

$$\rho u du = -dp = -a^2 d\rho$$

有

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{du}{u} \quad (10.7.12)$$

将(10.7.12)式代入(10.7.11)式,并考虑到(10.7.10)式后得

$$(1-M^2) \frac{du}{u} = -\frac{dF}{F} \quad (10.7.13)$$

或写成

$$\frac{du}{u} = -\frac{1}{1-M^2} \frac{dF}{F} \quad (10.7.14)$$

这就是可压缩流体情形相当于(10.7.7)式的速度相对变化 du/u 和截面积相对变化 dF/F 的关系. 现在我们着重分析该式所包含的几个重要物理事实.

1) 当 $M=0$ 时(相当于 $a=\infty$, 即不可压缩流体情形), 面积减小或增大将导致速度增加或减小, 且减小和增大的数值相等. 这个结论在上面已经提到过一次.

2) 当 $0 < M < 1$, 即气流是亚音速时, du/u 和 dF/F 有相反的符号, 面积减小或增大将导致速度的增加或减小. 也就是说从定性方面说来, 亚音速情形下速度变化和截面积变化的关系与不可压缩流体情形相同, 但是在定量关系上是有差别的. 相同的截面积变化在亚音速情形将引起较大的速度变化, 因为(10.7.14)式中的分母在 $0 < M < 1$ 时小于1. 当压缩性表现得愈强烈的时候(相当于较高的 M 数), 速度的相对变化也就显得愈厉害. 如果 M 数在亚音速区域内很接近于1, 气流对面积变化的感觉将异常敏感. 微小的相对截面积变化都可以引起相当大的相对速度变化, 因为(10.7.14)式中的分母现在非常之小.

3) 在 $M > 1$ 的超音速情形, du/u 和 dF/F 具有相同的符号. 这时, 面积减小将引起速度减小, 面积增加将引起速度增加. 速度和面积具有相同的变化规律. M 数愈大, 速度对面积变化的感觉愈迟钝.

上面我们已经看到，亚音速气体和超音速气流在截面积变化和速度变化的关系上有着

	面积 F	速度 u	压力 p	密度 ρ	温度 T
$M < 1$					
$M > 1$					

图 10.7.2

和速度变化的关系上有着原则性的差别（见图 10.7.2）。很自然地我们会进一步地追问，为什么亚音速流和超音速流存在着这样的根本性的差别，从流体力学观点应该怎样理解它呢？

(10.7.10)式告诉我们，不管是亚音速情形或超音速情形，面积相对变化和流量密度相对变化的关系是相同的。当面积增加时，每单位面积流走的流体将减少；反之将增加。由此可见，亚音速气流和超音速气流所以在截面积变化和速度关系上有着原则性差别，主要的原因体现在流量密度和速度的关系上。我们看到，流量密度发生变化主要由两个因素引起，一个是密度变化，一个是速度变化。速度变化和密度变化具有相反的符号，速度增加密度减小；速度减小密度增加。当气流是亚音速的时候，从 (10.7.12) 式可以看出，速度的相对变化将比密度的相对变化大。也就是说，从流量密度变化的角度上来说，速度的相对变化起主导作用，速度的相对增加或减小就决定了流量密度的增加或减小。由此不难理解，在亚音速情形下有

$$dF > 0, \quad dj < 0, \quad du < 0$$

$$dF < 0, \quad dj > 0, \quad du > 0$$

反过来，当气流是超音速的时候，(10.7.12)式表明，密度相对变化将比速度相对变化大。此时密度的相对变化对流量密度的相对变化起主导作用。只要控制 $d\rho/\rho$ 的增加或减小就决定了 dj/j 的增加或减少。由此可见，在超音速情形一定有

$$dF > 0, \quad dj < 0, \quad d\rho < 0, \quad du > 0$$

$$dF < 0, \quad dj > 0, \quad d\rho > 0, \quad du < 0$$

根据公式

$$\frac{dj}{j} = (1 - M^2) \frac{du}{u}$$

或

$$\frac{dj}{du} = \rho(1 - M^2)$$

画出 j/j_{max} 依赖于 M 数的图形 (见图10.7.3). 从图上亦可明显地看出 dj/j 和 du/u 的关系在亚音速和超音速情形有着根本性的差别. $M < 1$ 时曲线上升, 速度增加, 对应于流量密度增加. 而当 $M > 1$ 时曲线下降, 速度增加, 对应于流量密度的减小.

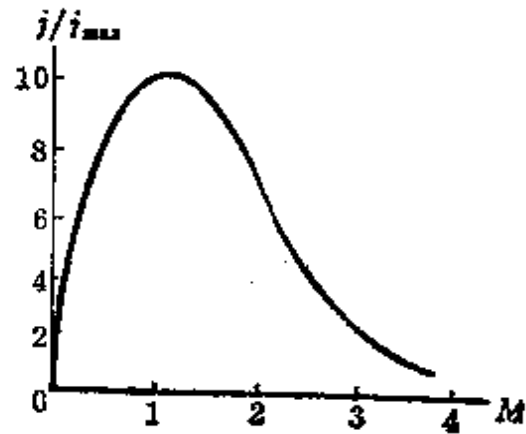


图 10.7.3

4) 若 $M=1$, 从(10.7.13)式推出 $dF=0$. 此式说明音速只能在管道的最大或最小截面处达到. 显然在最大截面上是不能获得音速的, 因为不管进入管道的气流是亚音速的或是超音速的, 管道的不断扩大将使速度变得愈来愈小或愈来愈大, 都不可能在最大截面上得到音速. 采用同样的推论可以证明在最小截面上有可能达到音速. 由此可以确信: 音速只能在管道的最小截面处达到.

必须指出, 逆推论不一定成立. 设 $dF=0$, 根据(10.7.13)式推出 $M=1$ 或 $du=0$, 可见在临界截面上可以是音速也可以是速度取极值的地方. 图10.7.4画出速度取极值的四种可能情形.

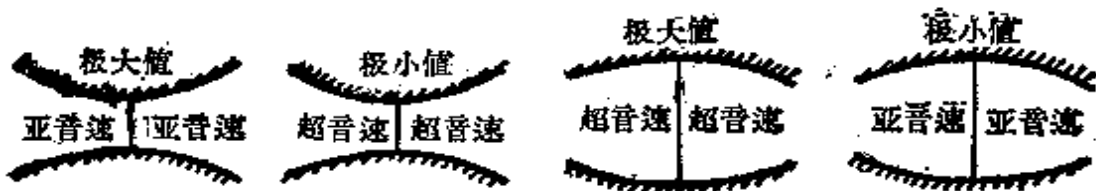


图 10.7.4

通过上面的讨论大家有能力回答这样一个问题，为了得到超音速气流，管子的形状应该做成什么样子？显然应该做成先收缩后扩大的形式。这样的管子就称为拉瓦尔管，是瑞典蒸汽轮机设计师拉瓦尔(Laval)首先设计出来的。

c) 任意形状管道内的等熵流动

管道的形状 $F(x)$ 已知，且给出某一截面 F_1 上的物理量 M_1, u_1, p_1, ρ_1 。假设管道中不产生激波，整个流动是等熵的，试求此缓变管道内拟一维定常运动的解。

现在我们的任务在于求出 $M(F), p(F), \rho(F)$ 和 $T(F)$ 的函数关系。经过研究发现，寻找以 M 为参数的对应关系式 $F(M), p(M), \rho(M), T(M)$ 比较容易。因为

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^\gamma = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (10.7.15)$$

而

$$\begin{aligned} \frac{F}{F_1} &= \frac{\rho_1 u_1}{\rho u} = \frac{\rho_1}{\rho} \frac{M_1}{M} \frac{a_1}{a} \\ &= \frac{M_1}{M} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{M_1}{M} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (10.7.16) \end{aligned}$$

有了(10.7.15)式及(10.7.16)式后，任意截面 F 上的物理量可以这样来求：根据(10.7.16)式求出横截面 F 上的马赫数 M ，再根据(10.7.15)式求出 F 上的 p, ρ, T 。

如果在管道的最小截面上产生了音速，那么通常取临界截面

F_* 上的 $M_*=1, p_*, \rho_*, T_*$ 为参考量. 此时 (10.7.15), (10.7.16) 式可改写为

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{p}{p_*} &= \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^\gamma = \left(\frac{T}{T_*} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ &= \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ \frac{F}{F_*} &= \frac{j_*}{j} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \frac{1}{M} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \end{aligned} \right. \quad (10.7.17)$$

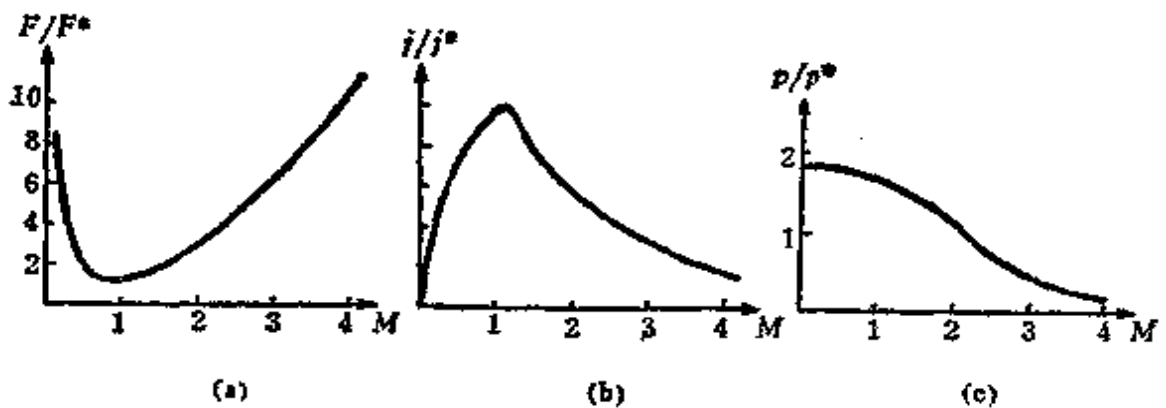


图 10.7.5

图 10.7.5 画出了 $\frac{F}{F_*}(M)$, $\frac{j}{j_*}(M)$ 和 $\frac{p}{p_*}(M)$ 的曲线图.

细致地考察上面画出的图形我们可以得到下列重要结论:

1) (a) 图说明在 $M < 1$ 时截面收缩将引起速度增大, 截面扩大将引起速度减小. 但是在 $M > 1$ 时情况恰好相反. 截面收缩导致速度减小, 截面扩大则引起速度增加. 这个结论和上节所说的完全吻合.

2) 每一个 F/F_* 对应于两个速度值. 一个在亚音速区域内, 对应较大的 p/p_* ; 一个在超音速区域内, 对应较小的 p/p_* . 在具体问题中, 到底应该取那一个, 要看压力的数值而定.

3) 流量密度在临界截面上达到最大值, 此时 $j = j_* = j_{max}$.

在超音速和亚音速区域，流量密度随速度变化规律是不同的，这点已在上一小节中指出。

d) 孔口出流



图 10.7.6

可压缩气体自大容器内经收缩管道流出。设给出截面积变化规律 $F(x)$ ，大容器内 $v=0, p=p_0, \rho=\rho_0, T=T_0$ ，出口截面 F_1 上的压力为 p_1 。求出口截面上的速度、压力、密度、温度、流量以及收缩管道中每一个截面上的物理量

(参看图 10.7.6)。

由

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

得

$$M_1 = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]} \quad (10.7.18)$$

知道 M_1 后，出口截面处的 ρ_1, T_1 由下式定出

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}, \quad \frac{T_1}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{-1} \quad (10.7.19)$$

这样，出口截面上所有物理量都已求出，采用出口截面上物理量为参考值，再利用(10.7.15)及(10.7.16)式就可以求出收缩管道内任一截面上的物理量。

最后我们求流量 m

$$m = \rho_1 u_1 F_1 = \rho_1 M_1 a_1 F_1 = \rho_0 a_0 F_1 \frac{\rho_1}{\rho_0} \frac{a_1}{a_0} M_1$$

即

$$m = \rho_0 a_0 F_1 \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]} \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \quad (10.7.20)$$

现在分析流量 m 和逆压比 p_1/p_0 的关系。为此先求最大流量

m_{\max} 。令 $\frac{p_1}{p_0} = P$ ，由 $\frac{dm}{dP} = 0$ 得

$$P = \frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

易证 $\frac{d^2m}{dP^2} < 0$ ，故 $\frac{p_1}{p_0}$ 是极大值。根据公式

$$\frac{p_*}{p_0} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

容易看出，对应于最大流量的出口压力刚好是临界压力 $p_c = p_*$ ，出口处达到音速。于是

$$m_{\max} = \sqrt{\gamma p_0 \rho_0} F_1 \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (10.7.21)$$

将流量表达式改写成下列无量纲形式

$$\frac{m}{m_{\max}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{-\frac{2}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]} \quad (10.7.22)$$

$\frac{m}{m_{\max}}$ 依赖于 $\frac{p_1}{p_0}$ 的曲线图如图

10.7.7所示。当 $\frac{p_1}{p_0} = 1$ 时，管内无

流动， $\frac{m}{m_{\max}} = 0$ ；当 $\frac{p_1}{p_0}$ 由 1 逐渐减

少时， $\frac{m}{m_{\max}}$ 增加至 $\frac{p_1}{p_0} = 0.528$ ，即

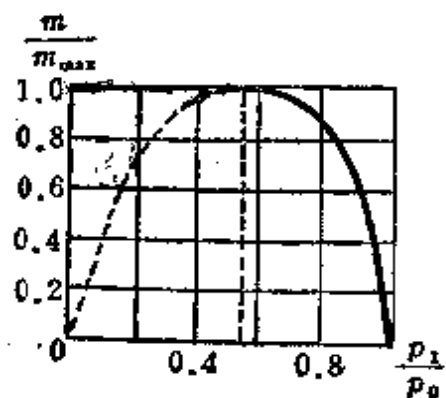


图 10.7.7

$p_1 = p_*$ 时达到极大值， $m = m_{\max}$ ；当 p_1/p_0 继续减小时，按理论计算来说应该是图 10.7.7 中的虚线所示的曲线，也就是说流量

应进一步减少，但是这和实际观测不相符合。实验结果表明，当 $p_1 < p^*$ 时流量不再改变，这点从流体力学观点来说也是容易理解的。当 p_1 进一步从 p^* 降低时，管外变成超音速流，它对上游管内流动包括流量在内不再起影响。因此在 $\frac{p_1}{p_0} < \frac{p^*}{p_0}$ 时原曲线不适用，应取如图 10.7.7 所示的直线段。

e) 拉瓦尔管内流动

拉瓦尔管在喷气发动机及超音速风洞等问题中有着广泛的应用。下面以超音速风洞为例说明拉瓦尔管内流动的数学问题是怎样提出的。图 10.7.8 画出了回路式超音速风洞的示意图。气流经压缩机将压力从 p_0 提高到 p_0 ，加热了的气体经冷却器冷却恢复到原来温度 T_0 ，然后状态为 p_0, T_0 的气体进入供给截面，那里气流速度很小，可近似认为是静止的。紧随着供给截面就是拉瓦尔管，它由收缩段与喷管组成。气流经收缩段加速到最小截面喉管处的音速，再经过喷管扩大作用变成超音速流，然后进入试验段。在试验段放置试验模型，可以进行超音速流动的各种试验。气流经试验段后进入扩散段将部分动能转化为压力能以提高

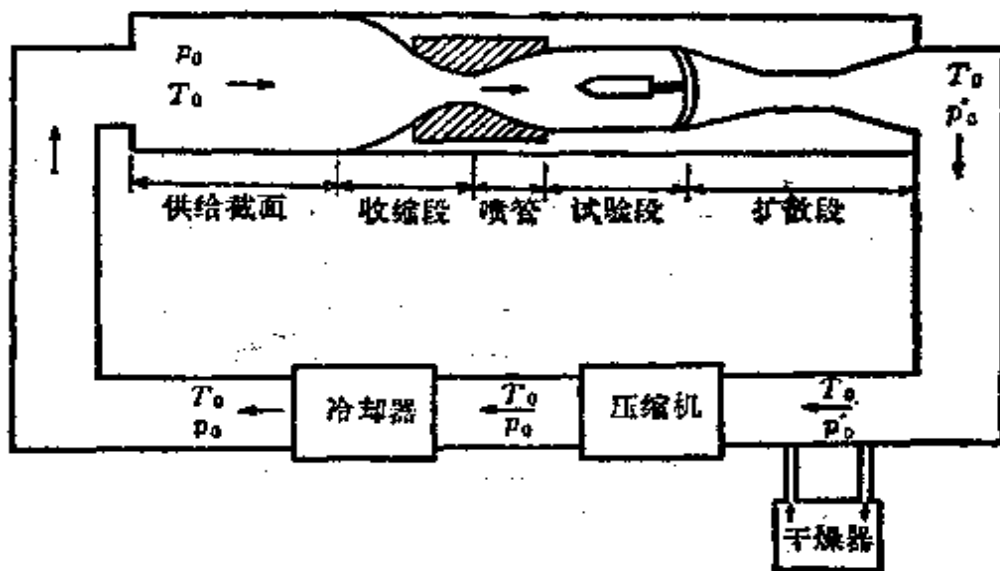


图 10.7.8

出口压力 p_e ，节省压缩机的功率。通过上面描述可以看出，在什么反压比 p_e/p_0 下可以在试验段中得到超音流是超音速风洞很感兴趣的问题。为了完满地解决这个问题我们首先研究一下各种不同反压比 p_e/p_0 下流动的状态。

数学问题的提法是这样的：给定拉瓦尔管横截面随 x 的变化规律，大容器内的状态 p_0, T_0, ρ_0 ，以及出口截面的压力 p_e 。求不同 p_e/p_0 时管内的流动状况，以及不同流动状况下管内流动的解。

设 p_0 固定不变，调节反压 p_e 使之从 p_0 降到 0。在 $[p_0, 0]$ 间隔内有如下几个特征压力：

- 1) p_0 ，此时管内无流动，流体静止；
- 2) 0，这是出口处能达到的最低压力；
- 3) 不断降低 p_e 使喉管处出现音速，喉管上的 p^*, ρ^*, T^* 按公式

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{\rho^*}{\rho_0}\right)^\gamma = \left(\frac{T^*}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{\gamma-1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

求出，这样临界截面 F^* 上的物理量都是已知的。

以 p^*, ρ^*, T^*, F^* 为参考值，根据 c) 中 (10.7.17) 式可求出拉瓦尔管内每一截面上等熵流动的解。容易想象，收缩段内的气流一定是亚音速的，因为它从大容器内静止气体逐渐加速得来的。所以对应的是图 10.7.9 上的曲线段 0。气流过喉道进入喷管

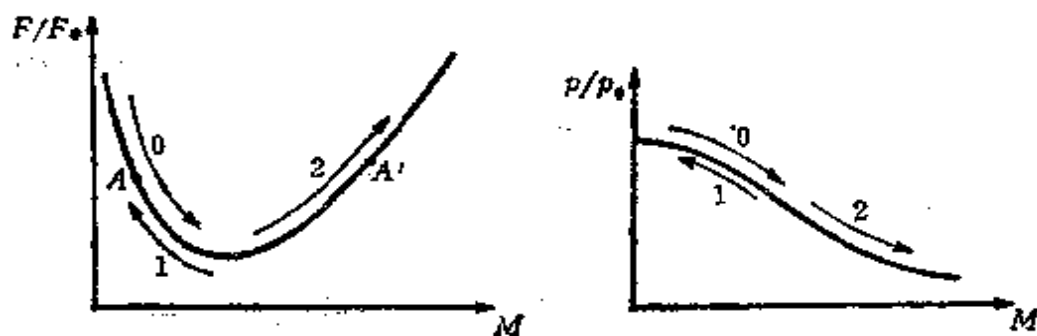


图 10.7.9

后存在着两种可能的等熵流动，一种是亚音速流动，对应于曲线 1，出口处的压力 p_1 较高；另一种是超音速流动，对应于曲线 2，出口处的压力 p_2 较低。 p_1, p_2 都是特征压力，它们分别代表最小截面处达到音速后喷管中出现亚音速等熵气流或超音速等熵气流时的出口压力。 $p_E = p_1$ 及 $p_E = p_2$ 时沿喷管的马赫数分布及压力分布见图 10.7.10 中的 b, g 。

下面我们分 $p_0 \geq p_E \geq p_1$ ， $p_1 > p_E \geq p_2$ 及 $p_2 > p_E \geq 0$ 三种情形讨论拉瓦尔管内流动图案及求解方法。

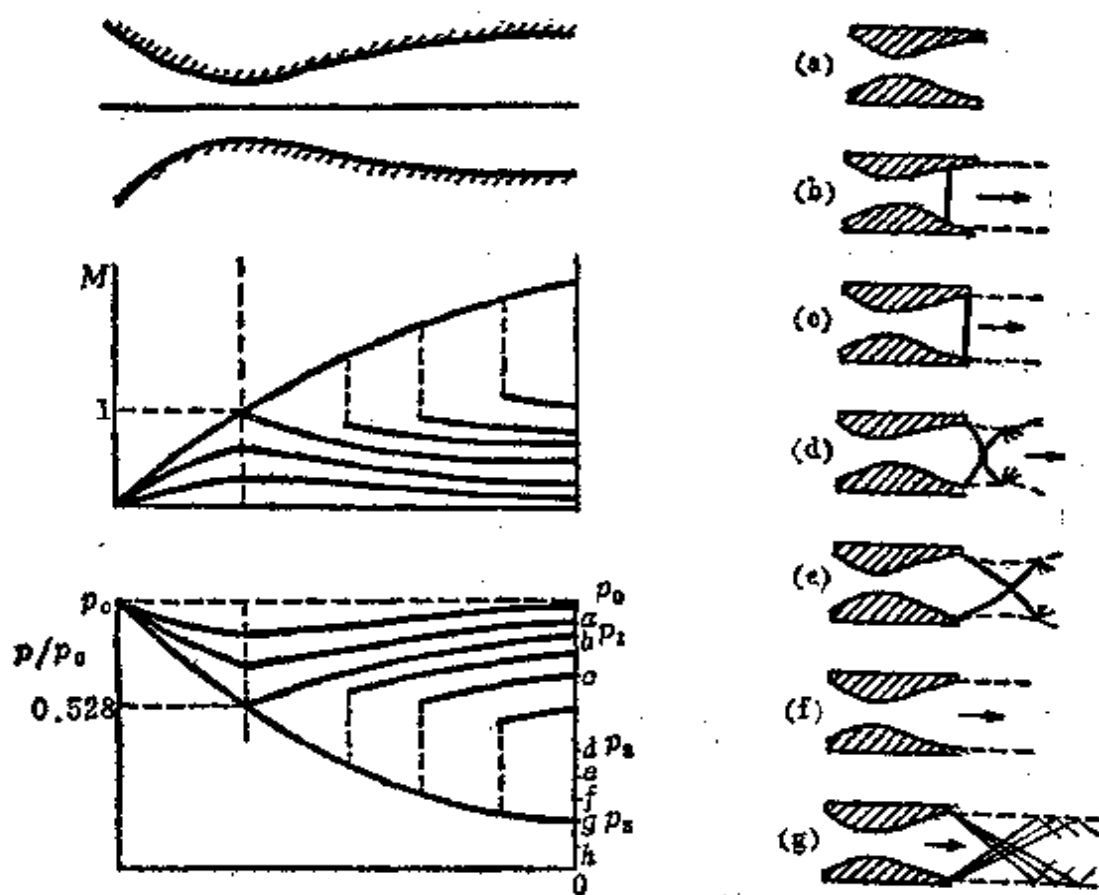


图 10.7.10

1) $p_0 \geq p_E \geq p_1$

整条管道内全是亚音速流动。求解方法和上一小节类似，按 (10.7.18) 式和 (10.7.19) 式求出出口截面处的 M_E, ρ_E, T_E 。然后以出口截面上的物理量为参考值，根据 (10.7.15) 及 (10.7.16) 式

求出任意截面上的物理量。上图 a 画出了马赫数和压力沿喷管的分布曲线。容易理解，当反压 p_E 从 p_0 向 p_1 连续不断地降低时，管内速度整个地提高，压力随之整个地降低，同时流量增加。由于亚音速流动的特点，管口反压一有改变立刻影响到管内整个流场，速度场和压力场全部改变。当 $p_E = p_1$ 时，喉管出现音速，管内流量达到最大值。出现上图曲线 b 所示的情形。

2) $p_1 > p_E \geq p_3$

当 p_E 由 p_1 继续往下降的时候，收缩段内的气流总是维持 p_1 时的状态不变。因为喉道中出现音速的时候，拉瓦尔管内的流量已达到极大值，根据孔口出流中同样的考虑就是再降低反压也不可能增大流量使收缩段内流动状态改变，这是一方面。另一方面喷管内将出现非等熵流动。为什么呢？因为如果气流是等熵的话，那么它只能沿曲线 b 或 g 走向管口，达到压力 p_1 或 p_3 值，而不能和反压衔接。由此可见管内将出现非等熵流动。也就是说在某一截面上产生了激波。激波前后的流动还是等熵的。现在我们进一步分析一下，音速截面后，激波截面前面的气流是沿亚音速的曲线段 b 走呢还是沿超音速的曲线段 g 走？显然只能是沿超音速的曲线段 g 走，因为在亚音速气流中不可能产生激波。于是喷管内将出现这样的流动图案：过喉道气流变成超音速，为了适应管口反压的需要，在管内某处产生激波，超音速气流经过激波改变成亚音速气流，压力突跃升高，而后沿扩散管道流动，速度继续减小，压力不断增加。现在我们简单介绍一下喷管内出现激波后如何求解：先设激波所在截面 F_1 已知，欲求出口压力 p_E 。激波前的超音速段可按 $p_E = p_3$ 时的方案计算，一直算到激波前 F_1 截面上为止，知道了 F_1 上的物理量之后，根据正激波理论可以把激波后的物理量全部求出。以波后 F_1 上的物理量为参考，按公式(10.7.15)，(10.7.16)，并取亚音速值可算出每一截面上的物理量，特别是出口处的反压 p_E 。根据这样的计算得出的 M 及 p/p_0 的曲线图在图 10.7.10 上。在管内给出不同位置的激波，

重复上述计算可以得到一族对应的马赫数分布和压力分布图，并得到管口的压力 p_E 依赖于 F_s 的曲线图。将这些结果画在图上（见图 10.7.10），从曲线族的变化趋势不难看出下列重要事实：当反压 p_E 由 p_1 连续地下降时，激波由喉管处不断地向管口移动，当压力达到 p_2 时，激波位于出口截面处。波前的压力是 p_3 ，波后增至 p_2 。 p_2 也是一个特征压力，它的数值可由上述一维管流和正激波理论相结合的办法很容易地求出。总结上面所讲的我们看到当 $p_1 > p_E \geq p_2$ 时，管口出现如曲线 c 所示的喷管内的非等熵流动：最小截面后有一段等熵超音速气流，经过激波变成等熵亚音速气流。必须指出，在求管内分析解时，通常给出的不是激波的位置 F_s ，而是反压 p_E ，为此必须先根据 p_E 依赖于 F_s 的曲线图求出激波位置 F_s ，然后再按上面说明的方法求出整个管道内的解。

上面我们讨论了 $p_1 > p_E \geq p_2$ 的情形，现在继续降低压力 p_E ，考虑 $p_2 > p_E \geq p_3$ 的情形。首先我们指出，当 $p < p_2$ 后，由于管外的影响传不到管内去，拉瓦尔管内的流动维持 g 曲线所代表的状态不变。与此同时，管外出现如图(e)所示的正激波斜激波系统。压力再下降，斜激波部分逐渐增加，到一定程度后完全变成斜激波。当压力继续降低时，斜激波的坡度愈来愈小，压力升高也愈来愈少，终于到 $p_E = p_3$ 时，气流均匀地不受扰动地从管内喷射出来，如图(f)所示。

3) $p_3 > p_E \geq 0$

此时，气流沿曲线 g 流至管口，到达压力 p_3 。为了继续降低压力，从管口开始发生膨胀射流， p_E 愈和 0 接近，膨胀的程度愈厉害（图g）。

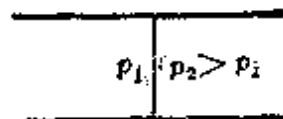
习 题

1. 设在一个无限长的一维管道中，气体以速度 u 进行定常运动。如果在某一瞬时某一截面 A 处，均匀分布一个小扰动，

使得速度、压力、密度各有一增量。若取随分界面 A 一起运动的坐标系，试用微元的连续方程和动量定理证明小扰动相对于流动传播的速度为音速。

u	$u + \Delta u$	u
p	$p + \Delta p$	p
ρ	$\rho + \Delta \rho$	ρ

题 1



题 2

2. 设一维无穷长管道中在薄膜隔开的两个区域内压力为 p_2, p_1 ($p_2 > p_1$), 但 $p_2 - p_1 = \bar{p}$ 很小, 试求当薄膜破裂后气体的运动为

$$p' = \begin{cases} \bar{p}, & x > at \\ \frac{1}{2} \bar{p}, & -at < x < at \\ 0, & x < -at \end{cases}$$

$$u' = \begin{cases} 0, & x > at \\ -\frac{\bar{p}}{2a\rho_0}, & -at < x < at \\ 0, & x < -at \end{cases}$$

其中 a 为音速, ρ_0 为气体密度。

3. 试在下列两组初始条件下解一维波动方程, 并说明其物理意义。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$(1) \quad t=0, \quad \begin{cases} u=c=\text{常数}, & |x| < x_0, \\ u=0, & |x| > x_0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

$$(2) \quad t=0, \quad \begin{cases} u=0, & |x| < x_0, \\ u=U \cos x, & |x| > x_0, \end{cases}$$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

4. 试推导柱坐标和球坐标下小扰动所满足的一维波动方程。设在两种坐标下只有径向速度分量，且所有的物理量都是径向坐标和时间的函数。写出球坐标一维波动方程的一般解。

5. 试推导伯努利积分的几种形式。设流体是理想的，考虑定常、绝热与质量力忽略的情形。

$$(1) \quad \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = \frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}$$

$$= \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-1};$$

$$(2) \quad \left(\frac{a}{a_*}\right)^2 = \frac{T}{T_*} = \left(\frac{p}{p_*}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)^{\gamma-1}$$

$$= \frac{\gamma+1}{2} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-1};$$

$$(3) \quad \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = \frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}$$

$$= 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2, \quad \lambda = \frac{v}{a_*};$$

$$(4) \quad \left(\frac{a}{a_*}\right)^2 = \frac{T}{T_*} = \left(\frac{p}{p_*}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)^{\gamma-1}$$

$$= \frac{\gamma+1}{2} - \frac{\gamma-1}{2} \lambda^2;$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 &= \frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} \\
 &= 1 - \tau, \quad \tau = \frac{v^2}{v_{m*}^2}; \\
 (6) \quad \left(\frac{a}{a_*}\right)^2 &= \frac{T}{T_*} = \left(\frac{p}{p_*}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)^{\gamma-1} \\
 &= \frac{\gamma+1}{2}(1-\tau).
 \end{aligned}$$

其中“0”代表驻点物理量，“*”代表临界点物理量。

6. 若取 $\gamma = \frac{7}{5}$ ，证明在一个机翼上当最大速度首先达到局部音速时，最大负压系数为

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty V^2} = \frac{10}{7 M_\infty^2} \left[\left(\frac{5 + M_\infty^2}{6} \right)^{7/2} - 1 \right]$$

7. 试画出定常理想绝热流动沿流线上速度 v 与压力 p 的关系图。并证明当 $v = a$ （局部音速）时，曲线上对应这一点是一个转折点。

8. 考虑气体的一维定常管道流动（近似提法），试证比流量

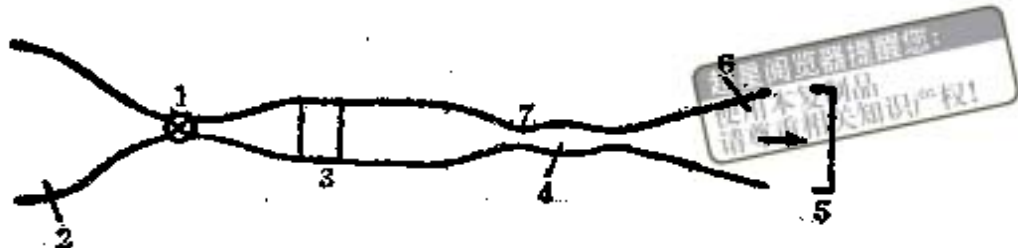
$\frac{\rho v}{\rho_* a_*}$ 可写为

$$\frac{\rho v}{\rho_* a_*} = M_* \left[\frac{1}{2}(\gamma+1) - \frac{1}{2}(\gamma-1)M_*^2 \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad M_* = \frac{v}{a_*} = \lambda$$

并论证：当 $\lambda < 1$ 时， ρv 为 λ 的单调增函数；当 $\lambda > 1$ 时， ρv 为 λ 的单调减函数；当 $\lambda = 1$ 时， ρv 取极大值。

9. 试求等温过程中拉瓦尔管中速度与横截面积 F 的关系。

10. 试用气体的一维定常流动理论分析超音速风洞的流动情况。



- | | | |
|---------|------------|--------|
| 1. 调气阀门 | 2. 压缩空气贮存器 | 3. 干燥器 |
| 4. 试验段 | 5. 消声器 | 6. 扩散器 |
| 7. 喷管 | | |

题 10

11. 试推导以 $\frac{p_2}{p_1}$ 为参数形式的正激波前后关系式

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{p_2}{p_1} \frac{T_1}{T_2} = \frac{1 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_2}{p_1}}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{p_2}{p_1}}$$

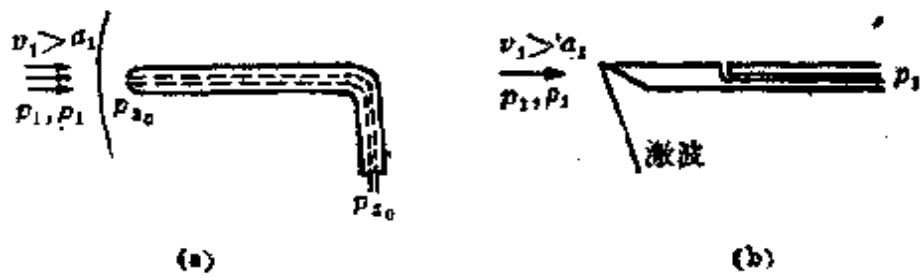
12. 如果通过一正激波密度增加了一倍，求来流速度和压力跳跃的百分数。设来流音速为 330 米/秒。

13. 如果圆头的皮托管前面产生一个脱体激波，试计算当来流 $M=2$ 时管口的压力。已知来流压力为 p_∞ 。

14. 超音速气流的 M 数可以用下列方法测量。把风速管（皮托管）放置在平行气流的方向，因为超音速气流流经风速管时，风速管前形成脱体激波（如图），所以风速管的总压力孔所承受的压力为正激波后面的气流驻点压力 p_{t_0} 。为了测定气流的静压力可采用图(b)所示的装置，楔形物体的一个平面和气流方向平行，该平面上有静压孔，因超音速气流经此平面时不受扰动，故可测得气流的静压力 p_1 。

证明在分别测得 p_{t_0} 和 p_1 后，气流的 M 数可由下面公式给出

$$\frac{p_{t_0}}{p_1} = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}$$



题 14

15. 试推导坐标系取在正激波前气流中与流体一起运动时的激波前后相容性条件。设激波传播速度为 θ , 波后流体质点速度为 V 。

16. 试用气体的一维定常流理论分析气体流过下列管道的各种可能情况 (分别讨论 $A_1 \leq A_2$ 的情况)。



题 16

附 录

附 录 一

设流体的运动由拉格朗日方法给定, 则

$$r = r(a, b, c, t)$$

其中 r 是流体质点的矢径, a, b, c 是初始时刻流体质点的曲线坐标. 假设函数 r 是 a, b, c 及 t 的单值连续函数.

如果采用欧勒方法描写流体的运动, 则假设转换到拉格朗日观点上去的描写流体质点运动规律的函数 (1) 是 a, b, c 及 t 的单值连续函数. 在这样的条件下, 初始时刻组成某连续曲线 (曲面或体积) 的流体质点在以后或以前任一时刻必然组成连续的曲线 (曲面或体积). 现在以曲线为例证明上述结论. 设初始时刻流体质点组成连续曲线 L_0 , 其参数形式的方程为

$$a = f_1(\lambda), \quad b = f_2(\lambda), \quad c = f_3(\lambda) \quad (2)$$

其中 f_1, f_2, f_3 显然是 λ 的连续函数. 过一时刻, 这些流体质点走到新的位置 x, y, z , 现证这些位置亦必组成一连续曲线 L . 为此将 (2) 代入 (1) 中得

$$\begin{cases} x = x[f_1(\lambda), f_2(\lambda), f_3(\lambda)] = F_1(\lambda, t) \\ y = y[f_1(\lambda), f_2(\lambda), f_3(\lambda)] = F_2(\lambda, t) \\ z = z[f_1(\lambda), f_2(\lambda), f_3(\lambda)] = F_3(\lambda, t) \end{cases} \quad (3)$$

由于 f_1, f_2, f_3 是连续函数, 根据假定, x, y, z 又是 a, b, c, t 的连续函数, 于是复合函数 $F_1(\lambda, t), F_2(\lambda, t), F_3(\lambda, t)$ 亦必将是 λ, t 的连续函数, 这就是说流体质点在 t 时刻所占据的位置亦必是连续曲线.

如果初始时刻曲线 L_0 是闭合的, 即

$$f_1(\lambda_1) = f_1(\lambda_2); \quad f_2(\lambda_1) = f_2(\lambda_2); \quad f_3(\lambda_1) = f_3(\lambda_2)$$

其中 λ_1 和 λ_2 相当于曲线 L_0 两端点的 λ 值. 则由 x, y, z 的连续性推出

$$x(\lambda_1, t) = x(\lambda_2, t), y(\lambda_1, t) = y(\lambda_2, t), z(\lambda_1, t) = z(\lambda_2, t)$$

说明流体质点在 t 时刻组成的曲线亦将是闭合的.

完全同样地可以在上述条件下证明组成某连续曲面(或体积)的流体质点在其他任一时刻亦将组成连续的曲面(或体积).

附录二



1) 体积分的随体导数

考虑一个由流体质点组成的以 S 面为界的流动体积 τ (见图 1), 设 $\varphi(r, t)$ 是 τ 内定义的标量函数, 作体积分

$$\int_{\tau} \varphi dr \quad (1)$$

在运动过程中, 组成体积 τ 的流体质点不断地改变它的位置, 因此流体质点所在的流动体积 τ 也不断地改变着它的大小和形状. 此外, 在 τ 上取值的标量函数 φ 在运动过程中也改变了它的数值,

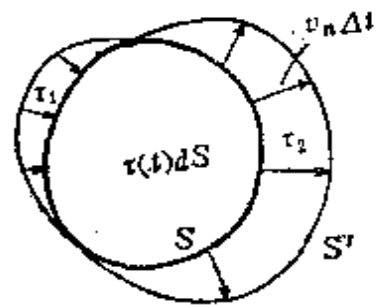


图 1

因此可见, 积分 (1) 在不同时刻将采取不同的值. 现在我们来研究当流体质点运动时, 体积分 (1) 的变化状况, 即研究体积分 (1) 的随体导数

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \varphi dr \quad (2)$$

设流体质点在 t 时刻的流动体积为 τ , 其界面为 S , 过了 Δt 时刻后, 即在 $t + \Delta t$ 时刻, S 面上的流体质点由于存在着速度的法向分量在法线方向移动了 $v_n \Delta t$ 距离, 从而组成了新的曲面 S' . 设曲面 S' 所围的体积是 $\tau(t + \Delta t)$, 于是根据随体导数的定义我们有

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \varphi d\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta t} \left[\int_{\tau(t+\Delta t)} \varphi(r, t+\Delta t) d\tau - \int_{\tau(t)} \varphi(r, t) d\tau \right] \right]$$

令 $\tau(t+\Delta t) = \tau + \Delta\tau$

显然 $\Delta\tau$ 是由 τ_2 及 $-\tau_1$ 组成的, 于是

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \varphi d\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{\tau(t)} [\varphi(r, t+\Delta t) - \varphi(r, t)] d\tau + \int_{\Delta\tau} \varphi(r, t+\Delta t) d\tau \right\} \quad (3)$$

上式表明, 体积分(1)的变化是由两种原因引起的. 右式第一项代表由于标量函数 φ 随时间 t 改变所引起的变化, 第二项代表由于流动体积改变了 $\Delta\tau$ 后所引起的变化. 显然, 右式第一项为

$$\int_{\tau} \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\tau \quad (4)$$

现在我们考虑右式第二项, 从图 1 上容易看出

$$d\tau = v_n \Delta t dS$$

其中 dS 是 S 面的面积元素. 于是

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta\tau} \varphi(r, t+\Delta t) d\tau &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_S \varphi(r, t+\Delta t) v_n dS \\ &= \int_S \varphi(r, t) v_n dS \end{aligned} \quad (5)$$

将(4)式和(5)式代入(3)式得

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \varphi d\tau = \int_{\tau} \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\tau + \int_S \varphi v_n dS \quad (6)$$

于是我们得到下列重要结果: 体积分(1)的随体导数由两项组成,

第一项是函数 φ 对时间的偏导数 $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ 沿体积 τ 的积分, 即为

$$\int_{\tau} \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\tau$$

它是由于标量场不定常性所引起的；第二项是函数 φv 通过表面 S 的通量

$$\int_S \varphi v \cdot dS$$

它是由于体积 τ 的改变所引起的。

利用奥高公式，(6)式亦可写成

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\tau} \varphi d\tau &= \int_{\tau} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi v) \right] d\tau \\ &= \int_{\tau} \left(\frac{d\varphi}{dt} + \varphi \operatorname{div} v \right) d\tau \end{aligned} \quad (7)$$

超星浏览器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

2) 面积分的随体导数

(a) 在流体中考虑一个由流体质点组成的流动曲面 S (见图 2)。设

$$I = \int_S \Omega(r, t) \cdot dS \quad (8)$$

为通过曲面 S 的涡通量。过了 Δt 时刻后，曲面上每一个流体质点移动了 $v\Delta t$ 的距离到达新的位置，并组成新的曲面 S_1 。 S_1 的面积分为

$$I' = \int_{S_1} \Omega(r, t + \Delta t) \cdot dS \quad (9)$$

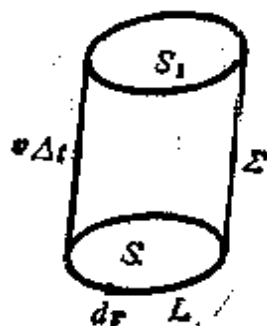


图 2

我们研究面积分的随体导数，即研究下列极限值

$$\frac{dI}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{I' - I}{\Delta t}$$

将(8)式及(9)式代入得

$$\frac{dI}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S_1} \Omega(r, t + \Delta t) \cdot dS - \int_S \Omega(r, t) \cdot dS \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{S_1} [\Omega(r, t + \Delta t) - \Omega(r, t)] \cdot dS \right\} \\
&\quad + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S_1} \Omega(r, t) \cdot dS - \int_S \Omega(r, t) \cdot dS \right] \quad (10)
\end{aligned}$$

显然

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{S_1} [\Omega(r, t + \Delta t) - \Omega(r, t)] \cdot dS \right\} \\
&= \int_S \frac{\partial \Omega}{\partial t} \cdot dS \quad (11)
\end{aligned}$$

现在我们求(10)右边第二项的值. 设曲面 S, S_1 和侧面 Σ 所组成的封闭曲面为 σ , 它所包围的体积为 τ . 对 τ 及 σ 应用奥高定理得

$$\int_{\tau} \operatorname{div} \Omega d\tau = \int_{S_1} \Omega \cdot dS - \int_S \Omega \cdot dS + \int_{\Sigma} \Omega \cdot d\Sigma \quad (12)$$

其中 S_1 面上的 $\Omega_n = \Omega \cdot dS$ 是涡旋矢量 Ω 在外法线单位矢量上的投影, 而 S 面上的 $\Omega_n = \Omega \cdot dS$ 则是涡旋矢量 Ω 在内法线单位矢量上的投影.

考虑到

$$\operatorname{div} \Omega = 0, \quad d\Sigma = dr \times v \Delta t$$

(10)式可改写为

$$\begin{aligned}
\int_{S_1} \Omega \cdot dS - \int_S \Omega \cdot dS &= - \int_L \Omega \cdot (dr \times v \Delta t) \\
&= \int_L (\Omega \times v) \cdot dr \Delta t
\end{aligned}$$

其中 L 是 S 面上所张的封闭回线. 应用斯托克斯公式有

$$\int_{S_1} \Omega \cdot dS - \int_S \Omega \cdot dS = \Delta t \int_S \operatorname{rot}(\Omega \times v) \cdot dS \quad (13)$$

将(11)式及(13)式代入(10)式中得

$$\frac{dI}{dt} = \int_S \left[\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \operatorname{rot}(\Omega \times v) \right] \cdot dS \quad (14)$$

将被积函数变换一下有

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \operatorname{rot}(\Omega \times v) \\ &= \frac{\partial \Omega}{\partial t} + (v \cdot \nabla)\Omega - (\Omega \cdot \nabla)v + \Omega \operatorname{div} v - v \operatorname{div} \Omega \\ &= \frac{d\Omega}{dt} - (\Omega \cdot \nabla)v + \Omega \operatorname{div} v \end{aligned} \quad (15)$$

于是(14)式可写为

$$\frac{dI}{dt} = \int_S \left[\frac{d\Omega}{dt} - (\Omega \cdot \nabla)v + \Omega \operatorname{div} v \right] \cdot dS \quad (16)$$

(b) 若流动曲面 S 是封闭的, 试证

$$\frac{d}{dt} \int_S \rho \varphi n dS = \int_S \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} n + \rho v_n v \right) dS \quad (17)$$

其中 φ 是速度势函数.

重复(a)的做法得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_S \rho \varphi n dS \\ &= \int_S \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} n dS + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S_1} \rho \varphi n dS - \int_S \rho \varphi n dS \right] \end{aligned} \quad (18)$$

显然

$$\begin{aligned} \int_{S_1} - \int_S &= \int_{S_{1E}}^E + \int_{S_E}^F - \int_{S_{1F}}^E - \int_{S_F}^F \\ &= \int_{r_E} \rho \nabla \varphi dS - \int_{r_F} \rho \nabla \varphi dS \\ &= \int_S \rho v_n v \Delta t dS \end{aligned}$$

注意积分上面的上与下标明法线是朝上还是朝下的 (参看图3).

将之代入(18)式, 即得(17)式.

3) 线积分的随体导数

设 $t=t_0$ 时刻, 在流体中取出一条由流体质点组成的流动封闭曲线 L (见图4), 沿此曲线的速度环量为

$$\Gamma = \oint_L v(r, t) \cdot \delta r \quad (19)$$

过了 Δt 时刻后, 组成封闭曲线 L 的流体质点移动到新的位置, 并组成新的封闭曲线 L' , L' 上的速度矢量也发生了变化, 这时沿封闭曲线 L' 的速度环量为

$$\Gamma' = \oint_{L'} v(r, t + \Delta t) \cdot \delta r \quad (20)$$

现研究线积分的随体导数, 即研究下列极限值

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Gamma' - \Gamma}{\Delta t} \quad (21)$$

将(19)及(20)式代入得

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\oint_{L'} v(r, t + \Delta t) \cdot \delta r \right. \\ &\quad \left. - \oint_L v(r, t) \cdot \delta r \right] \end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \oint_{L'} [v(r, t + \Delta t) - v(r, t)] \cdot \delta r \right\}$$

$$+ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \oint_{L'} v(r, t) \cdot \delta r - \oint_L v(r, t) \cdot \delta r \right\}$$

即

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_L \frac{dv}{dt} \cdot \delta r + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \oint_L v \Delta t \cdot \delta v = \oint_L \frac{dv}{dt} \cdot \delta r \quad (22)$$

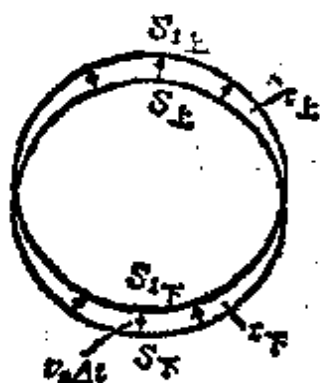


图 3



图 4

附录三

若液体表面是曲面， M 是曲面上一点，作两个垂直于切平面且相互正交的平面，它们和曲面的交线为 AB 和 CD 。以 M 点为中心作一矩形元，其对边分别平行于 AB 和 CD ，长为 dS_1 和 dS_2 。设 AB, CD 的曲率分别为 R_1, R_2 。 曲面上的流体和曲面下的流体作用在曲面 M 点上的压力分别为 p_1 和 p_2 ，作用在矩形元四边的表面张力分别为 TdS_1 和 TdS_2 ，并且沿着 AB, CD 的切线方向，参看图 5。作用在 dS_2 两边上的两个 TdS_2 ，其合力在过 M 的法线方向上且垂直向上，它的大小为

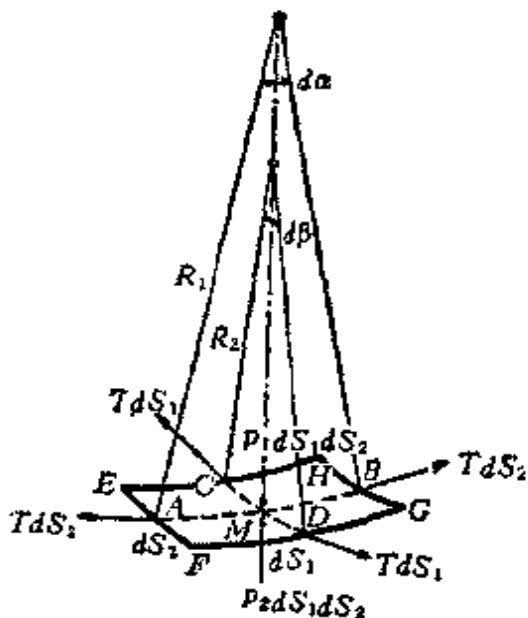


图 5

$$TdS_2 \cdot d\alpha = TdS_2 dS_1 / R_1$$

同理，作用在 dS_1 两边上的两个 TdS_1 ，其合力在过 M 的法线方向上且垂直向上，它的大小为

$$TdS_1 \cdot d\beta = TdS_1 dS_2 / R_2$$

于是四个表面张力的合力垂直表面向上，大小为

$$T \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dS_1 dS_2$$

它必须和作用在 $dS_1 dS_2$ 上的压力差 $(p_1 - p_2) dS_1 dS_2$ 平衡，由此我们有

$$(p_1 - p_2) dS_1 dS_2 = T \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dS_1 dS_2$$

即

$$p_1 - p_2 = T \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

虽然 R_1, R_2 是任意两个正交方向上的曲率半径, 但是我们通常取曲面在 M 点的两个主曲率半径为 R_1 及 R_2 .

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

习题答案

第七章

1. (1) $\varphi = \frac{c}{2} \ln(x^2 + y^2)$, $\psi = c \arctan \frac{y}{x}$,
 $w(z) = c \ln z$, $\Gamma = 0$, $Q = 2\pi c$;
- (2) $\varphi = -c \arctan(x/y)$, $\psi = -\frac{c}{2} \ln(x^2 + y^2)$,
 $w(z) = -ic \ln z$, $\Gamma = 2\pi c$, $Q = 0$.
2. $\psi = -\frac{a}{n+1} r^{n+1} e^{-k(n+1)\theta}$.
4. $v_r = \frac{1}{2} r^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2}$, $v_\theta = -\frac{1}{2} r^{-1/2} \sin \frac{\theta}{2}$; $\psi = r^{1/2} \sin \frac{\theta}{2}$.
5. 没有.
7. (1) $\psi = (y^2 - x^2)/2$; (2) $\psi = 3x^2 y - y^3$;
 (3) $\psi = -y/(x^2 + y^2)$; (4) $\psi = -2xy/(x^2 + y^2)^2$.
8. $\varphi = k \ln r + c_1 \theta$, c_1 是常数.
10. $w(z) = Uz - iUa \ln z - Ub^2/z$.
11. $\psi = e^x \sin y$, $u = e^x \cos y$, $v = -e^x \sin y$.
 $\psi = \cos x \sinh y$, $u = \cos x \cosh y$, $v = \sin x \sinh y$.
12. $\Gamma = 8\pi$; $Q = 12\pi$.
13. 流线: $(x^2 + y^2 + 1)y = c(x^2 + y^2 - 1)$; $Q = \pi m/2$.
15. $y = a$.
18. $z = \pm \sqrt{a^2 + 2am/V}$;
 $Vy + m \arctan(2xy/(x^2 - y^2 - a^2)) = 0$.

19. $Vy + m \operatorname{arctan}(y/x) = \text{常数}; \quad x = -m/V, \quad y = 0.$

20. $w(z) = Vz + m \ln z - \frac{m}{b-a} [(z-a) \ln(z-a) - (z-b) \times \ln(z-b) - (a+b)].$

$$\psi = Vy + m \operatorname{arctan} \frac{y}{x} - \frac{m}{b-a} \left[y \ln \frac{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-b)^2 + y^2}} + (x-a) \operatorname{arctan} \frac{y}{x-a} - (x-b) \operatorname{arctan} \frac{y}{x-b} \right].$$

$$V + \frac{m}{z} - \frac{m}{b-a} \ln \left[\frac{z-a}{z-b} \right] = 0.$$

21. $w(z) = -[a(\pi - \beta)/\pi] z^{a/(a-\beta)},$
 $u + iv = -ar(\cos\beta \pm i \sin\beta).$

22. $w(z) = m \ln[(z^4 + 4)/z^4];$
 $\psi = -m \operatorname{arctan}[4 \sin 4\theta / (r^4 + 4 \cos 4\theta)].$

$$|v| = \frac{16}{5}m.$$

23. $w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln[(z^2 - 2i)/(z^2 + 2i)];$

流线: $(x^2 + y^2) - 8xy + 4 = c[(x^2 + y^2) + 8xy + 4].$

24. (1) $w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{\cosh(\pi z/2a) + i \sinh(\pi/2)}{\cosh(\pi z/2a) - i \sinh(\pi/2)}.$

(2) $w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z^4 + id^4}{z^4 - id^4}.$

(3) $w(z) = \frac{2\sqrt{2}hm}{\pi} \frac{\left[z^2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - 2h^2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \right]}{(z^4 + 4h^4)}$

27. $w(z) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{(z-1)^4}{(z^2+1)z^2}; \quad |v| \approx 0.14.$

$$29. w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z^n - R^n); \quad \frac{dw}{dz} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{nz^{n-1}}{z^n - R^n}$$

$$32. (1) \frac{2\pi\rho a^2 Q^2}{f(f^2 - a^2)}; \quad (2) \frac{4\pi\rho a^2 m^2 f}{(f^2 - a^2)^2};$$

$$(3) \frac{\rho f^{-2} a^2}{2\pi f(f^2 - a^2)}$$

$$33. (1) w(z) = \pi a V \coth \frac{a\pi}{z};$$

$$(3) p = p_0 + \frac{\rho V^2}{2} - \frac{\pi^2 a^2 V^2 \rho}{8y^2 \cosh^4(\pi x/2y)}$$

$$34. p = p_0 + \frac{\rho V^2}{2} (1 - y^2/(h^2 - y^2)).$$

$$35. w(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln \sinh(\pi z/2b).$$

$$36. w(z) = \frac{Q}{b} z.$$

$$39. w(z) = \frac{Q}{\pi} \ln \sinh(\pi z/2l).$$

$$41. w(z) = V \cosh(\pi z/l).$$

$$\phi = V \cosh(\pi x/l) \cos(\pi y/l);$$

$$\psi = V \sinh(\pi x/l) \sin(\pi y/l).$$

$$42. w = \frac{h}{\pi} V t, \quad t \text{ 满足: } z = \frac{h}{\pi} [\sqrt{t^2 - 1} + \cosh^{-1} t].$$

$$43. w = -\frac{VH}{\pi} \ln \frac{b^2 - t^2}{1 - t^2}, \quad \text{其中 } b = \frac{H}{h}.$$

$$t \text{ 满足: } z = \frac{H}{\pi} \left(\ln \frac{1+t}{1-t} - \frac{1}{b} \ln \frac{(b+t)}{(b-t)} \right).$$

$$44. w(z) = \frac{V(\pi - \alpha)}{\pi \alpha (1 - \alpha/z)^{\pi/(\pi - \alpha)} - 1}.$$

$$45. w(z) = V \sqrt{z^2 + l^2};$$

流线: $\sin[(\theta_1 + \theta_2)/2] = \text{常数};$

等势线: $\cos[(\theta_1 + \theta_2)/2] = \text{常数},$ 其中

$\theta_1 = \arctan[(y+l)/x], \theta_2 = \arctan[(y-l)/x]$

$$47. w(z) = V_- z + \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^0 q(\xi) \ln(z - \xi) d\xi,$$

$$\frac{dw(z)}{dz} = V_- + \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^0 \frac{q(\xi)}{z - \xi} d\xi, \text{ 其中 } q(x) = 2V_- \frac{dF}{dx}.$$

阻力、举力均为零.

$$48. (1) \text{ 在内筒上: } v_r = V_0 \cos\theta; \text{ 在外筒上: } v_r = 0.$$

$$(2) \varphi = \frac{r_0^2 V_0 \cos\theta}{r_0^2 - R_0^2} (r + R_0^2/r).$$

$$49. (1) \alpha = 30^\circ; (2) -1.732\rho V_0^2.$$

$$50. \alpha = 54.7^\circ.$$

$$51. F_x = 0, F_y = \rho U (2\pi a^2 u + \Gamma), \text{ 其中 } \Gamma \text{ 为任意常数.}$$

$$55. (1) v_i = -3\Gamma_0/16S; (2) v_i = 3\Gamma_0/8S.$$

$$56. \alpha_i = \frac{16W}{\rho v^2 \pi^3 l^2} \left(1 + \frac{\sqrt{\pi^2 l^2 + 64H^2}}{8H} \right).$$

$$58. \frac{dV}{dt} = \frac{(\rho_1 - \rho)}{(\rho_1 + \rho/2)} g.$$

$$59. R_x = -\rho \pi a^2 \frac{du}{dt}, R_y = 0;$$

$$(m + \rho \pi a^2) \frac{du}{dt} = F, m \text{—— 柱体质量,}$$

F ——在真空中受到的 x 方向的外力.

阻力为 0.

超星阅读器提醒您：
使用本产品
请尊重相关知识产权！

$$60. \quad p = p_{\infty} + \frac{3}{2} \rho \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \rho R \frac{d^2 R}{dt^2}.$$

请尊重相关知识产权!

第八章

1. $c = 15.05$ 米/秒; $T = 9.64$ 秒.
2. $\lambda = 64.05$ 米; $T = 6.41$ 秒.
3. $\lambda = 24.98$ 米; $c = 6.25$ 米/秒.
4. $K = V = (\rho - \rho') g \lambda a^2 / 4$, a 为波的振幅.

$$8. \quad (1) \quad c^2 = \frac{g(\rho - \rho')}{k(\rho + \rho')};$$

$$(2) \quad c = c_0 \left[1 - \frac{1}{6k^2} \frac{\rho h^2 h' + \rho' h'^2 h}{\rho h' + \rho' h} + O(k^4 h^2 h'^2) \right].$$

$$\text{其中 } c_0^2 = \frac{g(\rho - \rho')}{\rho/h + \rho'/h'};$$

$$(3) \quad c = c_0 \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\rho'}{\rho} h |k| + O(k^2 h^2) \right].$$

$$12. \quad c = \sqrt{gs/b}.$$

$$13. \quad c = 128 \text{厘米/秒}.$$

$$14. \quad c = 2.78 \text{米/秒}.$$

第九章

$$1. \quad (1) \quad u = -\frac{A_0}{2\mu} y^2 + \left(\frac{A_0 h}{2\mu} - \frac{U_1}{h} \right) y + U_1,$$

$$u_{\max} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(U_1 + \frac{U_1^2 \mu}{A_0 h^2} + \frac{A_0 h^2}{4\mu} \right) & (A_0 > 0), \\ U_1 & (A_0 < 0), \end{cases}$$

$$u_{\mp} = \frac{A_0}{12\mu} h^2 + \frac{U_1}{2}, \quad Q = \frac{A_0}{12\mu} h^3 + \frac{U_1}{2} h,$$

$$\tau = -A_0 y + \frac{A_0 h}{2} - \frac{\mu U_1}{h}, \quad \tau_{\text{壁}} = \frac{A_0 h}{2} - \frac{\mu U_1}{h}$$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

$$(2) u = -\frac{U_1}{h} y + U_1$$

$$(3) u = -\frac{A_0}{2\mu}(y^2 - hy), \quad \text{其中 } A_0 = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad x \text{ 轴与下板重合.}$$

$$2. \quad u = \frac{g \sin \alpha}{2\nu}(2hy - y^2), \quad u_{\text{max}} = \frac{gh^2 \sin \alpha}{2\nu}$$

$$u_{\text{平均}} = \frac{gh^2 \sin \alpha}{3\nu}, \quad Q = \frac{gh^3 \sin \alpha}{3\nu}$$

$\tau_{\text{壁}} = \rho gh \sin \alpha$, 其中取 x 轴与斜面重合.

$$3. \quad v_z = \frac{[p_0 - (p_L - \rho g L \cos \alpha)] R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

$$Q = \frac{\pi [p_0 - (p_L - \rho g L \cos \alpha)] R^4}{8\mu L}$$

$$4. \quad v_z = \frac{A_0}{4\mu} \left[(a^2 - r^2) + (a^2 - b^2) \frac{\ln(r/a)}{\ln(a/b)} \right]$$

其中 $A_0 = -\frac{\partial p}{\partial z}$.

$$\tau|_{r=a} = -\frac{A_0}{2} a + \frac{A_0(a^2 - b^2)}{4a \ln(a/b)}$$

$$\tau|_{r=b} = -\frac{A_0}{2} b + \frac{A_0(a^2 - b^2)}{4b \ln(a/b)}$$

$$5. \quad v_z = -\frac{A_0 a^2 b^2}{2\mu(a^2 + b^2)} \left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right]$$

$$v_{z, \text{平均}} = \frac{A_0 a^2 b^2}{4\mu(a^2 + b^2)}, \quad \text{其中 } A_0 = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$6. \quad \omega = \frac{a^2\omega_2 - b^2\omega_1}{a^2 - b^2} + \frac{a^2b^2(\omega_1 - \omega_2)}{(a^2 - b^2)r^2},$$

$$M = \frac{4\pi\mu a^2 b^2 (\omega_1 - \omega_2)}{a^2 - b^2}.$$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

$$7. \quad u = \frac{6U}{2h^2} \left[1 - \frac{2h_1 h_2}{h(h_1 + h_2)} \right] (y^2 - hy) + \frac{U}{h} (h - y),$$

$$p - p_0 = \frac{6\mu U x (a - x) (h_1 - h_2)}{a(h_1 + h_2)(h_1 - ax)^2},$$

$$Q = \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}, \quad Fy = \frac{6\mu U}{a^2} \left[\ln \frac{h_1}{h_2} - \frac{2(h_1 - h_2)}{h_1 + h_2} \right]$$

$$8. \quad M = -8\pi\mu a^3 \omega$$

$$9. \quad v_r = \frac{3Q}{4r} \frac{(\varphi_0^2 - \varphi^2)}{\varphi_0^3}, \quad p = \frac{3\mu Q(1 - 2\varphi^2)}{4r^2 \varphi_0^3}$$

$$10. \quad u = u_0 e^{-\sqrt{\frac{2n}{4\nu}} y} \cos\left(\sqrt{\frac{2n}{4\nu}} y - \pi t\right).$$

$$11. \quad \Omega = -\frac{\Gamma}{4\pi\nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}.$$

$$16. \quad l = 0.03dRe, \quad d \text{——圆管直径, } Re = \frac{dU}{\nu}.$$

$$17. \quad \begin{cases} \frac{\partial(ur_0)}{\partial x} + \frac{\partial(vr_0)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \end{cases}$$

$$18. \quad \frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{U(x)}{U_\infty} = \frac{\tau(x)}{\rho U_\infty^2}, \quad U_\infty^2 \frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{\partial}{\partial t}(U\delta^*) = \frac{\tau_w}{\rho}.$$

$$19. \quad h^2 = \frac{2\pi^2}{4 - \pi} \frac{\nu z}{U}, \quad c_f = 0.656 \frac{1}{\sqrt{Re}}, \quad Re \text{ 为雷诺数.}$$

上册勘误表

页	行	误	正
1	4—5	定义在此空间区域内的函数	定义了相应函数的空间区域
3	倒 8	非矢量的	非矢量线的
9	4	$\int_{M_n(L_n)}$	$\int_{M(L)}$
20	倒 5	$\Delta = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$	$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
28	倒 4	$[L(\Psi)]M$	$[L(\Psi)]_M$
36	12	平面六面体	平行六面体
46	7	$\frac{\partial a_2}{\partial q_2}$	$\frac{\partial a_2}{\partial q_1}$
47	1	Δa_2	$\Delta a_1 +$
57	16	$p_1, t_1, \dots, q_1, t_1, \dots, t_n$	$p_1, \lambda_1, \dots, q_1, s_1, \dots, s_n$
63	倒 9—倒 5	$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ 前的符号	-改+, +改-
64	4	$a_{ij}b_j = e_{ijk}b_j\omega_k$	$a_{ij}b_j = -e_{ijk}b_j\omega_k$
64	倒 1	$\lambda = \mu$	$\lambda \neq \mu$
67	4	$s_{11} = \mu$	$s_{11} = \lambda$
67	7	$3\lambda^2 + s_{22}^2$	$2\lambda^2 + (s_{22}s_{33} - s_{23}^2)$
67	9	由此立得	由此得 $(s_{22} - \lambda)^2 + s_{23}^2 = 0$, 因 s_{22}, s_{23}, λ 皆为实数, 推出
74	4	$H_{11} = H_{22} = \lambda$	$H_{11} = H_{22} = H_{33} = \lambda$
74	15, 倒 8	系 x_1	系统 x_1
89	13	其大小约为	其大小约为
89	17	表现为	表现为
90	15	粘性	粘性
101	3	$\frac{dz}{\omega(x, y, z, t)}$	$\frac{dz}{\omega(x, y, z, t)} = dt$
110	4, 6	两流体	而流体
112	倒 2	第一与第三式左端的 δr	$\delta r_1, \delta r_2$

续表

超星浏览器提醒您：
使用本复制品
即侵犯相关知识产权！

页	行	误	正
116	3	s_{12}	s_{21}
118	10, 11	s_{11}, S_{11}	s_{11}
131	倒2—倒1	p_{11}	p_{11}
131	倒13	p_{11}	p_{11}
132	4, 6	p_{11}	p_{11}
159	5	$\frac{\sigma}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)$	$\frac{\sigma}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)$
163	9, 11	克/米·秒	克/厘米·秒
196	倒8	γ 是表面张力	γ 是表面张力系数
209	5	(4.3.4)	(4.3.1)
210	3	圆心	球心
210	倒8	$-(\Omega \cdot \nabla)v$	$-\Omega(\nabla \cdot \sigma)$
211	5—6	引起转动惯量的改变	引起动量矩的改变
215	倒2	ρ	ρ'
216	10	+	-
216	倒7	+	-
216	倒6	全行	$-\frac{1}{\rho} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} (\delta x_l) \Omega_i$ $-\Omega_j \delta x_j = 0$
216	倒5	此即(4.6.2)式.	此即(4.6.2)式. 这里在(≈)时 已用到涡线的定义 $\delta r \times \Omega = 0$.
233	14	半无穷长涡丝对空间任一点	半无穷长涡丝对A点
252	3	x	+
269	倒3	$\frac{\rho}{r}$	$\frac{\rho}{r}$
270	倒10	大小箱	大水箱
283	倒9	$\frac{1}{2} M^2 \approx 0.1$	$\frac{1}{2} M^2 \approx 0.01$
287	倒7	S'	S_l
293	3	$-\int_{A \cup B}$	$-\int_{A \cup B}$
293	13	作用力最小	作用力最大
296	倒7	$p_2 = p_1 + \rho V_2(V_2 - V_1)$	$p_2 = p_1 - \rho V_2(V_2 - V_1)$
307	倒10	无旋, 不定常	无旋, 定常