

# 光学设计理论基础

(第二版)

王之江 著

科学出版社

1985

## 序 言

本书目的是总结和介绍我们对光学设计工作理论方面的观点和成果。

光学设计工作在光学工业中起着很重要的作用。在解放之前我国光学界的前辈已在这方面进行了工作并留下了一些成果。但由于当时社会条件的限制，光学工业根本不可能有发展的前途，光学设计工作当然也不可能得到发展。全国解放后，1952年中国科学院建立了仪器馆，即现在的光学精密机械研究所的前身。建所之初就在王大珩先生领导下成立了光学设计工作部门，并在他的指导下开始了这方面的工作。

随着国家光学事业的发展，在完成大量设计工作以及参考国外的理论和经验的基础上，我们的设计理论和方法逐渐形成了自己的系统。从我们所内的工作经验来看，它是比较准确而且方便合用的。本书的目的在于系统地介绍光学设计理论部分，具体设计方法将另写专书来论述。

本书中象差理论部分的基础是作者在1956年写的专著“光学设计方法和高级象差分析”（未发表）以及1958年的“光学设计训练班讲义”和其他一些报告。由于它们都是在仓促中写成的，同时因为缺少全局的考虑，所以显得零乱而难懂。本书不单希望将它们加以系统化，使之易于理解和使用；而且希望使理论本身得以完整化，以期为光学设计的原则考虑和具体方法提供方向和途径。本书的绝大部分结果都已为实际设计计算工作所肯定，也有部分新结果尚待实践校验从而使之达到较完善的地步。书中有很大一部分是尚未发表过的工作成果。由于上述这些原因，我们在此希望得到读者广泛的批评与指正。

本书的主要篇幅是关于象差理论方面的问题。我们首先导出了各种象差的单个准确表示式，其次导出它们之间的一般相互关系，然后是象差理论的一些特殊问题。大体上由第一章到第十章的内容属于这一范围。

第十一、十二章的内容在一般的光学设计和应用光学著作中很少涉及，考虑到它们的重要意义，书中作了较详细的讨论。第十一章中包括了近十年来尤其是1955—1958年期间发展起来并趋于成熟的光学传递函数方法。作者分析了一些已有的质量评价方法间的联系，并提出用低对比分辨能力作为标准，以解决大象差系统的象差公

差問題。质量评价的标准决定了具体設計的目的性,显然对設計工作是极端重要的。

第十二章可看作是广义的光学設計。光学整体設計这个部門看来尙未被光学工作者从感性認識概括成理性認識。但是,不从光学仪器的整体使用要求出发,会失去各个局部的发展目的和方向,光学設計是其局部之一。光学仪器各部分的联系物,在理論上是光学信息的傳遞問題,它是光学信息論討論的对象,而光学信息論則属于信息論的一个分支。信息論的主体是統計理論,它本身成一完整体系,而光学仪器的现状离統計方法还有不小的距离,因之本书对此几乎完全未作介紹而仅利用了它的一些結果,这也是由于信息論的一般理論对光学問題的一般考虑也完全合用之故。但在作具体考虑时当然要計及光学方面的可能性和特点,本书基本上仅涉及光学方面。从信息傳送的一般观点出发,对現代光学工程的情况作了分析后,可以看出发展是很不平衡的。对于这方面的发展作者提出了一些看法。

作者假定讀者已具有初步的光学設計知識,例如粗略讀过 A. E. Conrady 的“应用光学和光学設計”。在閱讀第十一、十二章时应具备物理光学、富利叶变换和信息論等方面的基礎知識。

本书是在集体工作的基础上产生的,对于本所光学設計部門的同事們謹致以衷心的謝意,尤其是薛鳴球同志为原稿整理工作花了不少精力,蔣筑英、王民强、李元康在定稿工作上給予了很大的帮助,林大鍵、喻燾、黄營生提出了不少宝贵的意見,在此一并致謝。

王之江

1962.8.

# 目 录

序 言 .....	iii
第一章 轴对称球面光学系统中的光线光路计算方法 .....	1
§ 1 概述 .....	1
§ 1.1 符号规则 .....	2
§ 2 空间光线计算 .....	3
§ 3 含轴面内光线光路计算 .....	5
§ 3.1 计算误差问题; 计算的可能错误及校对 .....	6
§ 3.2 平面计算和计算公式的通用性 .....	8
§ 3.3 近轴光线计算; 倍率; 象差 .....	10
§ 4 波面; 光程; 波象差; 波象差与几何象差的关系 .....	15
§ 4.1 几何光学的基本定律 .....	15
§ 4.2 波象差与几何象差的关系(I) .....	18
§ 4.3 波象差与几何象差的关系(II) .....	20
§ 4.4 因参考点移动而产生的波象差 .....	22
§ 5 光程计算 .....	23
§ 6 细光束焦点位置计算 .....	26
§ 7 矢量形式的折射定律 .....	29
§ 8 代数方法 .....	30
§ 8.1 平面; 校对 .....	32
§ 8.2 弧矢元光束 .....	33
§ 8.3 含轴面内光线 .....	34
§ 9 光线计算的初始值 .....	35
参考文献 .....	36
第二章 理想光学系统 .....	38
§ 1 高斯光学系统的物象关系 .....	38
§ 2 光阑和轴外光束晕暗, 投影和景相 .....	42
§ 3 高斯光学和结构尺寸中的长度问题 .....	45
§ 3.1 倍数 $100\times$ , 总长 200 的望远镜 .....	45
§ 3.2 倍数 $2000\times$ , 总长 200 的放大镜或显微镜 .....	46
§ 3.3 共轭距 1000, 工作距 100 的 $100\times$ 投影物镜 .....	47
§ 3.4 瞳孔距及工作距 .....	48



§ 4 高斯光学和结构尺寸中的直径问题 .....	49
§ 4.1 望远镜的倍数和孔径 .....	49
§ 4.2 显微物镜的倍数和数值孔径 .....	50
§ 4.3 通光孔径; 视场 .....	51
§ 4.4 转象系统和场镜 .....	53
§ 5 反射系统的杂光、孔径及视场 .....	55
§ 5.1 光路偏折的折反射系统 .....	58
§ 6 正象和光路转折 .....	61
§ 7 全反射棱镜的物象关系 .....	62
参考文献 .....	70
<b>第三章 球差、正弦条件 .....</b>	<b>71</b>
§ 1 象差的转面倍率; 球差的各种表示 .....	71
§ 1.1 球差的正负 .....	74
§ 2 初级球差 .....	75
§ 3 高级球差、本征高级球差 .....	78
§ 3.1 折射率和相对孔径 .....	79
§ 3.2 物距和相对孔径 .....	82
§ 4 衍生高级球差 .....	85
§ 5 为校正球差时光学系统应有的结构 .....	86
§ 6 相邻点波象差间的关系, 正弦条件及其他 .....	88
§ 7 同轴球面光学系统中的正弦条件 .....	92
§ 8 正弦差分布值 .....	94
§ 8.1 同轴球面系统中正弦差和光阑位置的关系 .....	96
§ 9 薄透镜理论 .....	98
§ 10 计算结果的图示和判断 .....	99
参考文献 .....	102
<b>第四章 轴外象差 .....</b>	<b>103</b>
§ 1 同轴球面系统的畸变表示式 .....	103
§ 2 初级畸变; 高级畸变; 畸变和物体位置、光阑位置的关系 .....	104
§ 2.1 同轴球面系统中畸变和物体位置的关系 .....	105
§ 2.2 单个球面的畸变和光阑位置的关系 .....	106
§ 3 细光束的聚焦特性 .....	108
§ 3.1 邻主光线高斯光学; 物体移动时象面弯曲的变化 .....	110
§ 4 同轴球面系统的象散 .....	111
§ 5 空间光线的象差分布 .....	115
§ 5.1 象差分布的分量表示 .....	116
§ 5.2 象面弯曲表示为各面贡献之和 .....	118
§ 6 初级象散、象面弯曲和畸变 .....	119

§ 7 高级象散和象面弯曲 .....	122
§ 7.1 薄透镜的高级象散和象面弯曲 .....	126
§ 8 为使轴外细光束成象理想时, 光学系统应有的结构 .....	126
§ 9 象散、象面弯曲和畸变的表示及评价 .....	128
§ 10 邻主光线波象差级数展开, 轴外初级球差和轴外初级彗差 .....	130
§ 11 轴外初级球差和轴外初级彗差的近似展开 .....	135
参考文献 .....	137
<b>第五章 色差 .....</b>	<b>138</b>
§ 1 光学材料 .....	138
§ 2 将色象差看作光程差 .....	140
§ 3 初级色差 .....	142
§ 3.1 分离薄透镜 .....	145
§ 4 二级光谱 .....	147
§ 5 讨论色差的光线光路方法, 色差图示——轴上点 .....	152
§ 6 用光线光路方法讨论轴外色差 .....	155
参考文献 .....	157
<b>第六章 象差的一般性质 .....</b>	<b>158</b>
§ 1 对称性和象差, 变数分离法, 规化条件 .....	158
§ 1.1 规化坐标 .....	162
§ 2 象差的几何意义和描写光束特性的方法 .....	163
§ 2.1 球差 .....	164
§ 2.2 轴外球差 .....	165
§ 2.3 畸变 .....	166
§ 2.4 彗差 .....	166
§ 2.5 轴外彗差 .....	168
§ 2.6 象散和象面弯曲 .....	169
§ 2.7 色差 .....	169
§ 3 光栏移动时的象差变化, 计算结果的图示和判断 .....	171
§ 3.1 计算结果的图解法 .....	173
§ 4 光栏象差与物面象差的关系 .....	177
§ 5 物面移动时的象差变化 .....	181
§ 6 初级色差 .....	184
§ 7 球面的初级象差 .....	185
§ 7.1 由球差表示式导出其他象差表示式——将轴外象差看作球差 .....	185
§ 7.2 由畸变表示式导出其他象差表示式——将子午象差看作畸变差异 .....	189
§ 7.3 薄透镜的初级象差 .....	189
§ 7.4 将球面的二级本征象差看作球差 .....	194
§ 8 衍生二级象差 .....	197

§ 9 用 Fermat 原理讨论高级象差的可能性 .....	199
参考文献 .....	200
<b>第七章 由象差确定光学系统结构 .....</b>	<b>201</b>
§ 1 引言; 初级象差公式组 .....	201
§ 1.1 象差系数和象差的关系 .....	201
§ 1.2 轴对称光学系统中象差系数间的相互关系 .....	202
§ 1.3 同轴球面光学系统中的象差系数表示式 .....	203
§ 1.4 一组贴合薄透镜的象差系数表示式和相互关系 .....	204
§ 2 由象差要求决定薄透镜焦距分配 .....	206
§ 3 象差和薄透镜弯曲( $P, W$ ) .....	208
§ 4 用薄透镜产生定值象差的可能性 .....	210
§ 4.1 单薄透镜 .....	210
§ 4.2 正负胶合双透镜 .....	213
§ 4.3 无光焦度胶合双透镜 .....	219
§ 4.4 无光焦度等折射率双薄透镜 .....	221
§ 4.5 两组定焦距薄透镜 .....	222
§ 5 薄透镜产生象差的可能性——对高级象差的考虑 .....	222
§ 5.1 胶合双透镜的 $P_0$ 和 $W^\infty$ 的限度 .....	222
§ 5.2 薄透镜象差的极值 .....	224
§ 5.3 双透镜象差的极值 .....	227
§ 5.4 胶合面或无光焦度双透镜的作用和限度 .....	228
§ 6 以厚透镜代替分离薄透镜 .....	229
§ 6.1 用厚透镜校正 $S_{IV}$ .....	230
§ 6.2 校正色差的厚透镜, 球差校正板 .....	237
§ 7 用厚透镜与薄透镜组合以校正象差 .....	239
§ 8 对称型 .....	243
§ 9 光学设计概论 .....	247
§ 9.1 校正象差的可能性 .....	248
§ 9.2 象差校正方案的确定 .....	251
§ 9.3 校正象差的结构的选择和有效参数 .....	254
§ 9.4 现代光学设计所达到的水平 .....	258
参考文献 .....	262
<b>第八章 轴对称非球面 .....</b>	<b>263</b>
§ 1 使用非球面的可能性 .....	263
§ 2 光线光路计算 .....	264
§ 2.1 曲面的参数表示 .....	264
§ 2.2 三角法计算子午光线光路 .....	266
§ 2.3 用代数方法计算空间光线 .....	267

§ 2.4 逐次接近法	268
§ 3 初级象差理论	269
§ 4 非球面的高级象差和由象差要求确定非球面面形	273
§ 5 用单个非球面准确校正球差	274
§ 6 用单个非球面准确校正象散	278
§ 7 用单个非球面校正子午光束象差	283
参考文献	285
<b>第九章 非轴对称非球面</b>	<b>286</b>
§ 1 对称性和象差的级数展开	286
§ 1.1 双曲率系统的高斯光学	289
§ 1.2 双曲率系统中象差之间的关系	290
§ 1.3 象差的几何意义	293
§ 2 同轴柱面系统的初级象差	294
§ 2.1 物体在无限远处时的象差	296
§ 3 柱面望远镜的象差	296
§ 3.1 圆柱面折射光线光路计算	296
§ 3.2 象差分布及校正方法	299
§ 3.3 一般的同轴柱面系统	300
§ 3.4 柱面望远镜的象差估值	300
§ 3.5 柱面望远镜的畸变	302
参考文献	303
<b>第十章 光学零件的制造和装配公差</b>	<b>304</b>
§ 1 引言	304
§ 2 单个因素变更时的直接影响	305
§ 3 衍生变化	308
§ 4 偏心系统的象差, 固定透镜的原则	310
§ 5 透镜系统公差确定	314
§ 6 棱镜	318
§ 7 局部误差和光洁度	320
参考文献	320
<b>第十一章 光学系统的质量评价</b>	<b>321</b>
§ 1 几何光学和光能传播的基本定律	321
§ 1.1 由 Maxwell 方程导出程函方程	322
§ 1.2 程函方程、Fermat 原理及折射定律	324
§ 1.3 由 Maxwell 方程导出 Huygens-Fresnel 原理	325
§ 2 光学系统形成的能量分布和质量判断	329
§ 2.1 理想波面的衍射图形	329
§ 2.2 有象差时的衍射图形	334

§ 2.3	Strehl 判断和小象差近似	344
§ 2.4	Rayleigh 判断, 图解法	352
§ 2.5	象差最佳校正方案的几何特征和公差几何值	362
§ 2.6	衍射图形的特征及质量判断; 分辨能力	365
§ 3	光学传递函数方法	368
§ 3.1	反应函数和分辨能力	371
§ 3.2	反应函数和中心点亮度	374
§ 3.3	反应函数和能量集中度	374
§ 4	光学系统的反应函数	376
§ 4.1	理想光学系统的反应函数; 通光孔形状的影响	379
§ 4.2	轴向离焦和象散的影响	382
§ 4.3	初级彗差	383
§ 4.4	球差	384
§ 5	质量评价的标准和光学系统象差的公差	385
§ 5.1	质量指标问题	385
§ 5.2	象差公差问题	387
§ 5.3	几何光学的反应函数和能量集中度	388
§ 5.4	低对比分辨能力判断	390
§ 6	部分相干照明时的成象质量评价	399
§ 6.1	von Cittert-Zernike 定理	399
§ 6.2	部分相干照明时的成象	402
§ 6.2.1	聚光镜的作用和等效光源的概念	402
§ 6.2.2	象的形成	404
§ 6.3	弱物体的衬度传递	406
§ 6.4	其他评价方法	410
§ 6.4.1	点分辨率	410
§ 6.4.2	正弦物体的表现传递函数	411
§ 6.4.3	直边的象分布、锐度和表现传递函数	412
参考文献		416
<b>第十二章</b>	<b>电子计算机和光学设计</b>	<b>419</b>
§ 1	概述	419
§ 2	高斯光学和初级象差	420
§ 3	光束的初值	421
§ 4	光路计算	423
§ 4.1	曲面的形式	423
§ 4.2	光线在曲面上折射	425
§ 4.3	细光束焦点	427
§ 5	计算结果处理	427

---

§ 6 象差分布值 .....	431
§ 7 非轴对称光学系统 .....	433
§ 8 光学传递函数(OTF)计算 .....	435
参考文献 .....	438
<b>第十三章 光学自动设计 .....</b>	<b>439</b>
§ 1 概述 .....	439
§ 2 评价函数;象差的规化 .....	440
§ 3 最小二乘法;变量的度规 .....	443
§ 4 阻尼和步长 .....	446
§ 5 边值问题 .....	447
§ 6 结组和保值 .....	447
§ 7 自动平衡程序的现状 .....	448
参考文献 .....	448
<b>第十四章 光学仪器的光学整体设计 .....</b>	<b>450</b>
§ 1 概述 .....	450
§ 2 光度性质 .....	452
§ 2.1 亮度 .....	454
§ 2.2 大光管的传递,象面上各点的照度 .....	455
§ 2.3 象差对照度的影响 .....	457
§ 2.4 光度学和相干性 .....	459
§ 3 成象性质 .....	460
§ 3.1 接收器和光学系统联用时的问题 .....	461
§ 3.2 光学系统对仪器成象特性的影响 .....	463
§ 4 噪音和背景 .....	464
§ 5 一些光学技术特征数据 .....	465
§ 5.1 光源 .....	465
§ 5.2 大气;自适应技术 .....	466
§ 5.3 光学薄膜 .....	468
§ 5.4 人眼和其他接收器 .....	468
§ 6 光学信息处理 .....	472
§ 7 综合评价 .....	474
§ 8 一个例子 .....	475
参考文献 .....	477

# 第一章

## 轴对称球面光学系统中的光线光路计算方法

### §1 概 述

光线光路计算问题是光学设计的基本问题之一，其目的在于确定光线经光学系统后的准确位置。光学设计的目的是使经过光学系统的光束具有预定的特性，因此在设计过程中常须作大量的光路计算，这就要花费大量的劳动。为提高设计的效率，用最少量的劳动得出大量的成果，可以从下列几个方面着手。其一是象差理论，按现在的理论水平可以预见由一点发出的光束内部各光线的相互关系和由各点发出的各光束的相互关系，从而可以从少量的光线计算确定整个光束的结构特性。根据象差理论还可以通过简单的计算来预言光束结构的大致性质（初级象差系数计算）。但是理论至今还不能帮助我们由简单的计算确定光束的准确结构特性，因之还不能避免光线光路计算。其二是设计方案或设计路线，在作具体设计工作时，这是更重要的东西。当所选择的设计路线不良时就会走过多的弯路而使所有具体设计方法上的改进变得毫无价值，使计算工作量大大增加。我们认为设计工作是否能够高速度进行基本上由它决定。其三是计算方法的改进。非常明显，当光路计算还不能避免的时候，不好的计算方法是浪费劳动的因素之一。

由于计算是须要大量地、经常地进行的，为使效率提高和减少错误，计算最好按一定的格式进行。因此是否要求在不同的条件下使用不同的格式就成为评断方法优劣的一个标准，即(A)通用性，亦即所用计算格式能否在比较广泛的条件下使用。除此之外，计算方法的优劣还有下列标准。(B)准确性，即某量含有的小误差是否会引起另一量的显著误差，例如由小角度的余弦决定正弦之值时。(C)取得有效的中间数值是否方便，这是由于常须以一种计算的量作为另一种计算的基础，并由于某些量能够方便地反映象差特性之故；由于这一点，计算方法必须形成一个系统而不能孤立地看待一种计算方法。(D)计算本身的繁简度，即须要几次计算才能得出所须结果，

是否须要查表(如三角函数表),是否须用计算机;假若须查表的话,函数表的改进也是计算方法改进的途径之一。

如上所述,计算方法的优劣须从各方面加以考察,新的计算方法常须较长时间的考验才能加以肯定。加以计算员熟练于某种方法时,效率自然比新的不熟练的方法为高,习惯也使计算方法不易改变。目前新的方法不断出现和发展<sup>[1,2]</sup>,其中有一些方法并不符合我们的上述标准,有历史的计算部门一般还是使用老的方法,例如苏联<sup>[3]</sup>。

随着电子计算机的出现和在光学设计中的应用,计算方法又作了相应的发展以适应电子计算机的特性<sup>[4]</sup>。

光线计算的问题可归结为:

1. 选择几个量以确定空间的点线位置(坐标选择);
2. 用折射定律计算出折射后的坐标(折射);
3. 求出相对下一折射面的坐标(转面)。

可见,为使计算迅速而正确,坐标的选择是很重要的,坐标的选择——尽可能使用折射或转面不变量为坐标,可使折射和转面的过程简化。另外,折射定律的形式也影响到计算的速度,随折射定律形式的不同,光线计算可分为三角法和代数法两大类。下面只是评述几种有代表性的计算方法。

关于作具体计算时应该小心和注意之处,Conrady 的叙述是值得推荐的<sup>[5]</sup>。

### § 1.1 符号规则

我们下面在导出公式时总是遵循一定的正负号规则,这样就能保证在一定状况下得到的公式在任何条件下均保持同一形式。符号规则所规定的是: 1. 量的起算位置; 2. 以怎样的量为正量。对长度来说,总是由坐标原点(球心或球面顶点)起算,其正向则依轴的指向。在我们后面的全部公式中都取光线行进的方向为  $X$  轴的正向,这是一个重要的规定。公式中的间距  $t$  和  $d$  的起算点不同,  $t$  是后面球心到前面的球心的距离,  $d$  是前面顶点到后面顶点的距离。非轴向线段的长度正负另作规定。角的正负要麻烦些,本来最合理的方案是按解析几何的规定,但为顾及历史上已有的习惯,还是因袭了旧有的规定。即光线或其投影与坐标轴的夹角由坐标轴起算,由坐标轴的正向观察时顺时针方向为正。空间角(二线段之一不在坐标面内)之正负另作规定。折射角  $I$  由光线起算而不是由法线起算。

对于含有反射面的光学系统,上述规则须作下列补充:



1. 反射面的物空间折射率与象空间折射率之比为“ $-1$ ”, 即  $n' = -n$ ;

2. 注意空间折射率的连续性(见图 1.1);

3. 由于反射后光路方向变更, 象距以及同一个半径的符号都须变号, 而厚度则不变号. 这种算法是不大方便的, 比较方便的方式是将厚度变号而半径及象距(反射后下一面的物距)均不变号, 亦即坐标轴的方向永按初始入射的方向, 除每经反射一次就将间距符号变更一次外, 就仍可按普通符号规则进行计算.

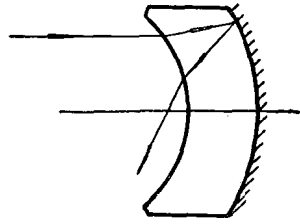


图 1.1

### § 2 空间光线计算

从前多采用对数表进行光路计算工作, 运用的折射定律也表示为三角函数形式, 其他几何关系也都表述为三角函数公式组. 例如 Seidel(1866) 和 Kerber(1896) 的计算方法都属这一类<sup>[2,3]</sup>. 这些方法曾长期为国外主要设计部门采用. 当采用电子计算机作光路计算时, 采用三角函数比开方费时, 因此不再采用这一类方法. 对此将在第十二章再作仔细讨论.

虽然如此, 采用三角函数表达的光路几何关系以及由此导出的结论和方法, 仍然是很重要的. 这是由于它将一些关系表达得更清楚而简洁, 更便于作理论分析之故. 下面导出一种空间光线计算的公式组, 这组关系完全不是为了真正用它作计算(为此, 须作很大简约), 而是为了用它作分析和讨论.

为了计算光路, 首先要选择一组适当的量以决定光线的位置. 例如取光线和直角坐标系的一个坐标面的交点坐标及其方向余弦, 也可以用光线和二坐标面的交点坐标.

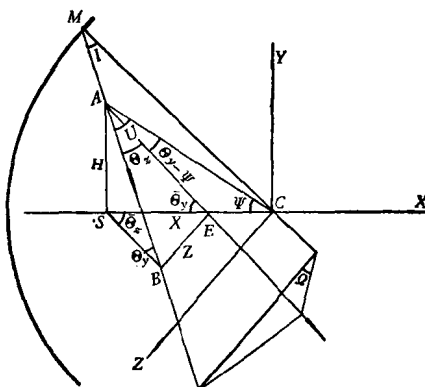


图 1.2

在图 1.2 中取右手直角坐标系  $OXYZ$ , 坐标系原点  $O$  处在折射球面的球心.  $X$  轴是光轴, 入射光线和坐标面交于  $A, B$  二点, 和球面交于  $M$  点. 现取  $A, B$  二点的坐标作为决定光线位置的坐标, 光路计算的目的就在算出折射后的相应坐标值.

$$\begin{cases} A \text{ 点坐标: } (X, H, 0) \\ B \text{ 点坐标: } (X_0, 0, Z). \end{cases} \quad (1)$$

若将  $A$  点看作物点, 则它的坐标反映物点象差. 可将  $B$  点视作光阑边缘点, 它

的坐标反映光栏象差。当光线很靠近光轴时 (§ 3.4), 更可以把这条空间光线在两坐标面上的投影  $AE$  和  $BS$  看作是含轴面内的光线, 将空间光线看作是含轴面内光线的复合, 前者的位置由后者完全决定。由于存在象差, 实际空间光线的投影与含轴面内光线经折射后就不再重合。

光线和坐标面夹角为  $\Theta_y, \Theta_z$ , 故  $\sin\Theta_y$  和  $\sin\Theta_z$  就是光线的方向余弦。再取  $A$  点对球心的幅角  $\Psi$ ,  $B$  点幅角  $\Psi_p$ , 折射面  $ABC$  和坐标面  $OXZ$  夹角  $\Omega$  及相应的角  $\Omega_p$  作为计算中的参量。  $\Psi$  和  $\Omega$  都是折射不变量。由于

$$\tan \Omega = \frac{\tan \Psi_p}{\sin \Psi}, \quad (2)$$

$$\tan \Omega_p = \frac{\tan \Psi}{\sin \Psi_p}. \quad (3)$$

而  $\Psi, \Psi_p$  则由光线坐标  $H, Z, X, X_p$  算出:

$$\tan \Psi = -\frac{H}{X}, \quad (4)$$

$$\tan \Psi_p = -\frac{Z}{X_p}. \quad (5)$$

光线和半径  $OM$  夹角  $I$  就是光线入射角, 由折射定律有

$$n' \sin I' = n \sin I, \quad (6)$$

带撇的量都是折射后的相应量。联线  $OA$  作为辅助轴, 光线和它夹角  $U$ , 则由正弦定理就有:

$$\frac{\sin I}{G} = \frac{\sin U}{r}, \quad (7)$$

式中  $r$  是球面半径,  $G$  是  $OA$  之长:

$$G = \frac{X}{\cos \Psi}, \quad (8)$$

故有

$$\sin I = \frac{X \sin U}{r \cos \Psi}. \quad (9)$$

而角  $U$  可以由前一面的角  $U'$  算出。由于

$$\sin \Omega = \frac{\sin \Theta_z}{\sin U}, \quad (10)$$

而  $\Theta_z$  在转面时不变, 故有

$$(\sin U' \sin \Omega)_i = (\sin \Theta_z)_i = (\sin \Theta_z)_{i+1} = (\sin U \sin \Omega)_{i+1}. \quad (11)$$

对于另一方向余弦  $\sin \Theta_y$  也可以有类似关系式, 故可得

$$\sin U = \frac{\sin \Omega_{-1}}{\sin \Omega} \sin U'_{-1}, \quad (12)$$

$$\sin U_p = \frac{\sin \Omega_{p,-1}}{\sin \Omega_p} \sin U'_{p,-1}, \quad (13)$$

式中用脚标“-1”标志前一面的量。这样就得到了全部公式组是：

$$\tan \Psi = -\frac{H}{X}, \quad \tan \Psi_p = -\frac{Z}{X_p}, \quad \text{求 } \Psi, \Psi_p \quad (14a)$$

$$\tan \Omega = \frac{\tan \Psi_p}{\sin \Psi}, \quad \tan \Omega_p = \frac{\tan \Psi'}{\sin \Psi'}, \quad \text{求 } \Omega, \Omega_p \quad (14b)$$

$$\sin U = \frac{\sin \Omega_{-1}}{\sin \Omega} \sin U'_{-1}, \quad \sin U_p = \frac{\sin \Omega_{p,-1}}{\sin \Omega_p} \sin U'_{p,-1}, \quad \text{求 } U, U_p \quad (14c)$$

$$\frac{X}{r \cos \Psi} \sin U = \sin I, \quad \frac{X_p}{r \cos \Psi_p} \sin U_p = \sin I, \quad \text{求 } I \quad (14d)$$

$$n' \sin I' = n \sin I, \quad \text{求 } I' \quad (14e)$$

$$I + U = I' + U', \quad I + U_p = I' + U'_p, \quad \text{求 } U', U'_p \quad (14f)$$

$$\frac{X'}{r \cos \Psi'} \sin U' = \sin I', \quad \frac{X'_p}{r \cos \Psi'_p} \sin U'_p = \sin I', \quad \text{求 } X', X'_p \quad (14g)$$

$$\tan \Psi = -\frac{H'}{X'}, \quad \tan \Psi_p = -\frac{Z}{X'_p}, \quad \text{求 } H', Z' \quad (14h)$$

下一面的  $X, X_p$  则由坐标原点移动量——相邻面球心距而算出。

这组公式在推导中注意运用折射不变量和转面不变量，公式组表示了两组坐标的相似性。Kerber 曾经导出一个对折射和转面都不变的量——Kerber 不变量：

$$n' H' \sin \Theta'_z = n H \sin \Theta_z. \quad (14i)$$

由(14a, h, d, g)有：

$$\frac{H \sin U}{r \cos \Psi \sin I} = \frac{H}{X} = \frac{H'}{X'} = \frac{H' \sin U'}{r \cos \Psi' \sin I'}$$

再由(11)，(14e)除去  $I$  和  $U$  即得。这就有

$$n_1 H_1 \sin \Theta_{z,1} = n'_k H'_k \sin \Theta_{z,k}. \quad (15)$$

对于  $Z \sin \Theta_y$  也有相应的关系，这种关系可以作为计算的校对。它也是拉格朗日不变量在具体条件下的精确化。

### § 3 含轴面内光线光路计算

上面几节所讨论的是几种可能的一般光线三角算法。对于某一定坐标系而言，须四个坐标方能确定一条光线的位置，但处于一定平面内的光线则只须两个坐标即足以定位。此时，光线的计算问题要简单得多。当光线经过光学系统光轴时就是这种情况；此时折射后的光线仍在入射面内，即仍通过光轴，计算公式可由公式组(14)

求极限得到。

设光线在  $XZ$  面内, 即  $H=0$ , 于是  $\Psi=0$ ,  $\Omega=90^\circ$ ,  $\sin U'_{-1}=\sin U$ 。因此, 公式组(14)的一半就成为已知  $X, U$  算出  $X', U'$  的公式组:

$$\left. \begin{aligned} \frac{X}{r} \sin U &= \sin I, & \text{求 } I & \quad (a) \\ n' \sin I' &= n \sin I, & \text{求 } I' & \quad (b) \\ I+U &= I'+U', & \text{求 } U' & \quad (c) \\ \frac{X'}{r} \sin U' &= \sin I', & \text{求 } X' & \quad (d) \\ X_1 &= X'+t, & \text{求 } X_1 & \quad (e) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

若截距(即光线与光轴的交点到折射面顶点的距离)以  $L$  表示, 二顶点间距以  $d$  表示, 则

$$\begin{cases} X=L-r, \\ t=r-r_1-d, \\ L_1=L'-d. \end{cases} \quad (17)$$

这就是广泛使用的公式组, 虽然有些书上采用了不同的表示形式。这组公式是最常用的, 因为根据象差理论绝大部分光束结构的特性可由含轴面内的光束(即轴上点发出的光束和由轴外点发出的子午光束)情况导出。由于这种计算之大量应用, 使这种计算方法受到更大的注意和改进。下面几节就以此为中心, 一般地讨论三角算法的几个方面。

### § 3.1 计算误差问题; 计算的可能错误及校对

用一定有效数字的表进行计算时(如三角函数表和计算机, 对数表和三角函数对数表), 表的有效数字是一定的, 例如五位或八位, 而计算的过程是误差累积的过程, 累积的后果必然使多次运算后所得结果的有效数字减少, 例如经过十个面折射后有效数字仅四位或七位。由此可见, 如何从所要求的结果精度去决定计算应该用的位数是必须考虑的问题。

另一方面, 计算方法的不完善可以使有效数字在一次计算后就大大减少。我们知道, 乘除法是不会使有效数字变更的, 加减法则完全可能——二大数相加减得出小数时。在(16)式中这种可能性有二, 即(16c)和(16e)两个步骤。若(16c)使得出的  $U'$  比  $U$  小一数量级时即不准; (16e)使  $X_1$  比  $X'$  小一数量级时即不准。

当  $t$  比  $X_1$  小一数量级时, 前一问题实际并不引起严重错误, 这是由于它对下一

面的  $I_1$  所引起的相对误差有下列关系:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta \sin I_1}{\sin I_1} &= \frac{\Delta(X_1 \sin U')}{X_1 \sin U'} = \frac{\Delta(X' \sin U')}{X_1 \sin U'} + \frac{t \Delta \sin U'}{X_1 \sin U'} \\ &= \frac{\Delta \sin I'}{\sin I'} \cdot \frac{X'}{X_1} + \frac{t}{X_1} \cdot \frac{\Delta \sin U'}{\sin U'}.\end{aligned}$$

在一般光线计算中  $t$  确实较小,当然也有时候( $t$  和  $X_1$  属同一数量级)会由此而使有效数字减少。

后一问题早在 Seidel 就已注意到了,他为此提出了另一种改进的计算方法。这个问题产生的原因有二,其一是  $r \gg r_1$ ,即大半径折射面算出的结果使后面计算不能

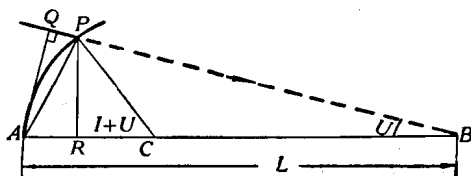


图 1.3

准确,这是 Seidel 计算法和 Conrady 的所谓  $PA$  校对的目的。原因之二是  $d$  与  $L'$  属同一数量级,由于这并不影响到尾数不准,因此是不重要的。下面引述 Conrady 的  $PA$  校对法<sup>[6]</sup>。

由图 1.3,  $AQ = L \sin U$ , 而折射点  $P$  到顶点  $A$  之长  $PA = QA \sec \angle QAP$ , 而

$$\angle QAP + \angle PAC + \angle QBA = 90^\circ,$$

$$\angle PAC = 90^\circ - \frac{I+U}{2}, \quad \angle QBA = U,$$

故

$$\angle QAP = \frac{I-U}{2},$$

故

$$PA = L \sin U \cdot \sec \frac{I-U}{2}. \quad (18)$$

$PA$  是折射过程的不变量,因此用下式即可由乘除法得到  $L'$  而避免减法:

$$L' \sin U' \sec \frac{I'-U'}{2} = PA = L \sin U \sec \frac{I-U}{2}. \quad (19)$$

A. E. Conrady 为避免由于计算错误而使以后的连续计算成为浪费,建议将有关量都再用另一方法算出,作为计算的校对以增加计算的可靠性。按我们的计算经验,这种方式是好的。似乎一人计算并自行校对比为增加可靠性而用两人算同一光线所需的工作量少些。当每次计算都用(19)式校对后还余下的可能错误是:初始数字错误( $r$ ,  $n$ ,  $d$  等写错); (16b)式乘错(相当于  $n$  值错误);和(16e)式加错,因此只须这几处在计算时加以注意即能保证计算之可靠。

对于前述空间光线算法,也可使用(19)式作为计算的校对,但由此而得到的可

靠性不够。(14d)算出的  $I$  相等可作为由光线坐标计算辅助轴坐标(或其反向计算)的可靠校对。这样一来,一般空间光线计算的可靠性和准确度即可达到子午光线同样的程度。

R. E. Hopkins<sup>[6]</sup>注意到公式(16)中所用的光线坐标  $X'$  实际是多余的,由

$$\begin{aligned}\frac{X'}{r} \sin U' &= \sin I, \\ X' + t &= X_1, \quad U_1 = U', \\ \frac{X_1}{r_1} \sin U_1 &= \sin I_1,\end{aligned}$$

消去  $X'$ , 即得:

$$\sin I_1 = \frac{r}{r_1} \sin I' + \frac{t}{r_1} \sin U'. \quad (20)$$

### § 3.2 平面计算和计算公式的通用性

前已提及,上述所有计算在大半径面上都是有缺陷的,用  $PA$  法虽然作了补救,但并不彻底,在平面上( $r = \infty$ )还必须再另用一套公式:

$$\begin{cases} n' \sin U' = n \sin U, \\ L' \tan U' = L \tan U. \end{cases} \quad (21)$$

以球心为坐标原点时导出的公式组也必然引起这样的后果。T. Smith 导出的另一个计算方法可以消除这个缺陷<sup>[7]</sup>,他的方法还具有其他简便之处。我们下面重新导出这套公式。

由于

$$\begin{aligned}L' \sin U' - L \sin U &= PA \left[ \cos \frac{1}{2} (I' - U') - \cos \frac{1}{2} (I - U) \right] \\ &= 2PA \sin \frac{1}{2} (I' - U) \sin \frac{1}{2} (I - I') \\ &= L \sin U \cdot \frac{(\sin I' - \sin U)(\sin I - \sin I')}{2 \cos \frac{1}{2} (I - U) \cos \frac{1}{2} (I' + U) \cos \frac{1}{2} (I + I')}, \quad (22)\end{aligned}$$

用这个表示式就可以由  $I, I', U$  算出  $L' \sin U'$ , 避免了使用(21)式,并消除了大半径的特殊性,但还要查三角函数表<sup>1)</sup>。为避免使用三角函数表须作下列运算。

1) 这里所谓的“三角函数表”是指由角度查其对应的三角函数值(或反之)的表。由一种三角函数查另一种三角函数的表不算“三角函数表”。

将(22)式的分母作下列运算:

$$\begin{aligned}
 & 2\cos\frac{1}{2}(I-I'+I'-U)\cos\frac{1}{2}(I'+U)\cos\frac{1}{2}(I+I') \\
 &= 2\left[\cos\frac{1}{2}(I-I')\cos\frac{1}{2}(I'-U) - \sin\frac{1}{2}(I-I')\sin\frac{1}{2}(I'-U)\right] \cdot \\
 & \quad \cos\frac{1}{2}(I+I')\cos\frac{1}{2}(I'+U) \\
 &= \frac{1}{2}(\cos I + \cos I')(\cos I' + \cos U) - \frac{1}{2}(\sin I - \sin I')(\sin I' - \sin U). \quad (23)
 \end{aligned}$$

或者是

$$\begin{aligned}
 & 2\cos\frac{1}{2}(I+I'-I'-U)\cos\frac{1}{2}(I+I')\cos\frac{1}{2}(I'+U) \\
 &= 2\cos^2\frac{1}{2}(I+I')\cos^2\frac{1}{2}(I'+U) + 2\sin\frac{1}{2}(I+I')\sin\frac{1}{2}(I'+U) \cdot \\
 & \quad \cos\frac{1}{2}(I+I')\cos\frac{1}{2}(I'+U) \\
 &= \frac{1}{2}[1 + \cos(I+I') + \cos(I'+U) + \cos(I+I')\cos(I'+U) \\
 & \quad + \sin(I+I')\sin(I'+U)] \\
 &= \frac{1}{2}[1 + \cos(I+I') + \cos(I'+U) + \cos(I-U)] \\
 &= \frac{1}{2}[1 + \cos I \cos I' - \sin I \sin I' + \cos I' \cos U - \sin I' \sin U \\
 & \quad + \cos I \cos U + \sin I \sin U] \\
 &= \frac{1}{4}[(\sin I + \sin U - \sin I')^2 + (\cos I + \cos I' + \cos U)^2 - 1]. \quad (24)
 \end{aligned}$$

最后一个表示式是 T. Smith 原来用的。

用表示式(23)或(24)计算(22)式分母时只须由正弦查出余弦即可,再由于(22)式是小量,计算四位即可得出  $L' \sin U'$  五位有效数字,因之这个表可以是非常小的。

单算出  $L' \sin U'$  还不够,进一步由下式算出  $\sin U'$ :

$$L' \sin U' - L \sin U = r(\sin I' + \sin U') - r(\sin I + \sin U). \quad (25)$$

既然不用三角函数表就不必再用三角函数符号,将  $\sin I$ ,  $\sin U$  写作  $I$ ,  $U$ ;  $\cos I = \sqrt{1 - \sin^2 I}$ ,  $\cos U = \sqrt{1 - \sin^2 U}$  则写作草体  $\mathcal{I}$ ,  $\mathcal{U}$ , 此时一个计算循环的公式组是:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{LU}{r} - U, & \text{求 } I & \quad (a) \\
 I' &= \frac{n}{n'} I, & \text{求 } I' & \quad (b) \\
 L'U' - LU &= \frac{LU(I' - U)(I - I')}{\frac{1}{2}(\mathcal{J}' + \mathcal{U})(\mathcal{J} + \mathcal{J}') - \frac{1}{2}(I' - U)(I - I')}, & \text{求 } L'U' & \quad (c) \\
 U' &= I + U - I' + \frac{L'U' - LU}{r}, & \text{求 } U' & \quad (d) \\
 L_1U_1 &= L'U' - dU', & \text{求 } L_1U_1 & \quad (e)
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

算法(26)具有显著优点:首先是通用;其次是不用三角函数表而只须精度不高的小表;另外,在任何情况下不会降低准确度(普通三角函数表在小角度时有效数字就减少,因之当计算中出现的都是小角度时有效数字将小于表的名义位数);以及计算过程简单;象差标志  $L'U' - LU$  在计算中已算出等等。

这个方法的实质是 Kerber 球差分布值计算的改良,对于这个表示式我们在讨论球差时还将论及。对于含轴面内光线计算而言可认为这种方法是较完善的,但是它不能作为空间光线计算的中段,或者说空间光线的三角算法要达到(26)式的程度尚须作些工作。这个问题至今尚未解决,现有方法都不很理想。

至于所谓“校对”,其本质就是把最后结果用另一方法重行算出,两方法之差异越大则校对越有效,例如为校对(26)之可靠性可作下述计算:

$$\begin{aligned}
 \sin U' &= \sin(I + U - I') = \cos U \cos I' \sin I + \cos I \cos I' \sin U \\
 &\quad - \cos I \cos U \sin I' + \sin I \sin U \sin I',
 \end{aligned}
 \tag{26*}$$

这就可以保证乘  $n$  减  $d$  外的所有计算不发生错误。这种校对要求  $\cos I$  有准确值,因之并不方便,更方便的校对将在以后讨论球差时述及。

### § 3.3 近轴光线计算; 倍率; 象差

当光线折射点高度  $PA$  很低(与半径相比而言),也就是说光线折射时相对孔径  $\left(\frac{PA}{r}\right)$  很小,并且光线和光轴的夹角  $U$  也很小时,那么从上述各公式组可看出此光线在整个折射过程中都永远和法线及光轴夹小角,当小到一定限度时  $\sin \theta$  和  $\tan \theta$  就几乎等于其角度弧度数  $\theta$ ,而  $\cos \theta$  则几乎等于 1(例如五位有效数字相同或八位有效数字相同),满足这种要求的区域称为近轴区域,在这种区域内折射的光线光路计算显然要容易得多,这种光线称为近轴光线,我们将从光线光路计算的观点来讨论这个问题。



首先看含轴面内的光线光路计算。由(26)式,若 $U$ 很小,且 $\frac{LU}{r}$ 很小(即相对孔径很小)则由(26a)式, $I$ 也很小,因之由(26b), $I'$ 也很小,于是(26c)式就可写作 $L'U' - LU = 0$ ,而(26d)可写作 $I + U - I' = U'$ 。例如 $U$ 和 $\frac{LU}{r}$ 之绝对值小于 $10^{-3}$ ,则 $\frac{L'U' - LU}{LU}$ 小于 $10^{-6}$ ,亦即按 $L'U' - LU = 0$ 算出的 $L'U'$ 之相对误差仅 $10^{-6}$ ,就是说有五位精确度,同样地,(4)式近似写作 $I + U = I' + U'$ 时,算出 $U$ 的误差数量级是 $10^{-9}$ ,相对误差也是 $10^{-6}$ 。由此可见相对误差是随角度之平方减小的。当角度小到一定程度后(26)式就可写作:

$$\left. \begin{aligned} i + u &= \frac{lu}{r}, & (a) \\ n'i' &= ni, & (b) \\ l'u' &= lu, & (c) \\ u' &= i + u - i', & (d) \\ l_1 u_1 &= l'u' - du'. & (e) \end{aligned} \right\} (27)$$

这个关系式也可由(16)式,假设角度很小而得到。由此可见,由一点发出的含轴面内近轴光线折射后相交于一点(有共同的 $l'$ ),与 $u$ 角的大小无关。当我们取 $u$ 等于任一大数而仍按(27)式计算折射后的光线位置时,除所有的角均按比例增大为大数外,截距仍不变。因之并不须要在计算时真给 $u$ 等于 $10^{-3}$ 这样小的值而可给以任意值,一般可令它等于实际光线的 $\sin U$ 值,以便于比较实际光线与近轴光线折射情况的差别。

既然(27)式的计算结果与 $u$ 的大小无关,当然就可以在公式组中消去 $u, i, i', u'$ ,即直接得出 $l'$ 和 $l$ 的关系:

$$\frac{n'}{l'} = \frac{n' - n}{r} + \frac{n}{l}. \quad (27^*)$$

按此式计算当然比按(27)式计算方便得多,但是为计算初级象差以及为与实际光线光路比较,它是不方便的,也就是说,它不反映象差特征。

为考虑近轴空间光线问题,令(14)式中空间光线坐标 $X, X_p, H, Z$ 中 $H, Z$ 均为小量,此时以小写字母 $x, x_p, \eta, z$ 表示光线坐标(图1.4),此光线在二坐标面上投影的坐标为:

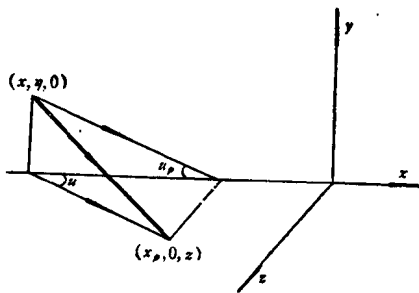


图 1.4

及

$$\left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} x &= l - r, \\ u &= \frac{z}{x - x_p}; \end{aligned} \right\} \\ \left. \begin{aligned} x_p &= l_p - r, \\ u_p &= \frac{\eta}{x_p - x} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

的两条光线,我们可以将它们当作近轴光线,且按(27)或(28)式算出折射和转面后的坐标。问题是:这样算出的结果是否与按(14)式算出的折射后光线投影一致,为使两种结果一致又须满足怎样的条件;按照导出(27)式的条件,只须 $u$ ,  $u_p$ ,  $\frac{x}{r}u$ ,  $\frac{x}{r}u_p$ 均为小量,就可接近轴光线计算公式(27)算出折射后光线位置,现在是否仍然只须满足这种条件。

为此考察按(14)式算出的 $X$ ,  $X_p$ 与按(27)式算出的差别。由于 $H$ ,  $Z$ 与 $X - X_p$ 比较是小量( $u$ ,  $u_p$ 是小量)但 $X$ 与 $X_p$ 中也仍可能有一个是小量,因之,幅角 $\Psi$ ,  $\Psi_p$ 中只能设有一个是小量而不能一般认为都是小量,由于对称性,随便设那一个是小量都可以。现设 $\Psi$ 是小量,而 $\Psi_p > \Psi$ ,则由(14b)式:

$$|\tan \Omega| = \left| \frac{\sin \Psi_p}{\sin \Psi} \cdot \frac{1}{\cos \Psi_p} \right| > 1,$$

因此

$$\sin \Omega > 0.7.$$

再由图 1.2

$$\left. \begin{aligned} \sin \Theta_z &= \cos \Theta_y \sin \bar{\Theta}_z, \\ \sin \Theta_y &= \cos \Theta_z \sin \bar{\Theta}_y. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

令 $\sin \bar{\Theta}_z = u$ ,  $\sin \bar{\Theta}_y = u_p$ 均为小量,故 $\Theta_z$ ,  $\Theta_y$ 为同级小量,并均等于 $u$ 和 $u_p$ ,因此由(10)式和(14d)式

$$\sin I = \frac{X \sin \Theta_z}{r} \cdot \frac{1}{\sin \Omega \cos \Psi}$$

必与 $u$ ,  $u_p$ 是同级小量( $\sin \Omega > 0.7$ ,  $\Psi$ 是小量)。这样一来,用(14)式由 $x$ 计算 $x'$ 的过程与按(27)式计算的差别仅在所有角度均乘以不大的常数 $1/\sin \Omega \cos \Psi \cos \Theta_y$ (绝对值小于1.4)。因之得出的 $x'$ 和 $u'$ 与(27)式得出者一致。

对于近轴空间光线而言,上列讨论表明按(14)式计算时,坐标 $\eta$ 折射后的值可由Kerber不变量的近轴表示算出。

$$n'\eta'u' = n\eta u, \quad (30)$$

这就是一般熟知的Lagrange-Helmholz不变量。由(27)式计算时所得结果与此相

符, 现证明如下.

由(28)

$$nr\mu = n(x_p - x)u\mu_p = n(l_p - l)u\mu_p = n[(l_p - r) - (l - r)]u\mu_p, \quad (31)$$

由(27a), 上式即可写成:

$$nr\mu = nr i_p u - nr i u_p,$$

再由(27b)和(27d)将  $i, u, i_p, u_p$  变换为  $i', u', i'_p, u'_p$  得:

$$nr\mu = n'r'i'_p(i' + u' - i) - n'r'i'(i'_p + u'_p - i_p) = n'r'i'_p u' - n'r'i' u'_p = n'\eta' u'. \quad (32)$$

这样一来, 我们已经证明  $u, u_p, \frac{xu}{r}, \frac{x_p u_p}{r}$  为一级小量时, 近轴空间光线计算得出的三个坐标与按(27)式所得者相同, 差别为二级以上的小量. 剩下的问题仅是(14)式算出的  $x'_p$  是否一定与(27)式所得一致, 假若一致, 那么问题就完全解决了.

我们已经证明  $\sin I$  是一级小量, 若  $\frac{X_p}{r \cos \Psi_p}$  不是一级小量, 则  $u_p$  为一级小量, 此时按(14)式算出的  $X'_p$  就也等于(27)式算出的, 因此近轴空间光线光路按准确公式(14)算出的结果与将它的投影看作近轴光线而按(27)式算出的结果完全一致.

但若  $\frac{X_p}{r \cos \Psi_p}$  是一级小量(此时  $X_p$  为一级小量), 于是  $\sin \Omega$  为小量而  $\sin U_p$  并非小量, 此时(14)式算出的  $X'_p$  是:

$$X'_p = \frac{n \sin U_p}{n' \sin U'_p} X_p = X_p \frac{n \sin U_p}{n [\sin U_p \cos(I - I') + \cos U_p \sin(I - I')]}. \quad (33)$$

因  $\sin I$  为一级小量, 故略去二级小量后的  $X'_p$  是:

$$X'_p = \frac{n \sin U_p \cdot X_p}{n' [\sin U_p + \sin(I - I') \cos U_p]}.$$

由(10)式将  $U_p$  表示成  $\sin \Theta_y$ , 由(29)式,  $\sin \Theta_y$  和  $\sin U_p = \sin \bar{\Theta}_y$  之差是可以略去的二级小量, 此时上式成为:

$$\begin{aligned} X'_p &= \frac{n u_p}{n' [u_p + \sin(I - I') \sin \Omega \cos u_p]} X_p, \\ &= \frac{n u_p}{n' \left[ u_p + (i_p - i'_p) \frac{\cos U_p}{\cos \Psi_p} \right]} X_p, \end{aligned} \quad (34)$$

由此可见与(27)式算出的  $x'_p = \frac{n u_p}{n' (u_p + i_p - i'_p)} x_p$  之差是

$$x'_p - X'_p = x'_p \frac{(i_p - i'_p) \left( \frac{\cos U_p}{\cos \Psi_p} - 1 \right)}{u_p + (i_p - i'_p) \frac{\cos U_p}{\cos \Psi_p}}. \quad (35)$$

因为

$$\begin{cases} x_p u_p = r i_p, \\ \frac{X_p}{\cos U_p} = \sqrt{X^2 + Z^2}. \end{cases} \quad (36)$$

故上式可变换为:

$$x'_p - X'_p = x_p \frac{\left(1 - \frac{n}{n'}\right) (\sqrt{x_p^2 + z^2} \cos U_p - x_p)}{r + \left(1 - \frac{n}{n'}\right) \sqrt{x_p^2 + z^2} \cos U_p}. \quad (37)$$

由于  $x_p$  是一级小量, 故上列差数为二级小量. 这就是说, 虽然  $U_p$  可能很大, 以致按 (14) 式看来与近轴公式 (27) 毫不相同, 但最终结果还是只差二级小量.

这就是从光线光路计算的观点证明了高斯光学区域的存在. 它表明: 当光线位置足够靠近光轴时, 由一点发出的所有光线均相交于一点 ( $x$  相同则  $x'$  相同,  $\eta$  相同则  $\eta'$  相同, 其误差数量级是二级的). 近轴点所发出的任一空间光线可看作是二含轴面内光线的复合, 此二光线在任一折射空间均与空间光线的投影重合.

这也就是理想光学系统的实例.

同轴光学系统成象的一般理论是由高斯首先解决的, 这就是现在通称为高斯光学的理想光学系统理论, 实质上理想光学系统理论是一个纯粹的几何理论, 可以在毫不涉及光学定律的条件下建立起来, 在几何光学著述中一般都作了这种叙述和证明, 例如 [3], [5], [9]. 光学定律在这里只是起了限制其特性的作用, 例如肯定两方焦距之比与两方折射率之比相等; 肯定了均匀媒质中不可能构成到处理想的大孔径大视场的理想光学系统; 理想情况仅限于一定的物平面或者限于狭窄的近轴区域. 高斯光学问题用光线光路观点讨论是很方便的, 现以线段的理想倍率为例加以说明.

根据 (30) 式 Lagrange-Helmholtz 不变量, 垂轴线段  $\eta$  与其象高  $\eta'$  之比为:

$$\frac{\eta'}{\eta} = \frac{n u}{n' u'}. \quad (38)$$

而对一次折射而言,  $l u = l' u'$ , 故 (38) 又可写作

$$\frac{\eta'}{\eta} = \frac{n l'}{n' l}. \quad (39)$$

这就是垂轴倍率的可用表示. 至于角倍率, 则也由 (30) 式直接给出:

$$\frac{u'}{u} = \frac{n \eta}{n' \eta'},$$

即角倍率和垂轴倍率之乘积为折射率之比.

对于轴向线段的倍率, 将 (28) 式中的  $\eta$  表示式代入 (39) 式即可得到:

$$n(x_p - x)u u_p = n'(x'_p - x')u' u'_p$$

或

$$\frac{x'_p - x'}{x_p - x} = \frac{n u u_p}{n' u' u'_p}, \quad (40)$$

这就是有限长度的轴向线段倍率的可用表示式。由此可见，轴向线段的倍率不单与此线段一端的光线光路有关，而且与另一端的光线光路有关，它等于两个角倍率的乘积。当线段无限短时，两端几乎重合，于是：

$$\frac{\Delta x'}{\Delta x} = \frac{n u^2}{n' u'^2}, \quad (41)$$

这就是无限短的轴向线段倍率表示。

从这里我们也就可以作出这样的判断：当光线离轴距离并非小量时，此光线折射后一般不会到达(38)式所指定的位置，它与理想位置有歧离，这就是象差。这也就是全部光学设计主要讨论的对象。

我们上面讨论的结果表明：当光线离轴不远时，象差是二级小量。

当  $\eta=0$  时(轴上点)，与孔径平方成正比的象差称为球差，它使轴上点成象不清楚。

当  $\eta$  很小而  $Z$  不小时(小视场大孔径)，与孔径平方成正比的象差称为彗差，它使近轴点比轴上点更不清楚。

当  $Z$  很小而  $H$ (读作  $\eta$ )不小时，与  $H^2$  正比的象差称为象散和象面弯曲，它们使轴外点的象点位置偏离高斯光学预言的位置。在 § 6 中将讨论它们的计算法。

#### § 4 波面; 光程; 波象差; 波象差与几何象差的关系

采用波面的概念是讨论几何象差的另一途径，此间不由折射定律和光线光路计算的观点出发而由另一几何光学基本原理——Fermat 原理和 Malus 定律出发。它们之间的关系就类如力学中的 Hamilton 原理与牛顿三定律的关系。应用 Fermat 原理，更易于得出一些与光学系统结构无关的普遍原则。

用光程观点考察几何光学问题也是 Hamilton 开始的<sup>[10]</sup>。Bruns<sup>[11]</sup> 又独立找出了这种方法并用以研究象差理论，他称光程函数为程函(Eikonal, 象函数)。在程函理论的发展中 T. Smith<sup>[12]</sup> 和 M. Herzberger<sup>[13]</sup> 的工作起了显著作用。

##### § 4.1 几何光学的基本定律

下面先由折射定律导出 Malus 定律和 Fermat 原理(更一般的叙述可参看第十

一章 § 1), 说明光程差观点与折射定律的等效性, 而后导出两者之间的一些相互关系.

由某一点发出一光线束, 与此光束正交的曲面即称为波面. 故当光线都相交于一点时(同心光束), 对应的波面就是以此点为中心的球面. 若光束经折射后变形, 不再相交于一点, 相应的波面也就不再是球面, 此波面与球面之歧离(二曲面间距)称为波象差或简称波差. 若光束的几何象差已知, 即光束结构已知, 就能够从纯粹的几何

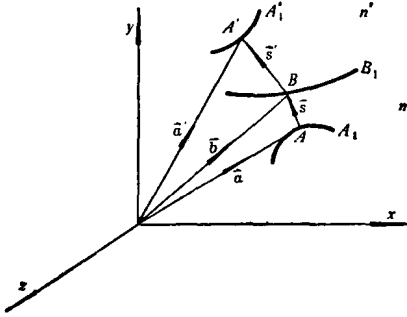


图 1.5

关系求出此时的波象差.

Malus 定律指出了另一种找出波面的途径. 它指出: 折射前波面上任一点到折射后波面上相应点间的光路光程都是相等的. 光程即光路在媒质内的长度  $l$  与媒质折射率  $n$  的乘积. 现在来证明这一点.

图 1.5 中  $BB_1$  是折射面;  $AA_1$  是入射波面, 与入射光线正交;  $A'A_1$  是折射后波面, 与折射后光束正交. 折射面两方的媒质折射率为  $n$  和  $n'$ . 设光线  $AB$  之长为  $l$ , 光线方向单位矢量为  $\vec{s}$ ,  $A$  之矢径为  $\vec{a}$ , 折射点  $B$  的矢径为  $\vec{b}$ , 对应的折射光线量均加撇号. 则

$$\vec{b} = \vec{a} + l\vec{s} = \vec{s}' + l'\vec{s}' \quad (42)$$

将上式微分后与  $\vec{s}$  或  $\vec{s}'$  作标积, 由于  $(\vec{s})^2 = 1$ ,  $\vec{s} \cdot d\vec{s} = 0$  及  $\vec{s}$  与曲面  $AA_1$  正交, 故  $\vec{s} \cdot d\vec{a} = 0$ , 因此:

$$\vec{s} \cdot d\vec{b} = \vec{s} \cdot d\vec{a} + l\vec{s} \cdot d\vec{s} + (\vec{s})^2 dl = dl, \quad (43)$$

及

$$\vec{s}' \cdot d\vec{b} = dl'. \quad (44)$$

由折射定律, 光线在折射面上的投影之比等于折射率之比, 即

$$\frac{\vec{s} \cdot d\vec{b}}{\vec{s}' \cdot d\vec{b}} = \frac{n'}{n}. \quad (45)$$

因此

$$n'dl' - ndl = 0, \quad (46)$$

或

$$d(n'l' - nl) = 0, \quad (47)$$

即

$$n'l' - nl = \text{常数}. \quad (48)$$

这就是所需证明的.

Fermat 原理可由 Malus 定律导出. 下面用简单的折射情形作为例子加以说明. 图 1.6 中设  $S$  为分隔折射率为  $n$  和  $n'$  的媒质的界面, 光线  $P_1M$  经此面折射后通过

$P_2$  点. 用任意的折线  $P_1RP_2$  连接  $P_1$  和  $P_2$  点, 并经  $R$  点作波面  $RN$  与光线  $P_1N$  正交. 经  $M$  点作折射波面  $MOQ$ . 按 Malus 原理, 这样的波面是存在的, 它与  $MP_2$  正交. 作辅助光线  $RQ$ , 它是波面  $MOQ$  的法线.

作波面后我们把  $P_1$  和  $P_2$  之间的光路分为三部分:  $P_1N$  和  $P_1R$ ;  $NM$  和  $RO$ ;  $MP_2$  和  $OP_2$ . 设各截线间的夹角  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  ( $\angle ORQ$ ) 及  $\Phi_3$  均为一级无限小, 则我们可以将弧  $RN$  和  $OM$  当作直线.

由三角形  $P_1RN$  得:

$$\overline{P_1R} - \overline{P_1N} \doteq 2\overline{P_1N} \sin^2 \frac{\Phi_1}{2} \doteq \frac{1}{2} \overline{P_1N} \Phi_1^2. \quad (49)$$

$RQ$  是当光线在第一媒质中通过  $NM$  所用之时间内, 在第二媒质中通过的路程长度; 因此, 两线段的光程相等 (Malus 原理) 即:

$$n\overline{NM} = n'\overline{RO}.$$

由三角形  $RQO$  得:

$$\overline{RQ} \doteq \frac{1}{2} \overline{RO} \Phi_2^2,$$

故

$$n'\overline{RO} - n\overline{NM} \doteq \frac{1}{2} n'\overline{RO} \Phi_2^2. \quad (50)$$

最后, 由三角形  $OMP_2$  得:

$$n'\overline{OP_2} - n'\overline{MP_2} \doteq \frac{1}{2} n'\overline{MP_2} \Phi_3^2. \quad (50a)$$

把上列三个结果相加即得:

$$(n\overline{P_1R} + n'\overline{RP_2}) - (n\overline{P_1M} + n'\overline{MP_2}) \doteq \frac{1}{2} \sum_1^3 l_i \Phi_i^2, \quad (51)$$

其中  $l_i$  为实际的光路中各段之光程,  $\Phi_i$  为实际路程与可能路程的各段间的夹角. 于是光线实际路程的光程与几何上可能的路线之光程差为二级小量, 即在所有无限接近的可能路线中, 实际光路的光程为极值.

显然, 上述讨论可以应用到光线通过若干媒质的任意复合情形, 因而到此可认为已证明了 Fermat 原理可由 Malus 定律导出.

几何光学基本定律除上述的几种表述形式之外, 还可以表述成另一种不十分普遍的形式, 这种形式对于考虑某些问题是特别方便的.

在同轴光学系统的近轴区域, 我们已经知道存在一个对整个光学系统不变的不

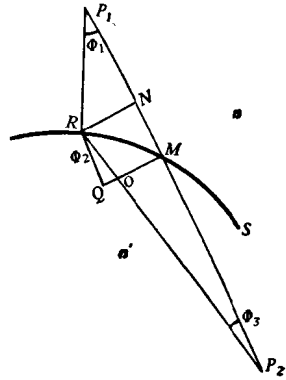


图 1.6

变量——Lagrange 不变量；它表明当轴上一定点所发出的光线与轴的夹角  $u$  发生变化时，垂轴线段长度必随之而变。实际上这个不变量有更为基本的意义。

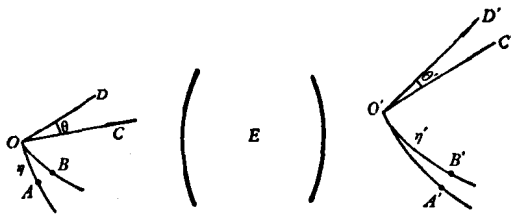


图 1.6(a)

可以证明，它是 Fermat 原理的一种具体表述，它是普遍有效的。图 1.6(a) 中，由  $O$  点发出的细光束经光学系统  $E$  后成象为  $O'$ ，通过  $O$  点的相邻波面

各以光线  $OD$ ， $OC$  为法线。设波面上两小线段  $OA$ ， $OB$  的长度相等，以  $\eta$  表示；经光学系统后成为象空间波面上小线段  $O'A'$ ， $O'B'$ ，长为  $\eta'$ 。由 Malus 定律知光程  $AB$  和  $A'B'$  必相等。光程  $AB$  可表示为  $\eta$  与两波面夹角  $\theta$ （即光线  $OD$ ， $OC$  之夹角）之积，由此即得 Lagrange 不变量：

$$n\eta\theta = [AB] = [A'B'] = n'\eta'\theta'. \quad (52)$$

综上所述，几何光学的基本定律可表述为下列几种形式：

1. 折射定律和反射定律；
2. Malus 定律；
3. Fermat 原理；
4. Lagrange 不变量。

当我们考虑光能量传播问题时，最粗略的要求就是遵守几何光学定律。随问题的性质不同而选择不同的定律表述方法常可使结论易于得到。

#### § 4.2 波象差与几何象差的关系(I)

根据 Malus 原理，算出光线光程，即可知道折射后波面形状，即得出波象差。但为将这种结果和光线光路计算所得的几何象差结合起来得出完整的概念，还须要知道波象差与几何象差的关系，下面来导出这种关系。

既然波面和光线的关系是一个曲面与其法线间的关系，故得出波面和光束几何位置的准确关系是完全可能的<sup>[44]</sup>，但是它所需的繁复计算将两者的物理关联淹没了。在象差讨论中最重要的当然是两种象差之间的关系。几何象差由理想象点起算，表示实际光线位置与理想要求之歧离；波象差由理想波面起算，表示实际波面与球面的差异。理想波面可以是以理想象点为中心的任一球面。当几何象差起算位置（参考点）变更时，起算波象差的参考波面也随之变更。下面导出几个关系，它们都便于作近似计算。



首先导出轴对称波象差和轴向象差(球差)间的关系. 对于轴对称的波面来说, 由于对称性, 波面的法线一定与对称轴相交; 因此为表征其几何象差, 只须用这个交点的截距就够了; 而为考察波象差也只须考察波面的一个截面就行了. 这个截面应当是包含对称轴的, 如图 1.7 所示.  $OX$  为波面的对称轴(一般也就是光学系统的光轴, 但并不必须是光轴),  $O$  是光阑中心, 实际波面  $OA'$  上任一点  $A'$  的法线(即光线)与轴相交于  $B'$  点. 取任一点  $B$  作为参考点, 则距离  $BB'$  就是实际光线的轴向几何象差, 以  $LA$  表示. 以参考点  $B$  为中心的球面就是参考波面, 它也就是以  $B$  为参考点时的理想波面. 光线  $A'B'$  与理想波面  $OA$  交于  $A$  点, 距离  $AA'$  乘以此空间中媒质的折射率  $n$  后即为波象差, 以  $W$  表示.  $A, B$  连线为球面半径,  $AB$  与  $AB'$  两线夹角为  $\delta$ , 当  $LA$  不太大时有:

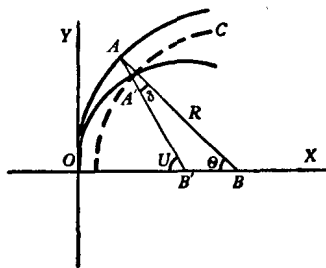


图 1.7

式(53)中  $\theta$  是  $AB$  和轴的夹角,  $R$  是理想波面半径,  $AB, AB'$  各为理想波面与实际波面的法线, 故角  $\theta$  也就是两波面在  $A'$  处的夹角, 这个波面间夹角可以由下述考虑得出: 以  $B$  点为中心通过  $A'$  点再作一球面  $A'C$ ,  $A'C$  与面  $OA$  间为等光程, 且二面相互平行, 故角  $\delta$  也就是  $OA'$  与  $A'C$  夹角, 由此可见:

$$\delta = \frac{LA \sin \theta}{R}, \quad (53)$$

由(53), (54)二式:

$$\delta = \frac{1}{n} \cdot \frac{dW}{R d\theta}. \quad (54)$$

$$dW = nLA \sin \theta d\theta = -nLA d \cos \theta, \quad (55)$$

这就是所求的波差  $W$  与几何象差  $LA$  之间的关系. 这种推导方法直观而简捷, 但不易看出这个公式具有的准确度及其误差, 为此下面用解析法重作一次推导.

仍如图 1.7, 设参考球面上点的坐标为  $X, Y$ , 实际波面上点的坐标是  $X', Y'$ , 则由于法线和波面垂直, 故有:

$$\begin{cases} \cos U dX' + \sin U dY' = 0, \\ \cos \theta dX + \sin \theta dY = 0, \end{cases} \quad (56)$$

其中

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{R-X}{R}, & \cos U = \frac{R-X-LA}{r}, \\ \sin \theta = \frac{-Y}{R}, & \sin U = \frac{-Y}{r}, \end{cases} \quad (57)$$

$r$  是光线与参考面交点  $A$  到  $B'$  点的距离  $\overline{AB'}$ ,  $R$  是参考球面半径,  $\overline{AB} = \overline{OB}$ . 波象

差  $W = n\overline{AA'}$ , 因而

$$\begin{cases} W \cos U = n(X' - X), \\ W \sin U = n(Y' - Y). \end{cases}$$

将这两式微分得:

$$\begin{cases} -W \sin U dU + \cos U dW = n dX' - n dX, \\ W \cos U dU + \sin U dW = n dY' - n dY. \end{cases} \quad (58)$$

前一式乘以  $\cos U$ , 后一式乘以  $\sin U$  后相加, 再由于关系式(56)将  $dX'$ ,  $dY'$  等消去并简化后得:

$$dW = -(n \cos U dX + n \sin U dY), \quad (59)$$

$$= -\frac{n}{r} LA dX. \quad (60)$$

由(57)式再将  $X$  用标准角  $\Theta$  表示:

$$dW = -\frac{nR}{r} LA d \cos \Theta = \frac{nR \sin \Theta}{r} LA d\Theta = n \sin U LA d\Theta, \quad (61)$$

即

$$\begin{cases} nLA \sin U = \frac{dW}{d\Theta}, & (a) \\ W = \int_0^\Theta nLA \sin U d\Theta, & (b) \end{cases} \quad (62)$$

或近似地写作(忽视角  $U$  和标准角  $\Theta$  的差别):

$$\begin{cases} LA = \frac{2}{n} \cdot \frac{dW}{d(\sin^2 U)}, & (a) \\ W = \frac{n}{2} \int_0^{\sin U} LA d(\sin^2 U). & (b) \end{cases} \quad (63)$$

当  $\sin U$  很小时进一步近似地写作:

$$LA = \frac{2}{n} \cdot \frac{dW}{d(u^2)}, \quad (64a)$$

$$W = \frac{n}{2} \int_0^u LA d(u^2). \quad (64b)$$

为将(64)式左右两方都写成无量纲的因次, 以规化坐标  $y = u/u_0$ , 即孔径角与最大孔径角之比代替  $u$ , 则(64a)可写作:

$$nu_0^2 LA = 2 \frac{dW}{d(y^2)}. \quad (64c)$$

### § 4.3 波象差与几何象差的关系(II)

更为一般的波面的法线, 即更为一般的光线束, 已不能如上述那样用一个量来表

示它的几何象差了; 为描写这个光束, 我们用光线与某一平面(即理想象面或称参考象面)的交点距某一定点(即理想象点或称参考象点)的坐标  $TA_y$  和  $TA_z$  来表征, 称之为垂轴象差. 如图 1.8.

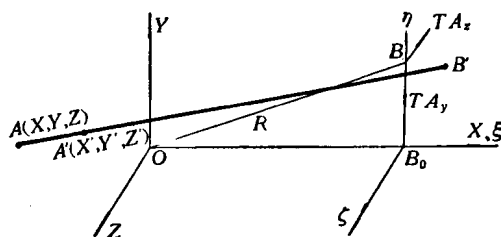


图 1.8

取光阑中心  $O$  与某一点  $B_0$  的连线作为  $OX$  轴, 分别以  $O$  和  $B_0$  点为原点作相互平行的光阑和象面两右手直角坐标系  $OXYZ$ ,  $B_0\xi\eta\zeta$ . 点  $A(X, Y, Z)$

与  $A'(X', Y', Z')$  各为通过光阑中心  $O$  的理想波面与实际波面上的点, 距离  $AA'$  乘折射率  $n$  后即为波象差.  $OB$  为理想主光线, 它通过我们选定的理想象点(参考点)  $B$ ,  $OB$  之长以  $R$  表示. 通过  $A'$  点的实际光线  $A'B'$  之方向余弦是  $\cos\alpha$ ,  $\cos\beta$ ,  $\cos\gamma$ ,  $B'$  是实际光线与  $B_0\xi\zeta$  坐标平面的交点, 故参考球面方程式为:

$$(X - R_0)^2 + (Y - H)^2 + Z^2 = R^2, \quad (65)$$

式中  $R_0 = OB_0$ ,  $H = B_0B$ . 实际波面方程式为:

$$F(X', Y', Z') = 0. \quad (66)$$

由 (65), (66) 式微分得:

$$\begin{cases} (X - R_0)dX + (Y - H)dY + Z dZ = 0, \\ \cos\alpha dX' + \cos\beta dY' + \cos\gamma dZ' = 0. \end{cases} \quad (67)$$

再由于波象差在三方面的投影为:

$$\begin{cases} n(X' - X) = W \cos\alpha, \\ n(Y' - Y) = W \cos\beta, \\ n(Z' - Z) = W \cos\gamma. \end{cases} \quad (68)$$

微分后得:

$$\begin{cases} n(dX' - dX) = \cos\alpha dW - W \sin\alpha d\alpha, \\ n(dY' - dY) = \cos\beta dW - W \sin\beta d\beta, \\ n(dZ' - dZ) = \cos\gamma dW - W \sin\gamma d\gamma. \end{cases}$$

上列三式各乘以  $\cos\alpha$ ,  $\cos\beta$ ,  $\cos\gamma$  后相加即得:

$$\begin{aligned} n(\cos\alpha dX' + \cos\beta dY' + \cos\gamma dZ') - n(\cos\alpha dX + \cos\beta dY + \cos\gamma dZ) \\ = dW + \frac{1}{2} W d(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma). \end{aligned}$$

由 (67) 式及方向余弦平方和恒等于 1, 而得

$$dW = -n(\cos\alpha dX + \cos\beta dY + \cos\gamma dZ), \quad (69)$$

由于方向余弦可以表示为

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{R_0 - X}{r}, \\ \cos \beta = \frac{H - T A_y - Y}{r}, \\ \cos \gamma = \frac{-T A_z - Z}{r}. \end{cases} \quad (70)$$

式中  $r = A'B'$ , 以之代入(69)式并计及(67)式, 即得:

$$dW = \frac{n}{r} (T A_y dY + T A_z dZ), \quad (71)$$

亦即

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial Y} = \frac{n}{r} T A_y, \\ \frac{\partial W}{\partial Z} = \frac{n}{r} T A_z. \end{cases} \quad (72)$$

与(62)式相似. 为用(71), (72)式由波象差求几何象差或反过来从几何象差求波象差, 可将  $r$  取其近似值  $R$ , 将  $r$  看作常数, 并将  $YZ$  看作是光线与出瞳交点的坐标.

将(71), (72)二式中的  $Y, Z$  除以光栏最大孔径  $y_0$ , 并将结果写作  $y, z$ , 再因  $\frac{y_0}{r} = u_0$ , 故二式成为:

$$dW = nu_0 T A_y dy + nu_0 T A_z dz, \quad (71a)$$

及

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial y} = nu_0 T A_y, \\ \frac{\partial W}{\partial z} = nu_0 T A_z. \end{cases} \quad (72a)$$

#### § 4.4 因参考点移动而产生的波象差

在上两节导出波象差与几何象差的关系时, 参考点是任意取定的, 只要它既是波象差起算的参考球面中心, 又是几何象差的起算点就行; 当参考点变更时, 几何象差的变化就如坐标原点移动一样, 是简单的; 波象差的变化则稍复杂.

波象差因参考点移动而发生的变化量也就是原来的参考球面和新的参考球面之间的间距, 亦即将原参考球面看作实际波面, 新参考球面看作理想波面时的波象差. 因之完全可以用前两节的公式加以上述限制就得到现在所需的结果. 当参考点沿波面的对称轴作轴向位移  $\Delta L$  时, (62b)中的  $LA$  现在不是  $\Theta$  的函数而简单地就是位移量

$\Delta L$ , 且  $U = \Theta$ , 故有:

$$\begin{aligned}\Delta W &= \Delta L \int_0^\Theta n \sin \Theta d\Theta, \\ &= n\Delta L(1 - \cos \Theta), \\ &= 2n\Delta L \sin^2 \frac{\Theta}{2},\end{aligned}\quad (72b)$$

$$\doteq \frac{1}{2} n\Theta^2 \Delta L. \quad (72c)$$

当参考点在  $Y$  轴方向作垂轴位移  $\Delta H$  时, (71) 式中相当的  $TA_y = \Delta H$ ,  $TA_z = 0$ ,  $r$  是常数 (即原参考球面半径), 故积分后就得到坐标  $Y$  处的波面因参考点移动而发生的波象差变化:

$$\begin{aligned}\Delta W &= \int_0^y \frac{n}{r} \Delta H dY, \\ &= \frac{nY}{r} \Delta H.\end{aligned}\quad (72d)$$

再如图 1.9, 将坐标  $Y$  写作极坐标, 即:

$$Y = r \sin \Theta \cos \Psi,$$

则上式成为:

$$\Delta W = n \sin \Theta \cos \Psi \Delta H. \quad (72e)$$

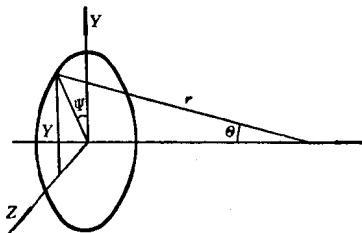


图 1.9

## § 5 光程计算

有时候常须根据含轴面内光线光路计算结果作一些其他计算, 以求不再算光线就能更多地了解光学系统特性。这些计算中有光程计算 (尤其是为计算光程的色差别); 象差分布数值计算; 细光束焦点位置计算; 初级象差分布值计算等等。关于象差计算问题我们将在讨论象差理论的各章中叙述。这一节和下一节先分别叙述光程计算和细光束焦点位置计算。

由光线光路计算就可得出几何象差之值。由几何象差与波象差间关系就可以积分得出波象差亦即光程差。因此一般为使计算单一化起见, 不大喜欢直接计算光程差。但作了光程计算就可以少算光线; 另外, 光程的色差别的计算 (所谓  $d-D$  法) 是计算色差的最简捷的方法。因此光程计算的方便性也应是评判光线光路计算法的优劣标准之一。

一般很少计算空间光线光程, 这是由象差理论的结果决定的 (见第六章)。

下面所叙述的基本上是 A. E. Conrady<sup>[5]</sup> 的方法, 只是为了不查三角函数表 (多

用计算机运算)而作了些变换。

光程长度就是光线光路长度与所在媒质折射率的乘积, 折射率是已知的, 问题只在计算光路的长度  $D$ 。由图 1.10(a) 可见:

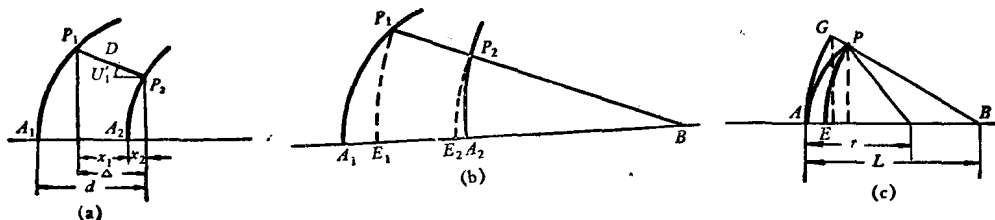


图 1.10

$$D = \frac{\Delta}{\cos U_1} = \frac{1}{\cos U_1} (d + x_2 - x_1), \quad (73)$$

$$= \frac{1}{\cos U_1} \left( d + \frac{P_1 A_1^2}{2r_1} - \frac{P_2 A_2^2}{2r_2} \right), \quad (74)$$

故当光线计算中已采用  $PA$  校对法时, 为计算长度  $D$  只须查出  $\cos U_1$  即可很快算出。当未作  $PA$  校对时, 矢高  $x$  也可以从下式算出(参考图 1.3)

$$\begin{aligned} x &= AC - RC = r - r \cos(I + U) = 2r \sin^2 \frac{1}{2}(I + U), \\ &= r(1 - \cos I \cos U + \sin I \sin U). \end{aligned} \quad (75)$$

(75)式在  $r$  很大时会有较大的计算误差。为此, 可以由(17)式导出另一种表示, 由于

$$\frac{x}{PA} = \frac{PA}{2r},$$

故

$$x = \frac{PA^2}{2r} = \frac{(L \sin U)^2}{r(1 + \cos(I - U))}. \quad (75a)$$

对于用电子计算机进行光路计算, 将公式(75)改为(75a)是很必要的。

光程长度的另一种算法属微差算法, 这是由于我们一般并不须要知道长度的绝对数值, 而只须算出二不同光路的光程差数即可。我们一般算出实际长度  $D$  和近轴长度  $d$  之差, 即  $d - D$ 。

为此, 如图 1.10(b) 那样作出与  $B$  点同心的同心圆, 可见  $d - D$  即为二小量  $A_1 E_1, A_2 E_2$  之和:

$$d - D = A_1 E_1 - A_2 E_2 \quad (76)$$

而  $AE$  实为圆  $AP$  的矢高与圆  $PE$  的矢高之差, 在图 1.10(c) 里  $AG$  和  $PE$  是以物点  $B$  为同心圆, 因此显然  $AE = GP$ , 由(75)式得。

$$AE = GP = \frac{X_{PA} - X_{PE}}{\cos U} = \frac{r[1 - \cos(U+I)] - L(1 - \cos U)}{\cos U}.$$

为便于运算作下列变换:

$$\begin{aligned} AE &= \frac{r[1 - \cos(U+I)] - L(1 - \cos U)}{\cos U} \\ &= \frac{L}{\cos U (\sin U + \sin I)} [(1 - \cos(I+U)) \sin U - (1 - \cos U) (\sin I + \sin U)] \\ &= \frac{L}{\cos U (\sin I + \sin U)} [-\cos I \cos U \sin U + \sin I \sin^2 U \\ &\quad - \sin I + \sin I \cos U + \sin U \cos U] \\ &= \frac{L}{(\sin I + \sin U)} [-\cos I \sin U - \sin I \cos U + \sin I + \sin U] \\ &= L \left[ 1 - \frac{\sin(I+U)}{\sin I + \sin U} \right] = L \left( 1 - \frac{\cos \frac{1}{2}(I+U)}{\cos \frac{1}{2}(I-U)} \right) \\ &= \frac{2L \sin \frac{U}{2} \sin \frac{I}{2}}{\cos \frac{1}{2}(I-U)} \\ &= \frac{L \sin U \sin I}{2 \cos \frac{1}{2}(I-U) \cos \frac{I}{2} \cos \frac{U}{2}}. \end{aligned} \tag{77}$$

$$= \frac{PA \cdot \sin I}{2 \cos \frac{I}{2} \cos \frac{U}{2}}. \tag{78}$$

如果用  $\sin \theta$  查  $\cos \theta$  的表, 可将(77)式改写成:

$$AE = \frac{2L \sin U \sin I}{[(1 + \cos I)(1 + \cos U) + \sin I \sin U]}, \tag{79}$$

因此  $d-D$  用(78)式表示时等于:

$$d-D = \frac{PA_1 \sin I'_1}{2 \cos \frac{I'_1}{2} \cos \frac{U'_1}{2}} - \frac{PA_2 \sin I_2}{2 \cos \frac{I_2}{2} \sin \frac{U_2}{2}}. \tag{80}$$

另外, 利用(78)式还可以计算由一次折射引起的光程差:

$$\begin{aligned} W &= n' AE' - n AE \\ &= PA \cdot n \sin I \left( \frac{1}{2 \cos \frac{I'}{2} \cos \frac{U'}{2}} - \frac{1}{2 \cos \frac{I}{2} \cos \frac{U}{2}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{PAn \sin I}{2 \cos \frac{I}{2} \cos \frac{U}{2} \cos \frac{I'}{2} \cos \frac{U'}{2}} \left( \cos \frac{I}{2} \cos \frac{U}{2} - \cos \frac{I'}{2} \cos \frac{U'}{2} \right) \\
&= \frac{PA \cdot n \sin I \sin \frac{1}{2} (I - I') \sin \frac{1}{2} (I' - U)}{2 \cos \frac{I}{2} \cos \frac{U}{2} \cos \frac{I'}{2} \cos \frac{U'}{2}} \\
&= \frac{(L' \sin U' - L \sin U) n \sin I}{2 \cos \frac{I}{2} \cos \frac{U}{2} \cos \frac{I'}{2} \cos \frac{U'}{2}}. \tag{81}
\end{aligned}$$

(81)式表示, 子午光线一次折射所产生的光程差与  $\frac{1}{2} \Delta L \sin U n \sin I$  几乎相等. 在此已能看出  $\Delta L \sin U = L' \sin U' - L \sin U$  是能标志象差情况的.

### § 6 细光束焦点位置计算

由一点发出的光束中, 与已知光路的光线无限邻近的光线, 折射后与此光线相交, 交点的位置可由此光线的光路计算的中间数量算出. 下面只证明熟知的 Young 氏公式, 其他的公式 [例如 Тудоровский, 光学仪器理论 (科学出版社, 1957) 一书中引用的一些] 由于不通用, 因此未予述及. 仅在代数计算法中再另证明一种简单的计算

弧矢焦点位置的方法.

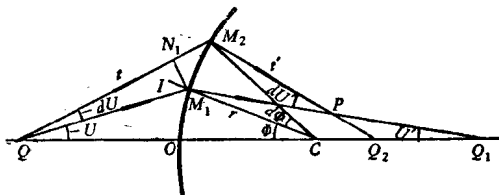


图 1.11

图 1.11 表示细光束的子午截面,  $QM_1M_2$  位于子午面  $QM_1CM_2$  内,  $C$  点是折射球面的中心. 两条无限接近的光线  $QM_1$  和  $QM_2$  经折射后交于  $P$  点并延长后与球面直径  $OC$  交于  $Q_1$  和  $Q_2$  点. 假

使整个图形绕  $QC$  线转一非常小的角度, 于是细光束  $QM_1M_2$  描成一个元立体角, 而点  $P$  则描成垂直于图面即子午面的小线段, 此线就是象散光束的第一焦线, 该光束的所有光线均通过此线上的一定点. 当平面  $QM_1M_2$  绕  $QC$  轴转一无限小角度时, 所形成之光束中所有光线也都通过线段  $Q_1Q_2$  上的一定点, 于是该线段就是光束的第二象散线 (即第二焦线).  $P$  点是子午细光束的交点,  $Q_1Q_2$  是弧矢细光束的交点.  $Q$  点离折射点的距离用  $t$  表示 (图 1.11 中  $t < 0$ ), 而子午光线的焦点  $P$  离折射点的距离用  $t'$  表示, 现要找出这些数值间的关系. 以  $t$  和  $t'$  为半径作圆弧  $M_1N_1$  和  $M_1N_2$ . 显然,  $\widehat{M_1N_1} = tdU$  和  $\widehat{M_1N_2} = t'dU'$ . 弧长  $M_1M_2$  亦可用公式  $\widehat{M_1M_2} = rd\Phi$  表示 (见图 1.11). 若忽略高次项, 则这些弧长可以写成:



$$\left. \begin{aligned} t' dU' &= r \cos I' d\Phi, \\ t dU &= r \cos I d\Phi, \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

其中

$$\Phi = U + I = U' + I'.$$

在(82)式的前一等式中用  $dU' + dI'$  代替  $d\Phi$ , 在后一等式中用  $dU + dI$  代替  $d\Phi$  得:

$$\left. \begin{aligned} (-r \cos I' + t') dU' &= r \cos I' dI', \\ (-r \cos I + t) dU &= r \cos I dI. \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

由这些方程式求出  $dU$  和  $dU'$ , 并求其差, 就得到:

$$dU - dU' = \frac{r \cos I' dI'}{r \cos I' - t'} - \frac{r \cos I dI}{r \cos I - t}. \quad (84)$$

因为:

$$dU - dU' = dI' - dI,$$

故代入上一方程式就得:

$$\frac{t dI'}{r \cos I' - t'} = \frac{t dI}{r \cos I - t}. \quad (85)$$

按折射定律:

$$n' \sin I' = n \sin I,$$

此处  $n'$  和  $n$  是两边媒质的折射率, 微分后有:

$$n' \cos I' dI' = n \cos I dI, \quad (86)$$

此式被(85)式除, 消去  $dI'$  和  $dI$ , 并化成下面的形式:

$$\frac{n' \cos^2 I'}{t'} - \frac{n \cos^2 I}{t} = \frac{n' \cos I' - n \cos I}{r}. \quad (87)$$

这就是子午象散光束的 Young 氏方程式. 假使入射光束  $QM_1M_2$  在此面之前已被球面折射过, 则  $Q$  点是此面以前子午细光束的交点.

为求弧矢光束的相应的方程式, 我们看图 1.12; 假使投射光束已因以前的折射而具有象散, 则光束弧矢截面  $QM_1M'_1$  的出发点  $Q$  在一般情形下不与图 1.11 的  $Q$  点相重合. 设折射前后的点  $Q$  和  $Q_1$  离折射点  $M_1$  的距离用  $s$  和  $s'$  表示, 由三角形  $M_1QC$  和  $M_1Q_1C$  得:

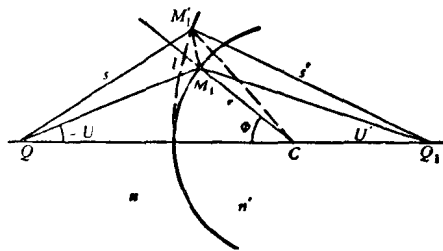


图 1.12

$$\frac{r}{s'} = \frac{\sin U'}{\sin \Phi} \quad \text{和} \quad \frac{r}{s} = \frac{\sin U}{\sin \Phi}. \quad (88)$$

以  $n'$  乘第一式,  $n$  乘第二式, 相减后经过整理得出:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{1}{r \sin \Phi} (n' \sin U' - n \sin U). \quad (89)$$

由于

$$U' = -I' + \Phi \quad \text{和} \quad U = -I + \Phi,$$

将二角和的正弦式展开,并消去其相等的项(由于折射定律:  $n' \sin I = n \sin I'$ )最后得:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' \cos I' - n \cos I}{r}. \quad (90)$$

这就是弧矢元光束的 Young 氏方程式.

假使曲面半径等于无穷大,则方程式更为简单.

我们所计算的只是光束的两个截面.可能会引起这样的疑问:光束其他截面内的聚焦状况能否由此而确定?答复是肯定的.前已提及,这样计算所得的光束二截面交点位置实际上是细光束形成的两条焦线位置,细光束中所有光线均相继通过这两条焦线.如用微分几何方法讨论曲面的法线束性质,易于更一般地得出这个结论,在第四章中将作这种讨论.

公式(87), (90)的形式与决定近轴光线焦点位置的公式(28)很相似,例如定义:

$$\begin{aligned} n'_i &= n' \cos^2 I \\ n_i &= n \cos^2 I \\ r_i &= \frac{r(n' \cos^2 I' - n \cos^2 I)}{n' \cos I' - n \cos I}, \end{aligned}$$

则子午光束焦点位置计算公式就和(28)式没有什么两样,也就是说,象散焦点的计算公式可以理解成折射率、半径、厚度发生改变后的近轴光线计算公式.由此可见对于邻主光线细光束的子午截面和弧矢截面都可以运用所有的高斯光学概念和公式,如焦距、主面等等,只须注意光束的两截面的高斯光学特性是不同的.

由此可见,当光束在二截面内沿主光线的主点和焦点位置已知后,任一物平面形成的象散焦面形式或象面弯曲的数值就都完全确定了.另外,当任二物面所成的象面已知后也就可以决定所有其他物面所成的象面.

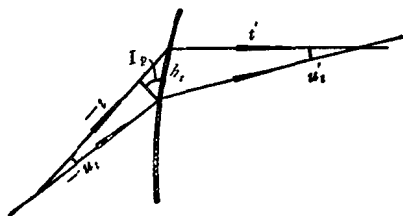


图 1.13

要由(87), (90)式算出邻主光线的焦距、倍率等等是不方便的,就如由(28)式可以算出近轴光线光路而不宜于算出焦距、倍率一样.为此目的可将公式(87), (90)加以变换.与近轴光线相似,引入小角  $u$ , 假想由主光线上一点发出与主光线夹  $u$  角的光线(对于子午光束而言与光轴夹角  $U_p + u$ , 其中  $U_p$  为主光线与光轴夹角;对弧矢光束而言,则为与子午面夹角  $u$ , 且其子午面内投影即为主光线),再引入入射高度(图 1.13):

且其子午面内投影即为主光线),再引入入射高度(图 1.13):

$$\left. \begin{aligned} h_t &= \frac{tu_t}{\cos I} = \frac{t'u'_t}{\cos I'}, \\ h_s &= su_s = s'u'_s. \end{aligned} \right\} \quad (87^*)$$

$h_t$  即图 1.11 中的弧长  $M_1M_2$ ;  $h_s$  即图 1.12 中的弧长  $M_1M'_1$ . 用了这些量后, 就可以将  $s, t$  的计算公式与近轴光线相类比, 从而可以由算出的  $u$  角方便地得到焦距、主面位置、倍率等. 计算的公式组是:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{子午光束:} & \text{弧矢光束:} \\ \frac{t}{\cos I_p} - r & \frac{s \cos I_p - r}{r} u = i, \\ n \cos I_p i = n' \cos I'_p i', & ni = n' i', \\ i' + u' = i + u, & \frac{i + u}{\cos I_p} = \frac{i' + u'}{\cos I'_p}, \\ \frac{t'}{\cos I'_p} - r & \frac{s' \cos I'_p - r}{r} u' = i', \\ t' - D = t_1, & s' - D = s_1. \end{array} \right\} \quad (90^*)$$

这组公式与 (87), (90) 式并无任何区别, 只是多算了一些量, 从而可与近轴光线的相应量相比较. 我们在后面将证明, 它们对象差分布值的研究是有好处的 (第四章).

## § 7 矢量形式的折射定律

矢量计算方法的主要之点是运用矢量表示的折射定律. 一般折射(反射)定律的表述是: 折射线和法线、入射线在同一平面内, 且其夹角的正弦成下列比例:

$$n \sin I = n' \sin I'.$$

故令  $\vec{q}$  为入射光线单位矢量,  $\vec{q}'$  为折射光线单位矢量, 而  $\vec{r}$  为法线方向矢量, 则折射定律可表示为:

$$n\vec{q} \times \vec{r} = n'\vec{q}' \times \vec{r},$$

当  $\vec{q}$  和  $\vec{q}'$  之长各为  $n$  和  $n'$  时上式可以写成更简单的形式:

$$\vec{q} \times \vec{r} = \vec{q}' \times \vec{r}, \quad (91)$$

但此式不便于由已知的  $\vec{q}, \vec{r}$  求  $\vec{q}'$ .

由于  $\vec{q}', \vec{q}$  与  $\vec{r}$  共面, 故线性相关, 即

$$\vec{q}' = k_1 \vec{q} + k_2 \vec{r}. \quad (92)$$

将 (92) 与  $\vec{r}$  作矢积, 再由 (91) 式可知:  $k_1 = 1$ . 将 (92) 式与  $\vec{r}$  作标积得

$$k_2 = \frac{\vec{r} \cdot \vec{q}' - \vec{r} \cdot \vec{q}}{r^2},$$

故

$$\vec{q}' = \vec{q} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{q}' - \vec{r} \cdot \vec{q}}{r^2} \cdot \vec{r}. \quad (93)$$

这个式子还不能算作我们需要的由  $\vec{q}$  和  $\vec{r}$  求  $\vec{q}'$  的公式, 但由于

$$(\vec{r} \cdot \vec{q}')^2 = (\vec{r})^2 (\vec{q}')^2 - (\vec{q}' \times \vec{r})^2 = n'^2 r^2 - (\vec{q}' \times \vec{r})^2. \quad (94)$$

已知  $\vec{q}$  和  $\vec{r}$  即可由 (93), (94) 算出  $\vec{q}'$ . 这就是矢量方法计算时须要开方的原因.

平方根可由查表得到, 也可用计算机作逐次接近<sup>[15]</sup>得到, 例如采用熟知的牛顿法可很快得出结果. 设已知  $y$ , 求其平方根  $x$ , 即  $y = x^2$ . 任取一值  $x_1$ , 用计算机算出  $\frac{1}{2} \left( \frac{y}{x_1} + x_1 \right)$ , 以此作为  $x_2$ , 再算出  $\frac{1}{2} \left( \frac{y}{x_2} + x_2 \right)$  作为  $x_3 \dots$ , 则数列  $x_1, x_2, x_3 \dots$ , 趋近于  $x$ , 趋近的速度是很快的. 由于相对误差是  $\delta_1 = \frac{y - x_1^2}{y}$ ,  $\delta_2 = \frac{y - x_2^2}{y} \dots$ , 故

$$\delta_2 = \frac{1}{y} \left[ y - \frac{1}{4} \left( \frac{y}{x_1} + x_1 \right)^2 \right] = \frac{(y - x_1^2)^2}{4yx_1^2} = \frac{y}{4x_1^2} (\delta_1)^2,$$

即当  $x_1^2$  约等于  $y$  时,  $x_2$  的相对误差是  $x_1$  的相对误差平方的  $\frac{1}{4}$ , 例如  $\delta_1 = 10^{-3}$ , 则  $\delta_2$  小于  $10^{-6}$ ,  $\delta_3$  小于  $10^{-12}$ . 因此, 如由计算尺得出平方根的三位有效数字后, 用计算机作两次除法, 并求两次平均值即可得到平方根的 12 位有效数字.

## § 8 代数方法

这种方法的基本精神和前述三角法并无多大区别, 只是由于采用矢量代数而使公式显著简化了. 下面的叙述基本上和 M. Herzberger 相同<sup>[13]</sup>. 与此极类似的方法也为其他人发表过, 如 [16, 4, 1].

从上述几种计算方法可看到, 应用三角公式作计算时, 须在三角函数和角度之间作多次运算. 不但由于查表而使计算不方便, 而且由于三角函数本身的性质使得计算不能准确. 例如由大角度的正弦查得的正切之值是很不准的. 虽然可以改变公式的形式而仍得准确的公式, 但为计算的一致性, 通常是不愿运用两种不同的公式的. 对于含轴面内的光线, T. Smith 的方法解决了这一问题, 但对空间光线, 此问题尚未解决.

矢量代数在 1924 年左右已开始应用于光学计算中, 苏联 E. B. Лебедев 在 1938 年发表的结果曾被认为已达完善的地步.

应用矢量计算方法的特点是: 完全不用三角函数, 故宜于用计算机计算; 除作加减乘除外须作二次开平方. 上面已经指出, 用计算机得出十位以上有效数字的平方

根是很容易的。下面就来导出折射光线和入射光线间的代数关系。

图 1.14 中光线  $PA$  和折射球面交于  $P$  点, 和  $OYZ$  坐标面交于  $A$  点.  $A$  点的矢径为  $\vec{a}$ ;  $P$  点的矢径为  $\vec{r}$ ; 矢量  $\vec{q}$  为光线方向的矢量, 长度为  $n$ ; 矢量  $\vec{PA}$  之长为  $nS$ , 则  $\vec{PA} = S\vec{q}$ .

以矢量  $\vec{q}$  和  $\vec{a}$  作为决定光线位置的坐标.

所运用的折射定律形式为公式 (93), (94).

因为  $\vec{r}$ ,  $\vec{a}$ ,  $\vec{q}$ ,  $\vec{a}'$ ,  $\vec{q}'$  都在同一平面内——入射光线、折射光线和法线在同一平面内, 得到下列关系:

$$\vec{a}' = M\vec{a}, \quad (95)$$

$$\vec{r} + \vec{a} = S\vec{q}, \quad (96)$$

$$\vec{r} + \vec{a}' = S'\vec{q}', \quad (97)$$

其中  $M$  是一个待定常数.

由 (93), (95), (96) 及 (97) 四个方程式消去  $\vec{a}'$ ,  $\vec{q}'$ ,  $\vec{a}$  后得:

$$(1 - M - S\Phi)\vec{r} = (S' - MS)\vec{q},$$

式中  $\Phi$  即 (93) 式中矢量  $\vec{r}$  的系数,  $\Phi = (\vec{r} \cdot \vec{q}' - \vec{r} \cdot \vec{q})/r^2$ , 它也就是折射面对空间光线的光焦度. 因此得到各系数间的关系, 亦即各矢量长度间的关系:

$$1 - M - S'\Phi = 0 \quad (98)$$

$$S' - MS = 0 \quad (99)$$

亦即

$$\frac{1}{M} = 1 + S\Phi, \quad (100)$$

$$S' = \frac{1 - M}{\Phi}, \quad (101)$$

$$S = \frac{1 - M}{M\Phi}. \quad (102)$$

将 (95) — (99) 式代入 (93) 式以消去  $\vec{r}$ , 化简后得:

$$\vec{q}' = \frac{1}{M}\vec{q} - \Phi\vec{a}. \quad (103)$$

这些就是光线折射前的坐标和折射后的坐标间的关系. 为实现这种计算, 只须将  $M$  和  $\Phi$  用折射前的量  $\vec{a}$  和  $\vec{q}$  表示出来即可.

(96) 式和  $\vec{q}$  作矢量积, (97) 式和  $\vec{q}'$  作矢量积, 再由 (91) 式得:

$$\vec{q} \times \vec{r} = \vec{q}' \times \vec{r} = \vec{a} \times \vec{q} = \vec{a}' \times \vec{q}', \quad (104)$$

所以

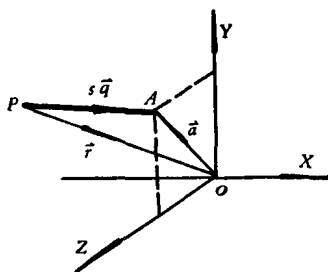


图 1.14

$$\left. \begin{aligned} (\vec{r} \cdot \vec{q})^2 &= n^2 r^2 - (\vec{r} \times \vec{q})^2 = n^2 r^2 - (\vec{a} \times \vec{q})^2, \\ (\vec{r} \cdot \vec{q}')^2 &= n'^2 r^2 - (\vec{r} \times \vec{q}')^2 = n'^2 r^2 - (\vec{a} \times \vec{q}')^2. \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

将(96)式和 $\vec{q}$ 作标量积得:

$$\vec{r} \cdot \vec{q} + \vec{a} \cdot \vec{q} = n^2 S, \quad (106)$$

由(105), (106),  $\Phi$ 和 $S$ 均可用折射前的量表示出来.

在图 1.14 及上列公式的推导过程中我们设矢径 $\vec{a}$ 在 $OYZ$ 面内, 这个假定实际是不必要的, 如设 $\vec{a}$ 是光线与 $OXY$ 面的交点的矢径时仍然可以得出上列矢量方程式, 即:

$$\left. \begin{aligned} \vec{a}' &= M\vec{a}, & \text{求 } \vec{a}' & \quad (a) \\ \vec{q}' &= \frac{1}{M}\vec{q} - \Phi\vec{a}, & \text{求 } \vec{q}' & \quad (b) \\ (\vec{r} \cdot \vec{q})^2 &= n^2 r^2 - (\vec{a} \times \vec{q})^2, & \text{求 } \vec{r} \cdot \vec{q} & \quad (c) \\ n^2 S &= \vec{r} \cdot \vec{q} + \vec{a} \cdot \vec{q}, & \text{求 } S & \quad (d) \\ (\vec{r} \cdot \vec{q}')^2 &= n'^2 r^2 - (\vec{a} \times \vec{q}')^2, & \text{求 } \vec{r} \cdot \vec{q}' & \quad (e) \\ \Phi &= \frac{\vec{r} \cdot \vec{q}' - \vec{r} \cdot \vec{q}}{r^2}, & \text{求 } \Phi & \quad (f) \\ \frac{1}{M} &= 1 + S\Phi. & \text{求 } M & \quad (g) \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

实际上 $\vec{a}$ 可以是通过球心 $O$ 的任一平面与光线的交点的矢径. 无论 $\vec{a}$ 是怎样的矢径, (107)式总就是为折射计算须用的全部公式组.

对于半径 $r$ 很大的情况, 上列计算公式也有较大的误差, 此时要求用更多的位数进行计算.

在公式组(107)中未包括转面公式, 这是由于转面公式须由坐标 $\vec{a}$ 的选择而定. 当 $\vec{a}$ 是光线和子午面( $XY$ 平面)交点的矢径时,  $\vec{a} = (X, H, 0)$ , 则计算所用坐标和一般所用的 Kerber 方法的坐标相同. 转面时 $H$ 不变,  $X' + t = X_1$ . 当 $\vec{a}$ 是光线与 $XZ$ 面交点的矢径时,  $\vec{a} = (X_p, Z, 0)$ , 计算所用坐标还是和 Kerber 方法一致. 转面时 $Z$ 不变, 但这时计算精度有所不同. 这是由于坐标 $Z$ 的大小总小于光学系统的通光孔径, 故在计算过程中除非大半径使 $X_p$ 变大外, 不会出现大数. 前者则不同, 当物象处在远处时 $X, H$ 均为大数值而使计算不准. 另外也可取 $\vec{a}$ 是光线与 $YZ$ 面的交点的矢径, 此时计算所用坐标和 Seidel 方法相似, 转面公式比较复杂.

### § 8.1 平面; 校对

当 $r = \infty$ 时因 $|\vec{a}| = \infty$ , 故须另求在此极限情形下的公式. 注意图 1.15, 此时

不再以球心而以顶点为坐标原点, 即取折射面为  $YZ$  坐标面. 令  $\vec{a}$  处在  $XY$  或  $XZ$  平面内, 法线单位矢量是  $\vec{i}$ ,  $\vec{q} = (\xi, \eta, \zeta)$ , 由折射定律及图 1.15 即可得:

$$\left. \begin{aligned} \vec{q}' - \vec{q} &= \Phi \vec{i}, & (a) \\ \Phi &= \vec{q}' \cdot \vec{i} - \vec{q} \cdot \vec{i} = \sqrt{n'^2 - n^2 + \xi^2} - \xi, & (b) \\ \vec{a} - S\vec{q} &= \vec{b}, & (c) \\ \vec{a}' - S'\vec{q}' &= \vec{b}'. & (d) \end{aligned} \right\} (108)$$

由(108)式消去  $\vec{b}$  和  $\vec{q}'$ , 即得

$$\vec{a}' - \vec{a} = (S' - S)\vec{q} + S\Phi\vec{i}.$$

因  $\vec{a}' - \vec{a}$  和  $\vec{i}$  同方向, 故必有:

$$S' = S, \quad (109)$$

$$\vec{a}' - \vec{a} = S\Phi\vec{i}, \quad (110)$$

$S$  之值可由(108c)和  $\vec{i}$  作标积而得:

$$S\xi = X. \quad (111)$$

于是就得到了所需的计算公式, 显然它们比球面情况简单些.

无论平面或球面, 计算过程都有一个简单的校对法:

$$(\vec{q}')^2 = n'^2, \quad (112)$$

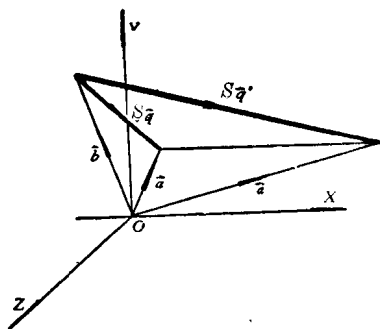


图 1.15

除厚度加减错误及初始数据错误外(112)式可查出整个计算过程所发生的错误.

## § 8.2 弧矢元光束

将(107a)和(107b)作分量表示, 用一个方向的分量表示即可消去倍率  $M$  而直接得到坐标间关系式, 例如  $Y$  方向分量有下列关系:

$$\begin{cases} Y' = MY, \\ \eta' = \frac{1}{M} \eta - \Phi Y; \end{cases}$$

故

$$\frac{1}{M} = \frac{Y}{Y'} = \frac{\eta' - \Phi Y}{\eta},$$

即

$$Y\eta = Y'\eta' + \Phi Y Y'. \quad (113)$$

$$\frac{1}{Y'\eta'} = \frac{1}{Y\eta} + \frac{\Phi}{\eta\eta'}. \quad (114)$$

在一般情况下, 公式(114)的意义在于: 将最终的坐标表示为中间数量之和. 对各折射面写出(114)式, 则因  $Y, \eta$  均为转面不变量, 故将所有公式相加即得:

$$\frac{1}{Y'_k \eta'_k} = \frac{1}{Y_1 \eta_1} + \sum_1^k \frac{\Phi}{\eta \eta'}, \quad (115)$$

(115)式可作为考察各折射面对最后结果影响的基础.

当光线与子午面  $XY$  的夹角趋近于零( $\zeta \rightarrow 0$ )时, 方向余弦  $\eta = n \sin U$ , 而光焦度  $\Phi$  即为  $(n' \cos I' - n \cos I)/r$  亦即均可由子午光线计算出的量[尤其当按公式(26)或(107)计算时]算出  $\eta$  和  $\Phi$  来. 此时  $Y$  为此光线和子午面的交点坐标, 亦即弧矢元光束的交点坐标, 因此(115)式可作为弧矢元光束的焦点位置计算公式, 或作为 § 6 中弧矢元光束杨氏公式的校对.

### § 8.3 含轴面内光线

当光线与光轴有交点时, 我们总可选坐标面  $XY$  包含此光线, 此时并选光线和  $XZ$  面的交点矢径为光线坐标. 则:

$$\vec{a} = (X, 0, 0), \quad \vec{q} = (\xi, \eta, 0).$$

于是(107)式成为:

$$\left. \begin{aligned} X' &= MX, \\ \xi' &= \frac{1}{M} \xi - \Phi X, \\ \eta' &= \frac{1}{M} \eta. \end{aligned} \right\} \quad (107^*)$$

$$\left\{ \begin{aligned} (\vec{r} \cdot \vec{q})^2 &= n^2 r^2 - n^2 X^2 + X^2 \xi^2, \\ (\vec{r} \cdot \vec{q}')^2 &= n'^2 r'^2 - n^2 X^2 + X^2 \xi'^2, \\ n^2 S &= \vec{r} \cdot \vec{q} + X \xi, \\ \Phi &= \frac{\vec{r} \cdot \vec{q}' - \vec{r} \cdot \vec{q}}{r^2}, \\ \frac{1}{M} &= 1 + S \Phi. \end{aligned} \right.$$

本节所述的代数方法光路计算, 考虑的重点实际上是尽可能简化计算公式, 结果使公式不够通用, 这个问题已在 § 3 中做过一些类似的讨论. 发展代数方法光路计算的时间, 已主要是为在计算机上作运算, 但这些公式对电子计算机程序而言, 实际上是不太合用的, 它缺乏通用性, 以致在某些情况下精度不高. 对这个问题我们将在第十二章讨论.



### § 9 光线计算的初始值

作空间光线计算时,给定的通常是光线在光瞳面上的坐标.图 1.16 表示入射光瞳(仔细讨论见第二章). $Y$  轴是子午面与入瞳的交线, $X$  轴是光轴(图中未画出). $a, b, c, d, e$  就是子午光线和入瞳的交点,相当于  $K=1, 0.5, 0, -0.5, -1$  的五条光线.空间光线  $f$  和  $i; g$  和  $h$  因对称,故完全相同.因此为完整了解光束的性质只须计算半面的光线.一般只计算弧矢光线,如图 1.16 中的  $h, i, f, g$ ,其他空间光线是很少算的,这是象差理论的结果.

为了由子午光线孔径角决定弧矢光线在  $Z$  方向的孔径角,只须按图中尺寸与子午光线相比按比例算出即可.

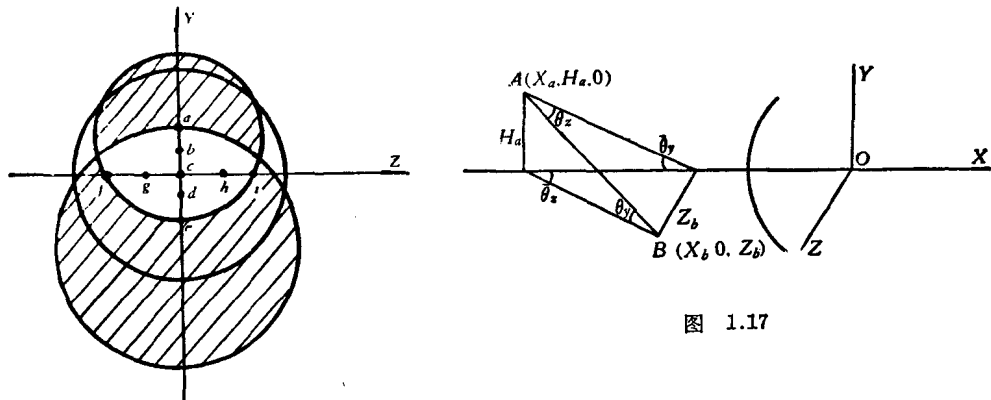


图 1.17

图 1.16

由给定的初始数据算出所需要的坐标值的问题,一般就是求图 1.17 中各个量之间的关系的问题.即:

$$\left. \begin{aligned}
 \overline{AB} &= \frac{X_a - X_b}{-\xi} = \frac{H_a}{-\eta} = \frac{Z_b}{\zeta}, & (a) \\
 \left\{ \begin{aligned}
 \eta &= -n \sin \theta_y = -n \cos \theta_x \sin \bar{\theta}_y, & (b) \\
 \zeta &= n \sin \theta_x = n \cos \theta_y \sin \bar{\theta}_x, & (c)
 \end{aligned} \right. \\
 \left\{ \begin{aligned}
 \sin \theta_y &= \frac{H_a}{\sqrt{H_a^2 + Z_b^2 + (X_a - X_b)^2}} \text{ (与 } \bar{\theta}_y \text{ 同号)}, & (d) \\
 \sin \theta_x &= \frac{Z_b}{\sqrt{H_a^2 + Z_b^2 + (X_a - X_b)^2}} \text{ (与 } \bar{\theta}_x \text{ 同号)}; & (e)
 \end{aligned} \right. & (108) \\
 \left\{ \begin{aligned}
 \tan \bar{\theta}_y &= -\frac{H_a}{X_a - X_b}, & (f) \\
 \tan \bar{\theta}_x &= -\frac{Z_b}{X_a - X_b}. & (g)
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

计算细光束焦点位置时,  $s, t$  的起始值是这样决定的: 自物体上一点沿主光线度量到第一折射面的距离即是。若物体在无限远, 则  $s_1 = t_1 = \infty$ 。

此计算中的  $D$  值, 可由主光线之计算表格取得。公式组 (90), 看起来要比 (90)\* 简单些, 其实 (90)\* 有很多优点, 例如象差的分布公式与此有关 (这在第四章轴外象差的讨论中将会看到); 又此种计算方法与近轴光线之计算类似, 可以作类似于近轴光线计算之校对 (对于  $s$  有  $su = s'u'$ ; 对于  $t$  有  $\frac{t}{\cos I} u = \frac{t'}{\cos I'} u'$  的关系)。

在  $s$  和  $t$  计算终了时须作如下的终结计算 (见图 1.18):

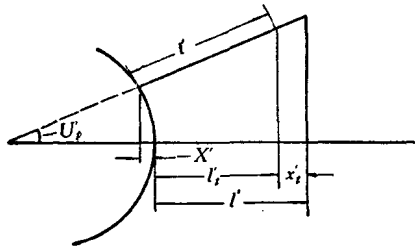


图 1.18

求出:

$$x_i' = l' - l'_i,$$

而

$$l'_i = t' \cos U_p' + x'.$$

### 参 考 文 献

- [1] Finke, H. E., Zur Methodik der Durchrechnung Windschiefer Strahlen durch Zentrierte Linsensysteme, In "Jenaer Jahrbuch 1951".
- [2] Smith, T., On tracing rays through an optical system, *Proc. Phys. Soc.* **27** (1915), 502; **30** (1918), 221; **32** (1920), 252; **33** (1921), 174; **57** (1945), 286.
- [3] 杜德罗夫斯基, A. И., 光学仪器理论, 第一卷, 科学出版社 (1958), 第七章 (第 172—225 页); 第八章 (第 226—263 页)。
- [4] 1. Feder, D. P., Optical Calculation' with Automatic Computing Machinery, *Jour. Opt. Soc. Amer.*, **41** (1951), 630.  
2. Herzberger, M., Automatic Ray Tracing, *Jour. Opt. Soc. Amer.*, **47** (1957), 736.  
3. Allen, W. A., Stark, R. H., Ray Tracing Using the IBM Card Programmed Electronic Calculator, *Jour. Opt. Soc. Amer.*, **41** (1951), 636.  
4. Girard, P. A., Calcul Automatique en Optique géométrique, *Revue D'optique*, **37** (1958) 225; 397.
- [5] Conrady, A. E., Applied Optics and Optical Design, Oxford (1929).
- [6] Hopkins, R. E., Method of Optical Design, Thesis, Rochester (1945).
- [7] Smith, T., Optical Convention (1926).
- [8] 王之江, 光学设计方法与高级象差分析 (未发表, 1956).
- [9] Steward, G. C., Symmetrical Optical System, Cambridge Univ. (1928).

- 
- [10] Hamilton, W. R., *The Mathematical Papers of Sir W. R. Hamilton*, Vol. 1, Geometrical Optics, Cambridge Univ (1931).
- [11] Bruns, H., *Leipziger Sitz. ber.*, **21** (1895), 321.
- [12] Smith, T., Presidential Address Some Uncultivated Optical Fields, *Trans. Opt. Soc.*, **23** (1926—1927), 225.
- [13] Herzberger, M., *Modern Geometrical Optics*, Interscience, New York (1958), Part III, General Laws, pp 149—190.
- [14] Whitwell, A., On the Form of the Wave-Surface of Refraction, *Trans. Opt. Soc.*, **24**(1922—1923), 209.
- [15] Hatree, D R., Notes on Iterative Processes, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **45** (1948), 230.
- [16] Weinstein, W. P., Iterative Ray-Tracing, *Proc. Phys. Soc.*, **B 65** (1952), 731.

## 第二章 理想光学系統

光学系統至少應該在高斯光学区域滿足預定的設計要求，亦即在不計及象差时，光学系統的概略結構应使預定位置、預定大小的物体，經過預定直徑、預定长度和預定光路轉折的通光孔后，成象在預定象面上，象的大小和正倒应符合預定要求。

为使光学系統能够滿足上述高斯光学要求，我們当然不必单由近軸光綫光路計算来湊出所需結構，因为理想光学系統的物象关系理論已經很完善了，足以由理論定出一切有效参数以符合預定要求。

本章的目的就在于运用高斯光学理論和反射鏡正象理論解决上述設計問題。

### §1 高斯光学系統的物象关系

前面已知在同軸球面光学系統中存在一个理想区域，在此区域内，物空間一点发出的光綫被折射后聚焦于象空間的一定点，也就是使物体成一个按比例放大或縮小的象。当然我們希望这种成象能按我們預定的方式进行，为此就必须掌握这种成象所具有的規律。

#### (A) 薄透鏡

我們从最簡單的模型开始，由(I.27\*)式<sup>1)</sup>知物距  $l$ ，象距  $l'$  和其他結構参数  $n, r$  間有一定的关系。由此，当給定物距和象距或給定物距和倍率[(I.39)式]时即可算出应有的半徑，其他情况也一样。

对于空气中的单薄透鏡(二折射面間距  $d=0$ )，由(I.27\*)式有：

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{l'} &= \frac{1}{f'} + \frac{1}{l}, \\ \frac{1}{f'} &= (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

<sup>1)</sup> 以下均用羅馬字表示公式所在章数，(I.28)式表示第一章(28)式。在引用本章的公式时不加章号。

称  $f'$  为薄透镜的第二焦距, 亦即  $l_1 = \infty$  时的象距.

我們也可以把(1)式写成

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{l_2} + \frac{1}{f} &= \frac{1}{l_1}, \\ f &= -f', \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

称  $f$  为薄透镜的第一焦距, 亦即象距为无限大时的物距. 根据这两点我們可以用几何方法而不用公式(1)来确定物象位置. 如图 2.1, 由物距  $l_1$  物高  $\eta_1$  发出的光线  $BA$

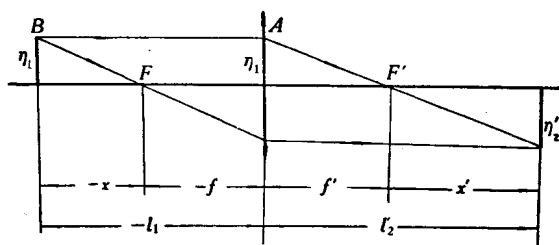


图 2.1

和光轴平行, 则它被透镜  $A$  折射后必须通过距透镜距离为  $f'$  的焦点  $F'$ . 由于厚度等于零, (I.27e) 式表明光线出射高度  $l_2 u_2$  与入射高度  $l_1 u_1$  相等. 另一条由  $B$  点发出的光线  $BF$  通过第一焦点, 它与透镜交于高度

$$\eta_2 = -\frac{f}{x} \eta_1 \quad (3)$$

处, 并为透镜折射后平行于光轴地出射. 这两条光线折射后的交点  $B'$  就是  $B$  点被理想的薄透镜  $A$  所成的理想象点, 象高显然就是  $\eta'_2$ , 由象空间的相似三角形也可得:

$$\eta'_2 = -\frac{x'}{f'} \eta_1. \quad (4)$$

由(3), (4)式相等就得成象的牛顿公式:

$$xx' = ff', \quad (5)$$

其中  $x$  指第一焦点到物点的距离,  $x'$  是第二焦点到象点的距离.

对于单个折射面而言, 二焦距有下列关系:

$$\frac{1}{f'} = \frac{n' - n}{n'r}, \quad \frac{1}{f} = \frac{n' - n}{nr}. \quad (6)$$

按此式决定焦点位置后, 上述作图法也就同样适用.

### (B) 焦距有限的情况

在一个一般的复杂光学系统中, 入射的平行光束被折射后, 可能出现两种可能性, 一是焦点在有限远处, 一是焦点在无限远处, 后者称为望远系统. 当焦点在有

限远处时, 仿照图 2.1 作图如图 2.2. 平行光线折射后经过  $F'$  点; 经过  $F$  点的光线则折射后平行于光轴. 但是我们在只知道焦点位置时并不能确定象点  $B'$  的位置, 这是由于出射光线的高度(或与轴张角)须由其他计算确定之故. 当我们已由计算确定象空间光线  $F'B'$  和  $C'B'$  后, 就可在光线  $F'B'$  上选一点  $A'$ , 令其高度等于物高  $\eta$ , 过

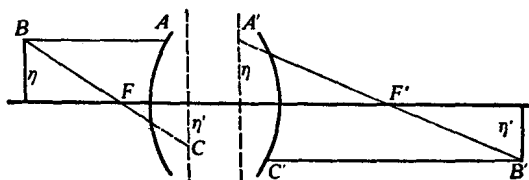


图 2.2

此点垂直光轴的平面称作第二主平面; 再在光线  $BF$  上选一点  $C$ , 使其高度等于象高  $\eta'$ , 过此点垂直光轴的平面称第一主平面. 将图 2.2 和图 2.1 比较可看出: 把主平面到焦点的距离称作复合系统的组合焦距时, 公式(3)–(5)就都可用于复合系统.

主平面有其本身的意义: 第二主平面是第一主平面的象, 且成象的倍率等于 1. 这个结论可以由找出主平面的方法直接看出: 由第一主平面上一点发出一条平行光线和一条通过第一焦点的光线, 则它们被光学系统折射后必都通过第二主平面上等高度的点, 然后通过第二焦点或成平行光线. 主平面常以符号  $H$  和  $H'$  表示.

当物距和象距均自主面起算, 并用  $b$  和  $b'$  表示时, 由于

$$x = b - f, \quad x' = b' - f', \quad (7)$$

将(7)式代入(5)式即得:

$$\frac{1}{b'} = \frac{1}{f'} - \frac{f}{f'b}. \quad (8)$$

根据上述焦距的定义即可由光线光路计算而求出焦距. 亦即计算一条和光轴平行的近轴光线, 入射高度为  $h_1$ , 经整个系统折射后, 与轴夹角为  $u'_k$ , 则:

$$f'_k = -\frac{h_1}{u'_k}. \quad (9)$$

同时也算出了主平面位置; 设主平面距最后一面距离为  $a'$ , 则由定义:

$$a' = l'_k - f'_k. \quad (10)$$

反向再计算一条近轴平行光线即可仿此得出第一焦距和第一主平面的位置.

实际上单为得出第一焦距是不必再作光线计算的. 如图 2.3 所示, 物体  $EB$  成象为  $E'B'$ , 物空间  $u$  角, 物高  $\eta$  变为象空间的  $u'$  和  $\eta'$ . 我们可以用作图法来研究这四个量之间的关系并与(I.30)相比较即可得到  $f, f'$  之间的关系. 作辅助光线  $BFB'$

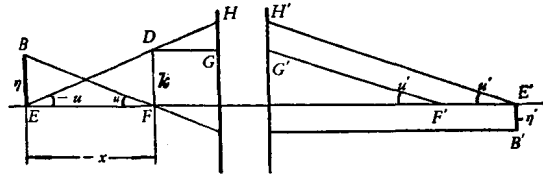


图 2.3

和  $DGG'F'$ ,  $DG$  平行于光轴, 因  $D$  点在第一焦面上, 故光线  $DH$ ,  $DG$  折射后相互平行, 即  $G'F'$  也和光轴夹  $u'$  角, 由此即得:

$$\eta u = -x v u = -v k.$$

再由图 2.3:

$$k = f' u', \quad v f = \eta'.$$

故

$$\eta u = -\frac{f' u' \eta'}{f},$$

即

$$f \eta u = -f' u' \eta'. \quad (11)$$

将这个纯几何结果与光学定律(I.30)相比较, 即可得到:

$$\frac{f}{n} = -\frac{f'}{n'}, \quad (12)$$

这就是所求的  $f$  和  $f'$  的关系.

利用(12)式, 可将(8)式改写成:

$$\frac{1}{b'} = \frac{1}{f'} + \frac{n}{n' b}. \quad (8a)$$

这就说明, 已知主平面和焦面位置后, 任意物体的成象就完全确定了.

### (O) 望远镜系统

在望远镜系统中, 平行光束折射后仍为平行光束, 因而不存在主面和焦面. 我们称入射高度  $h_1$  与出射高度  $h'_k$  之比为此系统的望远镜倍率. 如图 2.4, 对这种系统来说, 再知道一个物象关系, 如  $B$  成象为  $B'$ ,

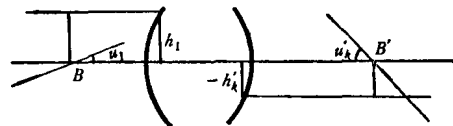


图 2.4

则所有其他物象关系也都定了. 这是由于按(I.30)式:

$$n_1 h_1 u_1 = n'_k h'_k u'_k,$$

望远镜倍率决定了角倍率之故. 由于  $u_1/u'_k$  为定值, 因之无论物体在什么位置, 象的大小总是恒定不变的.

对于由几个单元组成的一个复合系统, 一般书籍上都有计算组合焦点、组合焦距

的公式<sup>[1]</sup>, 这些公式不难由作图法所得的几何关系导出. 但是一般而言, 使用这些公式组来计算似乎不比直接用近轴光线作光路计算方便. 对于某些特殊情况 (经常在仪器中出现的情况) 则组合效果是可直观地根据光线光路观点看出的. 例如:

例 1: 目镜系统  $e$  的焦点位置恰与物镜系统  $o$  的倍率为  $M$  的象面位置重合, 求组合焦距.

参看图 2.5, 设系统  $e$  的焦距为  $f'_e$ , 则  $h_1 = f'_e u'_o$ . 再因系统  $o$  的倍率为  $M$ , 故  $\frac{n' u'_o}{n u'_e} = M$ , 故组合焦距  $f'$  就等于:

$$f' = \frac{h_1}{u'_o} = \frac{h_1}{u'_e} \cdot \frac{u'_e}{u'_o} = f'_e \frac{n'}{nM}. \quad (13a)$$

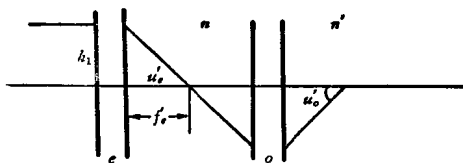


图 2.5

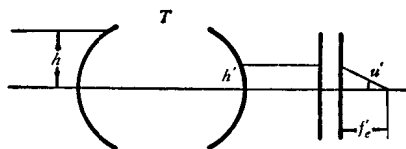


图 2.6

例 2:  $\gamma$  倍的望远镜  $T$  与焦距  $f'_e$  的系统组合, 求组合焦距由图 2.6 可知:

$\gamma = \frac{h}{h'}$ ,  $f'_e = \frac{h'}{u'}$ , 而组合焦距  $f'$  是:

$$f' = \frac{h}{u'} = \frac{h}{h'} \cdot \frac{h'}{u'} = \gamma f'_e. \quad (13b)$$

运用本节得到的高斯光学物象关系就可以解决高斯光学区域内的设计问题. 这种设计虽然简单, 但是对仪器设计却是有原则性意义的. 下面章节以举例的方式说明一些尺寸要求如何得到满足. 由于高斯光学几乎可以满足任意的要求, 而种种设计之所以不能实现, 常常是由于制造工艺, 物理光学定律或象差校正可能性的限制. 由下面章节的例子中可以看出上述三个方面如何起限制作用.

## § 2 光栏和轴外光束晕暗, 投影和景相

光学系统中, 透镜的直径总有一定大小, 它们限制光束不能完全通过, 一般几何光学书籍上常提及: 决定光栏的方法是将所有镜框均成象到物空间, 其中最小的一个就是光栏. 这种方法似乎是一般光学设计者所不采用的, 这是由于将一个个镜框都一次次成象时, 所需的计算过于麻烦之故. 实际上在下面将看到这个决定的方法是不正确的, 而且也是不必要的. 当我们算出轴上点近轴光线光路后就可以得出光线在各折射面的粗略高度  $h_u$ , 各透镜的直径就该大于此值以保证光线通过, 若有不够



大的就应設法增大以使光束能通过。若要求的孔徑大小比开始計算近軸光綫时所給定的初始数据大, 則可按增大的比例将各透鏡的直徑都加大。由这种方法决定的每个透鏡框大小都起着限制光束的作用, 将它們都按高斯光学成象到物空間时, 它們将同样地起光栏的作用。

对有一定高度的物点来說, 我們也可以計算一条近軸光綫观察它是否能通过各个透鏡, 亦即将計算出的入射高度  $lu$  与透鏡直徑之半相比較, 这时就可以看出并不是所有通过第一光孔的光綫都能順利通过所有光孔, 例如图 2.7 中通过上边缘  $E_1$  的光綫显然不能通过第二透鏡, 而由下边缘  $E_2$  进入的光綫已在最后透鏡的上部射出。因此, 当各光孔直徑都恰能保証軸上光束通过时, 能通过的軸外光束孔徑角就一定小于軸上光束的, 这就叫作暈暗或遮拦。物点越高(視場越大)則問題越严重。如图 2.7 所示, 由各个光孔的整体限制了軸外光束, 只有阴影部分能通过系統, 这部分光束的中心綫与光軸的交点, 光学設計者将它叫做光栏中心, 在这个位置放一遮光板, 其中心孔恰使軸上光束通过, 則此通光孔被称作光栏。我們在此強調的是: 光栏的意义不在軸上光束而在軸外光束。

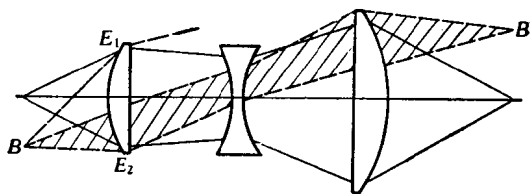


图 2.7

但上面所述的光栏位置还是被动地由一个个透鏡的直徑决定的, 实际情况絕非如此。我們完全可以加大第一透鏡的直徑以使光束中心綫后移, 也可以加大最后透鏡的直徑以使光栏前移, 甚至可以把两透鏡都加大以使通过第二孔徑的光束都順利通过系統(这当然是对一定的軸外点而言的, 当視場再加大时透鏡直徑就又不夠大了)。这就是說, 光栏位置以至各透鏡之直徑是可以由設計者主动地确定以滿足某些另外的目的。

首先, 当光学系統是用来观察非平面物体时, 此立体景物将被光学系統成一投影象或透视图在象面上, 此时成象光束的中心綫在物空間和光軸的交点(入射光瞳中心)就是此投影象的投影中心或透視中心, 投影中心变化时立体景物的景相也就随之变化。投影中心左右移动引起的景相变化, 在光学上称作立体視差, 这就是所有双目視仪器和双目立体視覚中所遇到的問題。投影中心前后移动引起的景相变化称作

景相畸变。

为使光学系统所得的投影象具有所要求的正常或反常景相，就要求光学系统的光阑处在一定位置。但这种要求几乎不成为要求（因容许变动范围很大），常可不加考虑。

其次在投影量度仪器中，为使投影象的倍率不因物距变化而变化，要求投影中心在物空间位于无限远处。

再则有时须使轴外光束能够通过此光学系统外的其他部分，此时就必须使轴外光束的中心线与轴的交点——光瞳中心，能落在此系统外的一定位置，例如目镜须使出瞳能与人眼瞳孔重合。

当仪器不对光阑位置提出要求时，光学设计者所确定的光阑位置应是轴外光束象差校正较完善的位置，亦即把光阑的选择作为校正象差的一个手段，使某些透镜直径加大，大于轴上光束通过所要求的直径，使象差较小的轴外光束通过。因之光学设计所定的光阑中心是轴外光束中象差较好部分的中心线与光轴的交点。

但是问题也不完全如此。有时透镜直径由于厚度限制已不能再加大，并且如果厚度又是校正象差的参数，不能再变，那末光束也许是由透镜直径限制的。

由此看来，轴外光束一般总是会有晕暗现象的，为了大致地（基本上）确定各轴外点的光束通过状况，只须计算两条近轴光线就够了。一条近轴光线由物面的轴上点发出，与轴夹角为给定的孔径角大小；另一条近轴光线由视场边缘的轴外点发出，通过光阑中心。以后简称前者为轴上光线，后者为主光线。它们在透镜上的入射高度  $lu$  各称为  $h$  和  $h_p$ 。透镜直径之半则称为  $h_p$ ，并取其正负与  $h_p$  相同。则对各折射面可算出量

$$h_p - h_p/h,$$

在各面中选出此量具最小正值和最大负值（绝对值最小）的两个折射面，这两个折射面就是致使这轴外点发出的光束受遮拦的两个光孔。由于  $h_p$  随物高成比例增大，而  $h_p$  及  $h$  则不变，故对各个轴外点来说，遮拦轴外光束的光孔位置是不一样的。

设轴上光线在入瞳上的入射高度为  $a$ ，（参阅图 2.8）各通光孔在入瞳面上的投影均为一圆，其半径为：

$$\frac{a}{h} h_p, \quad (a)$$

$h$ ,  $h_p$  的意义如前述。圆的中心与入瞳中心不重合，由入瞳中心到投影圆中心的距离是：

$$-\frac{a}{h} h_p. \quad (b)$$

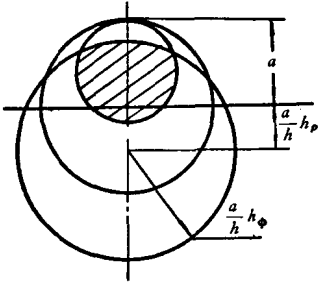


图 2.8

再将前面已得到的两个限制光束的光孔按(a)、(b)二式作图，则两圆在入瞳中的重叠部分就是对此轴外点的实际入瞳形状，如图 2.8 中阴影部分，其形状是可能多种多样的。

这样用高斯光学得出的光瞳大小和形状当然只在高斯区域才正确，实际上由于象差和由于折射面实际上是球面(在高斯区域则看作平面)，实际计算光线光路时，能通过的光线还会有些变化；再由于本来不需要

太准确地知道光孔形状，所以上述计算用计算尺进行已足够了。

### § 3 高斯光学和结构尺寸中的长度问题

仪器总要求光学系统具有一定的焦距(当物或象在无限远时)，或者在一定的共轭距离之下具有一定的倍率(当物和象都在有限距离处时)。通常还会提出总长度和工作距离等要求，现在就看这些要求应该怎样考虑和满足。

#### § 3.1 倍数 100×，总长 200<sup>1)</sup> 的望远镜

显然，物镜焦距 200，目镜焦距 2，即可满足上述要求。但这是不合理的。因为目镜焦距为 2 时，瞳孔距一定小于 2，至多也不过等于 2，这就不能合乎观察的要求(眼瞳到睫毛距约为 8，眼瞳到角膜顶点距约为 4，故目视光学系统的瞳孔距一定要大于 5)，为此，目镜焦距一般应大于 10，至少也要大于 7。

由此可见，我们一般应该使目镜焦距等于 10，于是物镜焦距须为 1000 才行，也就是要有一个焦距 1000 而长度 200 的物镜。这一点可以用各种办法来达到，如图

2.9，原有的一个单透镜  $F_0$  到焦点  $A$  的距离为 1000，它使近轴光线  $BF_0$  折射后成为  $F_0A$ ，若任意地取高度  $F_0E=1$ ，

则角  $F_0AE = \frac{1}{1000}$ 。如果处在距  $A$  点

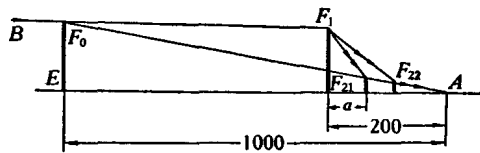


图 2.9

200 处的透镜  $F_1$  以及另一透镜  $F_2$  也能使同一光线二次折射后与  $F_0A$  线重合(如图 2.9 所示)，则其组合焦距即为 1000。显然  $F_1$  可以具有小于 200 的任何焦距， $F_1$  定后则须配合适当的  $F_2$ ，但是  $F_1$  不能与 200 太接近，因为这将引起  $F_2$  的焦距太短。

<sup>1)</sup> 以下非特别指明时长度单位均为毫米。

例如目鏡視場  $40^\circ$  时，象面直徑約为 7，第二透鏡的焦距絕對值至少要大于 10 才能使最大視場的光綫通过。但是可以証明此时焦距絕對值实际上不能大于 12.5，当  $f_2 = -12.5$  时  $a = 100$  ( $a$  的意义見图 2.9)。当  $f_2$  等于其他数值时，可有两个  $a$  值，例如  $f_2 = -12$  时  $a$  可等于 80 或 120。

在上述数据中可以认为  $a = 120$  的結果是較好的，因为此时  $f_1$  較大，如  $a$  再大則  $f_2$  太小了。

上述要求还可以用反射系統来实现，如图 2.10，图中符号意义同上，不难仿上進行討論。

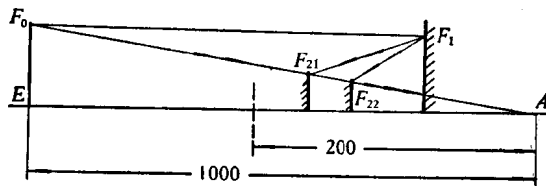


图 2.10

在上面的討論中，我們实际上假定了所有的透鏡都是薄透鏡。这种假定和实际情况是基本一致的。当沒有絕對的必要时，我們一定不会用大量的厚的透鏡去完成薄透鏡能够完成的任务。透鏡当然总有厚度（这种厚度随孔径平方加大），但在一般情况下它完全不影响我們的討論。以下各节的討論也都是在类似的前提下进行的。

### § 3.2 倍数 2000×，总长 200 的放大鏡或显微鏡

由于放大倍数为 2000，它的組合焦距就是  $250/2000 = 0.125$ 。假如是用一个折射率 1.5 的平凸单透鏡来实现它，那么这个单透鏡的半徑是 0.0625，工作距离也一定小于 0.1，瞳孔位置也一定不适当，因此这是完全不现实的。按照現代的制造技术，半徑大于 0.5 才比較适当。

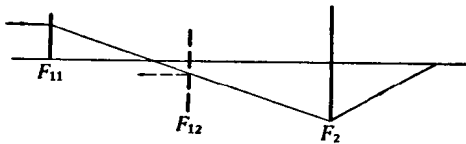


图 2.11

这个要求也可用組合法达到(見图 2.11)，由  $F_2F_{12}$  或  $F_2F_{11}$  等方式組合而成。前一种用了負目鏡  $F_{12}$  与正物鏡，后一种則目鏡也是正鏡。由于这两种情况的

組合焦距有正負之分，因此人眼看到的象将有正倒之分。組合方式显然是极为多样的。今以正目鏡为例（負目鏡由于瞳孔距不适当，目視时一般不用），其共軛距  $L$ ，倍数  $M$  与物鏡焦距  $f'$  和物距  $l$ ，象距  $l'$  間有下列关系：

$$\left. \begin{aligned} L &= v' - l, \\ M &= -v'/l, \\ f' &= L / \left( \sqrt{M} + \frac{1}{\sqrt{M}} \right)^2, \\ l &= -\frac{M+1}{M} f' = -\frac{1}{M+1} L, \\ v' &= (M+1) f' = \frac{M}{M+1} L. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

依(13)式将由目镜焦距决定的物镜倍率和共轭点间距表列于下:

目 鏡 焦 距 $f'_e$	3.125	6.25	12.5	25	50	100
物 鏡 倍 率 $M$	25	50	100	200	400	800
物 鏡 共 軛 距 $L$	197	~194	~188	~175	~150	~100
物 鏡 焦 距 $f'$	7.3	3.7	1.85	0.88	0.37	0.12
物 距 $ l $	7.6	3.8	1.86	0.88	0.37	0.12
象 距 $ v' $	190	190	186	175	150	100

由此可見目鏡焦距大于 20 而要求高倍率是不现实的,因为它仍将导致太小的物鏡焦距. 根据現在的短焦距物鏡設計情况,当焦距为 2 时最小半徑为 0.8 左右,因此物鏡焦距最好不小于 2. 由上表可見最合适的焦距分配应该是目鏡焦距为 12.5 者.

倍数大于  $2000 \times$  是否能实现呢? 看来假若需要如此,可以增加筒长,例如筒长加到 400,目鏡焦距 12.5,物鏡焦距仍为 1.85 时,即可达 4000 倍,假若需要 10000 倍而又要适于制造,則筒长需增加到 1000,实在过长了. 此时应该再多一級放大,亦即使用三組組合,此时可以有不太长(例如 400)的筒长.

### § 3.3 共軛距 1000, 工作距 100 的 $100 \times$ 投影物鏡

若只用单組透鏡,在共軛距 1000, 倍率 100 时可由公式(13)算出焦距和物距、象距:

$f' = 9.8, l = -9.9, v' = 990$ . 因此工作距离一般小于 10, 不能合乎原提的 100 的要求. 那么这个要求是否合理呢? 应该说要求

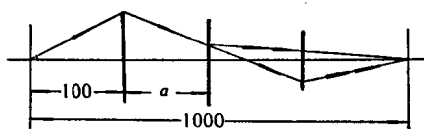


图 2.12

还是合理的,这种要求用兩組透鏡就能完成了. 初步看来可能的組合又是多种多样的,例如图 2.12. 首先,处在距离 100 处的第一級放大可有不同的倍率,而第二級放大則又有用正負透鏡組之分,前者成正象,后者成倒象.

为了校正象面弯曲的原故(見第七章),我們选用負透鏡作第二級放大,在这种条件下合适的焦距分配應該是怎样的呢?将由第一級倍率  $M_1$  决定的所有参数表列如下:

$M_1$	0.5	1	2	3	4	5	6	7
$f_1$	33.3	50	66.6	75	80	83.3	85.6	87.5
$l_1$	50	100	200	300	400	500	600	700
$M_2$	200	100	50	33.3	25	20	16.6	14.3
$l_2$	4.2	8.0	14.0	18.5	21.0	21.0	19.5	15
$l'_2$	840	800	700	615	525	420	324	214
$f_2$	-4.2	-8	-14	-19	-21	-21	-19	-15
$a$	46	92	186	281	379	479	580	685

由表可見当  $M_1=5\times$  左右时  $f_2$  有极值. 倍数或大或小都将使  $f_2$  变小( $M_1$ 小时是由于  $M_2$  大而使  $f_2$  小;  $M_1$  大时則由于剩余共軛距小而使  $f_2$  小, 因之有极值是可以預見到的).

由于兩組間隔太大对于軸外光束通过是不利的, 因之  $M_1$  取  $2\times-4\times$  間为宜.

### §3.4 瞳孔距及工作距

有时在物鏡后須放下一些东西, 此时, 要求短焦距物鏡具有长工作距离; 至于短焦距目鏡則前已提及要求有长的瞳孔距. 現在就来考察它們怎样才能加长. 由前两节的討論可以看到目鏡的焦距一般很短, 入射光瞳(或物鏡)到目鏡的距离与目鏡焦距相比总大很多, 因之出瞳差不多处在目鏡焦点上, 因此这两个問題都可以归結为:

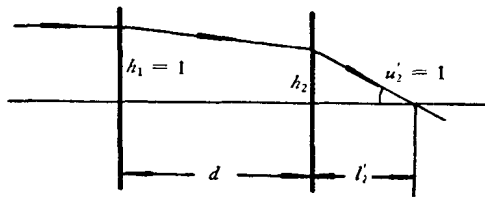


图 2.13

怎样使焦点远离透鏡.

設总焦距等于1, 即  $f=1$ , 再令  $h_1=1$ , 則  $u'_2=1$ , 如图 2.13 所示: 工作距离  $l'_2=h_2=1-d\phi_1$ , [ $\phi_1$  为第一透鏡的光焦度(焦距倒数)] 由此可見  $l'_2$

之長完全由  $d\phi_1$  之值决定. 因  $d$  恒大于零, 故若  $f_1>0$  則  $l'_2<1$ ,  $f_1$  越小  $d$  越大則工作距离越短, 只有  $d=0$  才能使工作距离和焦距相等, 若  $f_1<0$  則  $|f_1|$  越小  $d$  越大工作距离越长.

对于厚透鏡也可以这样看, 厚透鏡相当于两个单透鏡中間隔以折射率为  $n$  的介质.

若  $\varphi_1$  負而不很大但  $d$  很大时, 工作距离就增长很多, 此时正透镜相对孔径  $(1-\varphi_1)$  則增加不多. 若条件允許(如允許总长度大和直径大), 这种加大工作距离的方法是最理想的.

#### § 4 高斯光学和结构尺寸中的直径问题

上一节主要考虑了沿光轴的长度方面的问题, 这一节則討論垂軸的尺寸, 即各种因素对光学系統粗細——孔径的影响.

##### § 4.1 望远镜的倍数和孔径

設由于衍射而产生的 Airy 盘的第一暗环的半径对通光孔中心的張角为  $\theta$ , 通光孔直径为  $D$ , 則有下列关系(參看第十一章 § 2.6):

$$\theta = \frac{140}{D}. \quad (14)$$

(14) 式中  $\theta$  以秒表示,  $D$  以毫米表示, 并設光綫波长为 0.00055 毫米. 人眼的分辨角約为  $1'$ , 因之望远镜具有的倍数  $m_0$  应当恰使  $\theta$  放大到  $1'$ , 即:

$$m_0 = \frac{D}{2.3}. \quad (15)$$

当倍率超过  $m_0$  一倍时还是恰当的, 此时衍射图張角为  $4'$ , 对于观察还是有利的. 再大, 則就是光学系統非常理想也将使人眼感到成象不清楚. 当倍率小于  $m_0$  时則光学系統的分辨能力未被人眼充分利用, 此时望远镜出瞳大于白天的眼瞳, 在白天这种大孔径就毫无用处, 但在晚上当然是有用的.

由此可見, 白天使用的望远镜的倍率应約等于入瞳直径的毫米数.

在上节的例中, 倍数为  $100\times$ , 因之入瞳直径至少应等于  $100$ , 即物鏡直径应等于  $100$ , 由此看来, 要求筒长短到等于  $200$  是很不妙的事. 就如上面已求得的最佳結果,  $f_1=130$  左右, 因此第一个物鏡的相对孔径是  $1:1.3$ , 我們知道限制相对孔径的主要象差是二級光譜. 在使用普通玻璃时, 对  $C-F$  綫消色后, 这二色焦点到  $e$  綫焦点的距离为[參看第五章(32a)式]:

$$\Delta L'_{cek} = 0.0005 f'_k, \quad (16)$$

而公差即等于焦深(設波长为 0.0005 毫米):

$$\Delta L_k = \frac{0.0005}{n'_k \sin^2 U'_k}, \quad (17)$$

故要求:

$$\Delta L'_{cek} \leq \Delta L_k, n'_k f'_k \sin^2 U'_k \leq 1. \quad (18)$$

第一物镜象空间折射率等于1, 当  $f_1=130$ , 则  $\sin U'_k \leq \frac{1}{11.4}$ , 也即相对孔径不能超过  $1:5.7$ , 由此可见,  $f_1=130$ , 相对孔径  $1:2.6$  时二级光谱相应的波差已超出一个波长;  $1:1.3$  时则超出4个波长, 因此这种结果是极坏的了. 一般而言二级光谱应以不超过一个波长为宜, 因之上述要求是不现实的.

若筒长不是要求200而可以是1000, 则  $f_1=1000$ , 导出  $\sin U'_k \leq \frac{1}{31.8}$  则应该是  $1:15.9$ , 因此二级光谱在  $1:10$  时(孔径100)是  $0.6\lambda$  因此是相当理想的. 由此可见望远镜的倍率和筒长是有矛盾的, 所企图的倍率越大则矛盾越严重.

若采用短波部分具有较小相对色散的特种火石玻璃(如Schott厂KzFS<sub>1</sub>)与BK<sub>7</sub>组合, 二级光谱可减少  $\frac{1}{3}$  (由  $0.0005 \rightarrow 0.00035$ ); 用萤石与KzFS<sub>1</sub>组合, 则可降低到只剩  $\frac{1}{3}$  (由  $0.0005 \rightarrow 0.00017$ ). 因此上例在用萤石时还有希望. 由于不易得到大块的光学均匀的天然萤石, 而人造萤石的成本较高, 因此现在还不可能大量使用. 关于二级光谱校正可参看第五章 § 4.

用反射系统时, 上述相对孔径的要求是可能实现的, 反射系统的问题将在以后另作讨论.

由于大气抖动, 大孔径望远镜是达不到理想分辨角的. 在相当稳定的气候条件下, 大气扰动约使光线偏折  $1''-2''$ , 由此可见物镜直径大于300时, 对分辨本领就不会有很大帮助了.

#### § 4.2 显微物镜的倍数和数值孔径

按公式(XI.70a), 分辨能力由下式决定[参阅第十一章公式(70a)]:

$$n' \sin U' \delta' = n \sin U \delta = 0.61\lambda, \quad (19)$$

故为使  $\delta$  被放大后的张角为  $1'$  应有的倍率为:

$$m_0 = 220 \cdot n \sin U. \quad (20)$$

故2000倍所要求的  $n \sin U = 9.1$ . 除非  $n=9.1$  否则这就是不可能的. 倍率超过  $m_0$  者称为超放大, 其影响前已提及. 显微镜倍率常为  $m_0$  的3倍至5倍, 此时衍射盘对人眼张角为  $6'-10'$ . 在  $n=1.5$  左右时, 2000倍至少已作了6倍超放大, 因此是不常见的, 普通显微镜  $1500\times$  已是极度超放大了.

与望远镜物镜一样, 显微镜的筒长和  $NA$  也是受二级光谱限制的, 类似于(16)式可导出:

$$\Delta L_{ce} = 0.0005 f'_k \cdot (m+1)^2, \quad (21)$$



式中  $m$  为物镜倍率,  $f'_k$  为物镜焦距, 故要求:

$$(m+1)^2 n'_k f'_k \sin^2 U'_k \leq 1. \quad (22)$$

例如  $NA$  1.3,  $100\times$  则  $\sin U'_k = 0.013$ ,  $n'_k = 1$ ,  $m+1 = 101$ , 故应有  $f' \leq 0.6$ , 但实际是 1.8, 因此二级光谱在  $\frac{1}{2} - 1\lambda$  之间.

筒长变短是能使二级光谱变好的, 但使加工困难并使视场变小, 再加长(为了加大视场)则二级光谱更大.

### § 4.3 通光孔径; 视场

上面两例说明对倍率的要求会导致对孔径大小的要求. 假若对于仪器通光孔径大小也有限制, 那么这种限制显然也将使某些其他要求不能同时实现. § 4.1 中若倍率要求  $100\times$  而孔径又要限制到小于 100, 那么就再没有其他回旋余地, 不是成象模糊就是需降低倍率. 在 § 4.2 中只提出对孔径角的要求, 因此尚不致与孔径限制相冲突, 但若又要求一定的工作距离, 那么又将引起矛盾; 显然, 一定角度和长度之乘积就决定了一定的孔径大小, 小于此值是不可能的. 但工作距离减短是否就能完全解决这个问题呢, 一般而言并非如此. 如 § 4.2 中在象空间还有一定的孔径角和筒长, 这就在另一方面确定了孔径大小. 如上面得出的结果, 物镜倍率为  $100\times$ , 象空间  $NA = 0.014$ , 长度近 190, 故透镜直径一般总大于 5.3. 但若孔径大小又不能大于 2.7, 那么筒长只能被迫小于 100. 但是假若又要求筒长不能短, 那就只能再成象一次使筒长拉长, 这种再成象的系统称为转象系统, 如图 2.14,  $E$  是目镜,  $O$  是缩短筒长后的物镜,  $R$  就是转象系统, 它使筒长变长. 若要求象点  $B$  到  $R$  的距离大于  $B$  到  $O$  的距离, 那么转象系统的孔径又将太大, 这时又须再加一个转象系统. 一般而言加长的长度为  $B$  到  $O$  的两倍时加一组, 加长四倍时须用两组.

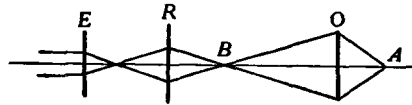


图 2.14

我们前面导出的通光孔径必需值, 是由分辨能力决定的. 但并非所有情况都如此, 例如照象物镜相对孔径的增大几乎纯粹是出于增加象面照度的要求, 在一系列投影系统中也是如此.

以上这些对孔径和长度的讨论还远不是全面的, 因为光学系统总不是只为观察轴上一点用的, 在考察轴外点的时候, 孔径限制也影响到视场限制. 很明显, 当物、象及光学系统都位于一根等粗的筒内时, 要求视场直径大于容许的筒径无疑是不合理的, 如 § 4.3 中若要求能够看到视场直径 10 而通光孔径又要小于 10, 就是不可能

的。不仅如此,由于要使轴外点发出的光束能通过各透镜组,透镜除了应该具有让轴

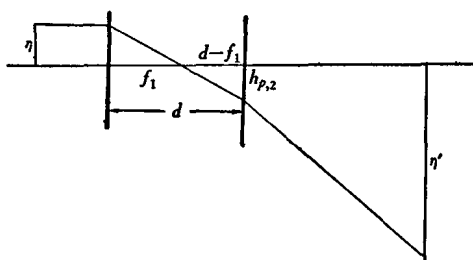


图 2.15

上光束通过的孔径外,还须多出轴外主光线需要的孔径,在 § 3.3 的投影物镜中如设入瞳在无限远 (这是一般轮廓投影物镜的共同要求,在这种条件下不致因工作物安放位置误差而影响倍率不准),则由图 2.15 可见:当物高  $\eta=10$  时,主光线在第二透镜上的高度  $h_{p,2}$  是  $10 \times \frac{d-f_1'}{f_1'}$ . 将

§ 3.3 中的一些结果继续算出表列如下.表中还列出了  $NA=0.1$  的轴上光束高度  $h_2$ .由此表可见,当  $\eta=10$ ,  $NA=0.1$  时,轴上光线高度几乎是无足轻重的.此时最适宜的  $M_1$  应为 1 或 0.5,但当  $\eta=1$ ,  $NA=0.1$  时,则二者可相比,此时  $M_1=2$  或 3 最好.

$M_1$	1	2	3	4	5	
$-h_{p,2}$	8.1	18	27.4	37.5	47.6	$\eta_1=10$
$h_{p,2}/f_2$	1.0	1.3	1.5	1.8	2.2	
$h_2$	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	$\eta_1=10$
$h_2/f_2$	-0.1	-0.05	0.03	-0.025	-0.02	

因为入射高度大于焦距的结果几乎是不可能的 (用极度复杂的多组透镜也许能够实现),因之  $\eta_1=10$ , 一般是达不到的,我们应该限定  $\eta_1$  在 1—2 之间.此时由上列数据分析,  $M_1=2$  是最恰当的.

这个实例表明了所有光学系统中轴外光束的一般情况,它说明系统的长度太长一般是不利的.长度加长对轴上光束的高度影响或许不大,而对轴外光束则不然,长度太长一般导致主光线太高.于是有人认为光学系统的视场是此光学系统总长度的线性函数,总长越长视场越小.但是这种论断也并不全对,假如高度虽高但此透镜的焦距也长,那么此透镜的相对孔径也并不一定就大,实际经验的结论也是如此.

假使对工作距离没有要求,这种投影物镜是可以设计得更完美的.一般来说外形要求的作用总是如此,它总使设计受到束缚,因此根据使用条件提出最合适的外形要求是非常重要的.

用详细的焦距分配和各相关因素影响的实际计算来回答这类问题最为恰当,用高斯光学公式导出上面所需要的一切关系显然毫不困难,但有了表示式并不意味着

討論方便。

上面是对于中間不成象的复合透鏡組作出了論断，这种論断似乎也适用于那些具有中間轉象系統の場合，实际上并非如此。因为这也是經常遇到的情况，因此下面举一个例子作較詳尽的討論。

#### § 4.4 轉象系統和場鏡

由上节的例子已可看出光瞳不在透鏡上时必然带来的影响——使主光綫高度升高，亦即相对孔径增大，这对于設計是不利的。我們在上面是由焦距分配情况的改动来求得良好的分配的。对中間成过实象的光学系統当然也有这种情况，但是我們可以在中間象面上或其附近加一透鏡——場鏡，它将前面系統的出瞳成象在后面的轉象透鏡組上，也就是使主光綫通过后面的轉象透鏡組中心。因場鏡处于象面位置或其附近，因此对軸上光束的焦距分配并无多大影响，但却能大大影响主光綫光路。

实际上，假若沒有場鏡时上节中实现細而长的通光管道的方法——轉象系統就不能真正成功，这是由于軸外光束不能通过之故，如图 2.16。下面用一个数字的例子来闡明这一点。

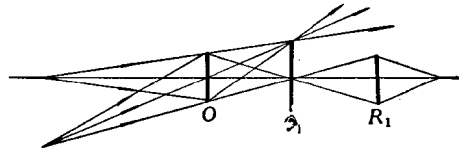


图 2.16

作一个視場  $40^\circ$ ，望远鏡倍率  $1\times$  的瞄准鏡，要求此瞄准鏡长 2000，鏡管内徑不能大于 30。

如图 2.16， $O$  是第一个将远处物体成象的物鏡，由于总倍率是  $1\times$ ，它的通光直径 2—3 也就够了，由于軍用仪器不免要在受震动等不良条件下使用，它的出瞳应稍大以使眼的位置稍有变动时还能看得清楚，所以取光瞳直径为 8。为使物鏡相对孔径不大， $O$  的焦距当然越长越好，越长也有利于达到所需的筒长，但由于視場有  $40^\circ$ ，而象面的直径又应小于 30，故它不能长过一定限度：

$$f'_0 \leq \frac{30}{2 \tan 20^\circ} = 41.2.$$

令  $f'_0 = 40$ ，此时相对孔径为  $1:5$ （轉象系統接受的孔径角因而也是  $1:5$ ）这是不难达到的。假若此处得出的相对孔径大于  $1:4$ ，我們就可以认为是不适宜的，这时需要减小瞳孔直径或者放大管徑。

注意图 2.16，設入瞳在  $O$ ，則斜光束經過  $\Phi_1$  后就散开，因之在  $\Phi_1$  处應該放一場鏡，它把物鏡  $O$  成象在轉象系統  $R_1$  上，这个場鏡就起了使散开的光束聚攏的作用

(光瞳处在其他位置,例如处在  $R_1$  上时也是如此,场镜使光束在位置  $\Phi_1$  不散开,从而可使  $O$  的直径减小)。

(由以后各章的结果可知场镜对象差的作用有下列几方面:当透镜与象面重合时除了产生一定量的 Petzval 和以及由此衍生的畸变外,不产生其他象差.由于要求的焦距为定值,故 Petzval 和几乎是定值.畸变则可以由透镜的弯曲状况而变更,因之实际上可用来校正系统的畸变.当场镜不与象面完全重合时,它当然对光焦度发生影响,但基本的作用还是在光瞳位置和轴外光束位置方面.此时它也就可以产生一些其他象差,对于整个系统的象差校正发生有利影响,在某些目镜中就是这样,这时场镜是目镜的重要组成部分.)

场镜的作用就是如此。

轴上光束孔径角是  $1:5$ ,为使第一转象系统的孔径不超过  $30$  距离  $\Phi_1 R_1$  应为:

$$\Phi_1 R_1 \leq 30 \times 5 = 150.$$

令  $\Phi_1 R_1 = 150$ , 这距离越长越好,这样才能少用几个转象系统,并且转象系统负担的视角与场镜的光焦度都因之减小,这些都是有利于设计的。

转象系统一定是取一倍的,这是因为放大不可能——象面直径不能超出管径; (当然,后部管径可以加大的系统中,放大就是合理的) 缩小则无谓地增加了本身的光焦度,并且还使以后的转象系统光焦度增加,长度减短,增加了种种不必要的麻烦。

一倍的转象系统还有种种型式,简单的作法是用单组透镜,此时斜光束可以毫

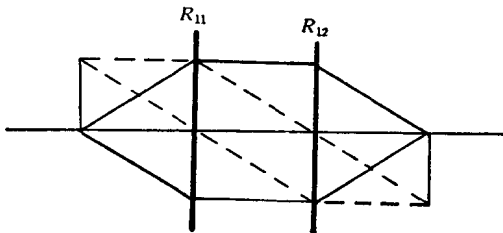


图 2.17

不损失,但是一般目镜的最大视场斜光束是很少全部通过的,多数只通过  $1/2$  到  $1/4$ . 为了少用转象系统,可以用分离很大距离的转象系统,如图 2.17.

当两组透镜很近时斜光束几乎完全通过,当两组间有很大间隔时,斜光束就被拦去很大一部分,我们取拦剩  $1/4$  的转象系统以求达到尽可能长的长度. 由于是一倍系统,且  $R_{11}$  与  $R_{12}$  之间的光线是平行的,上面选定的距离  $150$  也就是  $R_{11}$  与  $R_{12}$  的焦距,故最大视场光束在  $R_{11}$  中的倾角就是  $15/150 = 0.1$ , 故  $R_{11}$  和  $R_{12}$  中间拉开的距离是:

$$\overline{R_{11}R_{12}} = 30 \times \frac{3}{4} / 0.1 = 225.$$

因此一个转象系统的总长度就是  $525$ , 四个这样的转象系统的总长即超过  $2000$ .

在一个轉象系統与下一个轉象系統之間也要放場鏡，这样才能使以后的轉象系統比軸外光束通过。这种轉象系統的光栏在兩組透鏡的中間，故其入瞳在距离  $R_{11}$  为 750 处而其出瞳則在距  $R_{12}$  为 750 处。

場鏡的目的即在使前一系統的出瞳成象在后一系統的入瞳上，在光路很长的复合光学系統中，場鏡通常是很重要的。假若光綫在入射时即已散开，則必然使入射高度增高，对設計不利。

### § 5 反射系統的雜光、孔徑及視場

为使所成的象不成在物体与光学系統之間而成在光学系統之后，一般具有反射面的光学系統都作了偶数次反射（絕大多数是两次）以达到这个目的。由此就引起了光束遮拦，光瞳不重合和雜光等問題。反射光学系統虽然在象差方面和減縮长度方面有它突出的优点，但上述問題使其使用範圍和所能达到的性能都受到限制。如图 2.18，正常光路的光綫（图中实綫）經過两次反射后成象在象面  $A$  上，但未經反射的光綫（图中箭头綫）也同时进入，这就是雜光。虽然正常光路的光束成象良好，但是雜光形成的亮背景的作用就和象差一样。另外还有比較次要的（易于消除的）四次反射的光綫进入（图中虛綫）。

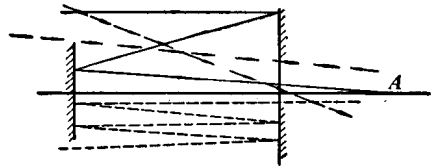


图 2.18

为了消除未經反射而进入的雜光，虽然有很多可用的方法，但是还没有一个是完善的。从下面的例子可以看出，視場越大，問題越难解决。因此現在真正实现的反射系統視場都很小。下面以一个  $f=1000$ ，长 200，相对孔徑 1:5 的反射望远物鏡为例討論視場和遮拦比的关系。物鏡基本結構如图 2.19 所示，以  $\Phi$  表示通光直徑，由于

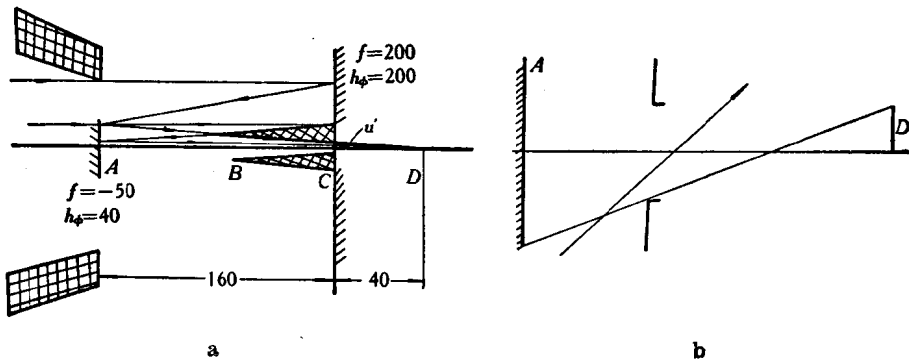


图 2.19

中心遮拦  $40:200=1:5$  是无法避免的,  $(\Phi_A = \overline{AD} \times u' = 200 \times \frac{1}{5} = 40)$  现在就考察在这种遮拦情况下不受杂光干扰的视场。由图 2.19 可知, 假若不加杂光光栏的话, 视场中心点也不能免除杂光。通常所加的杂光光栏如图中网纹部分所示, 加杂光光栏的原则可表达为: 将正常光路所不通过的部分全部用不透明介质充塞。当这样还不能解决问题时, 它们可以适当地充塞到正常光路中, 但须使正常光路受到尽可能少的遮拦影响。

现在的杂光光栏的尖端就在边缘光线和中间光线的交点  $B$  处, 容易算出  $B$  点形成一个直径 24, 距离  $A$  为 80 的环, 因此由图 2.18 可以看出此时恰好不受杂光干扰的象面直径是零, 即只有中心点才恰不被干扰。为能有一定大小的视场, 须减小  $B$  的直径或加大  $A$  的直径。前者使边缘光线不能进入, 因此是不可行的; 加大  $A$  则使遮拦加大。按图 2.19a 算出的反射镜  $A$  的直径和象面  $D$  的直径间的关系列于下表:

象面直径	0	10	20	30	40	50	100	150
视 角	0	34'	68'	1°40'	2°15'	2°50'	5°40'	8°30'
$A$ 直径	40	47	54	60	67	74	107	140
直径遮拦比	1:5	1:4.2	1:3.7	1:3.3	1:3.0	1:2.7	1:1.9	1:1.4

由此可见要达到  $2^\circ$  的视场, 光束在直径方面须拦去  $1/3$  (能量为  $1/9$ ), 这还是很合用的。视场  $5^\circ$  也还可用, 此时能量损失是 20%, 但若用作瞄准用望远镜就不很好了 (低对比分辨能力降低——见第十一章)。

上面的结果是在杂光光栏直径和位置都不变的条件下算出的, 实际上  $B$  点可以沿边缘光线移动, 移向  $C$  的方向是不利的 (杂光进入的可能增加), 但当  $A$  的直径加大时则向  $A$  移动是可能的。例如当  $A$  的直径为 100 时可算出环  $B$  的直径为 34, 当距离  $A$  30 时, 象面可有直径 340, 张角  $19^\circ$ 。但这是在仅仅考虑杂光和遮拦比这两个因素时得到的结论, 当我们再考虑到其它问题时就会发现这种看法是不对的, 实际上视场  $5^\circ 40'$  也不容易做到, 这是由于光瞳位置不当之故, 不难用作图法来判明这点。

按照理想光学系统的性质作出每次反射所成的象, 那么光线在镜面反射后即应通过相应象点, 于是每次反射后的光线光路即可作出, 从而判定各反射面应有的直径以及杂光能否进入。作图可在方格纸上进行, 如图 2.20 所示。由图可知得到  $5^\circ 40'$  的视场是可能的。此时轴上点能量通入 75%;  $5^\circ 40'$  的光束能通入的量则随反射镜孔径而定, 当第一反射镜直径 400 时, 可以全部进入, 当第一反射镜直径 280 时进入 50%, 当直径 200 时则只能进入 20%。虽然如此, 直径 200 还是可行的, 视场再加大

就不大現實了。

上面的作圖是在雜光光柵距第二反射鏡 60 時作出的，這個結果相當於光柵就在雜光光柵附近 (A 和 B 的中間) 時的情況。

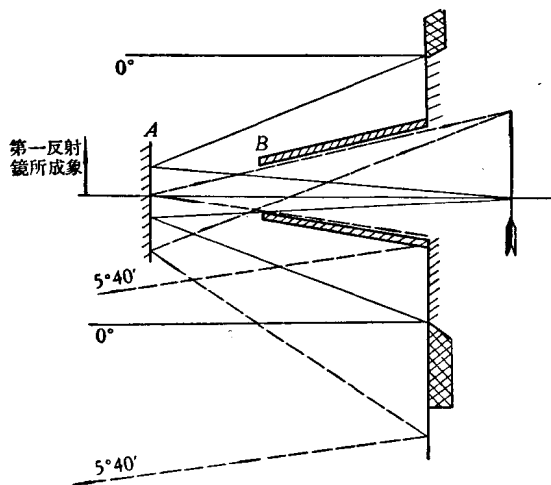


圖 2.20

對於一個 5× 的反射望遠鏡，情況和上面討論的例子基本一樣，只不過筒長縮短五倍，並且更簡單一些。具體結構如圖 2.21。當 A 鏡的直徑為  $\Phi$  時雜光光柵邊緣點 B 的坐標  $y$  是：

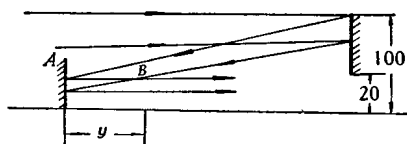


圖 2.21

$$y = \frac{8000}{\Phi} - 40.$$

恰無雜光的總視場角  $\theta$  是：

$$\theta = \frac{\Phi - 40}{y} = \frac{\Phi(\Phi - 40)}{8000 - 40\Phi} = \frac{\Phi(\Phi - 40)}{40(200 - \Phi)}.$$

結果列如下表：

$\Phi$	40	50	60	70	80	90	100
$y$	160	120	93	74	60	49	40
$\theta$ (弧度)	0	0.083	0.214	0.42			
$\theta$ (度)	0	4.7°	12°	24°			

由此看來，為達到一定視角時所須的中心遮擋似乎要小得多，因而能允許的視場角似乎很大。但當考慮到光瞳問題時，這種結論就須大大修正。在圖 2.21 中仍然只畫了 5°40' (0.1 弧度) 的光綫，為使此視場通過光學系統的光束能達到 50%，第一反射鏡直徑仍須 300，而在直徑 200 時仍然只能通過 20%。同時為使斜光束通過，中心遮擋直徑仍然需有 100 左右。

由此可見，用這種方式要想達到 6° 以上的視場而同時又要求體積不大，遮擋不多，簡直是辦不到的。

追究问题的原因时,我们可以说:这是由于杂光和杂光光栏引起的光瞳位置很不恰当的原故。要是我们能够使第一个大反射镜作入瞳,而且它中间开的孔就是出瞳,那么情况就会好转。但这能不能做到呢?如果运用场镜,这是可能的,但这将引起设计

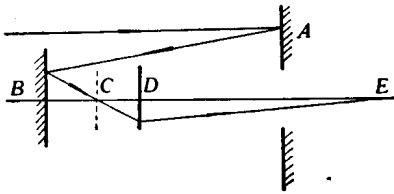


图 2.22

上的其他困难,此时基本结构如图 2.22。转象系统  $D$  最好处在第一反射镜  $A$  附近以免  $A$  中心打孔过大。场镜  $C$  可将  $A$  成象在  $D$  上,于是不再有杂光问题发生。若透镜组  $D$  的倍率越大则反射镜  $A$  的焦距越短(设  $B$  为平面镜),系统的长度也就越短,但  $A$  和  $D$  承受的相对孔径也就越大,例如系统的总相对孔径为  $1:5$ ,而  $D$  的倍率为  $5\times$ ,则两组均需有  $1:1$  的相对孔径。另外,长度也由  $C$  到  $E$  的距离决定,共轭距越短则  $D$  组所负担的视场角越大,由此可见只有用大相对孔径大视场的转象物镜  $D$  才能利用这种结构达到缩短长度的目的。

这就是长焦西,大视场而要求长度短所引起的問題。

### § 5.1 光路偏折的折反射系统

为使象不成在物体和光学系统之间,数次反射当然是必要的。但是上节的方案并不是唯一可能的。如果利用光路偏折的性质,不使所有的反射面的轴都在同一条直线上时,可能的方案就非常多了。但是当我们考虑到非同轴光学系统象差的复杂性(见第九章;第十章 § 4)将引起设计上的困难时,我们就只考虑采用平面反射镜作为偏折光路的元件。此时最基本的方式如图 2.23a, 2.23b, 即先为平面反射,后为凹面反射,或反之。形式(a)的焦面应接近平面镜中心以减小中心孔。此时物镜的尺寸显然不能小于焦距。看来它仅在小视场大孔径的情况下有用。为使其长度短于焦距,唯有应用 § 3.1 中正负光焦度分离的方式才有可能,而第一次聚焦的正光焦度看来只能由透镜来完成。这就使 § 4.1 所述的二级光谱仍然变成设计中的困难问题。但是在采用反射面产生光焦度的情况下二级光谱是可以校正的。这是由于可以采用任意大的负光焦度来产生负的二级光谱,而其光焦度则可用反射面来补偿的原故。Kern 设计的一个长度略短的系统,如图 2.23c,即符合这个原则。其中正透镜组  $A$  产生的光焦度大于总光焦度,反射镜  $B$  产生负色差与  $A$  的色差相校正从而使总结果的二级光谱为零。由于两组分离消色差,故倍率色差未校正而用透镜组  $C$  消去。简化这种结构的可能之一是将  $B$  作成消色差的而光焦度之负值恰可消去  $A$  的二级光



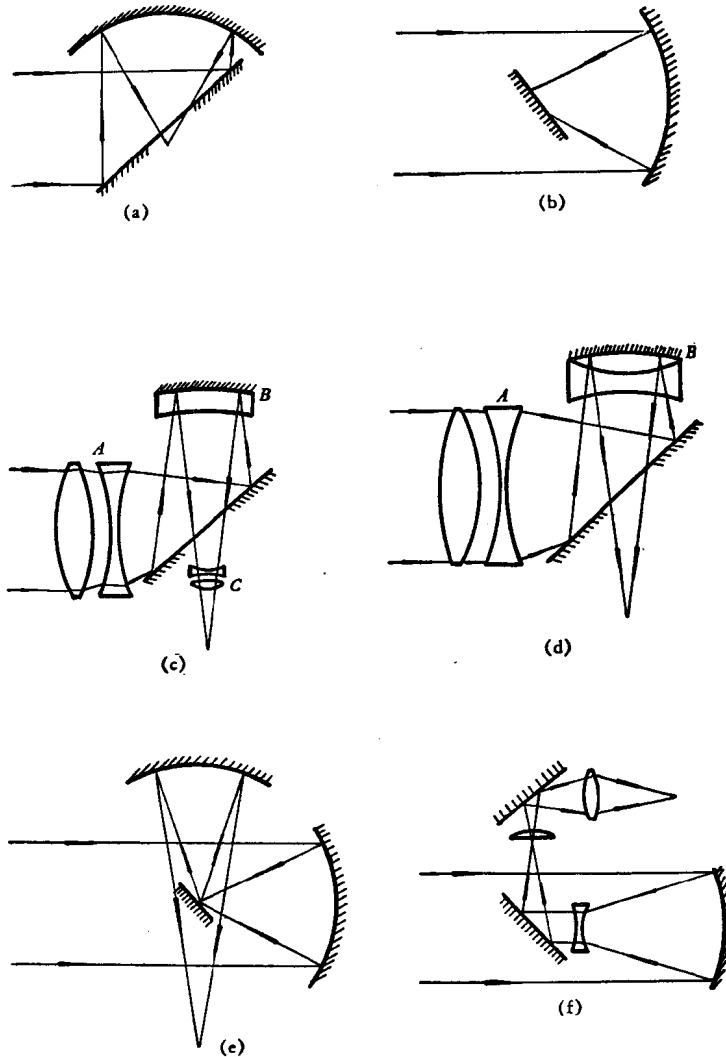


图 2.23

譜,如图 2.23d.

图 2.23b 的形式就是古老的牛頓望遠鏡。平面鏡應處在焦點附近以減小尺寸, 但當它很靠近焦點時, 象面引出的問題就須仔細考慮。Kern 採取了一種很為特殊的方式, 如图 2.23e。實際結構比图 2.23e 更為複雜<sup>[2]</sup>。由於光束經第二次凹面反射後直徑縮小(這是使長度短於焦距所絕對必須的), 因之平面鏡的擋光影響仍然不會很小。在光路中採用負透鏡可以使情況改善, 第一次反射雖形成大相對孔徑(這是使長度大大減短所必須的), 但折射后就使孔徑角變小而易于引出。它所产生的負的二級

光谱可被第二次放长焦距的正透镜所除去。这种结构如图 2.23f。

显然这些光路弯折的结构都可以避免杂光进入，而且在小视场时中心挡光可以很小。但是它们也都不能用作大视场的光学系统，其基本原因是总有一次成象在光路中，于是在视角大时必然使挡光加大。但是无论如何，光路弯折的情况比前面光路不弯折者有利得多，而结构(f)对于实现长度远小于焦距并同时校正所有象差是有利的。

采用轴对称系统之半组成假的偏心系统时，中心挡光的影响可以完全除去。但它的設計要困难得多。原因在于：設計是要对加倍的相对孔径来进行的。

### § 6 正象和光路转折

在光学仪器中往往要求光学系统成出的象与原物的方向一致，以便使用者能迅速正确地判读而不致因判读错误而发生相反的校正动作。于是就有了正象的要求。光路转折则是为了光学系统易于安置在仪器中，尽可能适应整体外形以缩小整个仪器的体积。当透镜结构已定后，象的正倒也就决定。假若与要求不合，则需改动透镜系统的结构或使用适当的反射镜或反射棱镜系统来达到目的。总之视方便和简单易行为选择何种方法的依据。另一方面，光路转折总须用反射镜或反射棱镜来达到。

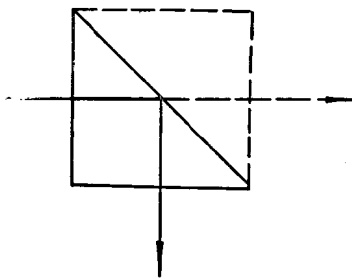


图 2.24

全反射棱镜比表面镀铝的反射镜耐久，且装配方便。加之反射镜面在斜反射时，常会引起偏振和吸收，故通常都用全反射棱镜而不用反射镜。为使棱镜对象差的影响能被透镜组校正，这些棱镜的总的折射作用应当等价于垂直光轴的平行平板。如图 2.24，即入射和出射的光轴都与表面垂直。在平行光束中有时也应用等价于倾斜平行平板的棱镜。

单个平面镜反射所成的象与原物不同，常称为镜象，它与原物相对于镜面对称。

两个平面镜的总作用相当于使物体绕此二面的棱作一旋转，转角为此二面角的两倍（倒象就是将原物转过  $180^\circ$  时所得）。

最常遇到的是二面角为  $90^\circ$ ， $60^\circ$ ， $45^\circ$ ， $30^\circ$  等情况。图 2.25 表示入射光线与棱垂直的情况，这种情况最为简单、直观。常用这种双镜代替各种场合下的单镜以求得正象的效果，并常由此组成各种屋脊棱镜及多角棱镜。

当入射光线不与棱垂直时，二次反射就都在空间进行，此时一般不易直观地看出最终的效果。以半个 Porro 棱镜为例，它是由两个  $45^\circ$  棱镜组成，如图 2.26a，光线

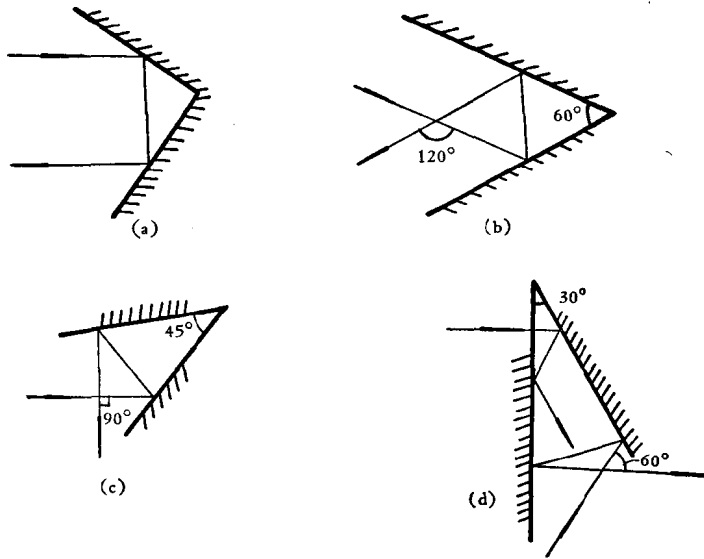


图 2.25

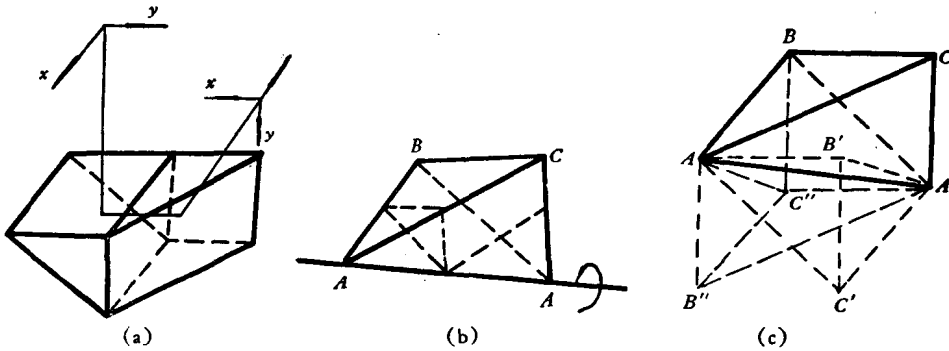


图 2.26

的方向轉折  $90^\circ$ ，同时象也作了  $90^\circ$  的轉动。这两个反射面实际所夹的二面角是  $60^\circ$ ，象是由物体繞图 2.26b 所示的棱  $AA$  轉过  $120^\circ$  的結果，这一点一般是感觉不到的。这类問題宜以适当的坐标系用作图法作出各单次反射結果(如图 2.26a)再輔以一些必要的計算得出。

經過仔細分析，有可能直观地看出反射的效果等价于轉过  $120^\circ$ 。首先把图 2.26b 中的四面体看作是一个立方体的一部分，如图 2.26c。棱  $AA$  是立方体的对角綫，將此立方体繞  $AA$  旋轉一定角度后  $B$  轉到  $B'$ ， $C$  轉到  $C'$ ，再旋轉則成为  $AAB''C''$  四面体，再旋轉就仍回復原位。由此可見綫  $AA$  与  $B, B', B''$  等三点組成了对称于  $AA$  的三个面，此三面間夹角一定都是  $120^\circ$ 。而且还可以看出  $AAB$  面和  $AAC$  面所夹的

二面角是  $60^\circ$  (因为由图可见整个空间被这种面分为 6 等分), 因此根据前述, 光线为此二面反射后应相当于绕棱  $AA$  转过  $120^\circ$ , 故如光线沿  $CA$  方向入射, 则反射后的方向就是  $C'A$ , 这个结论与上面得出的一致. 由此可见 Porro 棱镜等价于夹角  $60^\circ$  的双反射镜.

用矢量形式的反射定律来讨论这种问题较易得出完满结果, 但有时仍嫌太繁. 而且当没有直观概念时不易对计算结果作出实际效果的解释. 用解析几何方法有时更为清楚些, 在下节将作一些具体讨论.

棱镜的作用所以往往不能一眼看出, 或一下就想出各种情况下最简单而又满足要求的棱镜, 是由于我们的空间感觉不够的原故.

### § 7 全反射棱镜的物象关系

本节将通过一些全反射棱镜的实例来表明其物象关系及设计时应考虑的一些问题.

例 1. 将光束方向转折  $90^\circ$  (从下面所举的方法可以看出, 本题中的“ $90^\circ$ ”实际可以是一个任意的角度). 为完成这个要求可以用单个反射面, 两个反射面, 三个反射面以致多个反射面来完成. 它们各附带产生不同的其他后果. 如图 2.27a 用单个反射面实现此目的时只须令反射面法线方向  $\vec{r}$  处在原方向  $\vec{q}$  和要求方向  $\vec{q}'$  的平分角线上, 令二反射面法线分别和  $\vec{q}$ ,  $\vec{q}'$  重合即得所需的棱镜. 由此再来决定所有的棱镜角度显然是不困难的 (图 2.27b).

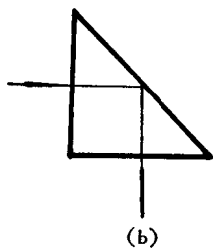
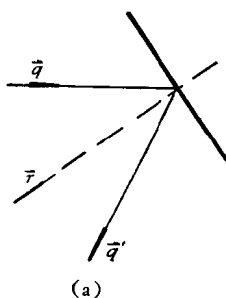


图 2.27

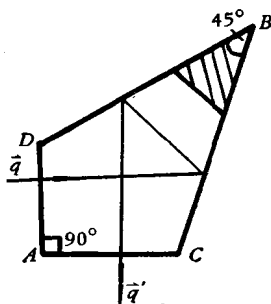


图 2.28

如果采用两个反射面且两反射面的法线都在  $\vec{q}$ ,  $\vec{q}'$  所定的平面内时, 由上节中关于双反射面作用的叙述就可以知道此二面夹角应为  $45^\circ$ , 且棱线和  $\vec{q}$ ,  $\vec{q}'$  均垂直, 这就是一般的五角棱镜, 如图 2.28. 图中阴影部分表示无用的不通光部分, 通常被切去. 棱镜以棱线  $B$  为轴转动时,  $\vec{q}$ ,  $\vec{q}'$  夹角不变, 但  $\vec{q}'$  并不是不运动, 它将随转动而

作平移。另外,当棱线  $B$  在运动时  $\vec{q}'$  亦随之而转动,亦即方向变化,当然它和  $\vec{q}$  的夹角也不再是  $90^\circ$  了。

当二反射面夹角为  $90^\circ$ , 而且棱线在  $\vec{q}, \vec{q}'$  所定平面内时,它的作用就和一平面镜相当。因之图 2.27 中的反射面完全可以用所谓屋脊面来代替,如图 2.29a, 图中  $BB$  为屋脊棱,阴影表示屋脊面,图 2.29b 中画出了此棱镜的立体图,图中的虚线是图 2.27b 的直角棱镜。

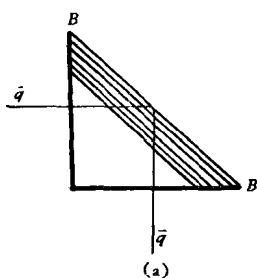


图 2.29

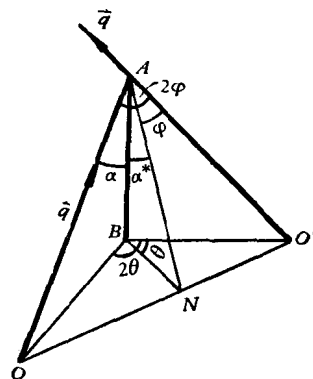
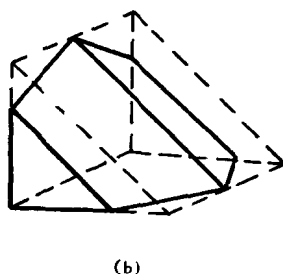


图 2.30

不单是夹角  $45^\circ, 90^\circ$  这两种双反射面能使  $\vec{q}'$  相对  $\vec{q}$  转折  $90^\circ$ , 在上节中曾被详细讨论过的夹角  $60^\circ$  的 Porro 棱镜也可使光束转折  $90^\circ$ 。更广泛地说,任何夹角在  $45^\circ$  到  $90^\circ$  之间的双反射面棱镜都可以达到使  $\vec{q}$  相对  $\vec{q}'$  转折  $90^\circ$  的目的。实际上,当棱镜二反射面夹角  $\theta$  已定后,象相对物而言绕轴转角  $2\theta$  也就定了;由对称考虑,棱线在  $\vec{q}, \vec{q}'$  所定平面内的投影必与图 2.27a 中的法线  $\vec{r}$  重合,而转角  $2\theta$  的投影则应等于  $\vec{q}$  和  $\vec{q}'$  夹角的补角,由此即可完全决定棱线所在的方向。为导出上述讨论的解析表示可参看图 2.30。图中  $AB$  为棱线方向,  $OB, O'B$  均垂直于  $AB$ , 两者夹角  $2\theta$ ,  $BN$  为其平分角线;  $OA, O'A$  即入射和出射光线方向  $\vec{q}, \vec{q}'$ ; 二者夹角  $2\phi$ 。  $OB$  线被两反射面反射后成象为  $O'B$ ,  $O$  点成象为  $O'$  点,故  $OA$  反射后成象为  $O'A$ 。  $AN$  就是  $OA, O'A$  的平分角线(单反射面的法线  $\vec{r}$ ), 控制角  $\angle BAN = \alpha^*$  或  $\angle OAB = \alpha$  就一定可以使角  $2\phi$  的投影为  $2\theta$ , 即要求  $\sin \alpha = \sin \phi / \sin \theta$  或  $\sin \alpha^* = \tan \phi / \tan \theta$ 。这就证明并具体实现了取任意双反射面使光束转折角  $\phi$  ( $\phi < \theta$ ) 的要求。注意前述  $90^\circ$  屋脊棱镜不是直接由上式求出的解,它是特殊的。

所有双反射面棱镜,当两反射面构成的棱线不动时  $\vec{q}'$  也不动,亦即棱镜以此棱线为轴转动时不影响出射的方向(至于其位置,在单纯双反射面的情况下也作平移;对于棱镜则因它等价于平行平板,由于平行平板的转动将使  $\vec{q}'$  作附加的平移)。但棱线本身转动时方向亦将变化。这一点由图 2.30 中所作的考虑来看是很清楚的。

也可以使用三个反射面使光路转折  $90^\circ$ 。最简单的方式就是将图 2.28 中五角棱镜的一个反射面如  $BC$  改为屋脊面,  $BC$  为屋脊棱, 令其棱和原棱  $B$  正交即可。这种棱镜的出射方向对棱镜转动的敏感性和普通五角棱镜没有区别。为看出这一结果, 可考虑棱镜以  $BC$  棱为轴转动, 则  $\vec{q}$  为屋脊面反射后的方向不变, 但因反射面  $BD$  的法线因整个棱镜绕  $BC$  转动而转动, 故  $\vec{q}$  被屋脊面反射后再被  $BD$  反射后的方向必将发生变化。由此可见, 只有第三面  $BD$  的法线方向平行于屋脊棱  $BC$  时,  $\vec{q}$  三次反射后的方向才不会因棱镜转动而变。这种三面相互都垂直的棱镜即所谓“三镜”。它使出射方向恒与入射相反, 象和物体相对于棱尖具中心对称性, 因此, 这种棱镜的位置的特征就是棱尖的位置。象由于棱尖移动而加倍平移, 但不转动。(和单反射面的运动特性比较!)

多个或单个反射面对光路转折的作用及它们的运动对光路的影响大致就是如此。

例 2. 将倒象变为正象。前已提及, 将倒象转过  $180^\circ$  就成为正象。因之, 将物象空间的二直角坐标轴  $xy$  看作光线时, 要求棱镜的正象作用就是将此二光线方向都转折  $180^\circ$ 。由于夹角  $90^\circ$  的双镜具有此种特性, 如图 2.31, 因此它就是最简单的正象系统。一般光学系统中所使用的成象光束, 其中心线总是和物面正交的, 即可以用另一直角坐标轴  $z$  来代表成象光束。这样一来我们就可以看到这种简单正象系统的不完善处: 光束大部分不会被棱镜所反射。

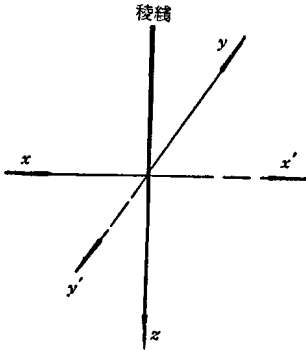


图 2.31

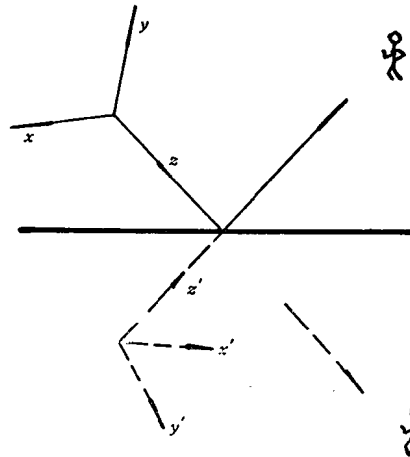


图 2.32

交角  $90^\circ$  的双镜对于一般的入射角而言, 也起不完全的正象作用, 如图 2.32 所示。原观察者正对  $z$  方向观察时  $y$  向上  $x$  向左, 但正对  $z'$  方向观察时  $y$  向下  $x$  向右。

所以相对这两个观察位置而言,正象的目的达到了;双镜在正象的同时使光路方向弯折.实现这种目的的棱镜显然就是例1中图2.29所示的屋脊棱镜.由于它和简单的直角棱镜的正象性质不同,我们可以想见前例中的各种多反射面系统虽在光路转折方面的性能全同,但正象性质是有差异的.

为了补救单纯屋脊棱镜的上述缺陷可以想出多种多样的方法,其一是采用折射,如图2.33所示.图中反射面是屋脊面, $BB$ 是其棱.这种棱镜的缺点是太长——长度约为通光孔径的四倍到五倍,而且等价于不垂直于光轴的平行平板,因此不很合用.

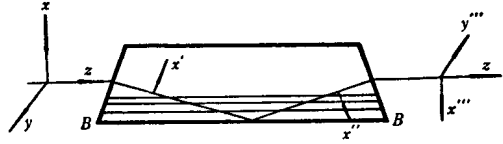


图 2.33

一种单次反射成镜象的 Dove 棱镜倒时常出现于仪器中.它和图2.33的屋脊棱镜的区别在于  $BB$  面是简单反射面.其作用不在于成一个镜象,而在于当镜面依  $zz$  线为轴转动时反射象将双倍转动,而光束方向则不变.因之,这种元件可用于光路方向作运动的仪器中,用它来校正光路方向运动而伴生的象转动.

为了补救单纯屋脊棱镜正象的缺点,也可以使用反射.但单用一次反射是不够的,它虽能使光路方向还原但必同时使象成为镜象.可能的一些基本光路形式及体现这种光路形式的棱镜表示如图2.34,图中以两横表示屋脊面,一圈代表单次反射.方法分为三大类,区别在于光路方向变更的次序:钝角—钝角—锐角,钝角—锐角—钝角,锐角—锐角—锐角;同一类中又因角的大小不同而不同,当锐角等于零度时就成为一般所知的 Porro 棱镜.对这种特殊情况来说,四次反射可以用四个小棱镜分别完成,如图所示.图中也画了 Schmidt 棱镜,可惜它的出射方向不能和入射方向平行,它的优点是体积特别小.

一般为光路转折目的而使用的棱镜,如无特殊必要,当然应该用最简单的即直角棱镜.为判断复杂光学系统中经过大量棱镜反射后的象的正倒转动情况,完全可按图2.35a的光路例子来考虑.图中作出了各次反射后坐标系变动的情况.最后可根据象的正倒要求将某些简单反射面代以屋脊面或五角棱镜之类即可.图2.35a的例子是一个仪器的读数系统,它各部分光路的大致长度和空间中的地位是由机械结构所决定的.图中的直角坐标系  $\xi\eta\zeta$  是为易于看出光路的空间方向而作的.图中标出了各个零件号.“1”是两支相同的尺,随仪器的部件在两个方向的运动而运动,它是光学系统读数的对象.它们被物镜“2”成象于分划板“3”,分划板“3”是读数定位的标准,采用合适的刻线图形可使定位精度为尺的格值的千分之一.棱镜系统的布置不

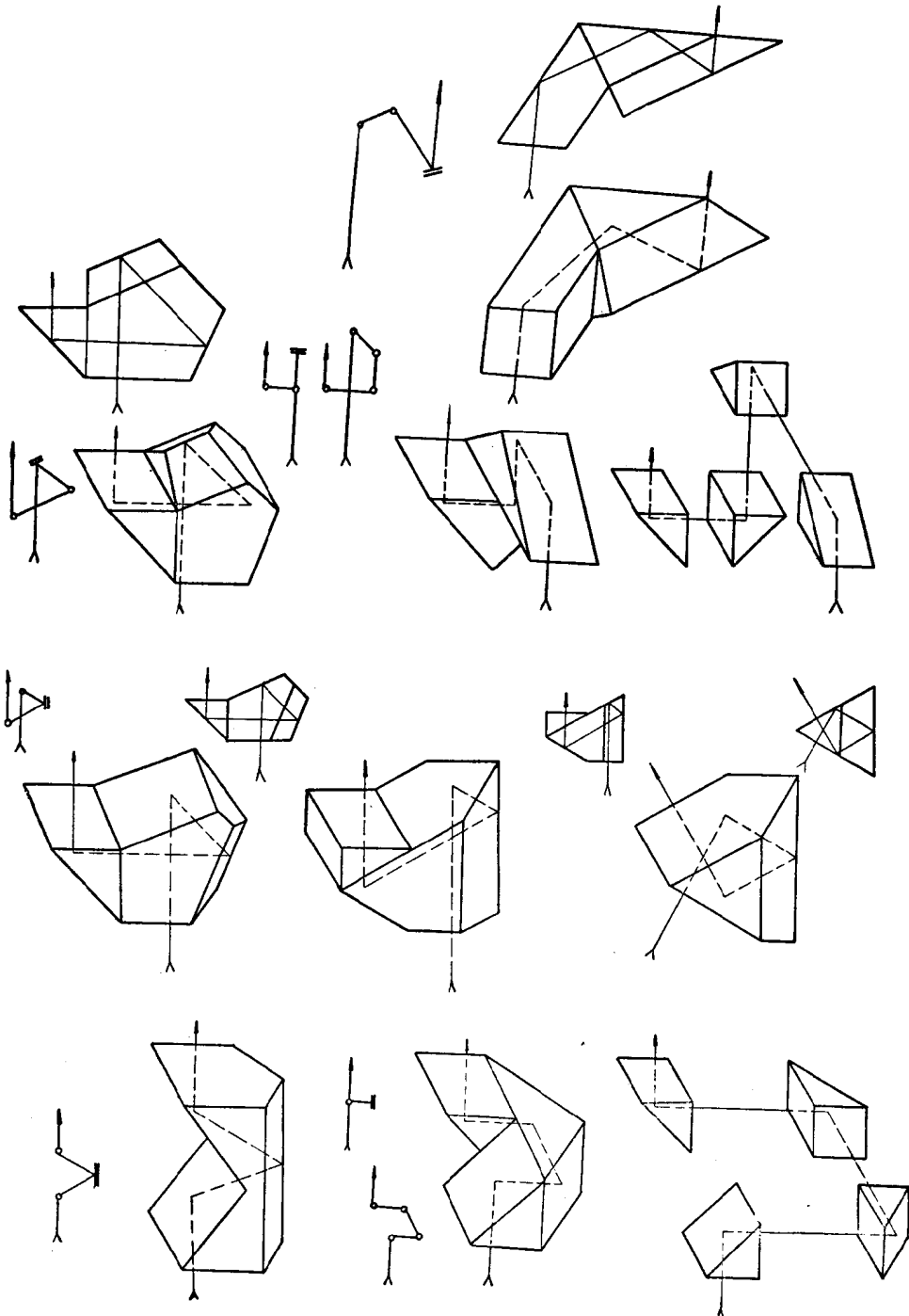


图 2.34



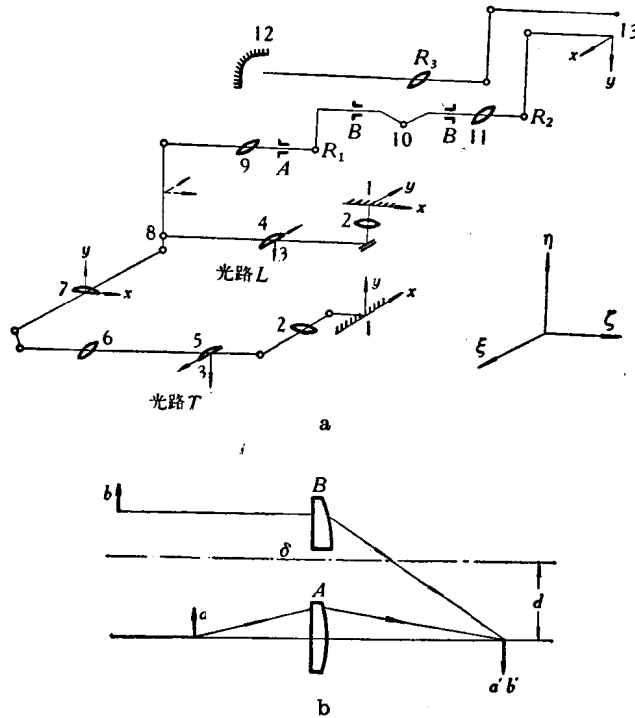


图 2.35

单保证了光路的位置,而且保证了两条光路中两块分划板“3”的形状相同.分划板上附有场镜“4”或“5”,目的是为保证入瞳“2”与以后的通光孔重合 (§ 4.4).由于光路  $T$  远比光路  $L$  的长度长,因之在光路  $T$  中采用  $1\times$  转象系统“6”以将“5”成象于场镜“7”;“7”和“4”相对于可移开的棱镜“8”是等光路长的,它们都处在物镜“9”的焦面上.移去“8”则观察“7”,移入“8”则观察“4”.由“1”发出的光束被“9”变成平行光束,通过以后的光路  $R_1$ ,然后被透镜“11”聚焦到场镜“13”以供观察.“9”,“11”组成一转象系统.光路  $R_1R_2$  和  $R_3$  随仪器的一部分绕轴  $A$  转动.光路  $R_3$  将不动的分度盘“12”也成象在“13”,它是用来标出仪器的转角的.转动时,尺“1”的象相对于场镜“13”转动,而度盘“12”的象则不动.为避免二象相互干扰,采用了 Dove 棱镜“10”,它依轴  $B$  作方向与轴  $A$  相同但角速度减半的转动,从而使尺的象相对“13”不动.图中的坐标系  $xy$  的方向相当于 Dove 棱镜反射面法线在  $+\xi, +\eta$  象限内,并在  $\xi, \eta$  轴的平分角线方向.

为使不同光路 ( $R_2$  和  $R_3$ ) 的两个不同的入瞳位置在最后都与眼瞳重合,场镜“13”就必须由两个不同焦距的透镜组成;不仅如此,透镜之一的离轴度  $\delta$  也必须恰

当,如图 2.35b 所示.不然将引起上下错开,选择适当的焦距和离轴度就可以使两个不同入瞳的象在左右上下前后都相互重合.

例 3. 光路转折时象的转动. 将例 1 中的直角棱镜、五角棱镜、屋脊棱镜和  $60^\circ$  棱镜的成象情况表示于图 2.36, 由图可见其不同的性质. 奇次反射成镜像, 偶次反射的物、象相似, 但随情况不同而转角不同.

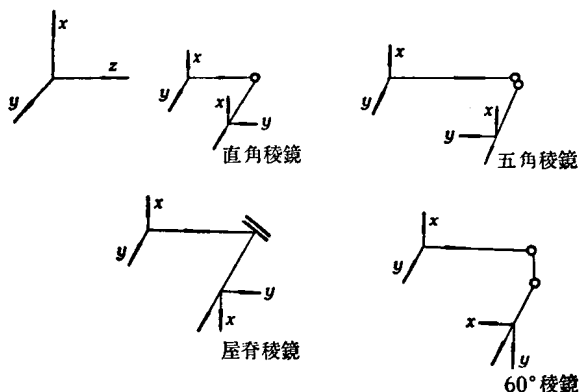


图 2.36

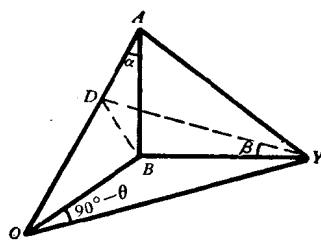


图 2.37

图 2.30 表示了一般的双镜成象, 象的转动情况可由图 2.30 直接看出. 想象物面坐标轴  $Y$  垂直于棱  $AB$  同时也垂直于光束行进方向  $AO$ , 如图 2.37 中的  $BY$  线, 则  $Y$  轴的象  $Y'$  必垂直于  $ABO'$  面, 故  $Y, Y'$  两轴均在图 2.30 的  $BOO'$  面内且夹角  $2\theta$ , 它们都相对  $\vec{q}, \vec{q}'$  决定的面  $OAO'$  夹角  $\beta$ . 故  $2\beta$  就是这种双镜相对于五角棱镜所成的象所转过的角度. 为求出  $\beta$  的大小重作图 2.30 的一部分, 如图 2.37, 图中  $BY$  即  $y$  轴, 它和  $ABO$  面垂直, 它在  $AOO'$  面上的投影即  $YD$  ( $YD$  线与图 2.36 中五角棱镜的  $y$  轴相当), 显然

$$\tan \beta = \frac{BD}{BY} \cdot \frac{BO}{BO} = \tan \theta \cos \alpha,$$

其中  $\sin \alpha = \frac{\sin \varphi}{\sin \theta}$ , 故由  $\varphi, \theta$  即可求出象的转角  $2\beta$ .

上面用解析几何的方法导出了象的转角表示. 这种方法似乎不如矢量代数方法方便. 用矢量代数计算时, 我们几乎不用作什么图形构思, 只须定出各反射面法线的方向余弦, 按反射定律  $\vec{q} = \vec{q} - 2(\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{r}$  一次次计算立即可得最后结果.

用矢量代数的缺点是会将一些本来一目了然的结果表示得看不出内在联系来. 因之解题时两类方法并用似乎是较好的.

例 4. 棱镜的线度和通光情况. 为由光束直径决定棱镜各部分的有效尺寸, 首

先要决定光束中心线在棱镜各面上的位置。对于没有空间反射的棱镜来说，这种问题是简单的，对于存在空间反射的情况一般可用所谓展开的投影图来决定。以 Schmidt 棱镜为例说明这点。

一般棱镜之所以须要决定各个尺寸，是为了尽可能缩小仪器体积，也正因为这样而切去了各个无用的棱角，例如在五角棱镜中所见。由于光束通光孔直径大小有一定要求，使棱镜具有一定体积。

Schmidt 棱镜可看作是图 2.38 的棱镜中一反射面改为屋脊面的结果，显然图

2.38 中棱镜边长  $a = \Phi / \cos 45^\circ$  即可， $\Phi$  是光束直径。至于垂直于图面的棱镜宽度则应为  $\Phi$  即可。

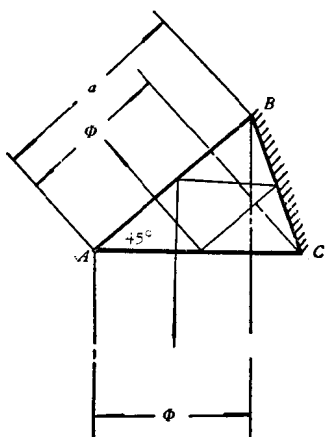


图 2.38

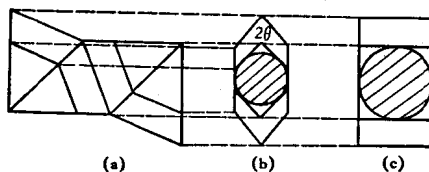


图 2.39

若将  $BC$  面改为屋脊面，并将棱处在图中  $BC$  位置，棱面相对图面对称。则棱镜的尺寸就须变动。原因在于  $AB$  面和  $AC$  面已都被屋脊面切小。此时为找出光束孔径和棱镜尺寸的关系，可如 §6 图 2.24 那样作出棱镜的展开图。而为看出各方向的光束情况，则宜作出各方向的投影图如图 2.39a，和一般机械制图方法相似。作图时只须注意单次反射等价于对称于反射面有另一同样棱镜，经屋脊面一一反射时也相同，但总结果相当于将棱镜组绕棱旋转  $180^\circ$ 。为作出图 2.39b 就须注意到  $90^\circ$  角在倾角  $22.5^\circ$  的面上的投影角  $2\theta$  满足  $\tan \theta = \cos 22.5^\circ \times \tan 45^\circ$ ，故  $\theta = 42^\circ 35'$ 。用作图法很容易得到此时应有的棱镜长度和宽度。显然宽度仍然应为  $\Phi$ ，但长度 ( $B$  点到边  $A$  的距离) 则显然大于非屋脊棱镜时的  $\Phi / \cos 45^\circ$ 。为比较起见也画出了非屋脊棱镜情况下的一个投影图 (图 2.39c)。

屋脊棱镜有较严的  $90^\circ$  公差 (见第十章)，制造是不方便的，因此在有些仪器中避免使屋脊处在通光孔内，以降低  $90^\circ$  的精度要求。由于通光孔偏在一方就使棱镜体积更加加大，图 2.40 表示出这种情况下棱镜尺寸与通光孔径的关系。考虑到光管在

进入棱镜和射出棱镜时直径不同，尤其当棱镜体积加大、光路加长时更是如此，因之图 2.40 的棱镜一般在两方相对棱线不对称，而且此时光束的投影不须完全躲开棱线，而只须它在遇到棱线时的直径不与棱线相交即可。由于这种原因，不必按光束最大直径来设计，这样可使体积略小。

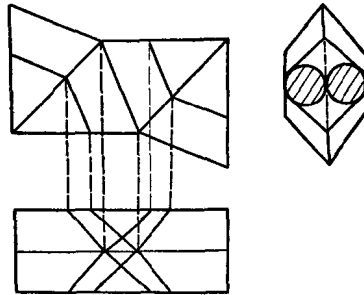


图 2.40

要想把上述讨论用解析公式表示出来是过分繁复了，而按一个任意尺寸作出棱镜的各个投影图，用作图法求出通光直径和这些尺寸之比，从而由通光直径决定棱镜尺寸，这种做法则很容易。当然如果一些简单关系能够表示成一些关系式时则计算比作图方便。例如为求屋脊面与另外两个棱镜面的夹角(为加工，这种角度应给出)，再如为确定光束在棱镜面上是否全反射以决定应镀银或不须镀。这种计算都易于由矢量方法得出。决定了各面的法线在合适的坐标系内的分量表示后，由矢量间标积即可得出法线或光线间夹角的余弦。

采用矢量方法计算棱镜角公差比较方便，在第十章中计算了屋脊棱镜的  $90^\circ$  公差。

### 参 考 文 献

- [1] 例如：杜德罗夫斯基，A. H.，光学仪器理论，第一卷，科学出版社(1958)，第八章 § 87，第 249—252 页。
- [2] Lotmar, W., Recent Swiss Developments of Reflecting Telescopes, Proceedings of The London Conference on Optical Instruments 1950, Chapman & Hall Ltd. (1951), p. 181.

## 第 三 章

### 球差、正弦条件

#### §1 象差的轉面倍率;球差的各种表示

当我们看到一个光学系统存在象差,亦即由一点发出的光束经光学系统折射后不再相交于一点时,我们当然希望知道象差产生的原因,或者说要分析各个结构因素中哪些是产生象差的主要原因,哪些是次要原因。这就要求把此象差的最后数值分解为各个折射面分布值之和。

为讨论各个折射面对最终象差的贡献,须考虑象差的轉面倍率问题。

若光束在第  $i$  面前原有象差  $A_i$ , 经过第  $i$  面折射后象差变为  $A'_i$ ,  $A'_i - A_i$  并不能看作是第  $i$  面产生的象差;例如当被折射的所有光束都处在第  $i$  面的近轴区域时,  $A'_i$  和  $A_i$  一般也是不相等的,所有綫段之长均将按轴向或垂轴的倍率放大或缩小,因此象差经过折射而发生的大小变化量并不就是新产生的象差。各折射面上产生的象差  $A_i^*$  应该是原象差  $A_i$  乘以轉面倍率  $M_i$  后与  $A'_i$  之差,即:

$$A_i^* = A'_i - M_i A_i. \quad (1)$$

当所定义的倍率  $M_i$  变动时,显然此面所产生的象差  $A_i^*$  也将随之而变,选择和定义一个恰当的倍率是讨论象差分布的重要问题之一,它将决定分布值的大小是否合理,计算是否方便。从上面的讨论已可看出,合理的倍率一定应以理想系统的倍率作为其近似值。

现在首先讨论最简单的象差,即轴对称光学系统轴上点发出的光束的象差。我们可以在球面上作出与光轴同心的圆周带,由于对称性,通过同一带的光綫折射后必相交于光轴上同一点,因之只须用一个量即可表征这种光束的特性。通常采用远轴光綫截距与近轴光綫截距之差数,称为轴向球差。为算出同轴球面光学系统的球差,只须用(I.16)或(I.26)计算远轴光綫光路,用(I.27)或(I.28)算出近轴光綫光路即可。但如前所述,为看出各个折射面对最后结果的贡献,须先选择一个适当的轴向球

差倍率.

軸向球差即是軸向的截距差, 因此倍率应以軸向小綫段的理想倍率 (I.40) 或 (I.41) 作为其近似值:

$$m_i = \frac{n_i u_i^2}{n_i' u_i'^2}, \quad (2a)$$

$$= \frac{n_i l_i'^2}{n_i l_i^2}; \quad (2b)$$

或

$$m_i = \frac{n_i u_i u_{pi}}{n_i' u_i' u_{pi}'}, \quad (3a)$$

$$= \frac{n_i l_i' l_{pi}'}{n_i l_i l_{pi}}. \quad (3b)$$

我們以后将看到, 初級象差理論中直接就是以(2)式作为軸向象差的倍率的.

由于角度在轉面时不变, 因此以角度作为倍率的組成部分如(2a), (3a)是較合宜的, 在轉过多个面时, 中間的角度都相消去, 只余下最初和最后的角度; 包含截距的倍率公式(2b), (3b)就沒有这种簡便的性质.

A. E. Conrady 在討論所謂球差的絕對分布时所采用的倍率是(3b)式的推广, 即以实际光綫在折射前后的截距代替了公式中一条近軸光綫的截距. 因此, 将他的公式应用到很多个面时, 由于中間的量不能两两相消的原故, 分布值的公式就很繁, 不合用. 按照 Conrady 由公式(I.16)和(I.28)即可得出<sup>[1]</sup>:

$$LA' = LA \frac{n'l'L'}{n'lL} + 2 \frac{n}{n'} (L-r) \frac{l'L'}{rL} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(I'-U) \sin \frac{1}{2}(I-I')}{\cos \frac{1}{2}(I'-U')}, \quad (4)$$

式中符号  $LA$  代表軸向球差:

$$LA = l - L, \quad LA' = l' - L'. \quad (5)$$

Conrady 认为(4)式将球差分解为两部分, 前半段表示入射光束原有球差乘以轉面倍率, 而后半段則为此折射面新产生的值. 要用这个式子表示出最終球差中第  $i$  面的貢獻是困难的, 須乘以一串  $n'l'L'/n'lL$  的連乘积.

实际上 A. Kerber 早在 1897 年就找到了一个更为簡洁的公式, 他称之为“微分公式”<sup>[2]</sup>. 其实质是选择

$$M = \frac{nu \sin U}{n'u' \sin U'}, \quad (6a)$$

即(3a)式之推广, 作为軸向球差的倍率而得的球差分布公式. 由于它轉面方便和計

算簡單，我們认为是一个理想的表示式，我們將以此为基础討論有关球差的一切問題。若用  $\Delta^*$  表示新球差，則：

$$LA' = LA \frac{nu \sin U}{n'u' \sin U'} + \Delta^*, \quad (6b)$$

两边乘以  $n'u' \sin U'$  得：

$$n'u' \sin U' LA' = nu \sin U LA + \frac{1}{2} S_-, \quad (6c)$$

式中  $\frac{1}{2} S_-$  是  $\Delta^*$  和  $n'u' \sin U'$  之积。于是对这个象差倍率來說，不产生新象差时， $nu \sin U LA$  是个轉面不变量；而  $\frac{1}{2} S_-$  就是变动的原由。而且由(6)式有：

$$n'_k u'_k \sin U'_k LA'_k - n_1 u_1 \sin U_1 LA_1 = \frac{1}{2} \sum_1^k S_-, \quad (7)$$

因之当得到了  $S_-$  的表示式后，欲比較各折射面对最后結果的貢獻就很容易了。(7)式已經將球差之所以不是轉面不变量的原由表达为各折射面影响之和。

現在來求分布值  $S_-$  的表示式。由(6)式有：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} S_- &= n'u' \sin U' LA' - nu \sin U LA \\ &= n'u' [(l-r) - (L-r)] \sin U' - nu [(l-r) - (L-r)] \sin U \\ &= n\dot{i}r (\sin U' - \sin U + \sin I' - \sin I), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} &= n\dot{i}r (\sin U' + \sin I' - \sin U - \sin I), \\ &= n\dot{i} (L' \sin U' - L \sin U), \end{aligned} \quad (9)$$

$$= n\dot{i} PA \left[ \cos \frac{1}{2} (I' - U') - \cos \frac{1}{2} (I - U) \right], \quad (10)$$

$$= 2n\dot{i} PA \sin \frac{1}{2} (I' - U) \sin \frac{1}{2} (I - I'), \quad (11)$$

$$= n\dot{i} \frac{L \sin U (\sin I' - \sin U) (\sin I - \sin I')}{2 \cos \frac{1}{2} (I - U) \cos \frac{1}{2} (I' + U) \cos (I + I')}. \quad (12)$$

在分析 T. Smith 的計算方法时已导出过上述公式的一部分(I.22)。由上列表示式可見，計算出折射面对最終象差的貢獻  $S_-$  是很容易的事。其中有些表示为大数相減，因而准确度与原光路計算精度相同，可作为光路計算的一种校对；另一些則表示为小量相乘，故可由光路計算結果算出比光路計算更准确的象差系数。球差分布值  $S_-$  与 Conrady 的分布值(4)式虽很不相同，但也有一些因子是共同的，而其近似值(角的正弦以弧度代替，余弦以 1 代替……)則完全一样。

球差分布值与  $ni$  成正比, 这表示球差分布值是与“参考点”之选择有关的(所谓参考点就是与任意光线光路相比较的理想物点和象点), 这种关系是合理的。

折射产生的球差分布值  $S_-$  与折射产生的光程差  $W$  (I.81) 非常相象, 其差别仅在于以  $\sin I$  代替  $i$ , 并增加了一串余弦乘积为分母(前一个替代可认为是参考点选在远轴光线焦点的结果), 因之“ $S_-$ ”几乎就是光程差(或球差的波象差表示), 这一点是可以由球差分布值相加得出最终球差值的旁证。

Kerber 球差分布公式的特点是: 所选的倍率使球差辗转多面时表达方便, 分布值表示式简单, 球差和参考点选择的关系表示得明显而清楚。

还有一些作者采用其他的倍率作为象差转面倍率<sup>[3]</sup>, 并未有更简单的结果。

我们采用(6c)而不采用(6b)作为基本公式, 其原因就在于使表示式中各部分的因次都与波象差一致. 从而得到的是转面不变量[如拉氏不变量的几种表示式(I.30), (I.40)和现在得到的球差  $S_-$ ]. 这种表示方式显然比较方便, 能使讨论和表示都简化, 这种方法是下面将一贯采用的。

### § 1.1 球差的正负

由(12)式, 球差的正负由  $niL\sin U(\sin I' - \sin U)(\sin I - \sin I')$  的符号决定. 后面的讨论中设  $i$  与  $\sin I$  同号. 先讨论  $r > 0$ ,  $PA > 0$  ( $L\sin U > 0$ ),  $n' > n$  的情况. 此时球差的正负就由  $I$  的正负和  $(I' - U)$  的正负决定. 按上列条件, 仅当  $L$  处在区间

$$0 < L < r \text{ 内时, } \sin I < 0;$$

而且仅有  $L$  处于区间

$$0 < L < \frac{n'+n}{n} r \text{ 内时, } (\sin I' - \sin U) < 0;$$

这是由于

$$\begin{aligned} \sin I' - \sin U &= \frac{n}{n'} \cdot \frac{L-r}{r} \sin U - \sin U \\ &= \frac{n}{n'} \sin U \left( \frac{L}{r} - \frac{n+n'}{n} \right). \end{aligned}$$

由此可见, 当  $r > 0$ ,  $PA > 0$ ,  $n' > n$  时有:

$$\left. \begin{aligned} L < 0 \text{ 或 } L > \frac{n+n'}{n} r \text{ 时 } L\sin U' - L\sin U > 0; \quad S_- > 0 \\ 0 < L < r \text{ 时 } L\sin U' - L\sin U > 0; \quad S_- < 0 \\ r < L < \frac{n+n'}{n} r \text{ 时 } L\sin U' - L\sin U < 0; \quad S_- < 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$



至于其他条件下,球差 $S_-$ 的正負都可根据上述結果推得:如 $n' < n$ 則因 $(I - I')$ 变号故球差恰反号;若 $PA < 0$ 則因 $I, U$ 均反号,故結果与 $PA > 0$ 时全同;再考虑到 $\sin U$ 不变而将 $r, L$ 同时反号时 $I$ 不变,故球差 $S_-$ 恰反号,这样一来,所有可能状况的球差符号均可由(13)式引伸而得.

现将所有的状况加以归納得下列重要結論:

1. 折射面在使光束会聚时( $PA > 0$ 时 $U' - U > 0$ ,  $PA < 0$ 时 $U' - U < 0$ )必然产生正球差,反之必然产生負球差. 但有一区域例外,在此区域内折射而使光束会聚时反产生負球差,反之亦然. 称此区域为反常区域,此区域是:

$$1 < \frac{L}{r} < \frac{n' + n}{n},$$

此区域的二端点球差等于零.

2. 正透鏡面( $n' > n$ 时 $r > 0$ ,  $n' < n$ 时 $r < 0$ )产生正球差,負透鏡面产生負球差. 但除反常区域例外外,尚有半反常区域也例外,半反常区域是:

$$0 < \frac{L}{r} < 1.$$

反射面既无反常区域,亦无半反常区域.

用上述結論就可由光束通过光学系統的表现形象来判定象差的产生状况.

反常区域的端点之一满足 $I' = U$ 者称为不晕点,这是由于它不但无球差,而且还满足正弦条件使軸外点也成出理想象之故. 关于正弦条件将在后面論及.

## §2 初級球差

(12)式虽然比(4)式簡單得多,但因式中含有很多三角函数,因之不能作为解析討論的依据. 就象需要以高斯光学作为成象特性的粗略討論的依据一样,象差理論的合理基础是可供解析討論的粗略理論——初級象差理論. 就如高斯光学一样,粗略的輪廓的描述是更具原則意义的基本理論. 初級象差理論是从高斯光学走向細致和完整的一步,而高級象差理論則又是它的补充.

在导出(12)式时,我們并未对近軸光綫和实际光綫的关系作什么規定,它們只須是通过同一光学系統的两条光綫就可. 現在我們設远軸光綫也充分靠近光軸,近軸光綫則与它在同一点发出并且初始角 $u_1 = \sin U_1$ ,則当略去高次小量时,可将(12)式中所有远軸光綫量以相应的近軸量代替而得出球差近似表示式:

$$\left. \begin{aligned} n'_k u_k^2 L A'_k - n_1 u_1^2 L A_1 &= \frac{1}{2} \sum_1^k S_1, & (a) \\ S_1 &= l u n i (i' - u) (i - i'); & (b) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

其中  $S_1$  是作上述替代后  $S_{-}$  的近似值。

用(14)式, 我們仅須計算一条近軸光綫光路即可得出远軸光綫的球差的大致数值。由于計算方便, 就为分析球差产生的原因創造了良好的条件。

由(14)式可見, 对整个光学系統而言, 当  $l$  不变而  $u$  角增加时, 球差  $LA'$  随  $u^2$  而增加, 亦即随相对孔徑(对单个面来說, 指入射高度与半徑之比, 对整个光学系統来說, 指通光口徑和焦距之比)的平方正比地增加。当  $u$  角不变而将此光学系統作整体按比例放大时, 因  $l$  和  $r$  之比不变, 故  $i$  也不变, 因而  $i'$ ,  $u'$  等角度均不变, 可見球差随尺寸放大而正比放大。  $LA'$  与此光綫的  $u'^2$  成正比, 即与此光綫的  $\sin^2 U'$  成正比。

另一方面, 当我们用(14)式討論一个具体光学系統中的某个折射面时, 我們可以变更此面的半徑、折射率差等等, 但同时又变更其他因素, 以使对整体来說  $u'_k$  之值是定数, 則此折射面对最終球差的贡献, 亦即(14)式中的  $S_1$ , 与入射高度成正比。它有时与相对孔徑的三次方成正比( $u$  很小时, 即光綫近于平行入射时), 有时与二次方成正比(当  $u \gg i$  时, 即物距很近时)。也就是說: 球差与相对孔徑的关系是比較复杂的, 为了更清楚了解各个因素对  $S_1$  的影响, 将(14b)式作一些变换。

用符号  $h$  表示入射高度  $lu$ , 則

$$\frac{h}{r} = i + u.$$

因此可将(14)式表示为相对孔徑和  $i$  的函数或相对孔徑和  $u$  的函数。

$$\begin{aligned} S_1 &= h n i \left( i + i' - \frac{h}{r} \right) (i - i'), \\ &= h (n i)^2 \left\{ \frac{h}{r} \left( \frac{1}{n'} - \frac{1}{n} \right) + n i \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (14c)$$

或

$$\begin{aligned} S_1 &= h n i \left\{ \left( 1 + \frac{n}{n'} \right) \left( \frac{h}{r} - u \right) - \frac{h}{r} \right\} \left( 1 - \frac{n}{n'} \right) \left( \frac{h}{r} - u \right)^2, \\ &= \frac{n^2}{n'} \left( 1 - \frac{n}{n'} \right) h \left( \frac{h}{r} - u \right)^2 \left( \frac{h}{r} - \frac{n' + n}{n} u \right), \\ &= \frac{n^2}{n'} \left( 1 - \frac{n}{n'} \right) l \left( \frac{l}{r} - 1 \right)^2 \left( \frac{l}{r} - \frac{n' + n}{n} \right) u^4. \end{aligned} \quad (14d)$$

下面討論几种可能的变动对球差的影响。首先将  $(lu)^4$  作为因式提出, 此时由(14d)式得

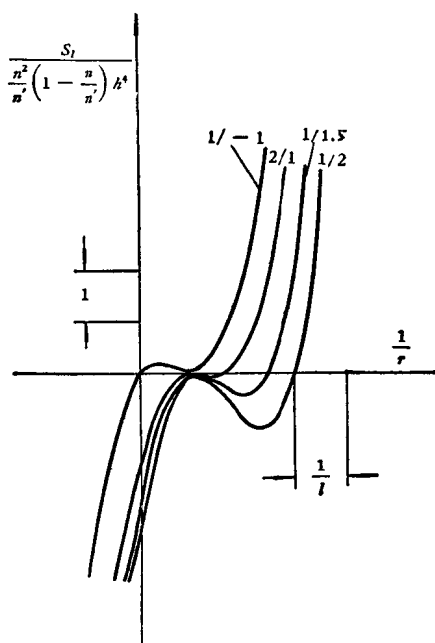


图 3.1  $n, h, l$  不变,  $r$  变化时球差变化  
(曲线上数字表示  $n/n'$  值)

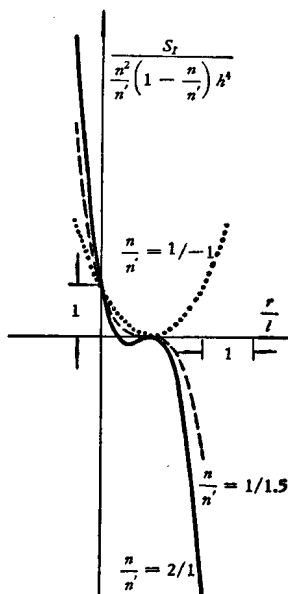


图 3.2  $n, h, r$  不变,  $l$  变化  
时球差变化

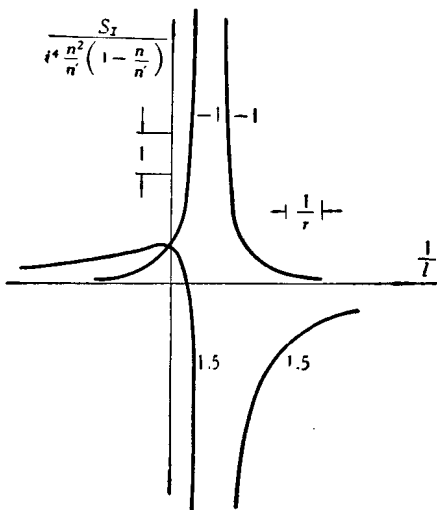


图 3.3  $n, i, r$  不变,  $l$  变化时球差变化

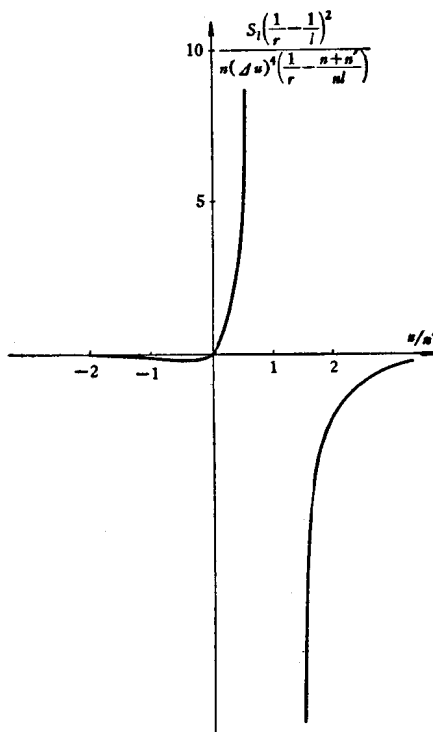


图 3.4 当保持偏角不变时球差和折射率的关系

$$\frac{S_1}{\frac{n^2}{n'} \left(1 - \frac{n}{n'}\right) l^4 u^4} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{l}\right)^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{n'+n}{nl}\right), \quad (15)$$

即球差的产生量与入射高度的四次方及折射率函数  $\frac{n^2}{n'} \left(1 - \frac{n}{n'}\right)$  成正比, 当折射率和入射高度不变时, 球差是物距倒数或半径倒数的三次函数. 以  $N$  表示  $n/n'$ , 将折射率函数表列于下:

$N$		-1	0	1/3	1/2	1/1.5	1	1.5	2	3
$nN(1-N)$	$n=1$	-2	0	0.222	0.250	0.222	0	-0.75	-2	-6
	$n=1.5$	-3	0	0.333	0.375	0.333	0	-1.50	-3	-9

至于半径或物距变化的影响则如图 3.1、图 3.2 所示. 图中画出了半径、物距函数小于 10 的范围, 画了数种折射率组合的曲线.

另一种改变方式是令折射产生的偏角  $\Delta u$  ( $\Delta u = u' - u = i - i'$ ) 不变, 此时物距  $l$  和半径  $r$  对球差  $S_1$  的影响与上列情况很不相同, 由于

$$h = \frac{i}{\frac{1}{r} - \frac{1}{l}},$$

故由(15)式得:

$$\frac{S_1}{\frac{n^2}{n'} \left(1 - \frac{n}{n'}\right) i^4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{l}\right)^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{n+n'}{nl}\right), \quad (16)$$

或

$$\frac{S_1}{n(\Delta u)^4} = \frac{\frac{n}{n'} \left(\frac{1}{r} - \frac{n+n'}{nl}\right)}{\left(1 - \frac{n}{n'}\right)^3 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{l}\right)^2}. \quad (17)$$

折射率不变时, 球差和物距的关系表示如图 3.3, 当偏角不变时, 球差和折射率的关系表示如图 3.4.

### § 3 高级球差、本征高级球差

在导出初级球差表示式(14)时, 我们作了一些假定, 基本要求是远轴光线充分靠近光轴. 于是: 第一, (12)式中可以 1 代  $\cos\theta$ , 且以角的弧度  $\theta$  代  $\sin\theta$ , 误差可略去不计; 其次是可用初始数字相同的近轴光线量代替实际量.

当光线离轴较远时, 按上述假定得出的表示式(14)就有显著误差, 我们称这个误

差为高級球差。按上述分析,引起高級球差的原因有二,我們称其一为本征的,意指它是球面固有特性;称其二为衍生的,意指它是由于入射光束已有象差的派生結果,是可由控制入射光束象差而变化的。

当入射于某一个折射面的光束无象差时,  $l=L$ , 再令  $u = \sin U$ , 則  $i' = \sin I$ ,  $i' = \sin I'$ , 故由(12), (14)得球差准确分布值的表示:

$$S_- = \frac{S_1}{2} \times \frac{1}{\cos \frac{1}{2}(I-u) \cos \frac{1}{2}(I'+U) \cos \frac{1}{2}(I+I')}.$$

以  $S_1^i$  表示高級本征球差(或二級本征球差), 則有

$$LA'n'u' \sin U' = \frac{1}{2} (S_1 + S_1^i), \quad (18a)$$

$$S_1^i = S_1 \left[ 1 - \frac{1}{\cos \frac{1}{2}(I-U) \cos \frac{1}{2}(I'+U) \cos \frac{1}{2}(I+I')} \right]. \quad (18b)$$

当我们只考虑二級本征球差时, 可将(18b)式展开而得解析表示:

$$S_1^i = \frac{1}{8} S_1 \{ (i'-u)^2 + (i'+u)^2 + (i+i')^2 \}. \quad (19)$$

由此可得結論:

- (1) 二級球差与初級球差成正比;
- (2) 二級本征球差恒与初級球差同号;
- (3) 二級本征球差的相对值  $S_1^i/S_1$  与折射面的相对孔徑平方成正比;
- (4) 无论  $i$  或  $u$  加大, 都将引起二級本征球差。

这些定性的結論对于判断一个光学系统的象差产生状况是很重要的。由这些概念, 可以从光束通过光学系统的表现形象粗略地判断出透鏡的安排方式是否适当。

为清晰了解本征高級球差与折射率, 相对孔徑, 物距等因素的关系, 以便引出更定量的概念, 在下面分別作出一些数字例子。

### §3.1 折射率和相对孔徑

为考察折射率和相对孔徑对高級本征球差的影响, 我們取物距无限远( $u=0$ )的情况为标准, 对于物距的影响将另作討論。

由(14)式,  $u=0$  时的球差  ${}^0S_1$  是:

$${}^0S_1 = \frac{n^2}{n'} \left( 1 - \frac{n}{n'} \right) i^3 h. \quad (20)$$

以  $r$  作为长度单位即  $r=1$ , 则在  $u=0$  时  $h=i$ , 故

$${}^0S_1 = \frac{n^2}{n'} \left(1 - \frac{n}{n'}\right) i^4, \quad (21)$$

故由(19)得:

$${}^0S_1 + {}^0S_1^I = \frac{n^2}{n'} \left(1 - \frac{n}{n'}\right) i^4 \left\{1 + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{n}{n'} + \frac{n^2}{n'^2}\right) i^2\right\}. \quad (22)$$

按(22)式算出一些结果如下表, 表中列出了初级球差, 二级球差和二级以上的球差, 二级以上的球差是由实际算出的  $2(L' \sin U' - L \sin U)ni$  与初级二级相减而得. 表中还有二级球差的百分数  $a$  和更高级球差的百分数  $b$ .

$$\frac{n}{n'} = \frac{1}{2}, \quad {}^0S_1 + {}^0S_1^I = 0.25i^4(1 + 0.4375i^2).$$

$i$	0.25	0.35355	0.5	0.70711
$-\Delta i = \Delta u$	0.125	0.17677	0.25	0.35355
${}^0S_1$	0.0009765	0.003905	0.01563	0.0625
${}^0S_1^I$	0.0000267	0.0002136	0.001710	0.01368
${}^0S_- - ({}^0S_1 + {}^0S_1^I)$	0.0000014	0.0000174	0.000278	0.00568
$a$	2.7%	5.4%	10.9%	21.9%
$b$	0.1%	0.4%	1.7%	6.9%

$$\frac{n}{n'} = \frac{1}{1.5}, \quad {}^0S_1 + {}^0S_1^I = 0.2222i^4(1 + 0.5278i^2).$$

$i$	0.25	0.35355	0.5	0.70711
$-\Delta i = \Delta u$	0.68333	0.11785	0.16666	0.23570
${}^0S_1$	0.000868	0.003472	0.01388	0.05555
${}^0S_1^I$	0.0000285	0.000229	0.00184	0.014665
${}^0S_- - ({}^0S_1 + {}^0S_1^I)$	0.000001	0.000019	0.00034	0.006954
$a$	3.3%	6.6%	13.2%	26%
$b$	0.1%	0.6%	2.4%	12%

$$\frac{n}{n'} = \frac{1.5}{1.6}, \quad {}^0S_I + {}^0S_I^I = 0.08789i^4(1 + 0.7041i^2).$$

<i>i</i>	0.25	0.35355	0.5	0.70711
$-\Delta i = \Delta u$	0.01562	0.02209	0.03125	0.04419
${}^0S_I$	0.0003432	0.001374	0.005493	0.02198
${}^0S_I^I$	0.0000151	0.000120	0.000966	0.00772
${}^0S_- - ({}^0S_I + {}^0S_I^I)$	0.000001	0.000018	0.000237	0.00522
<i>a</i>	4.4%	8.8%	17.6%	35.2%
<i>b</i>	0.3%	1.2%	4.3%	23%

$$\frac{n}{n'} = \frac{1.5}{1}, \quad {}^0S_I + {}^0S_I^I = -0.5625i^4(1 + 1.1875i^2).$$

<i>i</i>	0.25	0.35355	0.5	0.70711
$-\Delta i = \Delta u$	-0.125	-0.17677	-0.25	-0.35355
${}^0S_I$	-0.004394	-0.01651	-0.07032	-0.2812
${}^0S_I^I$	-0.000326	-0.00367	-0.02087	-0.167
${}^0S_- - ({}^0S_I + {}^0S_I^I)$	-0.000032	-0.00057	-0.01201	光綫全反射
<i>a</i>	7.4%	14.8%	29.7%	
<i>b</i>	0.7%	3%	13%	

$$\frac{n}{n'} = \frac{2}{1}, \quad {}^0S_I + {}^0S_I^I = 4i^4(1 + 1.75i^2).$$

<i>i</i>	0.25	0.35355	0.5	0.70711
$-\Delta i = \Delta u$	-0.25	-0.35355	-0.5	-0.70711
${}^0S_I$	0.01563	0.06250	0.25	
${}^0S_I^I$	0.001710	0.01367	0.1094	0.875
${}^0S_- - ({}^0S_I + {}^0S_I^I)$	-0.000276	-0.00569	-0.3726	光綫全反射
<i>a</i>	11%	21.9%	43.8%	
<i>b</i>	1.7%	6.71%	27%	

$$\frac{n}{n'} = \frac{1}{-1} \text{ (空气中的反射面), } {}^0S_1 + {}^0S_1^I = -2i^4(1+0.25i^2).$$

$i$	0.25	0.35355	0.5	0.70711
$-\Delta i = \Delta u$	0.50	0.70711	1.0	1.41422
${}^0S_1$	-0.007810	-0.03125	-0.125	-0.5
${}^0S_1^I$	-0.000125	-0.000980	0.00780	0.0625
${}^0S_1 - ({}^0S_1 + {}^0S_1^I)$	-0.000005	-0.00006	-0.0012	-0.0234
$a$	1.5%	3.1%	6.2%	12.5%
$b$	0.0%	0.2%	0.9%	4.0%

总括上述计算结果可得下列结论:

(1) 反射面产生的二级球差百分数与同一相对孔径 ( $h/r$ ) 的折射面相比为  $\frac{1}{3} - \frac{1}{5}$ , 而与产生同一偏角 ( $\Delta u = -\Delta i$ ) 的折射面相比则不到  $\frac{1}{10}$ . 更高级者更小.

(2) 对所有折射面而言, 更高级球差百分数  $b$  和二级球差百分数  $a$ , 大致有下列关系:

$$b = 1.4a^2.$$

(3) 对于空气玻璃交界面,  $|\Delta u| < 0.25$  时二级球差小于 30%, 更高级者小于 10%.  $|\Delta u| < 0.125$  时, 二级球差小于 8%, 更高级球差可略去不计.

(4) 胶合面产生的球差不能以偏角来量度, 而宜于以相对孔径来量度, 相对孔径大于 0.7 是不利的.

(5) 折射率差越大, 产生一定偏角时所伴生的高级球差越小, 同一的折射率差 (例如 1/2 或 2/1) 产生同一偏角时所伴生的高级球差几乎相同.

### § 3.2 物距和相对孔径

我們希望知道各种物体位置上高级象差的相对值:  $S_1^I/S_1 = \frac{1}{8} \{ (i-u)^2 + (i'+u)^2 + (i+i')^2 \}$  的大小, 找出最好的物体位置和最恰当的折射率. 为此将上列二次函数中的  $i$  全代以  $u$  和  $l$ , 而后用符号  $\Phi$ ,  $K$  和  $N$ :

$$N = \frac{n}{n'}, \quad \Phi = i+u = \frac{lu}{r}, \quad K = S_1^I/S_1. \quad (23)$$

則有

$$\begin{aligned} \frac{S_1^I}{S_1} &= K = \frac{1}{8} \{ (i-u)^2 + (i'+u)^2 + (i+i')^2 \} \\ &= \frac{1}{4} \{ (1+N+N^2)\Phi^2 - (3+N+2N^2)\Phi u + (3+N^2)u^2 \}, \end{aligned} \quad (24)$$



$$= \frac{N^2+3}{4} \left( \frac{3+N+2N^2}{6+2N^2} \Phi - u \right)^2 + \frac{3(N+1)^2}{16(3+N^2)} \Phi^2. \quad (25)$$

由(25)式可得下列結論:

(1) 在相对孔徑  $\Phi$  一定时,有一个物体位置使  $K$  为极小,此位置满足下列条件:

$$\frac{3+N+2N^2}{6+2N^2} \Phi = u, \quad \text{即} \quad \frac{l}{r} = 1 + \frac{3-N}{2N^2+N+3}. \quad (26)$$

(2) 这个最好的物体位置一般处在反常区中,即区域:

$$1 < \frac{l}{r} < \frac{n+n'}{n} = 1 + \frac{1}{N}$$

中,但  $N = -1$  或  $N > 3$  是例外.

(3) 在这个最好的物体位置上,二級球差相对值与相对孔徑平方成正比. 比例因子随  $N$  而异,由微分可得  $N=3$  时为极大 ( $=\frac{1}{4}$ ),  $N=-1$  时为极小,也就是最小 ( $=0$ ),一般  $N=1.5$  时,这因子等于 0.22 左右.

图 3.5 表示了这些变化关系.

我們虽明知高級球差相对值与物距有关,不仅仅由相对孔徑或  $i$  决定,但是为了作出简单而粗略的判断则可认为高級球差由相对孔徑完全决定. 下面用一个数字计算实例来表明这种說法在多大的范围内正确,其误差数量级又如何.

既然球差表示式(12)中  $ni$  和实际光线光路无关,在讨论时可以不加考虑,我們要讨论的只是  $\frac{1}{2} S_-/ni$ . 由方程式(14d),物距变化时对初級球差有下列关系:

$$\begin{aligned} S_1/ni &= \frac{n}{n'} \left( 1 - \frac{n}{n'} \right) h \left( \frac{h}{r} - u \right) \left( \frac{h}{r} - \frac{n'+n}{n} u \right), \\ &= {}^0S_1/ni \left( 1 - \frac{r}{l} \right) \left( 1 - \frac{n'+n}{n} \frac{r}{l} \right). \end{aligned}$$

当假定高級球差相对值不变时,高級球差也可表示为:

$$S_-/ni = {}^0S_-/ni \left( 1 - \frac{r}{L} \right) \left( 1 - \frac{n'+n}{n} \frac{r}{L} \right). \quad (27)$$

实际算出相对孔徑 0.5:1; 0.35:1 时一些物距的初級、二級球差分布值和实际分布值,与由(27)式算出者相比较,结果如下表.

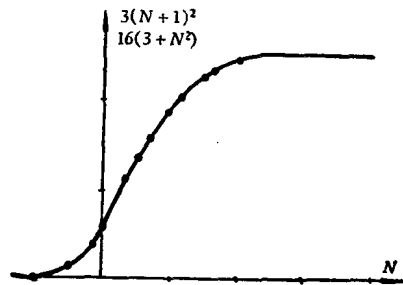


图 3.5

$$\frac{h}{r} = 0.5$$

物 距 $L$	$\pm\infty$	-10.01	-5.00	-1.94	-0.694	-0.155	0.134	0.4181	0.574	1.50	2.21	5.27	10.28
实际算出的 $\frac{1}{2} S_{-}/ni$	0.01606	0.02182	0.02817	0.05098	0.12546	0.32802	0.19692	0.06199	0.02906	-0.00353	-0.00117	0.00693	0.01106
其中初级部分 $\frac{1}{2} S_1/n_i$	0.01389	0.01827	0.02276	0.03621	0.05764	0.04563	0.03050	0.03698	0.02212	-0.00338	-0.00111	0.00630	0.00983
初级与二级之和	0.01572	0.02116	0.2698	0.04627	0.08699	0.08156	0.05040	0.05082	0.02688	-0.00352	-0.00117	0.00686	0.01089
误差 %	1.9%	3.5%	4.5%	10%	30%	—	—	16%	7%	0.3%	0%	1.0%	1.0%
按(27)式算出 $S_{-}/ni$	0.01606	0.02207	0.02891	0.05569	0.16452	2.057	1.914	0.1113	0.04004	-0.00357	-0.00116	0.00684	0.01097
误差 %	0.0%	-1.1%	-2.7%	-10%	-30%	—	—	—	-38%	1.0%	0.9%	1.3%	0.9%

$$\frac{h}{r} = 0.35355$$

物 距 $L$	$\pm\infty$	-10.01	-5.00	-1.94	-0.694	-0.155	0.134	0.4181	0.574	1.50	2.21	5.27	10.28
实际算出的 $\frac{1}{2} S_{-}/ni$	0.00526	0.00719	0.00935	0.01747	0.04839	0.1782	0.1233	0.02661	0.01116	-0.00117	-0.00038	0.00225	0.00361
其中初级部分 $\frac{1}{2} S_1/n_i$	0.00491	0.00660	0.00844	0.01474	0.03145	0.0323	0.0288	0.01991	0.00970	-0.00114	-0.00037	0.00215	0.00341
初级与二级之和	0.00523	0.00713	0.00934	0.01699	0.04215	0.0568	0.0488	0.02464	0.01091	-0.00117	-0.00038	0.00225	0.00359
误差 %	0.6%	0.8%	0.2%	2.8%	13%	—	—	7.7%	2.3%	0.0%	0.0%	0.0%	0.5%
按(27)式算出的 $S_{-}/ni$	0.00526	0.00723	0.00947	0.01824	0.05027	0.6286	0.6007	0.03645	0.01311	-0.00117	-0.00038	0.00224	0.00360
误差 %	0.0%	-0.6%	-1.2%	-4.3%	-11%	—	—	-37%	18%	0.0%	0.0%	0.0%	0.5%

上表中  $\frac{h}{r} = 0.5$  者并图示于图 3.6. 图中“×”表示初級和二級球差算出的球差, “○”为 (27) 式算出者. 由此可見, (27) 式有足够的准确度.

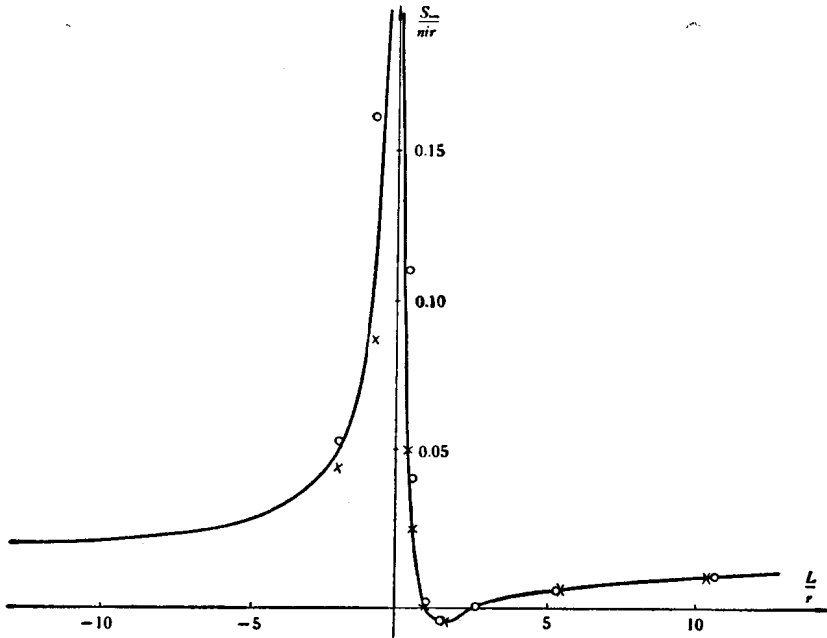


图 3.6

§ 4 衍生高級球差

上节已提及, 高級球差不单可因相对孔径增大而产生, 也可因入射光束原有象差而产生, 这样产生的二級球差以符号  $\Delta S_1^I$  表示.

現在設入射光束已有象差, 因而  $L \neq l$ ,  $\sin U \neq u$ ; 显然后者也对此面的球差有影响, 也就是說不单是光束原有的球差影响到高級球差, 而且其他象差也对高級球差有影响. 以后我們称这种引起角差别的象差为正弦差.

由 (12), (18a) 可得高級球差为:

$$S_- - S_1 = ni \left\{ \frac{L \sin U (\sin I' - \sin U) (\sin I - \sin I')}{\cos \frac{1}{2} (I - U) \cos \frac{1}{2} (I' + U) \cos \frac{1}{2} (I + I')} - lu (i' - u) (i - i') \right\},$$

其中由分母上的余弦不等于 1 而引起的二級象差已在上节討論过, 故当略去高次小量后, 衍生二級球差是:

$$\Delta S_1^I = S_1 \left\{ \frac{L \sin U (\sin I' - \sin I) (\sin I - \sin I')}{lu(i' - u)(i - i')} - 1 \right\}. \quad (28)$$

由于  $\sin I = \frac{L-r}{r} \sin U$ , 括号中的量即为:

$$\frac{L(L-r) \left( L - \frac{n'+n}{n} r \right) \sin^3 U}{l(l-r) \left( l - \frac{n'+n}{n} r \right) u^3} - 1.$$

由于  $l-L$ ,  $u - \sin U$ ,  $lu - L \sin U$  均为小量, 略去高次小量后上式成为:

$$-(l-L) \left( \frac{1}{l} + \frac{1}{l-r} + \frac{1}{l - \frac{n'+n}{n} r} \right) - 3(u - \sin U) \cdot \frac{1}{u}, \quad (29)$$

$$\doteq -3 \frac{lu - L \sin U}{lu} - (l-L) \left( \frac{1}{l-r} + \frac{1}{l - \frac{n'+n}{n} r} - \frac{2}{l} \right). \quad (30)$$

从(29)及(30)即可看出, 由于入射光束具有球差和正弦差(我們称  $u - \sin U$  或  $lu - L \sin U$  为正弦差), 可使二級球差增加或减小。(30)式与初級球差之乘积还不是純二級球差, 为得出純二級球差, 須把(30)式中  $l-L$ ,  $lu - L \sin U$  以初級球差和正弦差代替。在象差的一般理論中(第六章), 我們將用其他方法导出这种表示。

光束原有的球差可以影响折射面产生出与初級球差异号的二級球差, 但是由于球差和正弦差总是同时产生的, 并不是各种折射面产生的球差都对二級球差有“好”的效果(即和初級球差异号, 因而产生較少量的二級球差)。例如当光束有正球差( $l-L > 0$ ), 而折射情况是  $l > 0 > r$ , 則由(30)可知, 此正球差的效果是不好的, 可見只有同时使  $lu$  大于  $L \sin U$  的正球差才是好的, 这就是說,  $PA > 0$  时, 使  $L'U' - LU < 0$  而  $S_- > 0$  的折射面所产生的正球差才能使下一折射面的二級球差减小。

### § 5 为校正球差时光学系統应有的結構

首先考虑单透鏡, 当它具有焦距  $f$  和通光直徑  $2h$  时, 必然产生偏角  $\Delta u$  (实际上  $\Delta u$  是設計光学系統时先定的) 由熟知的高斯光学公式:

$$\frac{1}{v'} = \frac{1}{l} + \frac{1}{f},$$

将等式两边乘以高度  $h$ , 并以  $\varphi$  表示  $\frac{1}{f}$ , 則得:

$$\left. \begin{aligned} u' &= u + h\varphi, \\ \Delta u &= h\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

也就是焦距和通光直径决定了偏角的大小。于是须要考虑应有的偏角分配，使偏角集中在一个面还是分担在两个面上，又如何分担最好。由(17)式就能解决这个问题。在假定(17)式右方对二面相同时，最好的分配是平均分配，此时球差是将偏角集中负担在一面时所产生球差的 $\frac{1}{8}$ 。一面负担过量偏角以至另一面偏角反号当然更不利了，由于(17)式右方的折射率函数和物距函数对二面不同，故实际分配并不是真正均匀的。

由此可见，偏角由四个面平均分担时，球差又是二面分担时的 $\frac{1}{8}$ ，六面分担时降为 $\frac{1}{27}$ 。

那么单正透镜能否不产生球差呢？根据§1中球差符号的讨论，使光束收敛时恒伴生正球差，除非球面恰处反常区域。因此除非此正透镜处于收敛光束中，并且光焦度合适，不然的话恒有正球差。

为校正球差，可以利用的方式有二，即(17)式中的折射率函数差别(图3.4)，和物距函数差别(图3.3)。最通用的是前者，由图3.4可知当 $N \cong 1$ 时，微量偏角即引起大量球差，故用二不同折射率的正负透镜相胶合，此胶合面即可起校正球差的作用而不影响偏角。

由于高级球差几乎由相对孔径 $\frac{h}{r}$ 决定，故 $h$ 一定时，半径应尽可能大， $\frac{h}{r}$ 不宜大于0.5。由§3.1中的表和结论可知，单面产生的偏角不宜大于0.25。对高质量系统即残余带球差小的系统则不宜大于0.15。但反常区域例外，在这个区域内产生偏角的大小几乎可以不受限制(球差和高级球差相对值均极小)。

由§3.1中的表可以看出胶合面补偿球差的结果一定余下负的二级球差，因而边缘带球差等于零时，中间带球差是正的。

为用衍生二级球差将这种残余球差校正，可以使用正负透镜分离(不胶合)而给以一定间隔的办法。

这里的理论判断虽已能对于一些问题作出原则判断，但在定量方面是不够的，为确定结构(半径、折射率等)尚须有其他理论，以便将初级球差表达成更简便的适于讨论的形式，这将在以后述及。运用上述减少高级球差的形势判断，可以使得用初级象差理论算出的结果就是高级象差不大的结果。

## §6 相邻点波象差间的关系, 正弦条件及其他

很少光学系统是只要求轴上一点成理想象的, 一般总同时要求近轴点也成象清晰. 我们也完全可以和前面一样, 用光线光路的观点来考察轴外点成象的性质, 从而找出使轴外点同时也成象清晰的方法. 由于失对称的缘故, 轴外象差显然要比球差复杂.

此时采用波象差观点来考虑问题要方便得多. 按 Fermat 原理, 一光路光程与任一相邻光路光程之差与此二光路间距相比为二级小量. 由此可见, 在略去与象高的二次方成正比的项后, 靠近轴的轴外象点之象差与轴上点球差的差别中, 与象高的一次方成正比的项是可能由 Fermat 原理求出的, 而且 Fermat 原理可能导出的还不仅是近轴点与轴上点之差别, 一般相邻点间的象差差别也可以由此得到.

下面由 Fermat 原理出发观察任意的轴对称光学系统  $M$  中, 二相邻点发出的相邻光线的光程长度. 图 3.7 所示的  $OYZ$  和  $O'Y'Z'$  各为光学系统  $M$  的入射光瞳和出射光瞳, 后者为前者的高斯象.  $A, B$  两点是非常靠近的物空间两点,  $A', B'$  各为其高斯象点, 其间隔也是小量. 以  $A, B$  为中心在物空间作参考球面  $OP$  和  $OQ$ , 通过光阑中心  $O$ . 在象空间也作球面  $O'P'$  和  $O'Q'$ , 各以  $A', B'$  为中心. 由于  $A$  点具有象差, 由  $A$  点发出的光线  $AP$  经光学系统折射后通过  $P'$  点后不一定经过  $A'$ , 主光线  $AO$  也不一定通过  $O'$  点, 光程  $[AOO'A']$  和  $[APP'A']$  一般不相等, 其差就是光学系统  $M$  对  $A'$  点产生的波象差  $W$ ,

$$W_M(A; Y, Z) = [AOO'A'] - [APP'A'] \quad (32)$$

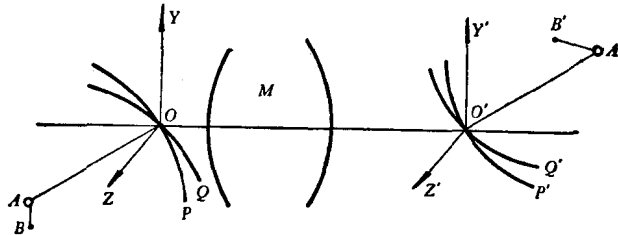


图 3.7

下角标号  $M$  表示是光学系统  $M$  所产生的.

由  $B$  点发出光线  $BO, BQ$ , 它与光线  $AO, AP$  相交于入瞳上, 即具有同一坐标  $YZ$ , 则它经光学系统折射后分别通过  $O'$  邻近和  $Q'$  点, 因象差而可不经过  $B'$  点. 光学系统对  $B$  点产生的波象差就是:

$$W_M(B; Y, Z) = [BOO'B'] - [BQQ'B'], \quad (33)$$

故

$$\begin{aligned} & W_M(B; Y, Z) - W_M(A; Y, Z) \\ &= [BOO'B'] - [BQQ'B'] - [AOO'A'] + [APP'A']. \end{aligned} \quad (34)$$

由于  $O, P$  均处在以  $A$  为中心的球面上, 故  $[AO] = [AP]$ , 同样  $[BO] = [BQ]$ ,  $[O'B'] = [Q'B']$ ,  $[O'A'] = [P'A']$ , 再由于 Fermat 原理, 光程  $[OBB'O'] = [OAA'O']$ ,  $[PAA'P'] = [PBB'P']$ , 因之(34)式成为:

$$W_M(B; Y, Z) - W_M(A; Y, Z) = [Q'P'] - [QP]. \quad (35)$$

(35)式表示出一个重要的一般结论, 即当距离  $AB$  是小量时, 由这两点发出的波面经光学系统折射后, 光学系统对这两波面上光栏坐标相同的两点产生不同的程差(象差), 此程差之差与因参考点同时由  $A$  点移到  $B$  点和由  $A'$  点移到  $B'$  点所引起的程差  $[Q'P'] - [QP]$  相等. 上述讨论显然是和第一章 §4.1 末所述非常相似的.

由参考点作小量位移而产生的波差已在第一章 §4.4 讨论过, 由此即可得出光轴上二相邻点间的波差差别和轴上点与轴外点的波差差别. 首先考虑轴上点的垂轴位移, 亦即轴上点和近轴的轴外点之象差差别.

如图 3.8, 物空间中与入射光瞳相交于坐标  $(\Theta, \Psi)$  的光线, 经光学系统折射后在象空间与出射光瞳交于坐标  $(\Theta', \Psi')$  的点, 则以  $A$  点和  $B$  点为球心所作的参考球面之间距按(1.72 e)式是  $n\eta \sin \Theta \cos \Psi$ ; 其中  $\eta$  即物高  $AB$ . 同样, 当  $A'B' = \eta'$  时, 以  $A'$  和  $B'$  点为球心所作的参考球面之间距为  $n'\eta' \sin \Theta' \cos \Psi'$ , 故由(35)式得:

$$W_M(B; Y, Z) - W_M(A; Y, Z) = n'\eta' \sin \Theta' \cos \Psi' - n\eta \sin \Theta \cos \Psi. \quad (36)$$

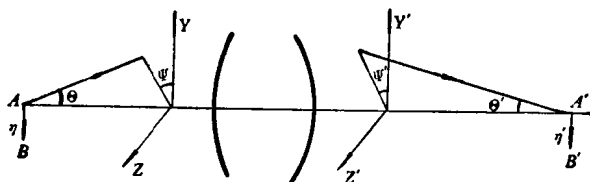


图 3.8

因  $A', B'$  是  $A, B$  的高斯象, 故有  $j = n'\eta'u' = n\eta u$  其中  $u$  是  $A$  点所发出的近轴光线与轴的夹角. 再由于  $A$  点在轴上, 故所考虑的光线均属含轴面内光线, 因之折射面和子午面的夹角  $\Psi$  是常数, 即  $\Psi' = \Psi$ , 因此(36)式可写作:

$$W_M(B; Y, Z) - W_M(A; Y, Z) = j \cos \Psi \left( \frac{\sin \Theta'}{u'} - \frac{\sin \Theta}{u} \right). \quad (37)$$

由轴上点近轴光线光路计算可算出  $u$  和  $u'$ ，而由轴上点实际光线光路计算可得到  $\Theta$  和  $\Theta'$ ，从而由 (37) 式即可得到轴外点  $B$  的波象差。当  $A$  点原无球差时，近轴光线和远轴光线均由  $A$  点发出，此时  $\Theta = U$ ，且可令  $u = \sin U$ ，于是 (37) 成为：

$$W_M(B; Y, Z) - W_M(A; Y, Z) = j \cos \Psi \left( \frac{\sin \Theta'}{u'} - 1 \right). \quad (37a)$$

当入射光束原有象差时，则仍须用 (37) 式，(37) 式所得的是光学系统  $M$  对这两点的光束产生的波差差别而非总波差。此时须注意  $\Theta$  和光线与轴夹角  $U$  并不相同。由

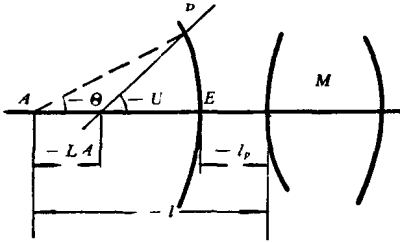


图 3.9

前面的推导可知， $\Theta$  是光线与理想波面的交到高斯象点连线与轴的夹角， $\Theta$  和  $U$  的关系由图 3.9 可以看出。图中  $E$  是入瞳中心，距第一面距离为  $l_p$ ， $EP$  是以  $A$  为中心的球面即参考面，具球差  $LA$  的实际光线与球面交于  $P$  点，此光线与轴夹  $U$  角，故有

$$\Theta = U - \frac{LA \sin U}{l - l_p}. \quad (38)$$

图中已设  $LA$  是小量，故有：

$$\sin \Theta = \sin U - \cos U \frac{LA \sin U}{l - l_p}. \quad (39)$$

因此 (37) 式中  $\Theta$  用 (39) 式代入时成为。

$$\begin{aligned} & W_M(B; Y, Z) - W_M(A; Y, Z) \\ &= j \cos \Psi \left[ \frac{\sin U'}{u'} \left( 1 - \frac{LA' \cos U'}{l' - l'_p} \right) - \frac{\sin U}{u} \left( 1 - \frac{LA \cos U}{l - l_p} \right) \right], \end{aligned} \quad (40)$$

或当原来光线无象差时， $\sin U = u$ ， $LA = 0$ ，而有：

$$W_M(B; Y, Z) - W_M(A; Y, Z) = j \cos \Psi \left[ \frac{\sin U'}{u'} \left( 1 - \frac{LA' \cos U'}{l' - l'_p} \right) - 1 \right]. \quad (40a)$$

引入符号  $OSC$ ：

$$OSC'_k = \frac{u_1}{\sin U_1} \cdot \frac{\sin U'_k}{u'_k} \left( 1 - \frac{LA'_k \cos U'_k}{l'_k - l'_{pk}} \right) - 1, \quad (40b)$$

则 (40) 式可写作：

$$\Delta W_M = j \cos \Psi \frac{\sin U_1}{u_1} [OSC'_k - OSC_1], \quad (40c)$$

其中  $\Delta W_M$  代表  $W_M(B; Y, Z) - W_M(A; Y, Z)$ 。当要求光学系统  $M$  对  $A$  点和  $B$  点



产生同样的象差, 例如当光学系统  $M$  对  $A$  点成理想象而要求它对  $B$  点也成理想象, 则就要求轴上光线光路使 (40) 式或 (40a) 式的方括号内的量等于零, 这就是所谓正弦条件.

对于轴上二相邻点间的波象差差别可仿上列讨论而得到, 此时由 (I.72b) 即可得出 (图 3.10):

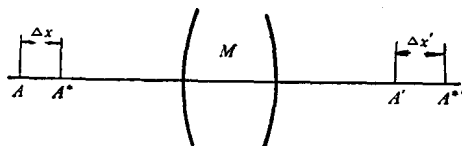


图 3.10

$$W_M(A^*; Y, Z) - W_M(A; Y, Z) = \frac{1}{2} K \left[ \frac{\sin^2 \frac{\Theta'}{2}}{\left(\frac{u'}{2}\right)^2} - \frac{\sin^2 \frac{\Theta}{2}}{\left(\frac{u}{2}\right)^2} \right], \quad (41)$$

式中  $K$  是不变量, 由 (I.41) 式:

$$K = nu^2 \Delta x = n'u'^2 \Delta x'. \quad (42)$$

令 (41) 式等于零, 亦即方括号内的量等于零, 所得的条件称为 Herschel 条件, 它保证轴上两点成象质量相同.

正弦条件的特殊情况, 即球差等于零时的正弦条件是 E. Abbe 在 1879 年得到的. 但实际光学系统不可能完全没有球差, 因之很多人企图把上述特殊情况下的条件推广. 推广的正弦条件是 F. Steable (1907) 和 E. Lihotzky (1919) 独立得到的, 因此常称作 Steable-Lihotzky 条件.

把这种条件推广到更一般的情况, 亦即一般的相邻点间的象差差别是 T. Smith 的贡献<sup>[4]</sup>, 他称之为余弦条件, 但他的推导是有缺陷的<sup>[5]</sup>.

我们在上面所作出的一般结果 (35) 式与余弦条件相当, 所用的方法类似于 H. H. Hopkins 对正弦条件所作的证明<sup>[6]</sup>.

Herschel 条件是天文学家和天文望远镜的杰出制造家 J. E. W. Herschel 在 1821 年提出的, 他当时认为应使望远镜满足这个条件 (因之早期的天文望远镜以至 Fraunhofer 望远镜都是如此).

由于  $\Theta'$  不可能同时满足 (37) 式和 (41) 式, 亦即不可能同时满足正弦条件和 Herschel 条件, 亦即不可能使一点附近的所有点都同时成象理想. 这就使我们认识到, 要在均匀的媒质内构成对整个空间成理想象的光学系统原则上不可能的. 于是有人讨论过非均匀媒质内的理想系统问题<sup>[7]</sup>.

利用 (35) 式, 我们也可以导出一般的轴外点与其相邻点间的差别, 但因空间光线与参考面交点的坐标表示甚为复杂, 这种条件的实际意义不大. 但对于子午光束而言, 还可以有比较简单的结果<sup>[8]</sup>:

$$\Delta W_M = 4j \left[ \frac{\sin U' - \sin U'_p}{u'} - \frac{T A'_y \cos^2 U' \cos U'_p}{u' (l' - l'_p)} - \frac{\sin U - \sin U_p}{u} + \frac{T A_y \cos^2 U \cos U_p}{u (l - l_p)} \right]. \quad (43)$$

另一方面，我們上面討論正弦条件和 Herschel 条件时所謂的“軸”可以是主光綫，而  $u$  可以是  $u_t$ ， $\theta$  則是与主光綫的夹角，因之軸外点波面的子午截面的波差差別也完全可以由 (37) 式和 (41) 式得到。

### § 7 同軸球面光学系統中的正弦条件

上一节的討論是对任意的同軸光学系統而言的，只要它的物空間和象空間是由均匀媒质所构成的即可。对于同軸球面光学系統，由光綫光路計算的观点同样也可以証明正弦条件，由这种証明可以看出这个条件对多高的物点还保持正确，或者偏离这个条件的原因。

采用空間光綫光路計算的代数方法 (第一章 § 8) 来討論这个問題，并采用矢徑

$\vec{a} = (X, H, 0)$ ，其中  $H$  即为物高或象高；光綫的方向余弦为  $\vec{q} = (\xi, \eta, \zeta)$ 。現比較  $H=0$  的光綫和  $H$  为小量的两条相应光路之差別，我們并且仅限于将軸外点所发出的方向余弦  $\eta$  很小的光束 (近弧矢光束) 与軸上点的  $\eta=0$  的光束相比，如图 3.11 中的两条光綫。

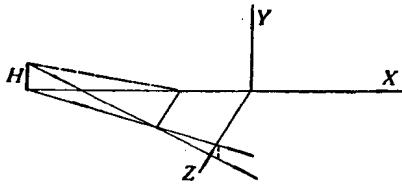


图 3.11

令两者初始方向余弦  $\zeta$  相同，对軸上光綫而言， $\zeta = n \sin U$ 。为区别两条对应光綫的量，将軸外点发出的光綫量以 \* 号标志，并以  $\delta_1$ ， $\delta_2$  分别表示小量  $H$  和  $\eta$ ，則由 (I.107) 有：

$$\left. \begin{aligned} \xi^* &= \xi \left( 1 - \frac{\delta_2^2}{2} \right), \\ \vec{a}^* \cdot \vec{q}^* &= \vec{a} \cdot \vec{q} - \frac{X \xi \delta_2^2}{2} + \delta_1 \delta_2, \\ \vec{r} \cdot \vec{q}^* &= \vec{r} \cdot \vec{q} + \frac{-n^2 \delta_1^2 + 2 \vec{a} \cdot \vec{q} \left( \delta_1 \delta_2 - \frac{X \xi \delta_2^2}{2} \right)}{2 \vec{r} \cdot \vec{q}}, \\ &\dots \\ &\dots \\ \frac{1}{m^*} &= \frac{1}{m} [1 + 0(\delta^2)]. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

(44)式最后一式中  $O(\delta^2)$  表示二級小量, 即  $\delta_1, \delta_2$  所組成的二次項与一些不大的量的乘积, 由 (I.107) 式是完全可以导出它的准确表示的。

由此可見, 两条对应光綫的对应量的差別均为二級小量。

由 Kerber 不变量公式 (I.111), 即可求出軸外光綫与子午面交点的坐标, 当略去二級小量时有:

$$\begin{aligned} X^{*'} &= X' = L' - r, \\ H^{*'} &= \frac{\zeta^{*'}}{\zeta'} H = \frac{\zeta}{\zeta'} H = \frac{n \sin U}{n' \sin U'} H. \end{aligned} \quad (45)$$

当  $\zeta \rightarrow 0$  时也有类似的关系。这就是說, 軸外弧矢細光束的焦点和近軸光綫决定的焦点相同, 且其象高与由 Lagrange 不变量所决定者相同, 其差別为二級小量。将  $\zeta \rightarrow 0$  时的量用小写字母标志, 即由 (45) 得:

$$\left. \begin{aligned} x' &= l' - r, \\ \eta' &= \frac{nu}{n'u'} \eta. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

空間光綫与  $XZ$  平面的交点为  $(X'_p, 0, Z')$ , 其中  $X'_p$  可看作是出瞳坐标 (第一章 § 23), 則由图 3.12 可見它和高斯象面交点高度  $H'$  是:

$$\frac{H'}{H^{*'}} = \frac{X' - X'_p}{X^{*'} - X'_p}. \quad (47)$$

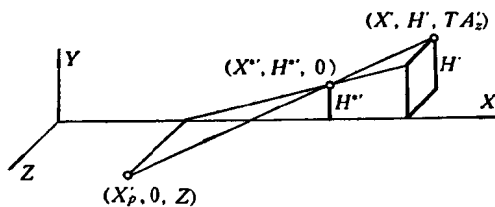


图 3.12

故由 (45), (46), (47) 得:

$$TA'_y = \eta' - H' = \eta' \left( 1 - \frac{u'}{u} \cdot \frac{\sin U}{\sin U'} \cdot \frac{l' - l'_p}{L' - l'_p} \right). \quad (48)$$

根据 (48) 式就可以由軸上光綫光路計算所得的結果算出軸外点弧矢光束的垂軸象差, 若要軸外点和軸上点相似就要求 (48) 式右方括号中的量等于零, 这就是正弦条件。称括号中的量为正弦差, 以符号  $OSC'$  表示, 則:

$$OSC' = 1 - \frac{u'}{u} \cdot \frac{\sin U}{\sin U'} \cdot \frac{l' - l'_p}{L' - l'_p} = \frac{TA'_y}{h'}. \quad (49)$$

当略去高次小量时, (49) 式可写作:

$$OSC' = \frac{u}{u'} \cdot \frac{\sin U'}{\sin U} \cdot \frac{L' - l'_p}{l' - l'_p} - 1, \quad (49a)$$

再当初始計算时令  $\sin U = u$  就得:

$$OSC' = \frac{\sin U'}{u'} \cdot \frac{L' - l'_p}{l' - l'_p} - 1. \quad (49b)$$

实际上, (49)式是上节中的比較普遍的结果之特例, 由(40)或(40a)可以推出(49)式.

因  $LA$  为小量,  $LA \cos U$  和  $LA$  之差为高次小量, 在(38)式中将  $\Theta$  用  $U$  代替(参考图 3.10) 以及在(35)式中将光程差写作  $QP$  (参看图 3.8) 时都将引入相对象差为高次小量的误差. 故可将(40)式中  $LA \cos U$  的  $\cos U$  用 1 代替, 而简单地写作  $LA$ , 此时因  $LA = l - L$ , 故

$$1 - \frac{LA}{l - l_p} = \frac{l - l_p - (l - L)}{l - l_p} = \frac{L - l_p}{l - l_p}.$$

由此可见(40a)式方括号中的量, 是和(49)式定义的  $OSC'$  一样的.

为将一般结果(40)与(49)比較, 可根据波象差与几何象差的关系(I.72a)将(40)式对归化坐标  $y$  微分, 因式中  $\Psi, U, U', LA, LA'$  均为  $y, z$  的函数, 故微分的结果本是很繁的, 但因(49)式仅是  $y=0$  时的  $TA_y$ , 故可利用关系:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial y} [yf(y, z)] \right]_{y=0} = \left[ y \frac{\partial}{\partial y} f(y, z) + f(y, z) \right]_{y=0} = f(0, z),$$

使微分大为简化. 再因  $y = \sqrt{y^2 + z^2} \cdot \cos \Psi$ , 当  $y=0$  时,

$$\sqrt{y^2 + z^2} = z = (l - l_p) \sin U / (l - l_p) u,$$

故(40)式对  $y$  微分的结果就是:

$$\begin{aligned} & (n'_k u'_k TA'_{y,k} - n_1 u_1 TA_{y,1})_{B, \text{点}} \\ &= j \frac{u_1}{\sin U_1} \left[ \frac{\sin U'_k}{u'_k} \left( 1 - \frac{LA'_k}{l'_k - l'_{p,k}} \right) - \frac{\sin U_1}{u_1} \left( 1 - \frac{LA_1}{l_1 - l_{p1}} \right) \right] \\ &= j(OSC'_k - OSC_1). \end{aligned} \quad (50)$$

式中已没有轴上点象差而仅是轴外点象差, 这是由于对轴上点  $A$  而言,  $(TA_y)_{y=0} = 0$  之故, 因之象差差别也就是轴外象差.

这就证实了两个结果一致. (50)式是比(49)式更普遍的形式. 在本节之初, 若设物空间原来就有象差时, 也得(50)式.

由正弦差引起的轴外象差称为彗差. (50)式表示弧矢彗差与正弦差的关系.

## § 8 正弦差分布值

在前两节中我们用波面观点和光线光路观点导出了一个判断光学系统成像质量的条件——正弦条件. 由此可由轴上光束的光路计算而判定近轴象点(与轴上点邻近的点)的成像质量, 定义了一种象差——正弦差. 余下的问题是光学系统中各个结构因素如何对正弦差发生影响. 我们希望也能找到一个与球差分布类似的分布公式, 以判断和校正正弦差, 使光学系统设计成满足正弦条件. 为此我们将导出两个分布

公式,以供不同場合下使用.

为使結果簡單,設入射光束无象差,且  $u = \sin U$ , 則由 (49b) 略去高次小量得:

$$\begin{aligned} OSC' &= \frac{\sin U'}{u'} \left( 1 - \frac{l' - L'}{l' - l'_p} \right) - 1, \\ &\doteq - \frac{l' - L'}{l' - l'_p} + \frac{\sin U' - u'}{u'}, \\ &\doteq (l' - L') \left( \frac{1}{l'} - \frac{1}{l' - l'_p} \right) + \frac{L' \sin U' - l' u'}{l' u'}. \end{aligned} \quad (51)$$

当光栏处在透鏡最后一面上即  $l'_p = 0$  时;或当光学系統球差已校正,即  $l' - L' = 0$  时,在这两种情况下(51)式更可簡化为:

$$OSC' = \frac{L' \sin U' - l' u'}{l' u'}.$$

可見考虑正弦差分布值时只須考虑  $l' u'$  和  $L' \sin U'$  如何变化即可:

$$\begin{aligned} L'_k \sin U'_k - l'_k u'_k &= L'_k \sin U'_k - L_1 \sin U_1 - (l'_k u'_k - l_1 u_1), \\ &= \sum_1^k (L' \sin U' - L \sin U) + \sum_1^{k-1} (L_{i+1} \sin U_{i+1} - L'_i \sin U'_i) \\ &\quad - \sum_1^{k-1} (l_{i+1} u_{i+1} - l'_i u'_i), \\ &= \sum_1^k (L' \sin U' - L \sin U) + \sum_1^{k-1} d(u' - \sin U'), \end{aligned} \quad (52)$$

这就是正弦差的分布情况. 由此可見,对薄透鏡來說  $d=0$ , 同时校正球差和正弦差的条件就可表述为:

$$\left. \begin{aligned} \sum (L'U' - LU) &= 0, \\ \sum (L'U' - LU) ni &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

因此,薄透鏡組在校正球差时正弦差不等于零的原因在于球差分布不恰当,以致  $(L'U' - LU)ni$  之和等于零,而  $(L'U' - LU)$  之和不等于零.

这种分布值的优点在于不須計算主光綫,但将正弦差的原因归結为(52)式所示的两个部分. 下面导出  $OSC'$  的另一个表示.

在 § 1 中导出恒等式(7) — (12)时,我們并未对近軸光綫和实际光綫間的关系提出什么要求,只須它們通过同一光学系統即可. 現在我們就設实际光綫由物面軸上点发出,而近軸光綫是通过光栏中心的. 将近軸量加下角标号  $p$  即得:

$$\begin{aligned} n'_k u'_{pk} \sin U'_k (l'_{pk} - L'_k) - n_1 u_{p1} \sin U_1 (l_{p1} - L_1) \\ = \frac{1}{2} \sum S_{\perp} = \sum_1^k (L'U' - LU) n i_p, \end{aligned} \quad (54)$$

将上式两边均除以 Lagrange 不变量  $j$ :

$$j = n_1 u_1 u_{p1} (l_{p1} - l_1) = n'_k u'_k u'_{pk} (l'_{pk} - l'_k),$$

即得:

$$\frac{(l'_{pk} - l'_k) \sin U'_k}{(l'_{pk} - l'_k) u'_k} - \frac{(l_{p1} - l_1) \sin U_1}{(l_{p1} - l_1) u_1} = \frac{1}{2j} \sum S_{\pm}, \quad (55a)$$

即

$$j(OSC'_k - OSC_1) = \frac{1}{2} \frac{u_1}{\sin U_1} \sum_1^k S_{\pm}, \quad (55b)$$

这就是所求的正弦差第二分布公式, 是 Delano 得到的<sup>[6]</sup>. 由(55)式看来, 球差校正而正弦差未校正的原因在于  $i$  和  $i_p$  不同. 球差分布值与  $i_p/i$  之比即为正弦差分布. 因之凡折射面产生球差和高级球差时, 一般必伴生正弦差和高级正弦差. 但数量大小则可能不同. 例如:  $i_p=0$  的面虽产生球差而毫无正弦差(光栏在球心, 轴外点与轴上点毫无区别), 因之前面讨论高级球差时的概念加以上述补充即可完全运用于讨论高级正弦差.

当光束直径很小, 即  $\sin U$  和其弧度之差别不大时, 令初始角  $u_1$  与  $\sin U_1$  相等, 计算近轴光线, 则由(54)式可得正弦差的初级近似值:

$$S_{\pm} \doteq S_{II} = lu n i_p (i' - u) (i - i'), \quad (56a)$$

$$= S_I i_p / i,$$

$$j(OSC'_k - OSC_1) = \frac{1}{2} S_{II}. \quad (56b)$$

$S_{\pm}$  和  $S_{II}$  也称作彗差系数, 它使一点发出的光束分布于—彗星形区域内, 这将在第六章 § 2.2 述及.

按(50)式, 由  $S_{II}$  引起的初级弧矢彗差是:

$$n'_k u'_k T A'_{vk} = \frac{1}{2} S_{II}, \quad (56^*)$$

因此弧矢彗差  $T A_v$  随孔径平方和象高一次方增大, 而初级正弦差  $OSC$  则随孔径平方增大, 与象高无关.

### § 8.1 同轴球面系统中正弦差和光栏位置的关系

若轴上点光线的  $L$  不变而光栏位置由  $l_{p1}$  移到  $l_{p1}^*$ ,  $l'_{pk}$  移到  $l'_{pk}^*$ , 移动时我们保持 Lagrange 不变量不变即  $j^* = j$ , 则在新光栏位置下的正弦差有类似于(55)式的表示式. 将属于新主光线的量冠以 \* 号, 将此式与(55b)相减得:

$$\begin{aligned}
 & j[(OSC_k^* - OSC_1^*) - (OSC_k' - OSC_1')] \\
 &= \frac{u_1}{\sin U_1} \sum_1^k (L' \sin U' - L \sin U) n (i_p^* - i_p). \quad (57)
 \end{aligned}$$

軸上点近軸光綫入射角  $i$  与  $i_p^* - i_p$  有下列关系:

$$\frac{i_p^* - i_p}{i} = \frac{\left(\frac{h_p^*}{r} - u_p^*\right) - \left(\frac{h_p}{r} - u_p\right)}{\frac{h}{r} - u} = \frac{\frac{1}{r}(h_p^* - h_p) - (u_p^* - u_p)}{\frac{h}{r} - u}, \quad (58)$$

再因 Lagrange 不变量不变, 因而两主光綫在物面上有同一高度  $\eta$ , 故

$$\begin{aligned}
 h_p - \eta &= l_p u_p - (l_p - l) u_p = l u_p, \\
 h_p^* - \eta &= l u_p^*,
 \end{aligned}$$

因之

$$\begin{aligned}
 h_p^* - h_p &= l (u_p^* - u_p), \\
 \frac{h_p^* - h_p}{h} &= \frac{u_p^* - u_p}{u}. \quad (59)
 \end{aligned}$$

以 (59) 代入 (58) 即得:

$$\frac{i_p^* - i_p}{i} = \frac{u_p^* - u_p}{u} = \frac{h_p^* - h_p}{h}.$$

因此可用一个符号  $A$  来表示这个量, 显然

$$A = \frac{i_p^* - i_p}{i} = \frac{i_p^{*'} - i_p'}{i'} = \frac{u_p^{*'} - u_p'}{u'},$$

再由于

$$h_{p2} = h_{p1} - d u_{p1}',$$

故对下一面而言,  $A$  值是

$$A_2 = \frac{h_{p2}^* - h_{p2}}{h_2} = \frac{(h_{p1}^* - h_{p1}) - d(u_{p1}^{*'} - u_{p1}')}{h_1 - d u_{p1}'} = A_1.$$

因此  $A$  不但表示各种量的比值, 而且是一个折射轉面不变量, 因此对任一折射面都有

$$(i_p^* - i_p) = A i. \quad (60)$$

故 (57) 式中

$$\begin{aligned}
 & \sum_1^k (L' \sin U' - L \sin U) n (i_p^* - i_p) \\
 &= A \sum_1^k (L' \sin U' - L \sin U) n i \\
 &= A \frac{1}{2} \sum_1^k S_-,
 \end{aligned}$$

亦即

$$j[(OSC_k^{*'} - OSC_1^*) - (OSC_k' - OSC_1)] = \frac{Au_1}{\sin U_1} \cdot \frac{1}{2} \sum_1^k S_{-}. \quad (61)$$

再由(55b)即可得下列关系:

$$(S_{-}^* - S_{-}) = AS_{-} \quad (62)$$

由此可见, 光栏位置移动后的正弦差与原来正弦差有差别的唯一原因是有了球差. 另一方面当我们已知一个光栏位置的正弦差和球差后, 其他位置的正弦差也就可以算出来了.

### §9 薄透镜理论

在 §5 中已对校正球差应该使用的结构作了讨论, 现在我们要求它同时校正彗差, 这就须要从各种校正球差的结构中挑选出恰好满足后一要求的结构. 在对光学系统提出这样的要求时, §5 中所述的一切判断都仍然有意义, 但并不充分. 如 §8 中所述, 现在不单要求正负球差相互抵消, 还要求球差分布在一定的折射面上. 现

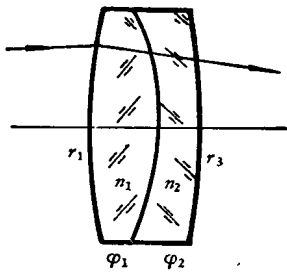


图 3.13

以双薄透镜胶合组为例, 分析各个折射面在校正球差和彗差中的作用(参看图 3.13), 当折射率  $n_1, n_2$  确定后再定了半径  $r_1, r_2, r_3$ , 则光线折射情况就完全确定了; 这就是说对于一定的玻璃对而言, 有三个参数可变, 而提出的要求则为: 一定的焦距、球差和彗差. 故变数恰等于要求满足的条件数.

此处只考虑物体和象都不很靠近透镜的情况, 此时光线在透镜内的光路(如图 3.13 所示)与光轴近乎平行, 即各面上折射角  $i$  的正负基本由  $r$  的正负所决定. 图 3.13 中  $i_1$  为正,  $i_2, i_3$  均为负. 由于第一第三两面均产生正球差, (由 §1), 故应使第二面产生负球差, 即  $n_2$  应大于  $n_1$ . 在这种情况下, 因球差的符号和  $i$  的符号都已定, 故  $\Delta LU$  的符号一定是  $\Delta L_1 U_1 > 0, \Delta L_2 U_2 > 0, \Delta L_3 U_3 < 0$ , 故唯有第三面才产生反符号的彗差与前两面抵偿. 因此可以判断说, 若  $r_3$  是正的, 那么彗差就是不能校正的; 唯有当  $r_3$  产生某一定量正球差时才有希望校正彗差. 当折射率一定时  $r_2$  越小则负球差越大, 将  $r_1$  和  $r_3$  作适当分配以产生正球差, 即可同时校正球差和彗差. 例如当计算结果  $L_3' U_3' > l_3' u_3'$  时, 就增加第三面的光焦度, 减弱第一面的光焦度, 使总光焦度维持不变, 反之亦然. 当这样分配的后果使此二面产生的总正球差变更时, 则再变更第二面, 它对光焦度很少影响. 由此可见对一定的  $n_1, n_2$  而言, 球差、彗差一般是一定可以同时校正的. 而且还可保持原定光焦度.



这就是說,这三个变数满足上面提出的三个要求是可能的,而三个要求已将三个可变量完全确定.

当  $n$  变更时校正状况也必随之变更,我們也可以預先确定变更的方向. 例如  $n_2$  变大則在  $r_2$  不变时它所产生的負球差变大,因此須变大  $r_2$  使負球差减小,此时  $n_2 i_2$  一定变小,故在球差回复原值时  $\Delta L_2 U_2$  一定变大,因之第三面光焦度应增大而第一面应减小. 由此可見,最后得到的結果是  $|r_1|$  变大,  $|r_2|$  变大,  $|r_3|$  变小,各面半徑正負不变. 这也就是說  $n_2$  变大的效果是使  $|\varphi_1|$  变小,  $|\varphi_2|$  变小得更多. 这对于高級象差显然是有利的.  $n_1$  变小的效果相同.

将两不同面的光焦度相交換,以使球差交換,以达到校正彗差的目的,这种方式对复杂光学系統也同样有意义.

上面这些討論已經把各个变数在校正象差方面所起的作用都确定了,但是这种討論并不是定量的,利用象差的初級近似表示式可能作出定量的結論. 这是由于(14)式和(56)式中的所有量均可以用光学系統結構参数,即半徑、折射率和物体位置表示出来,当預定象差值后即可由它們解出半徑值,为此发展了薄透鏡的初級象差理論,在一組貼合的薄透鏡中  $lu$  在各折射面上不变,因而可放在迭加号外. 再当光栏在透鏡組上时,  $ni_p$  也是常数,即:

$$\left. \begin{aligned} S_I &= hP, \\ S_{II} &= h n i_p W, \end{aligned} \right\} \quad (63a)$$

其中符号  $P, W$  的定义是

$$\left. \begin{aligned} P &= \sum n i (i' - u) (i - i'), \\ W &= \sum (i' - u) (i - i'). \end{aligned} \right\} \quad (63b)$$

对于一片焦距为定值的单透鏡而言,将  $PW$  表示成結構参数的表示式显然是不难的,而这个表示式也就可以用来找出任意状况下的結構. 这个問題的仔細討論和可用来查出半徑的表,将在第七章給出.

## § 10 計算結果的图示和判断

象差校正的結果总会有殘余量. 因此,将計算結果表达成一目了然的图表,以便判断这个結果处在什么状况下:已足够完善还是有重大缺陷,有缺陷时又属于什么性质,是可以稍加改动就能滿足要求的呢还是需作原則上的变更才行,等等. 在設計中判定变更的方向显然是有原則意义的. § 5, § 9 所述对此都有帮助,但是判断的根据則須有正确的計算和良好的結果表示,由此可見計算結果表示方法問題不单对球差、

彗差有意义。

結果的最好表示方法是作图,好的图可以使我們一看就对問題的整体有所了解。

由 § 2 知初級球差和孔徑平方成正比,故將为各种大小孔徑計算出来的球差相对于其孔徑的平方 ( $\sin^2 U_k'$ ) 作图就很容易看出光学系統中存在的球差的性质,是初級还是高級的,量又有多大。例如图 3.14a, 是純初級球差的图形,球差  $LA_k'$  和  $\sin^2 U_k'$  成正比,图形是直綫。图 3.14b 表示同时具有初級和二級球差的情况,此时的球差图形为抛物綫。与此曲綫在原点相切的直綫即光学系統所具有的初級球差(图中的点綫),而曲綫与直綫之差别即为高級球差。为使边缘带的球差校正到 0 应采取的初級校正量是图中的点划綫,而点划綫与曲綫之差别即为假定高級球差不因校正初級球差而变时,将在校正后残余的中间带球差,常簡称为带球差。由曲綫(b)即可估計出校正边缘球差后余下的带球差大小,如曲綫(c),此时抛物綫的极大值在其中点。

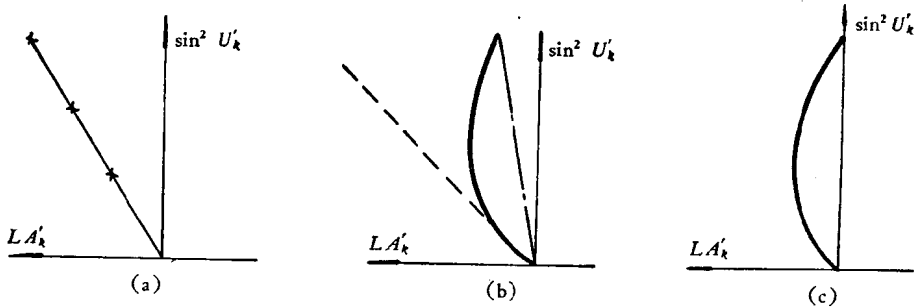


图 3.14

由于球差曲綫的这种性质,画出球差曲綫并不須要作很多条光綫光路計算。例如为判定球差是否初級可算边缘带和  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  带(即  $\sin U = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin U_M$  的中间带光綫)两条光綫,为判定球差中二級以上的量可再算出  $\sqrt{\frac{3}{4}}$  带的光綫。除非所得的点不处在預想的曲綫上,否則就不必多算光綫。另外,当按初級象差公式(14)算出初級象差后,为作上述种种判断,还可以少算一条光綫。

图 3.14 不但对分析球差的性质有用,而且还可以用图形积分法按图算出对应的波象差。根据公式(I.63b),图 3.14 中曲綫和纵軸間包含的面积之半就是波面在此点的波象差,面积越大表示象差越大。現以图 3.15 和图 3.16 的几种情况为例,表明判断最佳焦点和最佳校正状况的方法。图 3.15a 中直綫  $OA_2A_1A$  是初級球差曲綫,綫上任一点  $A_1$  表示  $\sin^2 U = \overline{OB_1}$  的光綫具有球差  $LA = \overline{B_1A_1}$ ,此光綫和以  $O$  点(高斯象点)为中心的参考球面相交,交点处的波象差按公式(I.63b)就是三角形  $OA_1B_1$  面积

之半,在方格紙上数出此面积,此面积之半就以图 3.15b 中的横坐标长度  $\alpha_1 B_1$  表示,于是图 3.15b 中的横坐标就是以  $O$  点为参考点的波象差. 这样一次次面积就可以将波象差曲线  $O\alpha_1\alpha$  画出来,可见最大波象差  $\alpha B$  也就是三角形  $ABO$  的面积之半.

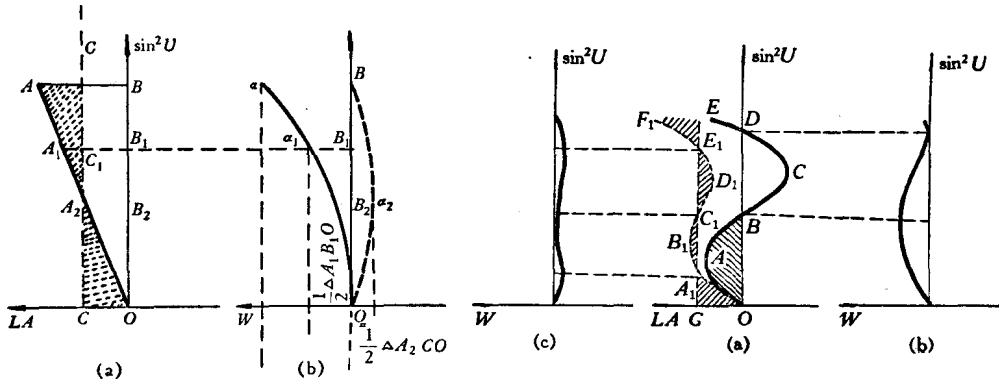


图 3.15

图 3.16

我們不一定要把参考点放在高斯象点  $O$  而可以任意选择其他的点以使面积减少(波象差减小),例如在图 3.15 a 中取  $C$  点为参考点,对  $C$  点而言,光线  $A_1$  的球差就是  $A_1 C_1$  而不再是  $A_1 B_1$ . 因此对  $C$  点而言,波象差就是图 3.15 a 中的阴影部分面积之半,在  $C$  之右者面积为负. 此时作出的波象差曲线,就是图 3.15 b 中的点线,显然此时波象差大减,最大波象差是  $\alpha_2 B_2$ ,亦即面积  $A_2 C O$  之半. 这就是说,纵然球差为同一数值,但依靠焦点位置之选择还可以得出不同的波象差. 亦即对同一个有缺陷的波面而言,还可以找到一个与它最接近的球面以使球面与波面之差别为最小. 在已知球差曲线时,要我们找出最佳焦点显然是不难的,这主要就是找出象图 3.15 a 中的与轴平行的线  $CC$ ,以使它和球差曲线间夹尽可能小的面积.

由此还可以判定球差应该如何校正,而不单是选择最佳焦点的问题,这就是图 3.16 所企图阐明的. 图 3.16 a 中球差曲线  $OABCDE$  是当光学系统存在初级、二级和三级球差时一种可能的校正状况. 初看起来也可算是很理想了,球差曲线具有两个零点,而且面积  $OAB$  和  $BCD$  几乎相等,因之高斯象点就是最佳焦点,对于高斯象点  $O$  而言,波象差图形积分之结果如图 3.16 b,最大波象差就是面积  $OAB$  之半. 但只须稍加仔细地考察就可以发觉这个校正状况离理想还远. 我们想象此光学系统稍增加一些初级球差使球差曲线成为  $OA_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ ,同时选  $G$  为新参考点,则新球差曲线对于参考点  $G$  的波象差就是图 3.16 a 中的阴影部分面积,显然面积  $OA_1 G$  要比面积  $OAB$  小得多,图形积分的波象差曲线此时成为图 3.16 c.

新球差曲线的特点是相对参考点  $G$  有三个零点 (存在三级球差时最多可能有两个零点), 球差曲线因之被轴分割为四块, 因之曲线虽有较多的弯度, 但各块的面积都不大. 最好校正状况显然是使各块面积都相互相等. 这种判断校正状况的方法是有普遍意义的.

以后将导出更恰当的数学表述来判定校正状况的优劣 (第十一章), 其最终结论和上述观点一致.

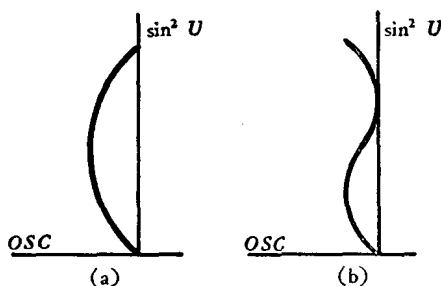


图 3.17

对于正弦差, 根据 § 8 所述, 初级正弦差也和孔径平方成正比. 因此, 正弦差随孔径平方而变的图也和球差的图示一样, 可以容易地用它辨别出高级和初级的正弦差大小. 但按 (40) 式, 正弦差本身就和波象差成正比, 所差的仅是比例常数, 因此看来最佳校正状况就是使曲线的整体尽可能紧缩

在一个小范围内, 典型的曲线如图 3.17, 这种判断并不完全正确, 其原因在于: 子午彗差和  $OSC'$  不成正比, 而子午彗差又大于弧矢彗差. 更正确的形式将在第十一章中述及.

### 参 考 文 献

- [1] Conrady, A. E. *Applied Optics and Optical Design*, Oxford (1929).
- [2] Czapski, S. und Eppenstein, O., *Grundzüge der Theorie der Optischen Instrumente nach Abbe*. 3-e Auflage, Springer (1924).
- [3] 1. Temmermen, F., Une Généralisation de la Formule de Kerbor, *Rev. Opt.*, **29** (1950), 195.  
2. Weidert, F., Über die Berechnung des Anteils der einzelnen Flächen an der Gesamtaberration eines Optischen System, *Optik*, **10** (1953), 375.
- [4] Smith, T., The Optical Cosine Law, *Tran. Opt. Soc.*, **24** (1922—1923), 31; **25** (1924—1925), 281.
- [5] 1. Boegehold, H. und Herzberger, M., Zum allgemeinen Kosinussatz, *Zs. f. Phys.*, **B50** (1928), 187.  
2. Herzberger, M., Über Sinusbedingung, Kosinusrelation, Isoplanasie und Homöoplanasiebedingung, ihren Zusammenhang mit energetischen Überlegungen und ihre Ableitung aus dem Fermatschen Gesetz, Einleitung; Teil II; Teil III, *Zs. f. Instrumentenkunde* **J48** (1928); 313; 465; 524.
- [6] Hopkins, H. H., *Wave Theory of Aberrations*, Oxford (1950), Chapter III, pp. 39—45.
- [7] 1. Caratheodory, C., *Geometrische Optik*, J. Springer, Berlin (1937).  
2. Launeberg, R. K., *Mathematics Theory of Optics*, Brown Univ. (1944).  
3. Herzberger, M., *Modern Geometrical Optics*, Interscience, New York (1958), Part IX, pp. 421—426.
- [8] 王之江, 实际光学系统和象差的一般性质 (光学设计训练班讲义, 1958).
- [9] Delano, E., A General Contribution Formula for Tangential Rays, *Jour. Opt. Soc. Amer.*, **42** (1952), 631.

## 第 四 章

### 軸 外 象 差

#### § 1 同軸球面系統的畸变表示式<sup>[1]</sup>

当我们所考察的光学系统并非单为将近轴部分的物体成像时，单考虑球差和彗差就不够了。首先考虑通光孔径很小时的轴外光束特性，然后考虑通光孔加大后的轴外大光束特性。

光学系统将物空间中物面上各点发出的细光束组折射转换为象空间中的细光束组。这些细光束组与高斯象面相交，一般将形成一组弥散盘，盘的中心一般也不处在高斯象点位置——由(I.38)式决定的位置。这就是说，象不但将是模糊的，而且是与原物不相似的，这种不相似称为畸变；以高斯象点到相应弥散盘中心间的距离作为畸变的量度。弥散盘的中心点也就是细光束的中心线（即通过光阑中心的光线，亦即主光线）与高斯象面的交点，故考察畸变只须考察主光线即可。用下角标号“ $p$ ”标志与主光线有关的各量。显然，主光线处在含轴面内，是轴外点所发出的子午光束中的一条光线。

在第三章中导出的公式组(III.7—12)实际上对于任一条子午光线都是正确的，它是通过同一光学系统的任一近轴光线与任一子午光线间的关系式。我们现在假设近轴光线由物平面轴上点发出，而子午光线是通过光阑中心的主光线，则主光线与高斯象面交点的高度  $H$  是(图 4.1)

$$H = -(l - L_p) \tan U_p, \quad (1)$$

或

$$H \cos U_p = -(l - L_p) \sin U_p. \quad (2)$$

故由(III.7), (III.9)式得：

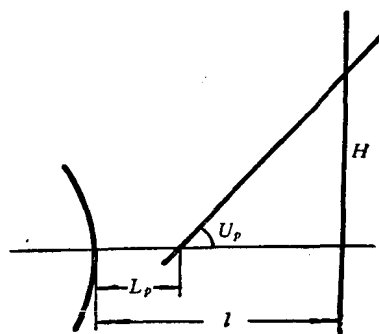


图 4.1

$$n'_k u'_k \cos U'_{pk} H'_k - n_1 u_1 \cos U_{p1} H_1 = - \sum_1^k (L'_p \sin U'_p - L_p \sin U_p) n i. \quad (3)$$

再由 (I.30), 理想象高  $\eta$  和  $\eta'_k$  間有下列关系:

$$j = n'_k u'_k \eta'_k = n_1 u_1 \eta_1.$$

用符号  $DT$  表示畸变

$$DT'_k = \eta'_k - H'_k, \quad (4)$$

則

$$n_1 u_1 \cos U_1 H_1 = j \cos U_1 - n_1 u_1 \cos U_1 DT_1, \quad (5)$$

故 (3) 式成为畸变的分布公式:

$$n'_k u'_k \cos U'_{pk} DT'_k - n_1 u_1 \cos U_{p1} DT_1 = \frac{1}{2} \sum_1^k S_{\text{五}}, \quad (6a)$$

其中

$$\frac{1}{2} S_{\text{五}} = (L'_p \sin U'_p - L_p \sin U_p) n i + j (\cos U'_p - \cos U_p). \quad (6b)$$

(6) 式已将光学系統最后的畸变表示为各折射面产生的畸变之和。

按照 (III.54) 式, (6) 式中畸变分布值的前半部为光栏位置的正弦差 (即光栏位置放物体而原物体位置放光栏时光束所具有的彗差), 而后半部則与角倍率有关. 当光学系統不产生很大的光栏彗差时, 畸变由角倍率所完全决定, 这就是主光綫有很大角倍率时畸变难以校正的原因。

## § 2 初級畸变; 高級畸变; 畸变和物体位置、光栏位置的关系

当主光綫与光軸的夹角足够小, 可用角的弧度代替正弦值等等时, 按 (6) 式算出的畸变即已有足够的准确度, 用这种条件算出的畸变称为初級畸变. 各折射面产生的初級畸变  $S_V$  是:

$$\begin{aligned} 2n'_k u'_k \cos U'_{pk} DT'_k - 2n_1 u_1 \cos U_{p1} DT_1 &= \sum_1^k S_{\text{五}} \\ &= \sum_1^k S_V = \sum_1^k \{ l_p u_p n i (i'_p - u_p) (i_p - i'_p) + j (u_p^2 - u'^2_p) \}. \end{aligned} \quad (7)$$

由此可見初級畸变随視場角  $U_p$  的三次方增大, 高級畸变則与視場角  $U_p$  的五次、七次……幂成正比. 产生高級畸变的原因除了前已討論过的  $\Delta L \sin U$  之高次展开項外, 另一个原因純粹是由光綫与軸的夹角  $U$  的余弦 ( $\cos U$ ) 与  $1 - \frac{1}{2} U^2$  之差造成的. 由此可知, 高級畸变的性质是比較簡單的。

初級畸变  $S_V$  的表示式 (7) 在后面 (本章 § 6) 还将变换成更常用的形式。

## § 2.1 同軸球面系統中畸变和物体位置的关系

和我們上一章所討論的情況相反,對於球差彗差來說,光栏移动的影响可以表示成很簡單的关系,物体位置移动的影响則难以簡單地表示出來。而在这一章內討論的象差是沿主光綫的象差和邻主光綫的象差,它們由主光綫的准确位置所准确決定,故光栏移动的准确表示式难以得出,但物体移动的效果却可以从类似的考慮而准确地表示出來。

參看圖 4.2, 主光綫  $L_p$  不变而理想象面由  $l_k$  移到  $l_k^*$ , 新的物体位置的近軸光綫之初始数值滿足圖 4.2 表示的条件,即光栏直徑不变。因之,当主光綫不变时,新的 Lagrange 不变量与原来一样大,即

$$j^* = j.$$

新物体位置的畸变有类似于 (6) 式的表示,但此时近軸光綫量上加 \* 号。將此式与 (6) 式相減得:

$$\begin{aligned} & n_k^* u_k^* \cos U_{pk}^* DT_k^* - n_1 u_1^* \cos U_{p1}^* DT_1^* - (n_k u_k \cos U_{pk}^* DT_k^* - n_1 u_1 \cos U_{p1}^* DT_1^*) \\ &= \sum_1^k (L_p^* \sin U_p^* - L_p \sin U_p) n (i^* - i). \end{aligned} \quad (8)$$

自物空間开始計算一条近軸主光綫,則其入射角  $i_p$  和  $i^* - i$  有下列关系:

$$\frac{i^* - i}{i_p} = \frac{\frac{h}{r} - u^* - \left(\frac{h}{r} - u\right)}{\frac{h_p}{r} - u_p} = \frac{\frac{1}{r}(h^* - h) - (u^* - u)}{\frac{1}{r} h_p - u_p}, \quad (9)$$

再因为两軸上点发出的近軸光綫在光瞳上有同一入射高度  $y$ , 故:

$$\begin{aligned} h - y &= lu - (l - l_p)u = l_p u, \\ h^* - y &= l_p u, \end{aligned} \quad (10)$$

因之:

$$h^* - h = l_p (u^* - u), \quad (11)$$

再由于:

$$h_p = l_p u_p,$$

故

$$\frac{h^* - h}{h_p} = \frac{u^* - u}{u_p}. \quad (12)$$

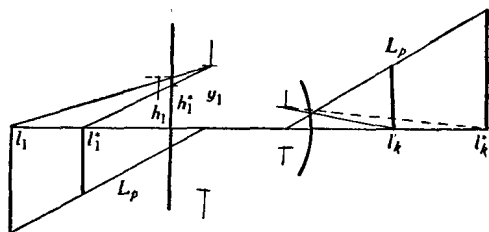


圖 4.2

将(12)式代入(9)式即得:

$$\frac{i^* - i}{i_p} = \frac{u^* - u}{u_p} = \frac{h^* - h}{h_p}. \quad (13)$$

用一符号  $B$  来表示这个量, 显然

$$B = \frac{i^* - i}{i_p} = \frac{i^{*'} - i'}{i_p'} = \frac{u^{*'} - u'}{u_p'}. \quad (14)$$

再由于

$$h_2 = h_1 - d u_1', \quad (15)$$

故对下一面而言,  $B$  值是

$$B_2 = \frac{h_2^* - h_2}{h_{p2}} = \frac{(h_1^* - h_1) - d(u_1^{*'} - u_1')}{h_{p1} - d u_{p1}'} = B_1. \quad (16)$$

可见  $B$  不但表示各种量的比值, 而且是一个折射面不变量. 因此对任一折射面都有:

$$(i_k^* - i_k) = B i_{pk}.$$

故(8)式中

$$\sum_1^k (L_p' \sin U_p' - L_p \sin U_p) n (i^* - i) = B \sum_1^k (L_p' \sin U_p' - L_p \sin U_p) n i_p,$$

亦即

$$(S_{\Sigma}^* - S_{\Sigma}) = B S_{-,p}. \quad (17)$$

$S_{-,p}$  即主光线的球差, 以后称作光栏(面)球差. 由此可见, 物体移动后的畸变与原畸变有差异的唯一原因是光栏位置有球差. 另一方面当我们已知两个物体位置的畸变后, 光栏球差也就知道了. 因此, 任何其他位置的畸变也就可以算出来. 这就是说, 已知两物体位置的畸变后, 其他位置的畸变就都可以算出来. 不难由(17)式求出这种三个物体位置间的畸变关系式. РУСИНОВ 得出的这种关系式实际上是近似关系<sup>[2]</sup>.

## § 2.2 单个球面的畸变和光栏位置的关系

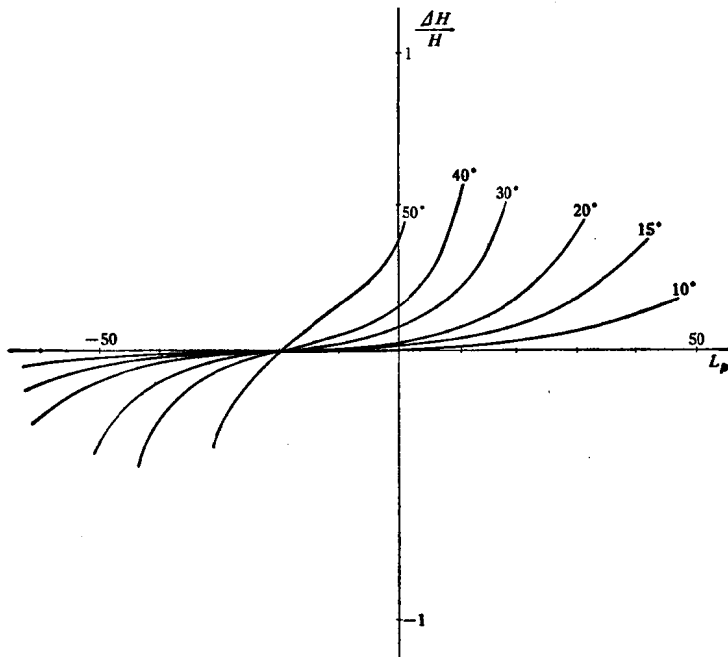
单个球面产生的象差可以由光线光路计算得出, 这样得到的结果对于设计判断是很有用处的.

设物体处在无限远, 计算一组光线. 对于各种不同的光栏位置, 各个不同视场计算了畸变, 表示如图 4.3. 图 4.3a 表示折射面的情况 ( $r = -20$ ,  $n/n' = 1/1.5$ ); 图 4.3b 则表示反射面的情况 (半径仍为  $-20$ ).

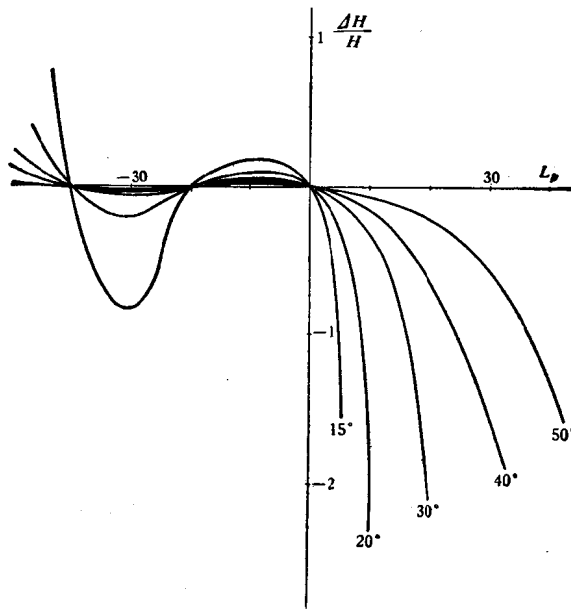
由图 4.3 可以得出如下结论:

对于反射面, 有三个光栏位置畸变为零; 而折射面则只有一个光栏位置畸变为





(a)



(b)

图 4.3

- (a): 相对畸变与光栏位置的关系 (折射面情形) (曲线上的数字表示视场角)
- (b): 相对畸变与光栏位置的关系 (反射面情形)

零。当視場角很大时除非主光綫非常靠近球心,否則就將有很大的高級畸变产生。

### § 3 細光束的聚焦特性

单知道光束的中心綫——主光綫的表现当然是不够的,除畸变外至少还应知道軸外点发出的邻主光綫細光束之聚焦特性,下面几节都将討論这个問題。在本节中,我們首先一般地考察細光束的聚焦特性,也就是任意波面在一个小区域内的特性。如图 4.4,取主光綫亦即波面在  $O$  点的法綫为坐标系的  $X$  軸,即  $YZ$  面与波面在  $O$  点相切。通过  $X$  軸作一平面  $XOY^*$  与坐标面  $XY$  夹角  $\psi$ ,此面与波面相交,交綫即

图中曲綫  $AOB$ , 現求此曲綫在  $O$  点的曲率半徑。

設波面的方程式是

$$x = f(y, z),$$

設此函数在 origin 有二阶导数。由于曲面与  $YZ$  面在 origin 相切,故在 origin 处有:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial z} = 0. \quad (18a)$$

其二阶导数在 origin 处之值分別以符号  $a, b, c$  表示,即

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = a, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} = b, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = c. \quad (18b)$$

由熟知的平面微分几何的结果可知,  $XOY^*$  面內的平面曲綫  $AOB$  之曲率半徑  $R$  是:

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2 x}{dy^{*2}}}{\left[1 + \left(\frac{dx}{dy^*}\right)^2\right]^{3/2}}, \quad (19)$$

其中坐标  $y^*$  和  $y, z$  的关系是:

$$\left. \begin{aligned} y &= y^* \cos \psi, \\ z &= y^* \sin \psi. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

故

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy^*} &= \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dy^*} + \frac{\partial x}{\partial z} \frac{dz}{dy^*} = \cos \psi \frac{\partial x}{\partial y} + \sin \psi \frac{\partial x}{\partial z}, \\ \frac{d^2 x}{dy^{*2}} &= \cos^2 \psi \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + 2 \cos \psi \sin \psi \frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} + \sin^2 \psi \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (21)$$

将(21)式代入(19)式,即得出  $R$  用  $y, z, \psi$  表示的式子,我們只要求 origin  $O$  的曲率,此时由(19)式可知有:

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \frac{\partial^2 x}{\partial y^{*2}} = \cos^2 \psi \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + 2 \cos \psi \sin \psi \frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} + \sin^2 \psi \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \\ &= a \cos^2 \psi + 2b \cos \psi \sin \psi + c \sin^2 \psi,\end{aligned}\quad (22)$$

故  $\frac{1}{R}$  是  $\psi$  的简单函数。当  $Y^*$  轴处在两特定位置时,  $\frac{1}{R}$  有极值, 由微分求出极值位置  $\psi_0$  是:

$$\tan 2\psi_0 = \frac{2b}{a-c}.\quad (23)$$

故除  $b=0$  且  $a=c$  这一情况外, 总可以在  $0-\pi$  之間找到两个  $\psi_0$ , 由这两个  $\psi_0$  所定的方向互相垂直。曲面的这两条截綫称为主截綫, 二主截綫之曲率半徑具极大和极小值, 称为主曲率半徑。当  $b=0$  且  $a=c$  时, (23) 式为不定值, 但由 (22) 式, 此时有:

$$\frac{1}{R} = a = c,$$

故此时曲面曲率为常数, 与  $\psi$  无关。

将坐标系  $YZ$  繞  $X$  轴轉动, 使曲面的两主截綫处在  $XY$  面和  $XZ$  面內。对此坐标系而言,

$$b=0;$$

且二主曲率就是  $a$  和  $c$ 。故 (22) 式中可除去中間一項。波面在 origin 附近的各截綫都可看作圓弧, 其半徑  $R$  則由 (22) 式决定, 即波面方程式可近似写作:

$$x = \frac{y^{*2}}{2R}.$$

由 (20), (22) 并顾及  $b=0$ , 上式即可写成:

$$2x = ay^2 + cz^2,\quad (24)$$

这就是小块波面的一般表示。可以証明这样的波面在 origin 附近的法綫束(光綫)一定通过两条焦綫, 这两条焦綫离波面頂点的距离即为主曲率半徑。証明如下:

通过 origin 且球心在  $X$  轴上的球面方程式是

$$x = \frac{y^2 + z^2}{2r} + \frac{(y^2 + z^2)^2}{8r^3} + \dots,\quad (25)$$

式中  $r$  为球面的半徑。在 origin 附近时  $y^2 + z^2$  不大, 方程式可簡化为:

$$x = \frac{y^2 + z^2}{2r}.\quad (25a)$$

选择  $r$  使

$$\frac{1}{2r} = \frac{a}{2},$$

則球面和波面(24)之間距,亦即波象差为:

$$W = \Delta x = \frac{1}{2} (a-c)z^2. \quad (26)$$

离开原点距离为  $r = \frac{1}{a}$  的平面与(24)式代表的波面的法綫相交,交点坐标即所謂几何象差. 由 (I.72) 可知:

$$\begin{aligned} \frac{n}{r} T A_y &= \frac{\partial W}{\partial y} = 0, \\ \frac{n}{r} T A_z &= \frac{\partial W}{\partial z} = 2(a-c)z \end{aligned}$$

亦即所有法綫均通过  $Z$  方向的一条焦綫.

令  $\frac{1}{2r} = \frac{c}{2}$  时可以类似地得出結論:法綫均通过  $Y$  方向的一条焦綫.

这就是細光束聚焦的一般特性,这个特性由(24)式所概括. 亦即細光束一定通过相互垂直的两条焦綫.

对同軸光学系統而言,由于对称性,波面的主截面之一就是子午截面,因此另一主截面就是与子午截面垂直的弧矢截面. 由此可見邻主光綫細光束的特性由于子午焦点和弧矢焦点完全决定. 球面系統的焦点位置可由 (I.87), (I.90) 算出,故邻主光綫細光束的特性就由这两个公式决定.

由高斯物面上各点都发出一条主光綫,由此可以算出光束二截面的焦点位置,焦点的整体形成两焦面. 它們一般不会是平面而是曲面,曲面的弯度称为象面弯曲,两焦面之間的距离称为象散.

### § 3.1 邻主光綫高斯光学;物体移动时象面弯曲的变化

在第一章 §6 已經提及,邻主光綫的狭小区域也与近軸区域一样滿足高斯光学要求. 并且也已提出了一个計算主点焦点等等特征量的方法. 上面的討論則明确了細光束的子午截面和弧矢截面的特性,已完整地确定了整个光束的特性. 由此可見,邻主光綫高斯光学与近軸区的不同之点是需有兩套特征值,与同軸双曲率面类似.

因此在第二章里,根据純粹几何观点导出的高斯光学定律在此完全适用.

在本节中将利用高斯光学方法来解决物体移动时象面弯曲的变化問題.

图 4.5 中,  $B$  是主点,  $F$  是焦点,下角标号  $p$  表示沿主光綫的量. 它可以是子午截面的量,或者是弧矢截面的量. 符号  $A$  表示任一物点. 則由高斯光学牛頓公式得:

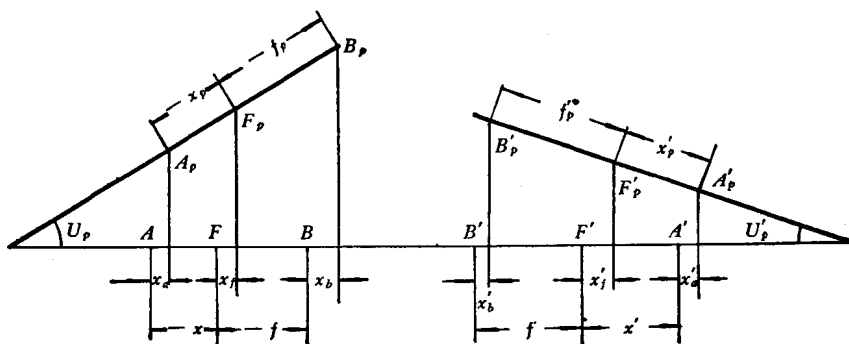


图 4.5

$$x'_f x_p = f_p f'_p, \quad (27)$$

而其中  $x_p$  可以用近軸距  $x$  与象面弯曲  $x_a, x_f$  等表示出来:

$$x_p \cos U_p = x + x_a - x_f, \quad (28)$$

故有

$$(x + x_a - x_f)(x' + x'_a - x'_f) = f_p f'_p \cos U_p \cos U'_p, \quad (29)$$

式中

$$xx' = ff'.$$

由此可見,对光束的任一截面而言,当  $f_p, x_p$  已知后,任一物体位置的象面弯曲  $x_a$  就都可以算出来,这个关系是 Ручинов 得到的<sup>[2]</sup>.

### § 4 同軸球面系統的象散

由 (I.87), (I.90) 易于算出邻主光綫的細光束二截面焦点位置. 和其他象差一样,我們希望得出各折射面上象差分布的表示式. 为此目的,須要选取适当的象差轉面倍率. 如前所論及,最好以角度表示倍率,現以

$$\frac{n u_t u_s}{n' u'_t u'_s}$$

作为象散差  $s' - t'$  的倍率,則

$$\begin{aligned} & n' u'_t u'_s (s' - t') - n u_t u_s (s - t) \\ &= h_t h_s \left\{ n' \cos I'_p \left( \frac{1}{t'} - \frac{1}{s'} \right) - n \cos I_p \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{s} \right) \right\} \\ &= h_t h_s \left\{ \frac{n \cos^2 I_p}{t} \left( \frac{1}{\cos I'_p} - \frac{1}{\cos I_p} \right) - \frac{n}{s} (\cos I'_p - \cos I_p) \right. \\ & \quad \left. + \frac{n' \cos I'_p - n \cos I_p}{r} \left( \frac{1}{\cos I'_p} - \cos I'_p \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= h_t h_s \left\{ \frac{n}{s} \left( \frac{\cos^2 I_p}{\cos I'_p} - \cos I'_p \right) + n \cos^2 I_p \left( \frac{1}{\cos I'_p} - \frac{1}{\cos I_p} \right) \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{s} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{n' \cos I'_p - n \cos I_p}{r \cos I'_p} (1 - \cos^2 I'_p) \right\} \\
&= h_t h_s \left\{ \frac{n}{s \cos I'_p} (\sin^2 I'_p - \sin^2 I_p) + \frac{n' \cos I'_p - n \cos I_p}{r \cos I'_p} \sin^2 I'_p \right. \\
&\quad \left. + \frac{n \cos I_p}{st \cos I'_p} (\cos I_p - \cos I'_p) (s-t) \right\} \\
&= h_t h_s \left\{ \frac{n^2 \sin^2 I_p}{\cos I_p} \left( \frac{1}{n's'} - \frac{1}{ns} \right) + \frac{n \cos I_p}{st} \left( \frac{\cos I_p}{\cos I'_p} - 1 \right) (s-t) \right\} \\
&= h_t \frac{n^2 \sin^2 I_p}{\cos I'_p} \left( \frac{u'_s}{n'} - \frac{u_s}{n} \right) + n u_t u_s (s-t) \left( \frac{\cos I_p}{\cos I'_p} - 1 \right). \quad (30)
\end{aligned}$$

公式(30)也可以写得更为对称而且使式中不出现与 $(s-t)$ 有关的尾数。为此将(30)式等式右方的后项移到等式左方,然后将全式乘以 $\cos I_p$ 即得:

$$\begin{aligned}
&n' u'_t u'_s \cos I'_p (s' - t') - n u_t u_s \cos I_p (s - t) \\
&= h_t n^2 \sin^2 I_p \left( \frac{u'_s}{n'} - \frac{u_s}{n} \right) \\
&= h_t h_s n^2 \sin^2 I_p \left( \frac{1}{n's'} - \frac{1}{ns} \right). \quad (30)^*
\end{aligned}$$

但除光学系统的前一折射面的 $I'$ 和后一折射面的 $I$ 相等这种特殊情况外,公式(30)对各个折射面迭加时不能两两相消,因之不能导出分布公式以将最后结果表示为各折射面贡献之和。

类似于上述方法也可得出:

$$\begin{aligned}
&n' u'_t u'_s (s' - t') - n u_t u_s (s - t) \\
&= h_t h_s \left\{ n^2 \sin^2 I_p \cos I'_p \left( \frac{1}{n't'} - \frac{1}{nt} \right) + \frac{n(s-t)}{st} (\cos I'_p - \cos I_p) \right\} \\
&= h_s n^2 \sin^2 I_p \left\{ \frac{u'_t}{n'} - \frac{u_t}{n} \frac{\cos I'_p}{\cos I_p} \right\} + n u_s u_t (s-t) \left( \frac{\cos I'_p}{\cos I_p} - 1 \right). \quad (31)
\end{aligned}$$

也可以将(31)式写成比较对称的形式:

$$\begin{aligned}
&n' u'_t u'_s \frac{1}{\cos I'_p} (s' - t') - n u_t u_s \frac{1}{\cos I_p} (s - t) \\
&= h_s n^2 \sin^2 I_p \left( \frac{u'_t}{n' \cos I'_p} - \frac{u_t}{n \cos I_p} \right) = h_s h_t n^2 \sin^2 I_p \left( \frac{1}{n't'} - \frac{1}{nt} \right). \quad (31)^*
\end{aligned}$$

(30), (31) 二式都可以作为象散的准确分布公式。但将二式平均,即将二式相加除2所得的表示式更有意义些,即:

$$n'u_t u_s'(s'-t') - nu_t u_s(s-t) = S_{\equiv},$$

其中

$$S_{\equiv} = h_t h_s \left\{ \frac{1}{2} n^2 \sin^2 I_p \left[ \frac{1}{\cos I_p'} \left( \frac{1}{n's'} - \frac{1}{ns} \right) + \cos I_p' \left( \frac{1}{n't'} - \frac{1}{nt} \right) \right] + \frac{1}{2} \Delta \right\}; \quad (32)$$

$$= \frac{1}{2} n^2 \sin^2 I_p \left\{ \frac{h_t}{\cos I_p'} \left( \frac{u_s'}{n'} - \frac{u_s}{n} \right) + h_s \cos I_p' \left( \frac{u_t'}{n' \cos I_p'} - \frac{u_t}{n \cos I_p} \right) \right\} + \frac{1}{2} h_t h_s \Delta. \quad (33)$$

其中

$$\Delta = \frac{n(s-t)}{st} \cdot \frac{(\cos I_p - \cos I_p')^2}{\cos I_p'};$$

$$h_t h_s \Delta = nu_t u_s(s-t) \frac{(\cos I_p - \cos I_p')^2}{\cos I_p \cos I_p'}. \quad (34)$$

后面将看到,  $\Delta$  一般是可略去不計的高次小量.

对于整个光学系統而言, 只須对各个折射面都写出上列公式, 然后相加即可:

$$n'_k u'_k u'_{sk} (s'_k - t'_k) - n_1 u_{s1} u_{t1} (s_1 - t_1) = \sum_1^k S_{\equiv}. \quad (35)$$

由此可見, 折射面对象散的貢獻正比于  $n^2 \sin^2 I_p$  和  $h_s h_t$ , 并大致正比于  $\left( \frac{1}{n's'} - \frac{1}{ns} \right)$  与  $\left( \frac{1}{n't'} - \frac{1}{nt} \right)$  之平均值. 因此, 折射面在下列情况可不产生象散, 即 (1)  $I_p = 0$ , 即主光綫通过球心; (2)  $h_t h_s = 0$  即物点、象点均恰在折射面上; (3) 物体和象恰处在特殊位置以致  $\frac{1}{n's'} = \frac{1}{ns}$ , 由公式 (30), (31) 比較可知, 当入射光束无象散时, 即  $s-t=0$  时, 此时  $\frac{1}{n't'}$  一定也与  $\frac{1}{nt}$  相等. 下面将仔細討論一下这种特殊位置有几个, 这种位置还有什么其他特性.

至于表示式中的另一項  $\Delta$  是由入射光束原有象散所引起的, 是衍生高級象散的一部分.

把 (30)\*, (31)\* 式平均 也可以得到一个不絕對准确的但比較簡單的迭加公式:

$$n'_k u'_k u'_{sk} (s'_k - t'_k) - n_1 u_{t1} u_{s1} (s_1 - t_1) = \sum_1^k S_{\equiv}^*,$$

$$S_{\equiv}^* = \frac{1}{2} h_t h_s n^2 \sin^2 I_p \left[ \left( \frac{1}{n's'} - \frac{1}{ns} \right) + \left( \frac{1}{n't'} - \frac{1}{nt} \right) \right]. \quad (35)^*$$

在(35)\* 忽略了  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\cos I_p} + \cos I_p \right)$  与“1”之差, 从而将倍率  $\frac{1}{2} n'u'u'_s \left( \cos I'_p + \frac{1}{\cos I'_p} \right)$  写成  $n'u'u'_s$ . 实际上, 在絕大多数情况下, 这个誤差是可以略去的. 实际計算出一些角度的情况如下表:

$\theta$	10°	20°	30°	35°	40°	45°
$\cos \theta$	0.9848	0.9397	0.8660	0.8192	0.7660	0.7071
$\frac{1}{2} \left( \cos \theta + \frac{1}{\cos \theta} \right) - 1$	0.0001	0.0019	0.0097	0.0197	0.0357	0.0606

也就是說, 在  $I_p$  和  $I'_p$  之絕對值最大不超过 30° 时, 誤差不超过 1%; 不超过 35° 时誤差小于 2%. 即使  $I$  或  $I_p$  超过上述数字时, 加入上表所列的校正值也不困难. 这

就是說, 一般利用(35)\*中的簡單表示式已足够准确了.

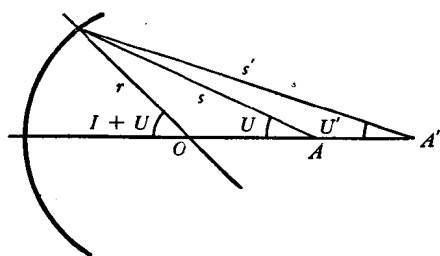


图 4.6

不产生象散的特殊物体位置  $\left( \frac{1}{ns} = \frac{1}{n's'} \right)$  不是别的位置, 实际上就是球面反常区的端点——不晕点. 如图 4.6 通过折射面球心  $O$  和物点  $A$  作輔助軸, 則它也一定通过弧矢象点  $A'$ , 由此可見:

$$\frac{s}{\sin(I+U)} = \frac{r}{\sin U}; \quad \frac{s'}{\sin(I+U)} = \frac{r}{\sin U'}, \quad (36)$$

故有

$$\frac{s'}{s} = \frac{\sin U}{\sin U'}. \quad (37)$$

現再由于

$$\frac{1}{n's'} = \frac{1}{ns} \quad \text{即} \quad \frac{s'}{s} = \frac{n}{n'}, \quad (38)$$

故对无象散位置, 有下列关系:

$$\frac{\sin U}{\sin U'} = \frac{n}{n'} = \frac{\sin I'}{\sin I}. \quad (39)$$

由于

$$I+U = I'+U' = \Phi, \quad \text{故} \quad U' = \Phi - I', \quad U = \Phi - I,$$

代入上式得:

$$\sin(\Phi - I') \sin I' = \sin(\Phi - I) \sin I, \quad (40)$$



或

$$\frac{1}{2} \{ \cos(\Phi - 2I') - \cos \Phi \} = \frac{1}{2} \{ \cos(\Phi - 2I) - \cos \Phi \},$$

或

$$\cos(\Phi - 2I') = \cos(\Phi - 2I). \quad (41)$$

故

$$\Phi - 2I' = \pm (\Phi - 2I) \pm 2n\pi. \quad (42)$$

故唯一的解是  $\Phi = I - I'$ , 即  $I' = U$ ,  $I = U'$ , 亦即无象散物点一定处在球面的不量面上.

上面的討論都是針對細光束的两截面焦点的相对位置而作的, 細光束象差的另一現象是两焦面与高斯象面不重合. 由于象散已知, 为了考察象面弯曲我們只須考虑光束的任一截面就够了. 对弧矢象面比較容易得到准确而简单的表示, 但为得到弧矢焦面象差分布公式, 我們尚需要一个更一般的分布公式.

### § 5 空間光綫的象差分布

在第三章中我們导出了 Kerber 的球差分布公式, 我們并曾用以討論了各种近軸光綫与含軸面內光綫問題, 即正弦差分布問題和畸变分布問題, 但是它不能用来解决涉及空間光綫的問題. 弧矢元光束是空間光綫之极限.

实际上对空間光綫也可以导出一个一般的分布公式, Kerber 公式是它的特例<sup>[1]</sup>. 下面首先导出这个公式.

由公式 (I.107), (I.10), 折射前后的光綫坐标满足关系:

$$\left. \begin{aligned} \vec{a}' &= M\vec{a}, & (a) \\ \vec{q} &= \frac{1}{M}\vec{q}' - \Phi\vec{a}, & (b) \\ -\vec{r} \times \vec{q} &= -\vec{r} \times \vec{q}' = \vec{a} \times \vec{q} = \vec{a}' \times \vec{q}'. & (c) \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

下面就利用这些关系导出一个分布公式. 光学系統中的任一折射面表示如图 4.7, 图中  $C$  是球心,  $P$  点是空間光綫折射点, 入射光綫以綫  $PA$  表示, 与坐标面交于  $A$  点. 故  $CPA$  面就是光綫的折射面,  $CA$  可看作輔助軸. 图中  $O$  点是球面頂点,  $A_0$  点是研究象差的参考点, 即近軸光綫的焦点. 故  $OCA_0$  就是光軸  $X$  軸, 軸向单位矢量以  $\vec{e}$  表示. 定义矢量  $\vec{b}, \vec{e}$  如下:

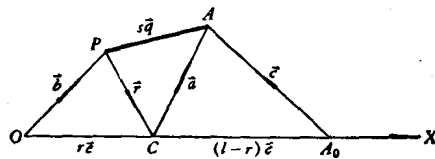


图 4.7

$$\left. \begin{aligned} \vec{b} + \vec{r} &= r\vec{e}, & (a) \\ \vec{c} + (l-r)\vec{e} &= \vec{a}. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

在图 4.7 中标出了各个矢量对应的长度和方向。现在求量  $u\vec{c} \times \vec{q}$  在折射前后的差，角  $u$  和下面公式中的  $i$  是由  $A_0$  点所作近轴光线光路计算时出现的量，它满足公式 (I.27)。下面各个等式的末尾注出了所用的公式：

$$\Delta u\vec{c} \times \vec{q} = \Delta u[\vec{a} - (l-r)\vec{e}] \times \vec{q}, \quad [44b]$$

$$= \Delta\{u\vec{a} \times \vec{q} - (l-r)u\vec{e} \times \vec{q}\},$$

$$= \vec{a} \times \vec{q} \Delta u - rni\Delta \frac{1}{n} \vec{e} \times \vec{q}, \quad [43c][I.27]$$

$$= -ni \left\{ \vec{a} \times \vec{q} \Delta \frac{1}{n} + \Delta \left( \frac{1}{n} r\vec{e} \times \vec{q} \right) \right\}, \quad [I.27]$$

$$= -ni \left\{ -\vec{r} \times \vec{q} \Delta \frac{1}{n} + \Delta \left( \frac{1}{n} r\vec{e} \times \vec{q} \right) \right\}, \quad [43c]$$

$$= -ni\Delta \left( \frac{1}{n} \vec{b} \times \vec{q} \right). \quad [44a]$$

最后的等式：

$$\Delta u\vec{c} \times \vec{q} = -ni\Delta \frac{1}{n} \vec{b} \times \vec{q} \quad (45)$$

就是我们所要求的空间光线象差分布公式。可将它看作是 Kerber 球差分布公式的推广。等式 (45) 中， $\frac{1}{n} \vec{c} \times \vec{q}$  之绝对值就是参考点到光线所作垂线之长，当光线与光轴相交时也就是  $LA \sin U$ ；式 (45) 中的量  $\frac{1}{n} \vec{b} \times \vec{q}$  之绝对值也就是由球面顶点到光线所作的垂线之长，当光线与光轴相交时也就是量  $L \sin U$ ，这就是说明了 (45) 式用于含轴面内光线时所得的结果与 (III.9) 式完全一致。

### § 5.1 象差分布的分量表示

为作实际计算须将分布公式 (45) 写成适当的分量表示。

设  $A$  点在子午面上，则矢径  $\vec{a} = (X, H, 0)$ ，而  $\vec{q} = (\xi, \eta, \zeta)$ ，另外  $\vec{e} = (1, 0, 0)$ ，故：

$$\left. \begin{aligned} -\vec{a} \times \vec{q} &= (-H\zeta, X\zeta, H\xi - X\eta), \\ &= (-H'\zeta', X'\zeta', H'\xi' - X'\eta'), \\ -r\vec{e} \times \vec{q} &= (0, r\zeta, -r\eta). \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

(46) 式中由  $\vec{a} \times \vec{q} = \vec{a}' \times \vec{q}'$  导出的等式中， $X$  方向的分量就是 Kerber 不变量

(I.11i),  $Y$  方向分量也是如此,  $Z$  方向分量是一个新表示. 故由(46)式得:

$$-\Delta \frac{1}{n} \vec{b} \times \vec{q} = \left( -H\zeta \Delta \frac{1}{n}; \Delta \frac{1}{n} (X+r)\zeta; \Delta \frac{1}{n} \{H\xi - (X+r)\eta\} \right). \quad (47)$$

利用(I.128)将上述量用角的正弦和頂点距  $L$  表示:

$$\begin{cases} \eta = -n \sin \Theta_y, \\ \zeta = n \sin \Theta_z, \\ L = X+r, \\ L_p = X_p + r = X - \frac{H\xi}{\eta} + r. \end{cases}$$

故

$$-\Delta \frac{1}{n} \vec{b} \times \vec{q} = \left( -H\zeta \Delta \frac{1}{n}; \Delta L \sin \Theta_z; \Delta L_p \sin \Theta_y \right). \quad (48)$$

上式已与(III.9)式很相似.

为写出  $\vec{c} \times \vec{q}$  的分量表示, 作图 4.8, 图中矢量  $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$  是由参考点  $A_0$  到光綫  $\overrightarrow{BA}$  与三坐标面交点的三条矢徑, 它們处在不同的坐标面內. 由于  $\vec{c}_1 \times \vec{q} = \vec{c}_2 \times \vec{q} = \vec{c}_3 \times \vec{q} = \vec{c} \times \vec{q}$ , 故  $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$  三种分量表示都可以用来計算象差. 由图 4.8 得三分量表示是:

$$\left. \begin{aligned} \vec{c}_1 &= (0, T, TA_z), \\ \vec{c}_2 &= (L-l, H, 0), \\ \vec{c}_3 &= (L_p-l, 0, Z). \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

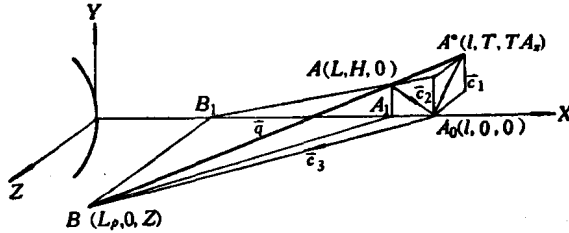


图 4.8

故

$$\begin{aligned} \vec{c} \times \vec{q} &= (T\zeta - TA_z\eta, TA_z\xi, -T\xi); \\ &= \{H\zeta, (l-L)\zeta, (L-l)\eta - H\xi\}; \\ &= \{-Z\eta, Z\xi + (l-L_p)\zeta, (L_p-l)\eta\}. \end{aligned} \quad (50)$$

(50)式中的一些分量表示是繁冗而无用的, 現选出两組简单的表示如下:

$$\begin{aligned} \vec{c} \times \vec{q} &= (H\zeta, TA_z\xi, -T\xi), \\ &= [H\zeta, (l-L)\zeta, -(l-L_p)\eta]. \end{aligned} \quad (51)$$

將(48), (51)代入(45)得到三個等式,其中  $X$  方向分量是恒等式,並不包含新內容,另外兩個分量則是:

$$\left. \begin{aligned} \Delta n u \sin \theta_x (l-L) &= \Delta u \xi T A_x = n i \Delta L \sin \theta_x, & (a) \\ \Delta n u \sin \theta_y (l-L_p) &= \Delta u \xi T = -n i \Delta L_p \sin \theta_y. & (b) \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

將各個折射面的等式(45)或(52)迭加就將最後象差表示成了各面貢獻之和。

公式(52)的意義和(III.9)一樣,不但由此可以看出空間光綫的象差與各折射面的關係,而且可以作為光綫光路計算的校對。

再由於(52)式所表示的空間光綫象差分布的兩個分量與其所對應的含軸面內光綫的 Kerber 分布差別很少,例如(52a)與光綫在  $XZ$  面內的投影,即軸上點發出的邊緣光綫(如圖4.8中的  $\overrightarrow{BA_1}$ ),計算所得的球差分布一定相似;(52b)則與光綫在  $XY$  面內投影,即主光綫(圖中的  $\overrightarrow{B_1A}$ )計算所得的畸變分布一定很相似。

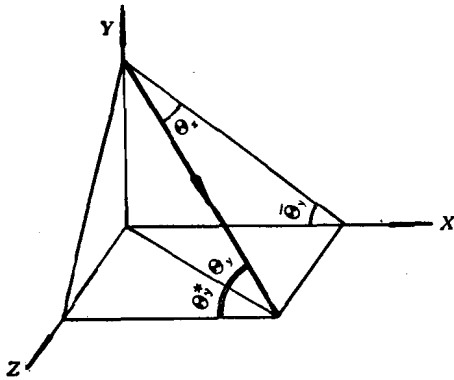


圖 4.9

公式(52d)所定義的角  $\theta_y^*$  之意義如圖4.9,即光綫和  $X$  軸的夾角。由上述表示式作近似,即可得出所有初級象差的表示式<sup>[1]</sup>。

### § 5.2 象面彎曲表示為各面貢獻之和

(52)式中當方向余弦  $\zeta = n \sin \theta_x$  很小時,可以弧度代替。此時即得出弧矢象面彎曲的分布公式:

$$n'_k u'_k u'_{sk} (l'_k - l'_{sk}) - n_1 u_1 u_{s1} (l_1 - l_{s1}) = \sum_1^k (l'_s u'_s - l_s u_s) n i, \quad (53)$$

式中  $l_s$  是弧矢焦點在光軸上的投影到球面頂點的距離,  $u_s = n \sin \theta_s$ , 按公式(I.90\*)算出。由圖4.10可見:

$$l_s = s \cos U_p + X_p,$$

$$X_p = \frac{PA_p^2}{2r} = r[1 - \cos(I_p + U_p)]; \quad (54)$$

$X_p$  是主光綫入射点矢高，再用符号  $x_s$  表示弧矢象面弯曲

$$x_s = l - l_s, \quad (55)$$

則 (53) 式可写作

$$n'_k u'_k u'_{sk} x'_{sk} - n_1 u_1 u_{s1} x_{s1} = \frac{1}{2} \sum_1^k (S_{\text{III}} + S_{\text{IV}}),$$

$$\frac{1}{2} (S_{\text{III}} + S_{\text{IV}}) = ni \{ h_s (\cos U'_p - \cos U_p) + X_p (u'_s - u_s) \}, \quad (56)$$

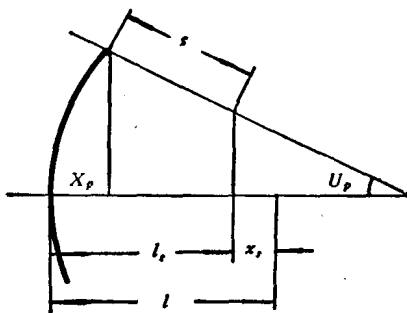


图 4.10

这就是我們需要的弧矢象面弯曲分布公式。

### § 6 初級象散、象面弯曲和畸变

当物体充分靠近光軸时，象散和象面弯曲都很小， $s$ ， $t$  和  $l$  相差很少。当邻主光綫細光束的初始入射高度  $h_s$  和  $h_t$  与近軸光綫的入射高度  $h$  相同时， $u_s$ ， $u_t$  和近軸光綫算出的  $u$  也相同，此时由 (32) 式可得象散分布的初級近似：

$$n'_k u'_k u'_{sk} (s'_k - t'_k) - n_1 u_1 u_{s1} (s_1 - t_1) = \sum_1^k S_{\text{III}} \doteq \sum_1^k S_{\text{III}}, \quad (57)$$

其中

$$S_{\text{III}} = hn^2 i_p^2 \left( \frac{u'}{n'} - \frac{u}{n} \right). \quad (58)$$

再由 (56) 式得初級弧矢象面弯曲是：

$$n'_k u'_k u'_{sk} x'_{sk} - n_1 u_1 u_{s1} x_{s1} = \frac{1}{2} \sum_1^k (S_{\text{III}} + S_{\text{IV}}) \doteq \frac{1}{2} (S_{\text{III}} + S_{\text{IV}}), \quad (59)$$

其中

$$(S_{\text{III}} + S_{\text{IV}}) = \left\{ h(u_p^2 - u'_p{}^2) + \frac{h_p^2}{r} (u' - u) \right\} ni. \quad (60)$$

由此可見初級象散和象面弯曲均与象高平方成正比(和  $i_p^2$ ， $h_p^2$ ， $u_p^2$  等成正比)，因此細光束形成的两个焦平面近似于抛物面。当然象散是和光束孔径角  $u_s$  或  $u_t$  的大小无关的。从 (32)，(56) 式作級数展开的观点看来，高級象散将和象高的四次方、六次方成正比。而 (34) 式的  $\Delta$  項展开得出的最低次項已与象高的六次方成正比，故一般  $\Delta$  可略去不計。

我們在这里把初級弧矢象面弯曲写成  $S_{III} + S_{IV}$  之和是由于这样定义出的  $S_{IV}$  具有一系列特殊性质,关于这些,将在第六章中作詳細叙述. 可以指出:表示式 (7), (58), (60) 等等并不是表达得最簡洁明显的初級表示式,它們的主要优点不在此,而在于与高級象差有密切联系. 为算出实际象差的大小,只須将这些表示式中的一些量作一些“推广”的理解即可,这些量与近軸光綫量发生差异即是形成高級象差的原因. 这是我們作这些推导的目的.

下面先将象差表示式作一些变换,以使它們与通常使用的形式一致. (58) 式中的  $\Delta \frac{u}{n}$  可以写作:

$$\begin{aligned} \frac{u'}{n'} - \frac{u}{n} &= \frac{i+u-i'}{n'} - \frac{u}{n}, \\ &= (i' - u) \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right). \end{aligned} \quad (61)$$

故  $S_{III}$  可写作:

$$S_{III} = hni (i' - u) (i - i') \left( \frac{i_p}{i} \right)^2 = S_I \left( \frac{i_p}{i} \right)^2. \quad (62)$$

另外,还可以将  $i_p$  表示为  $h_p$  和理想象高  $\eta$  的函数,因为

$$\eta = - (l - l_p) u_p, \quad (63)$$

故

$$u_p = \frac{h_p - \eta}{l} = \frac{h_p}{h} u - \frac{j}{nh}, \quad (64)$$

式中  $j = nu\eta$  是 Lagrange 不变量. 因此:

$$i_p = \frac{h_p}{r} - u_p = \frac{h_p}{h} i + \frac{j}{nh}. \quad (65)$$

将 (65) 式代入 (58) 式可得:

$$S_{III} = \frac{h_p^2}{h} P + 2j \frac{h_p}{h} W + j^2 \frac{1}{h} \Phi, \quad (66)$$

式中除  $\Phi$  外,  $P, W$  已由 (III.63b) 定义,即

$$\left. \begin{aligned} P &= (ni)^2 \left( \frac{u'}{n'} - \frac{u}{n} \right) = ni (i' - u) (i - i'), \\ W &= (ni) \left( \frac{u'}{n'} - \frac{u}{n} \right) = (i' - u) (i - i'), \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

而  $\Phi$  定义为:

$$\Phi = \left( \frac{u'}{n'} - \frac{u}{n} \right) = (i' - u) \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right).$$

(58), (62) 和 (66) 就是  $S_{III}$  的幾種常用表示。

為得到  $S_{IV}$  的表示式, 可利用 (64), (65) 將 (60) 式中的  $u_p$  和  $u'_p$  用  $h_p$  和  $j$  來表示。由於

$$\begin{aligned} u_p^2 - u'_p{}^2 &= (u_p - u'_p)(u_p + u'_p) \\ &= (i'_p - i_p)(2u_p + i_p - i'_p), \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} S_{III} + S_{IV} &= hni \left[ \frac{h_p}{h} (i' - i) + \frac{j}{h} \left( \frac{1}{n'} - \frac{1}{n} \right) \right] \\ &\quad \cdot \left[ \frac{h_p}{h} (2u + i - i') - \frac{j}{h} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n'} \right) \right] + \frac{h_p^2}{r} ni (i - i') \\ &= \frac{h_p^2}{h} ni (i - i') \left( -2u - i + i' + \frac{h}{r} \right) \\ &\quad + j \frac{h_p}{h} ni \left\{ (2u + i - i') \left( \frac{1}{n'} - \frac{1}{n} \right) - \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n'} \right) (i' - i) \right\} \\ &\quad + j^2 \frac{ni}{h} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right), \\ &= \frac{h_p^2}{h} P + 2j \frac{h_p}{h} W + j^2 \frac{1}{h} (\Phi + \Pi). \end{aligned} \quad (68)$$

式中

$$\begin{aligned} \Phi + \Pi &= ni \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) = \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right) (i + i') \\ &= \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right) (i' - u + i + u), \end{aligned}$$

故

$$\Pi = \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right) (i + u). \quad (69)$$

由 (66), (68), (69) 最後得:

$$\begin{aligned} S_{IV} &= j^2 \frac{1}{h} \Pi, \\ &= j^2 \frac{n' - n}{nn'r}. \end{aligned} \quad (70)$$

由 (70) 式可以看出,  $S_{IV}$  是由光學系統結構特性所完全決定的, 與物體位置和光欄位置無關。由於  $S_{IV}$  是德國數學家 Petzval 首先發現的, 故常稱為 Petzval 和。

(7) 式將  $i_p$ ,  $u_p$  用  $j$  和  $h_p$  表示, 也可以得到類似於 (66), (68) 的表示式:

$$\begin{aligned}
S_V &= h_p n i (i'_p - u_p) (i_p - i'_p) + j (u_p^2 - u'^2_p), \\
&= \frac{h_p^2}{h^2} P + 3j \frac{h_p^2}{h^2} W + j^2 \frac{h_p}{h^2} (\Sigma \Phi + \Pi) + j^3 \frac{1}{h^2} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right). \quad (71)
\end{aligned}$$

也可消去  $h_p, u_p$  而以  $i_p$  表示, 此时得:

$$\begin{aligned}
S_V &= (S_{III} + S_{IV}) \frac{i_p}{i} \\
&= S_I \left( \frac{i_p}{i} \right)^3 + S_{IV} \left( \frac{i_p}{i} \right). \quad (72)
\end{aligned}$$

由 (62), (70) 和 (72) 可知, 初級象散、象面弯曲和畸变由三个因素完全决定, 这就是折射面上的球差  $S_I$ , Petzval 和  $S_{IV}$  及主光綫的折射角  $i_p$ .

另外, 由 (66), (68) 和 (71) 則可认为初級象差由  $P, W, \Phi$  和  $\Pi$  所决定. 这种表示法对于单个折射面而言显然沒有上一种表示方便, 但对于薄透鏡組而言, 則更方便些. 这是由于貼合的薄透鏡組各面上的  $h_p$  和  $h$  均为同一值, 因此整个透鏡組的特性就由  $\Sigma P, \Sigma W, \Sigma \Phi, \Sigma \Pi$  所决定. 关于  $\Sigma P, \Sigma W$  的性质我們将在第六章討論. 对于单透鏡, 两个折射面的  $\Sigma \Phi$  和  $\Sigma \Pi$  实际上就是此透鏡的光焦度——偏角. 証明如下:

对于空气中的单透鏡而言,  $n_1 = n'_2 = 1$ , 故

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \frac{u'_2}{n'_2} - \frac{u_2}{n_2} + \frac{u'_1}{n'_1} - \frac{u_1}{n_1} = u'_2 - u_1 = \frac{h}{f}; \quad (73)$$

$$\begin{aligned}
\Pi_1 + \Pi_2 &= h \left( \frac{1}{n_2} - \frac{1}{n'_2} \right) \frac{1}{r_2} + h \left( \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n'_1} \right) \frac{1}{r_1}, \\
&= h \frac{n-1}{n} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right), \\
&= \frac{h}{nf}. \quad (74)
\end{aligned}$$

这就是說, 当光栏在透鏡上时 ( $h_p = 0$ ), 空气中的单个薄透鏡的象散和象面弯曲由焦距完全决定. 当物空間和象空間的折射率均等于 1 时, 任何复杂薄透鏡組均可看作空气中单个薄透鏡之組合, 因此 (73), (74) 二式具有普遍意义. 此时 ( $h_p = 0, n'_k = n_1 = 1$ )  $S_V = 0$ .

## § 7 高級象散和象面弯曲

和高级球差可分为二类一样, 其他高级象差也总可以同样划分为二类; 其一是本征的, 其二是衍生的, 現在先考察本征高级象散.



当  $l_p = L_p$ ,  $u_p = \sin U_p$  时  $i_p = \sin I_p$ . 由 (30) 式可知, 此时引起高級象散的原因是:  $\frac{1}{\cos I'_p} \neq 1$  和  $\frac{1}{n's'} - \frac{1}{ns} \neq \frac{1}{n'l'} - \frac{1}{nl}$ . 前一个因素是明显的, 它表明, 当視場增大时, 象散将增为  $(1 + \frac{1}{2} i_p'^2)$  倍. 为看出后一个因素的作用, 可先作下列变换:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n's'} - \frac{1}{ns} &= \frac{n^2 - n'^2}{n'n^2s'} + \frac{n' \cos I'_p - n \cos I_p}{n^2r}; \\ &= \frac{n^2 - n'^2}{n'^2ns} + \frac{n' \cos I'_p - n \cos I_p}{n'^2r}. \end{aligned} \quad (75)$$

对近軸光綫則有:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n'l'} - \frac{1}{nl} &= \frac{n^2 - n'^2}{n'n^2l'} + \frac{n' - n}{n^2r}; \\ &= \frac{n^2 - n'^2}{n'^2nl} + \frac{n' - n}{n'^2r}. \end{aligned} \quad (75a)$$

由此可見产生本征高級象散的原因有二, 首先是軸外光焦度和近軸光焦度不相等:

$$\frac{n' \cos I'_p - n \cos I_p}{r} \neq \frac{n' - n}{r},$$

其次是由于  $s \neq l$ . 因为軸外光焦度可近似地表示为:

$$\begin{aligned} \frac{n' \cos I'_p - n \cos I_p}{r} &\approx \frac{n' - n}{r} - \frac{n' i_p'^2 - n i_p^2}{2r}, \\ &= \frac{n' - n}{r} - \frac{(n i_p)^2}{2r} \left( \frac{1}{n'} - \frac{1}{n} \right), \\ &= \frac{n' - n}{r} \left( 1 + \frac{(n i_p)^2}{2n n'} \right). \end{aligned} \quad (75b)$$

故在物距为无限远时, 由于光焦度变化而使象散增为  $(1 + \frac{n'}{2n} i_p'^2)$  倍. 至于  $s \neq l$  的影响則可以由图 4.11 表示出来, 图中画了两种情况: 图 4.11a 中等  $s$  面与高斯物面有相当大的距离, 此时将因  $s \neq l$  而产生高級本征象散, 图 4.11 b 表示  $s$  与  $l$  相差不多的情况. 为将这种差别用公式表示出来, 由:

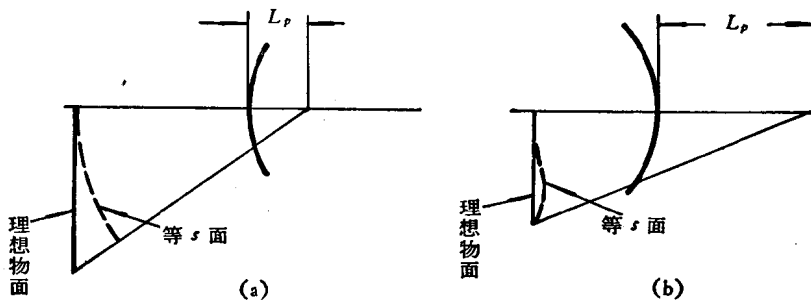


图 4.11

$$\left. \begin{aligned} s \cos U_p + X_p &= l, \\ X_p &= 2r \sin^2 \frac{1}{2} (I_p + U_p). \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

此式可近似表示为:

$$s \left( 1 - \frac{1}{2} u_p^2 \right) + \frac{r}{2} (i_p + u_p)^2 = l,$$

或

$$s \doteq l \left[ 1 + \frac{1}{2} \left\{ u_p^2 - \frac{r}{l} (i_p + u_p)^2 \right\} \right],$$

故

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{l} \doteq \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{2} \left[ \frac{u}{i+u} (i_p + u_p)^2 - u_p^2 \right]. \quad (77)$$

因之由(30)式求近似可得  $S_{\Xi}$  和  $S_{\text{III}}$  之比为:

$$\begin{aligned} \frac{S_{\Xi}}{S_{\text{III}}} &= \left( \frac{1}{n's'} - \frac{1}{ns} \right) / \left( \frac{1}{n'l'} - \frac{1}{nl} \right) \cos I'_p, \\ &= \frac{\frac{n' \cos I'_p - n \cos I_p}{n'^2 r} + \frac{n^2 - n'^2}{n'^2 ns} - \frac{n^2 - n'^2}{n'^2 nl} - \frac{n' - n}{n'^2 r} + \frac{1}{n'l'} + \frac{1}{nl}}{\cos I'_p \left( \frac{1}{n'l'} - \frac{1}{nl} \right)}, \\ &\doteq \left( 1 + \frac{1}{2} i_p'^2 \right) \left\{ \frac{1 + \frac{n' - n}{n'^2 r} \cdot \frac{n^2 i_p'^2}{2nn'} + \frac{n^2 - n'^2}{2n'^2 nl} \left[ \frac{u}{i+u} (i_p + u_p)^2 - u_p^2 \right]}{\frac{1}{n'l'} - \frac{1}{nl}} \right\}, \end{aligned}$$

故

$$S_{\Xi} \doteq S_{\text{III}} \left[ 1 + \frac{(i' + i) i_p'^2}{2(i' - u)} - \frac{n + n'}{2n'} \frac{u}{i' - u} \left\{ \frac{u}{i+u} (i_p + u_p)^2 - u_p^2 \right\} \right]. \quad (78)$$

其中第一項就是初級象散,第二、三項为二級象散的两个部分. 前一部分是  $s=l$  时产生的項,后一部分是当物面为平面时因  $s \neq l$  而引起的,由于这个原故,后項可归入下面將論及的衍生部分內. 除去这一部分后得二級本征象散为:

$$\frac{1}{2} S_{\text{III}} \frac{i' + i}{i' - u} i_p'^2. \quad (78a)$$

高級衍生象散比較复杂,很多因素都将对它发生作用. 光栏球差和彗差使  $L_p \neq l_p$ ,  $\sin U_p \neq u_p$ , 从而使  $I_p$  变化,致使产生衍生高級象散. 如前述,光栏彗差是畸变的組成部分,光栏彗差对衍生高級象散的影响也可看作是畸变对之发生的影响. 再由(33)式,入射于某一面的光束的原有象散,可使此折射面上产生的象散不同于初級的,無論  $s$  或  $t$  与  $l$  不同均可使象散变化. 这就是說光束原有的两个象面形状,原

有的畸变和原有的光栏球差均可影响此折射面产生出不同于初级的象散值。在第六章我们将导出所有衍生高级象差的一般表示式,在这里我们就不来作这种推导了。

对于高级弧矢象面弯曲我们可以作类似上述的讨论:

由公式 (56) 有:

$$S_{\text{III}} + S_{\text{IV}} = 2 \{ h_s (\cos U'_p - \cos U_p) + X_p (u'_s - u_s) \} n i \\ \doteq \left\{ -4h \sin \frac{U'_p + U_p}{2} \sin \frac{U'_p - U_p}{2} + 4r \sin^2 \frac{I_p + U_p}{2} (u'_s - u_s) \right\} n i.$$

由 (75) 式, 当略去  $s \neq l$  的影响时可得:

$$\left( \frac{1}{s'} - \frac{1}{s} \right) \doteq \left( \frac{1}{l'} - \frac{1}{l} \right) + \frac{n' - n}{r} \cdot \frac{(n i_p)^2}{2 n n'^2},$$

亦即

$$\frac{\Delta u_s}{h} = \frac{\Delta u}{h} \left( 1 + \frac{i + u}{2i} i_p i'_p \right).$$

将  $S_{\text{III}} + S_{\text{IV}}$  的表示式中  $\sin \frac{U'_p + U_p}{2}$ ,  $\sin \frac{I_p + U_p}{2}$  及  $\sin \frac{U'_p - U_p}{2}$  作级数展开即可得  $S_{\text{III}} + S_{\text{IV}}$  的近似值:

$$S_{\text{III}} + S_{\text{IV}} = (j^2 + h^2 n^2 i_p^2 - 2 j h n i_p) \left[ 1 - \frac{(u'_p + u_p)^2 + (i_p - i'_p)^2}{12} \right] \\ + [2 j h n i_p - r h n^2 i_p^2 (u + u')] \left[ 1 - \frac{(i_p + u_p)^2}{6} + \frac{i + u}{2i} i_p i'_p \right] \frac{n' - n}{n n' r}. \quad (79)$$

由此式除去初级弧矢场曲分布值后, 即得二级弧矢场曲的分布值表示式。这是一个较复杂的式子, 不易由它看出问题。

实际计算工作结果表明, 高级弧矢场曲总是不大的, 弧矢场曲总与初级象差预定值很相符。这一点不易由 (79) 式看出。但由求出初级弧矢场曲表示式 (60) 的步骤, 我们可以看出, 产生高级弧矢场曲的原因除  $\Delta u_s \neq \Delta u$  外, 就都是由于  $\cos \theta \neq 1 - \frac{1}{2} \theta^2$  所引起。当  $\theta$  不太大时这种误差量不大。由下表可见, 当  $\theta < 60^\circ$  时误差小于 10%, 故当  $I_p + U_p$  及  $U_p$  都小于  $60^\circ$  时, 高级弧矢场曲是不会太大的。

(弧度)	0.1745	0.3491	0.5236	0.6981	0.8726	1.0472
(度)	10°	20°	30°	40°	50°	60°
$1 - \frac{\theta^2}{2}$	0.9848	0.9390	0.8629	0.7573	0.6193	0.4516
$\cos \theta$	0.9848	0.9397	0.8660	0.7660	0.6428	0.5000
百分误差	0.00%	0.07%	0.35%	1.1%	3.6%	9.6%

## § 7.1 薄透鏡的高級象散和象面彎曲

當光欄在薄透鏡組上時，它的初級象散就完全由焦距決定，此時由於  $I_p = -U_p$ ， $I'_p = -U'_p$ ，因之高級象散也有比較簡單的性質。仍然考慮空氣中的一個單薄透鏡。在(30)式中由於  $I'_{p1} = I_{p2}$ ， $n_1 \sin I_{p1} = n \sin I_{p2} = -n_1 \sin U_{p1}$ ， $h_{t1} = h_{t2}$ ， $h_{s1} = h_{s2}$ ，故有：

$$\begin{aligned} & \cos U_{p1} [u'_{t2} u'_{s2} (s'_2 - t'_2) - u_{t1} u_{s1} (s_1 - t_1)] \\ &= h_{s1} h_{t1} \sin^2 U_{p1} \left( \frac{1}{s'_2} - \frac{1}{s_1} \right) \\ &= h_{s1} h_{t1} \sin^2 U_{p1} \left( \frac{1}{s'_2} - \frac{n_2}{s_2} + \frac{n'_1}{s'_1} - \frac{1}{s_1} \right) \\ &= h_{s1} h_{t1} \sin^2 U_{p1} (-\cos U_{p1} + n \cos U'_{p1}) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & u'_{t2} u'_{s2} (s'_2 - t'_2) - u_{t1} u_{s1} (s_1 - t_1) \\ &= h_{s1} h_{t1} \sin^2 U_{p1} \frac{\frac{n \cos U'_{p1}}{\cos U_{p1}} - 1}{n - 1} \frac{1}{f}, \end{aligned} \quad (80a)$$

式中  $n$  為透鏡折射率， $f$  為透鏡焦距。將  $\sin U_{p1}$  以符號  $U$  表示，並將

$$\cos U'_{p1} = \sqrt{1 - \sin^2 U'_{p1}} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 U_{p1}}{n^2}}, \quad \cos U_{p1} = \sqrt{1 - \sin^2 U_{p1}}$$

作級數展開，則(80a)右方即為：

$$\frac{1}{f} \cdot h_t h_s U^2 \left[ 1 + \frac{n+1}{2n} U^2 + \frac{(3n^2+1)(n+1)}{8n^3} U^4 + \dots \right]. \quad (80b)$$

這就証明了，薄透鏡系統的高級象散也不因透鏡彎曲而變化，並基本上由焦距決定與初級象散不同之處是：高級象散還是透鏡折射率的函數， $n$  越大則高級象散越小， $n = -1$  時為零。

當光欄處在薄透鏡上時，它產生的高級象面彎曲也極簡單。由(56)式，因為  $X_p = 0$ ，及  $h_{s1} = h_{s2}$ ，故

$$\frac{1}{2} (S_{\text{III}} + S_{\text{IV}}) = h_s \sum n_i \Delta \cos U_p. \quad (80c)$$

## § 8 為使軸外細光束成象理想時，光學系統應有的結構

從本章的全部討論可以看到，考慮軸外細光束的成象所涉及的問題性質，與上一章幾乎截然不同。軸上點發出的大光束如何折射，對我們現在的問題幾乎毫無關係，

反过来,在考虑近轴象点时无足轻重的主光线光路,现在却成为问题的中心。

在此,通过光阑中心的主光线所起的作用部分地与上一章中的轴上点大光束有同样意义。已经看到,畸变实是光阑彗差与角倍率所引起,而当物体位移时,畸变的变更则由光阑球差决定。衍生高级象散也与光阑球差和彗差有关等等。此外子午象面弯曲可以看作是光阑移动时畸变变化所形成。虽然如此,主光线的球差、彗差所引起的毕竟还不是完全决定性的作用,我们已经看到,轴外象差具有更为复杂的性质。

另一方面,光学系统的目的在于使某一定的物体成出一定的象。光阑放在什么位置和怎样成像与我们对光学系统的要求并没有什么关系(当然并不是所有的情况都如此,例如目镜),因此我们尽可以选择一个高级象差最小的位置作为光阑位置,这一点是轴外象差与上一章所考察的球差、彗差根本不同之处,也是校正轴外象差的一个重要条件。

既然高级象散和畸变都随  $I_p$  的加大而加大,因此,当对主光线位置等没有要求时,应使光阑中心处在主光线不产生偏角的位置;对于整个系统而言,宜处在节点(主点)位置,对单个折射面而言,则宜处在球心。而当一定要求主光线有一定偏角时,偏角宜均匀分配,以使各面上负担的主光线偏角不太大,尤其在  $\frac{v'}{n'} - \frac{u}{n}$  较大的面上更应小。为使光学系统中各部分排列分配和单个透镜的弯曲形状适应轴外象差的要求,就应该遵守这些基本原则。

作为例子下面来计算一个单正透镜产生轴外象差最小的条件。我们的希望是主光线在两个折射面上有最小的  $i_p$ , 显然当偏角一定时 ( $h_p \varphi$  一定时), 最小的分配是  $-i_{p1} = i'_{p2}$ , 故必有

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) i_{p1} = \frac{1}{2} h_p \varphi.$$

$i_p$  和  $h_p$  成正比,  $h_p$  愈小  $i_p$  也愈小,但是随之而决定的半径也愈小,如下例:

$n$	$u_{p1}$	$\varphi$	$h_p$	$l_{p1}$	$i_{p1}$	$r_1$	$u'_{p2}$	$r_2$
1.5	1	1	0.1	0.1	0.15	0.087	1.1	0.152
			0.5	0.50	0.75	0.286	1.5	0.666

当  $h_p \rightarrow 0$  时  $r \rightarrow 0$ 。

由此可见,为减小  $i_p$  就要求光阑尽量靠近透镜并且使透镜作极度弯曲(弯向光阑),这个要求与减少球差彗差的要求截然矛盾,这个矛盾几乎在所有光学系统中都表现出来。并且它与减少球差彗差的情况不同,此时为使  $i_p$  变小而多用几组透镜是

并无显著作用的。

由 (73), (74), (71) 及 (68) 式可以看出, 使用薄透鏡以校正畸变、象散和象面弯曲的問題完全可用  $P, W$  方法解决。因此  $P, W$  的討論不单是对軸上球差和彗差有意义。

### §9 象散、象面弯曲和畸变的表示及评价

象散、象面弯曲和畸变都是和孔徑无关的象差, 为了表示出具体的光学系统中这几种象差和其中包含的高级量的大小, 最方便的是画出它們和視場角(象高  $H$ ) 的关系。根据前述,  $x_t$  及  $x_s$  之初级量与  $H^2$  成正比,  $DT$  与  $H^3$  成正比。一般文献中多采用  $x_t, x_s, DT \sim H$  的图表示, 如图 4.12a, 4.12b。有时这种图不如  $x_t, x_s \sim H^2$  及  $DT \sim H^3$  的图方便, 后者由图的非线性情况可立即判断高级量的大小, 如图 4.12c, 4.12d 由前述的級数展开观点可以看出,  $x_t$  和  $x_s$  和  $H$  的关系均可表示为  $aH^2 + bH^4 + cH^6 + \dots$ , 而  $DT$  則是  $a'H^3 + b'H^5 + c'H^7 + \dots$ 。

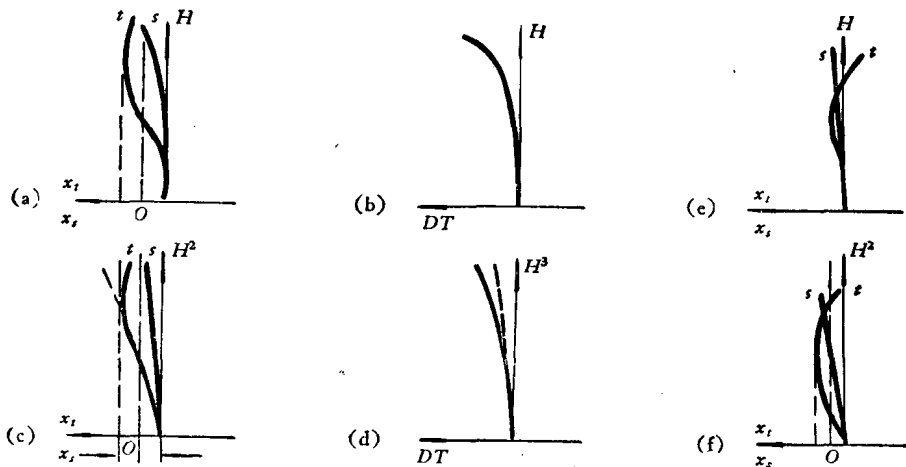


图 4.12

为了得到軸外象差的完整概念, 当假定只有二級象差时, 只須算出初级象差和一个視場角的实际象差即可。为了验证是否只有二級的量, 可再多算一个視場角的实际象差。通常計算的两个視場是光学系統的最大視場和 0.7 帶視場, 例如  $2U_p = 40^\circ$  时, 須計算  $20^\circ$  和  $14^\circ$  光綫。

由图就可以判定高级象差的大小和应采取的校正方案。当高级象差可控制时, 应使变动的方向为导致初级、高级同时为零。当高级象差不能控制时应使初级与其

相补偿. 当补偿后的结果还稍大于接收器所能感知的量时, 应使象差对整个象面的影响减到最小限度. 怎样才算“影响减到最小限度”的问题是和使用要求密切相关的, 使用条件决定各个视场所起的作用大小, 亦即决定了我们在对各个视场取平均时所须用的“权”; 并且, 在各种象差同时出现时, 决定各种象差的作用大小, 即各种象差求平均时的“权”.

对象散和象面弯曲来说, 假使整个视场中各部分面积起同样作用的话, 图 4.12 c 所示的那样是最恰当的. 曲线在横轴上的投影是整个象面所处的范围, 如图中虚线所示. 中点 (图中以“O”号标志的位置) 就大致是此时的最佳象面, 中点到  $s$ ,  $t$  曲线的距离表示象模糊的程度. 对这个象面来说两焦面和此参考面间最大差距为最小. 变更初级象散和 Petzval 和可以使  $s$ ,  $t$  都移近纵轴, 从而使曲线在横轴上的投影变小, 投影的中点到曲线的距离也随之变小, 象也就更为清晰. 这样看来图 4.12 f 的状况是最佳状况, 此时曲线  $t$  (弯曲最大者) 在轴上投影为极小并且  $s$  线 (假设是一直线) 与曲线  $t$  的中线“O”之间平均距离最小——三角形面积绝对值最小.

实际上视场边缘部分只有极少数情况才起同样大小的作用, 在很多情况下是作用不大的, 例如照相用的底片感光部分是长方或正方形的. 最大视场起的作用就面积而言也并不和  $H^2$  成正比, 而且边缘部分不是观察的重点, 仅是观察的陪衬而已. 这种情况表示于图 4.13, 从最大视场到 0.7 带几乎对普通观察不发生作用, 从 0.7 带到 0.5 带作用也不大, 0.5 带以内才是主要的观察对象. 图 4.13 中的长方形表示所设想的主要观察对象的位置. 从这种观点看来, 图 4.12 f 的方案就不再是最好的方案了, 在这方案中把 0.7 带以上和 0.7 带以下看作起同样作用, 在考虑中给了同样大小的“权”. 好的方案应该是使 0.7 带以上变坏而更加改善 0.7 带以下的部分, 此时, 以  $H \sim x_t$ ,  $x_s$  图表示时, 比较接近图 4.13 所定的权的需要, 一个可能比图 4.12 f 好的方案如图 4.12 e 所示, 图中 0.7 带以下比图 4.12 f 好得多, 在 0.7 带以外则不如图 4.12 f.

考虑到人眼的特性, 目镜应有的校正状况和上面的考虑有很大的不同, 主要原因是人眼有调焦能力, 因此当象面弯曲量在调焦范围以内时, 弯曲是不重要的, 此时应使象散为零, 超出调焦范围后的情况则与上面讨论过的情况相似.

对于畸变, 也有类似的问题, 我们须要考虑, 当照片不是用作坐标准确测量, 亦即不由照片上两点间距以确定实物两点间相对位置时, 我们只要眼睛感觉不到直线所成的象是弯曲的就够了. 为此, 畸变不宜以绝对数值表示, 而宜以相对数值——和象高之比——表示. 可以证明, 这种相对数值与直线所成的象的弯度相对应. 证明如

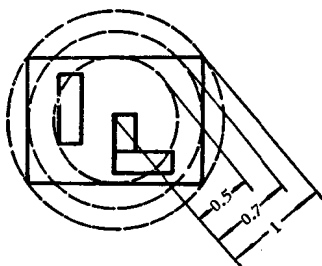


图 4.13

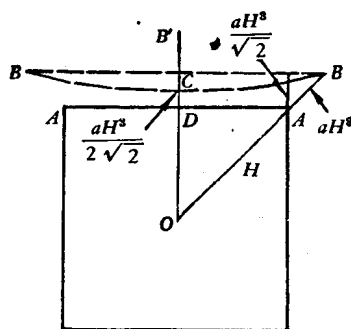


图 4.14

下：設物体是以光軸为中心的正方形的一边，其高斯象如图 4.14 中直綫  $AA'$  所示。設正方形对角綫长  $2H$ ，則  $OA=H$ ， $OD=\frac{H}{\sqrt{2}}$ ，設畸变  $AB=aH^3$ ，則由于畸变与  $H^3$  正比，畸变  $DC=\frac{aH^3}{2\sqrt{2}}$ ，而  $B$  点在  $OD$  上的投影  $B'$  点到  $D$  点的距离是  $\frac{1}{\sqrt{2}}aH^3$ ，故  $B'C=\frac{1}{2\sqrt{2}}aH^3$ 。我們把直綫的实际象  $BCB$  看作是个圓弧， $B'C$  即此圓弧的矢高，因此圓弧半徑  $R$  等于：

$$R = \left(\frac{H}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{2\sqrt{2}}{2aH^3} = \frac{1}{\sqrt{2}aH}$$

我們定义一段曲綫的弯度  $RC$  是曲綫长度与这段曲綫曲率半徑之比，則由初級畸变引起的弯度  $RC$  为：

$$RC = \frac{2\frac{H}{\sqrt{2}}}{R} = \frac{2aH^3}{H}$$

这就証明了最大畸变相对值的两倍就是直綫象的弯度。

实验表明，眼睛一般不能觉察 4% 的弯度，弯度 6% 就可以由仔細的观察看出，当观察的目的不在发现畸变而集中于画面的内容时，弯度虽达 20% 也不致引起观者注意。一般而言畸变小于 2% 是不能觉察的。因此，对于不是为坐标测量用的光学系統來說，画出畸变的百分数  $DT/H \sim H$  曲綫就更容易看出問題。

### § 10 邻主光綫波象差級数展开，軸外初級球差和軸外初級彗差

在 § 3.1 中述及邻主光綫的高斯光学时，所考虑的細光束是充分靠近主光綫的，以致此細光束折射后完全按微分公式的綫性要求聚焦在一点。我們現在要考虑的則是当光束張角  $u$  或入射高度  $h$  稍稍放大后的聚焦表现，为考虑这种問題用光程差方法更为方便。



图 4.15 中以主光线折射点  $O$  为原点, 作一直角坐标系, 令  $x$  轴通过球心,  $y$  轴处在子午面内, 主光线和  $x$  轴夹  $I_p$  角并处在  $xy$  面内. 在主光线上任选一点  $A$ , 设  $A$  到  $O$  点的距离为  $e$ , 则其坐标如图所示. 因之, 球面上任一点  $P(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  到  $A$  点的距离是

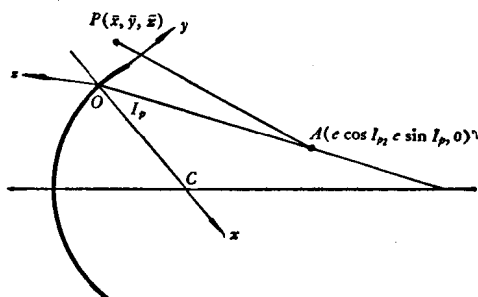


图 4.15

$$\overline{AP}^2 = (\bar{x} - e \cos I_p)^2 + (\bar{y} - e \sin I_p)^2 + \bar{z}^2. \quad (81)$$

设球面半径为  $r$ , 则

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = 2r\bar{x},$$

$$\bar{x} = r - \sqrt{r^2 - (\bar{y}^2 + \bar{z}^2)}, \quad (82)$$

将此式作近似展开, 得  $\bar{x}$  的近似值为:

$$\bar{x} = \frac{\bar{y}^2 + \bar{z}^2}{2r} + \frac{(\bar{y}^2 + \bar{z}^2)^2}{8r^3}. \quad (83)$$

而长度  $\overline{AP}$  则可表示为:

$$\begin{aligned} \overline{AP}^2 &= \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 + e^2 - 2e\bar{x} \cos I_p - 2e\bar{y} \sin I_p, \\ &= 2r\bar{x} - 2e\bar{x} \cos I_p + e^2 - 2e\bar{y} \sin I_p, \\ &= \left(1 - \frac{e \cos I_p}{r}\right) \left[ (\bar{y}^2 + \bar{z}^2) + \frac{(\bar{y}^2 + \bar{z}^2)^2}{4r^2} \right] + (e - \bar{y} \sin I_p)^2 - \bar{y}^2 \sin^2 I_p. \end{aligned} \quad (84)$$

由于所考虑的是邻主光线的区域;  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$  与  $e$  相比均为小量, 以  $\delta$  表示小量, 则

$$\left. \begin{aligned} \overline{AP}^2 &= (e - \bar{y} \sin I_p)^2 + \delta, \\ \delta &= \left(1 - \frac{e \cos I_p}{r}\right) \left[ (\bar{y}^2 + \bar{z}^2) + \frac{(\bar{y}^2 + \bar{z}^2)^2}{4r^2} \right] - \bar{y}^2 \sin^2 I_p, \\ &= \left(\cos^2 I_p - \frac{e \cos I_p}{r}\right) \bar{y}^2 + \left(1 - \frac{e \cos I_p}{r}\right) \bar{z}^2 \\ &\quad + \left(1 - \frac{e \cos I_p}{r}\right) \frac{(\bar{y}^2 + \bar{z}^2)^2}{4r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

故光程  $n\overline{PA}$  的近似值可由 (85) 式作级数展开而得:

$$\begin{aligned} n\overline{PA} &\doteq ne - \bar{y}n \sin I_p + \frac{n\delta}{2(e - \bar{y} \sin I_p)} - \frac{n\delta^2}{8(e - \bar{y} \sin I_p)^3} \\ &\doteq ne - \bar{y}n \sin I_p + \frac{n\delta}{2e} \left( 1 + \frac{\bar{y} \sin I_p}{e} - \frac{\bar{y}^2 \sin^2 I_p}{e^2} \right) - \frac{n\delta^2}{8e^3}. \end{aligned} \quad (86)$$

同理，为求象空間主光綫上距  $O$  点为  $e'$  的一点  $A'$  到  $P'$  点的光程，只須將上式中除  $y, z$  外的各量之上加一撇即可。而由  $A$  到  $A'$  的总光程是：

$$[AA'] = n'\overline{PA'} - n\overline{PA}, \quad (87)$$

由于  $n \sin I_p = n' \sin I'_p$ ，故得：

$$\begin{aligned} [AA'] &= \Delta ne + \frac{\bar{y}^2}{2} \Delta n \left( \frac{\cos^2 I_p}{e} - \frac{\cos I_p}{r} \right) + \frac{\bar{z}^2}{2} \Delta n \left( \frac{1}{e} - \frac{\cos I_p}{r} \right) \\ &\quad + \frac{(\bar{y}^2 + \bar{z}^2)^2}{8r^2} \Delta n \left( \frac{1}{e} - \frac{\cos I_p}{r} \right) \\ &\quad + \frac{\bar{y}^3 n \sin I_p}{2} \Delta n \left( \frac{\cos^2 I_p}{e} - \frac{\cos I_p}{r} \right) \frac{1}{ne} \\ &\quad + \frac{\bar{y} \bar{z}^2 n \sin I_p}{2} \Delta n \left( \frac{1}{e} - \frac{\cos I_p}{r} \right) \frac{1}{ne} \\ &\quad + \frac{\bar{y}^4 n^2 \sin^2 I_p}{2} \Delta n \left( \frac{\cos^2 I_p}{e} - \frac{\cos I_p}{r} \right) \frac{1}{n^2 e^2} \\ &\quad + \frac{\bar{y}^2 \bar{z}^2 n^2 \sin^2 I_p}{2} \Delta n \left( \frac{1}{e} - \frac{\cos I_p}{r} \right) \frac{1}{n^2 e^2} \\ &\quad - \frac{\bar{y}^4}{8} \Delta n^2 \left( \frac{\cos^2 I_p}{e} - \frac{\cos I_p}{r} \right)^2 \frac{1}{ne} - \frac{\bar{z}^4}{8} \Delta n^2 \left( \frac{1}{e} - \frac{\cos I_p}{r} \right)^2 \frac{1}{ne} \\ &\quad - \frac{\bar{y}^2 \bar{z}^2}{4} \Delta n^2 \left( \frac{\cos^2 I_p}{e} - \frac{\cos I_p}{r} \right) \left( \frac{1}{e} - \frac{\cos I_p}{r} \right) \frac{1}{ne}. \end{aligned} \quad (88)$$

由此即可得出单个折射面上以  $A, A'$  为参考点时的波象差  $W$ ：

$$W = [AA']_{\bar{y}=\bar{z}=0} - [AA']_{\bar{y}, \bar{z}} = \Delta ne - [AA']. \quad (89)$$

将各个折射面的波象差相加即得光学系統的邻主光綫总波差。当然在所有計算过程中应保証光綫坐标  $y, z$  和  $e$  的連續性，例如以子午焦点为参考点，以角  $u_t$  的光綫連續算出各折射面上的  $h_t$ ，則  $h_t$  和  $\bar{y}$  正比，且有：

$$\Delta n \left( \frac{\cos^2 I_p}{e} - \frac{\cos I_p}{r} \right) = 0.$$

这时坐标  $\bar{z}$  近似地与  $h_s$  成正比，將  $\bar{y}/h_t, \bar{z}/h_s$  写作  $y, z$  則有：

$$2W_t = P_1 z^2 + P_2 y^3 + P_3 y z^2 + P_4 y^4 + P_5 y^2 z^2 + P_6 z^4, \quad (90)$$

其中

$$\begin{aligned}
P_1 &= \sum_1^k -\Delta h_s^2 n \left( \frac{1}{t} - \frac{\cos I_p}{r} \right) = -\sum_1^k h_s^2 n^2 \sin^2 I_p \Delta \frac{1}{nt}, \\
P_2 &= \sum_1^k h_i^3 n \sin I_p n \left( -\frac{\cos^2 I_p}{t} + \frac{\cos I_p}{r} \right) \Delta \frac{1}{nt}, \\
P_3 &= \sum_1^k h_i h_s^2 n \sin I_p \Delta n \left( -\frac{1}{t} + \frac{\cos I_p}{r} \right) \frac{1}{nt} \\
&= \sum_1^k h_i h_s^2 n \sin I_p \left\{ n \left( -\frac{\cos^2 I_p}{t} + \frac{\cos I_p}{r} \right) \Delta \frac{1}{nt} - n^2 \sin^2 I_p \Delta \frac{1}{n^2 t^2} \right\}, \\
P_4 &= \sum_1^k h_i^4 \left\{ -\frac{1}{4r^2} n^2 \sin^2 I_p \Delta \frac{1}{nt} + n^2 \sin^2 I_p n \left( -\frac{\cos^2 I_p}{t} + \frac{\cos I_p}{r} \right) \Delta \frac{1}{n^2 t^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} n^2 \left( \frac{\cos^2 I_p}{t} - \frac{\cos I_p}{r} \right)^2 \Delta \frac{1}{nt} \right\}, \\
P_5 &= \sum_1^k h_i^2 h_s^2 \left\{ -\frac{1}{2r^2} n^2 \sin^2 I_p \Delta \frac{1}{nt} + n^2 \sin^2 I_p \Delta n \left( -\frac{1}{t} + \frac{\cos I_p}{r} \right) \frac{1}{n^2 t^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} n \left( \frac{\cos^2 I_p}{t} - \frac{\cos I_p}{r} \right) \Delta n \left( \frac{1}{t} - \frac{\cos I_p}{r} \right) \frac{1}{nt} \right\}, \\
P_6 &= \sum_1^k h_s^4 \left\{ -\frac{1}{4r^2} n^2 \sin I_p \Delta \frac{1}{nt} + \frac{1}{4} \Delta n^2 \left( \frac{1}{t} - \frac{\cos I_p}{r} \right)^2 \frac{1}{nt} \right\}.
\end{aligned} \tag{90a}$$

式中由于  $\bar{z}$  和  $h_s$  的比例关系是近似的, 故除  $P_2, P_4$  外, 其他系数都是近似的。

再如以弧矢光线焦点为参考点, 则由角  $u_s$  算出的  $h_s$  与  $\bar{z}$  成正比, 此时  $\Delta n \left( \frac{1}{e} - \frac{\cos I_p}{r} \right) = 0$ ,  $\bar{y}$  与  $h_i$  的正比关系是近似的, 此时有

$$2W_s = \bar{P}_1 y^2 + \bar{P}_2 y^3 + \bar{P}_3 y z^2 + \bar{P}_4 y^4 + \bar{P}_5 y^2 z^2 + \bar{P}_6 z^4, \tag{91}$$

式中

$$\begin{aligned}
\bar{P}_1 &= \sum_1^k h_i^2 n^2 \sin^2 I_p \Delta \frac{1}{ns}; \\
\bar{P}_2 &= \sum_1^k h_i^3 n \sin I_p \Delta n \left( -\frac{\cos^2 I_p}{s} + \frac{\cos I_p}{r} \right) \frac{1}{ns}; \\
&= \sum_1^k h_i^3 n \sin I_p \left\{ n \left( \frac{\cos I_p}{r} - \frac{1}{s} \right) \Delta \frac{1}{ns} + n^2 \sin^2 I_p \Delta \frac{1}{n^2 s^2} \right\}; \\
\bar{P}_3 &= \sum_1^k h_i h_s^2 n \sin I_p n \left( \frac{\cos I_p}{r} - \frac{1}{s} \right) \Delta \frac{1}{ns}, \\
\bar{P}_4 &= \sum_1^k h_i^4 \left\{ n^2 \sin^2 I_p \Delta n \left( \frac{\cos I_p}{r} - \frac{\cos^2 I_p}{s} \right) \frac{1}{n^2 s^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \Delta n^2 \left( \frac{\cos I_p}{r} - \frac{\cos^2 I_p}{s} \right)^2 \frac{1}{ns} \right\},
\end{aligned} \tag{91a}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_5 &= \frac{1}{2} \sum_1^k h_i^2 h_s^2 \left\{ n \left( \frac{\cos I_p}{r} - \frac{1}{s} \right) \Delta n \left( \frac{\cos I_p}{r} - \frac{\cos^2 I_p}{s} \right) \frac{1}{ns}, \right. \\ \bar{P}_6 &= \frac{1}{4} \sum_1^k h_s^4 n^2 \left( \frac{\cos I_p}{r} - \frac{1}{s} \right)^2 \Delta \frac{1}{ns}. \end{aligned} \right\}$$

其中除  $\bar{P}_6$  外都是近似的。除  $-\bar{P}_1 \doteq P_1$  外 (91a) 式中所有系数显然与 (90a) 式中的对应项大致相等。

由軸外象差的一般性质可以看到, 当我们知道軸外子午球差、子午彗差和弧矢球差、弧矢彗差后, 軸外大光束的结构也就完全确定了, 因此我们并不须要算出所有上述的一切象差系数。现在就来考察波差在最后的象空间引起的几何象差。由于

$$\left. \begin{aligned} n'u'_k T' A'_y &= \frac{\partial W}{\partial (y \cos I')}, \\ n'u'_t{}^2 L A'_t &= 2 \frac{\partial W}{\partial (y \cos I')^2}, \quad (\text{偶次}) \\ n'u'_s{}^2 L A'_s &= 2 \frac{\partial W}{\partial z^2}, \quad (\text{偶次}) \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

故在波差表示式中令  $z=0$  时可得子午球差  $L A'_t$ , 子午彗差  $K'_t$ ; 令  $y=0$  时得弧矢球差和弧矢彗差  $L A'_s$ ,  $K'_s$ :

$$\left. \begin{aligned} 2n'u'_t \cos I' K'_t &= 3y^2 S_{\lambda}, \\ 2n'u'_t \cos I' K'_s &= z^2 S_{\lambda}, \\ 2n'u'_t{}^2 \cos^2 I' L A'_t &= y^2 S_{\tau}, \\ 2n'u'_s{}^2 L A'_s &= z^2 S_{\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

其中

$$S_{\tau} = 4\bar{P}_6 = \sum_1^k h_s n^2 i_s^2 \Delta \frac{u_s}{n}, \quad (94)$$

$$\begin{aligned} S_{\tau} = 4P_4 &= \sum_1^k h_i n^2 \cos^2 I_p i_t^2 \Delta \frac{u_t}{n \cos I_p} \\ &+ \sum_1^k h_i n^2 \sin^2 I_p [4i'_t u'_t + 4i_t u_t - (i_t + u_t)^2] \Delta \frac{u_t}{n \cos I_p}, \end{aligned} \quad (95)$$

即

$$\begin{aligned} S_{\tau} &= \sum_1^k h_i n \cos I_p i_t (i'_t - u_t) (i_t - i'_t) \\ &+ \sum_1^k h_i n^2 \sin^2 I_p [4i_t u_t - (i'_t - u'_t)^2] \Delta \frac{u_t}{n \cos I_p}, \end{aligned} \quad (95^*)$$

$$S_{\bar{\lambda}} = \bar{P}_3 = \sum_1^k h_t n \sin I_p n i_s \Delta \frac{u_s}{n}, \quad (96)$$

$$\begin{aligned} S_{\lambda} = P_2 &= \sum_1^k h_t n \sin I_p n \cos I_p i_t \Delta \frac{u_t}{n \cos I_p} \\ &= \sum_1^k h_t n \sin I_p (i_t' - u_t) (i_t - i_t'). \end{aligned} \quad (97)$$

除  $S_{\lambda}$  外表示式都是准确的,  $S_{\lambda}$  因受到  $h_t$  和  $\bar{y}$  不准确地成正比的影响, 因而是个近似表示.

由于軸外球差和彗差几乎和軸上点的初級象差相同, 其初級近似值是和  $S_I$ 、 $S_{II}$  相等的. 将它們作类似于 § 7 中的适当运算应当可以求得它們和  $S_I$ 、 $S_{II}$  的差别, 这四种高次差别才是軸外光束的特征. 显然它們比高次象散要复杂得多.

运用 § 5 的结果作近似, 可以得到比本节的结果更多的项, 不仅可以考虑軸外光束孔径角不太大的情况, 也可以考虑孔径角很大的情况, 但是结果更为复杂; 将它們分类就已很繁复.

由此可见, 对于非无限細的軸外光束, 除光束中心具有畸变、象散和象面弯曲外, 較大的光束就有球差和彗差, 而且子午截面和弧矢截面的量也大小不一. 当光束孔径角再加大时, 象差的表现将更为复杂.

### § 11 軸外初級球差和軸外初級彗差的近似展开

我們把軸外初級球差、軸外初級彗差的表示式作級数展开, 取至  $i_p$  的平方项, 这样便可把軸外初級球差及軸外初級彗差表示成軸上点近軸光綫以及近軸主光綫的各个角度的代数多项式, 此时的形式便于計算和討論.

推导公式时, 首先把 (90a) 式及 (91a) 式中  $P_1 - P_6$ ,  $\bar{P}_1 - \bar{P}_6$  表示式中的因子作一些变换. 在变换过程中, 我們均設  $s = t = l$ , 这是由于我們可把  $s \neq l$ ,  $t \neq l$  引起的象差归并入衍生象差中的緣故.

首先求出一些量的近似表示:

$$\begin{aligned} \frac{\cos I_p}{r} - \frac{1}{l} &\doteq \frac{1}{r} - \frac{1}{l} - \frac{i_p^2}{2r} = \frac{i}{h} - \frac{i_p^2}{2r} \\ &= \frac{i}{h} \left( 1 - \frac{h}{2r} \frac{i_p^2}{i} \right) \\ &= \frac{i}{h} \left( 1 - \frac{i_p^2}{2} \frac{i+u}{i} \right); \end{aligned} \quad (98a)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\cos I_p}{r} - \frac{\cos^2 I_p}{l} &= \cos I_p \left( \frac{1}{r} - \frac{\cos I_p}{l} \right) \\
&\doteq \cos I_p \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{l} + \frac{i_p^2}{2l} \right) \doteq \frac{i}{h} \left( 1 - \frac{i_p^2}{2} \right) \left( 1 + \frac{i_p^2 u}{2i} \right) \\
&= \frac{i}{h} \left[ 1 + \frac{i_p^2}{2} \left( \frac{u}{i} - 1 \right) \right] = \frac{i}{h} \left( 1 - \frac{i_p^2}{2} \frac{i-u}{i} \right); \tag{98b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \frac{1}{ns} &= \frac{1}{n's'} - \frac{1}{ns} \\
&= \left( \frac{n}{s} + \frac{n' \cos I'_p - n \cos I_p}{r} \right) \frac{1}{n'^2} - \frac{1}{ns} \\
&= \frac{n^2 - n'^2}{n'^2 ns} - \frac{n' \cos I'_p - n \cos I_p}{n'^2 r} \\
&= \Delta \frac{1}{nl} - \frac{n' - n}{n'^2 r} + \frac{n' \cos I'_p - n \cos I_p}{n'^2 r} \\
&\doteq \Delta \frac{1}{nl} - \frac{n' i_p'^2 - n i_p^2}{2n'^2 r} \\
&= \Delta \frac{1}{nl} - \frac{n^2 i_p^2}{2n'^2 r} \left( \frac{1}{n'} - \frac{1}{n} \right) \\
&= \frac{i' - u}{h} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right) + \frac{i_p'^2}{2r} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right) \\
&= \frac{i' - u}{h} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right) \left[ 1 + \frac{(i+u)}{2(i'-u)} i_p'^2 \right]; \tag{98c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \frac{1}{nt} &= \frac{1}{n'^2 \cos^2 I'_p} \left( \frac{n \cos^2 I_p}{t} + \frac{n' \cos I'_p - n \cos I_p}{r} \right) - \frac{1}{nt} \\
&= \frac{n^2 \cos^2 I_p - n'^2 \cos^2 I'_p}{nm'^2 \cos^2 I'_p t} + \frac{n' \cos I'_p - n \cos I_p}{n'^2 \cos^2 I'_p r} \\
&= \frac{1}{t} \left( \frac{n^2 \cos^2 I_p - n'^2 \cos^2 I'_p}{nm'^2 \cos^2 I'_p} \right) + \frac{n' \cos I'_p - n \cos I_p}{n'^2 \cos^2 I'_p r} \\
&= \left( \Delta \frac{1}{nl} - \frac{n' - n}{n'^2 r} \right) \frac{n^2 \cos^2 I_p - n'^2 \cos^2 I'_p}{(n^2 - n'^2) \cos^2 I'_p} + \frac{n' \cos I'_p - n \cos I_p}{n'^2 \cos I'_p r} \\
&= \Delta \frac{1}{nl} - \frac{n^2 \cos^2 I_p - n'^2 \cos^2 I'_p}{(n^2 - n'^2) \cos^2 I'_p} \\
&\quad + \frac{(n' - n) (n'^2 \cos^2 I'_p - n^2 \cos^2 I_p) + (n^2 - n'^2) (n' \cos I'_p - n \cos I_p)}{n'^2 r \cos^2 I'_p (n^2 - n'^2)} \\
&\doteq \frac{i' - u}{h} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right) \left[ 1 + i_p'^2 + \frac{i+u}{2(i'-u)} i_p'^2 \right] \\
&= \frac{i' - u}{h} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right) \left[ 1 + \frac{2i' + i - u}{2(i'-u)} i_p'^2 \right]. \tag{98d}
\end{aligned}$$

由 (94), (95), (96), (97), (98) 及 (90a), (91a) 諸式即可得象差的近似表示:

$$S_x = P_2 \doteq S_{II} \left[ 1 - \frac{i-u}{i} \frac{i_p^2}{2} + \frac{2i'+i-u}{2(i'-u)} i_p'^2 \right]; \quad (99a)$$

$$S_\lambda = \bar{P}_3 \doteq S_{II} \left[ 1 - \frac{i+u}{i} \frac{i_p^2}{2} + \frac{i+u}{2(i'-u)} i_p'^2 \right]; \quad (99b)$$

$$S_\tau = 4P_4 \doteq S_I \left\{ 1 - \frac{i_p^2}{i^2} \left[ -(i+u)^2 - i(i-u) + \frac{i'^2(2i'+i-u)}{2(i'-u)} + 4ni \left( \frac{u'}{n'} + \frac{u}{n} \right) \right] \right\}; \quad (99c)$$

$$S_\pi = 4\bar{P}_5 \doteq S_I \left\{ 1 + (i+u) i_p'^2 \left[ \frac{1}{2(i'-u)} - \frac{n'}{ni'} \right] \right\}. \quad (99d)$$

有了公式組 (99), 便易于象計算初級象差系数  $S_I - S_V$  那样, 求出  $S_\pi - S_x$ .

参 考 文 献

[1] 王之江, 光学設計方法及高級象差分析 (未发表, 1956).  
 [2] 魯西諾夫, M. M., 技术光学, 科学出版社 (1961), 第十九章, § 69, 第 302—306 頁.

# 第五章 色 差

## §1 光 学 材 料

光綫的折射和反射总是借具体的材料来实现的。电磁波能不能用来成象，能不能作为光学观察的工具，首先就看能不能找到对它透明的折射材料或对它有足够反射率的反射材料。

按反射定律，入射角和反射角恒相等。因此，反射面的唯一光学特性就是它对各波长的光綫的反射率，后者就决定此反射面是否合乎使用要求。电介质的反射率由夫累涅尔(Fresnel)公式决定，除在掠入射或全反射条件下反射率是不高的。由此可见，一般不宜由电介质組成成象用的反射面。但在特殊情况——光束掠入射的反射鏡面，入射光束都处在全反射条件下的平面反射面(全反射棱鏡)等等，使用电介质形成的反射面是合宜的。絕大多数成象用的反射面均由金属或金属膜組成。按照电磁理論，金属的反射率高是由于它对这部分光波有很高的吸收率，物质对某些波长有选择吸收的同时必对这些波长具有高反射率。当反射面的反射率不高时，反射率随入射角而变化，同时对两个偏振方向的反射率差异也大。当正入射光綫具有高反射率时，反射率与入射角沒有很大关系，同时对两偏振方向的反射率也并无明显差别。偏振光經金属面反射后其偏振性质一定发生改变<sup>[1]</sup>。

金属反射面由于形成的条件不同(大块金属磨光；电解淀积；蒸发鍍层；蒸鍍时的真空度，淀积时间和温度及膜层厚度等等)结构不同，其反射率差异可以很大。碱金属和碱土金属具有高反射率但无实用价值，常用的高反射金属是銀和鋁。銀在波长大于0.32微米时反射率約95%，但随着使用时间加长反射率降低。鋁的反射率稳定，且对紫外綫有更高的反射率，它在波长大于0.14微米时的反射率約为89%。实际金属膜的特性相当复杂<sup>[2]</sup>。

由于各色光綫均按同一方式反射，因之对反射光不发生色差別的問題。



透射材料的特性除透过率外还有折射率。透射材料透过率的特点是不但对短波不透明而且对长波也不透明。一般光学玻璃只能通过 0.35—2.5 微米间的光线，但使玻璃伸展到对 0.2 微米的紫外线透明或对 20 微米的远红外光线透明都并不是不可能的，光学晶体常有很宽的透过波段。

为标志光学材料的折射特性，可列出它对各波长的折射率。对光学玻璃而言，各国采用的波长总列如表 1。除红外波长 8630 埃和 9500 埃外均为光谱线(Fraunhofer 线)。D 线是双线。

表 1

符 号	颜 色	光 源	波 长(埃)
<i>t</i>	红 外	Hg	10139.8
	红 外	—	9500
	红 外	—	8630
<i>s</i>	红 外	Cs	8521.1
<i>r</i>	红	He	7065.2
<i>C</i>	红	H	6562.8
<i>C'</i>	红	Cd	6438.5
<i>D</i>	黄	Na	5892.9
<i>d</i>	黄	He	5875.6
<i>e</i>	绿	Hg	5460.7
<i>F'</i>	蓝	Cd	4799.9
<i>F</i>	蓝	H	4861.3
<i>g</i>	蓝	Hg	4358.3
<i>h</i>	紫	Hg	4046.5
<i>i</i>	紫 外	Hg	3650.1

一般采用  $n_D$ (或  $n_d$ )， $n_D$  表示 D 线的折射率，后面的  $n_d$ ,  $n_F$ ... 等等意义相同。 $n_F - n_C$  作为折射材料的主要标志。F 线和 C 线接近人眼的光谱灵敏极限的两端，而 D 线约在中间。看来，用 D 线作为标志是不够恰当的，对人眼最敏感的波长是 5550 埃，离 D 线相当远，采用  $n_e$  作为主要折射率或许更恰当些。用 C', F' 线是由于镉灯比氢灯方便。

玻璃表中常列出色散系数或亚倍(Abbe)数  $\nu$ ：

$$\nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}, \quad (1)$$

及相对色散：

$$P_{\lambda_1, \lambda_2} = \frac{n_{\lambda_1} - n_{\lambda_2}}{n_F - n_C}, \quad (2)$$

这些都为了在设计时易于找到与某种色差有关的量。

各国各工厂生产的光学玻璃品种很多,例如西德 Schott 厂就生产近 240 种,它们随光学设计的要求而发展变化,各自形成自己的牌号系统,而且逐年变革。对于光学玻璃的光学、物理、化学性质已作出日益系统的测定,可作为用户的选用依据。其中也许是 Schott 厂玻璃表中的测定数据最为详尽。

到现在为止,塑料还未在光学工业中广泛运用,对它的研究还很不充分,它的主要缺点是热学性质不好:折射率的温度系数大(普通光学玻璃  $2 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ — $1 \times 10^{-5}/^{\circ}\text{C}$ ; 一般塑料达  $14 \times 10^{-4}/^{\circ}\text{C}$ ),热膨胀系数也大(普通光学玻璃  $5 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ — $9 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ ,塑料达  $7 \times 10^{-5}/^{\circ}\text{C}$ )<sup>[5]</sup>。但由于它更便于加工,应该在光学工业中找到合乎它特性的地位。现在国外有三、四种光学塑料已被较广泛地生产和使用,主要用作廉价的光学系统,也用于非球面及一些特殊光学零件复制。对于光学工业这也许是有革命意义的。

按照电磁理论,介质的吸收率是和折射率突变同时发生的,我们知道,象差是折射率的函数,折射率突变会引起象差突变。因此,用以成象的折射材料,其可用波段常比透过波段小得多。为能在全部透过波段使用,光学系统必须作很特殊的设计。

一个值得注意的情况是有关光学晶体、塑料和液体的数据很不齐全,同一材料的几种测定数据也不一致。为此,有必要作一些完善的测定工作。

## § 2 将色象差看作光程差

由于光学媒质对各种波长的光线具有不同的折射率,各色光将因折射而分散,因此在同一个光学系统中各色光会有不同的焦距、不同的主面位置和不同的象差,这种因波长差别而引起的差别统称为色差。由于光学材料的色散比折射率小一、二个数量级,因此,它所引起的光学系统特性的差别一定比原量小一、二个数量级,即为小量。所以,焦距和截距的色差别约与初级单色象差同一数量级,而初级象差的色差别

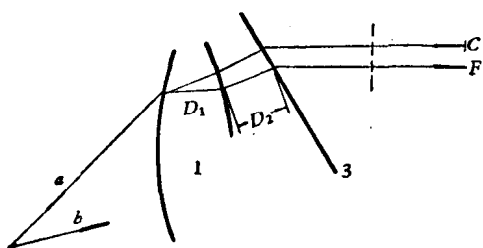


图 5.1

则与二级单色象差同数量级。

我们在这一章内只导出子午光束的色差表示式,对空间光束的色差不加考虑。在下一章将会看到,为对光学系统质量作出完整的评价,这种计算一般也已足够了。

既然折射率差引起的光路差别为小量,那么,当我们假想同一波长的光线行经这种有小量差别的二光路时,按 Fermat

原理,对某一色光而言,这二光路的光程差别为二级小量,当我们略去二级小量时可认为二光路光程相等.因此,二色光线行经这二光路后发生的光程差就是各段光路长与此二色光线折射率的乘积之和.下面以具体的量来表示上述推断.

图 5.1 中设任一光线  $a$  在各界面间的光路长为  $D$ , 则二任意色光  $O, F$  间光程差是:

$$\begin{aligned} \sum_1^k n_F D_F - \sum_1^k n_O D_O &= \sum_1^k n_F D_F - \sum_1^k n_F D_O + \sum_1^k (n_F - n_O) D_O, \\ &\doteq \sum_1^k D_O (n_F - n_O), \\ &\doteq \sum_1^k D_F (n_F - n_O), \\ &= \sum_1^k D \delta n_{FO}. \end{aligned} \quad (3)$$

求和是对光路中顺序各媒质作的,第一媒质和最后媒质中的光路长(物空间和象空间的光路长)也是(3)式中的构成项.式中  $\delta n_{FO}$  是  $F$  线和  $O$  线的折射率差  $(n_F - n_O)$ .

现在来看物点发出的另一条二色光线  $b$ ,它经过光学系统后,也分解成两条有光程差的光线,它们之间的光程差也可类似(3)式近似算出,既然由一条光线形成的  $D_O$  和  $D$  计算并无差别,我们就除去这标志波长的下角标号,用符号  $D_a$  表示  $a$  光线的平均光路长,  $D_b$  表示  $b$  光线的平均光路长,则  $F$  线的波象差  $W_F$  和  $O$  线的波象差  $W_O$  之差可表示为:

$$\begin{aligned} W_{FO} = W_F - W_O &= \left\{ \left( \sum_1^k n_F D_F \right)_a - \left( \sum_1^k n_F D_F \right)_b \right\} - \left\{ \left( \sum_1^k n_O D_O \right)_a - \left( \sum_1^k n_O D_O \right)_b \right\}, \\ &= \left( \sum_1^k n_F D_F - \sum_1^k n_O D_O \right)_a - \left( \sum_1^k n_F D_F - \sum_1^k n_O D_O \right)_b, \\ &\doteq \sum_1^k (D_a - D_b) (n_F - n_O), \\ &= \sum_1^k (D_a - D_b) \delta n_{FO}. \end{aligned} \quad (4)$$

在此波象差是由  $a$  光线与波面的交点起算的,求和是对各透镜求和.若物空间和象空间色散不为零,则也看作是透镜,这就是色差的基本公式.(4)式表明:当我们已知任一色光的波象差(例如  $W_O$ )后,就可以由(4)式近似算出所有其他色光的波象差(例如算出  $W_F$ ).为了算出其他色光的波象差,我们并不需要再计算此色光光路,而只需按(4)式计算各光线在各媒质内的光路长  $D$ ,并乘以此媒质的色散  $n_F - n_O$ .对空气而言  $n_F - n_O = 0$  故空气间隔的  $D$  值在作色差计算时不须算出. Conrady 首先用

这个观点讨论轴向色差问题<sup>[3]</sup>。

为算出子午光线的  $D$  值, 可用 (I.74) 式或 (I.80) 式, 前式将一个透镜作为一个单元来考虑, 后式则把折射面看作单元. 现将它们重新列出:

$$D'_1 = \left( d'_1 + \frac{PA_1^2}{2r_1} - \frac{PA_2^2}{2r_2} \right) \frac{1}{\cos U'_1}, \quad (5)$$

$$d'_1 - D'_1 = \frac{PA_1 \sin I'_1}{2 \cos \frac{I'_1}{2} \cos \frac{U'_1}{2}} - \frac{PA_2 \sin I_2}{2 \cos \frac{I_2}{2} \cos \frac{U_2}{2}}. \quad (6)$$

空间光线的光路长可由 (I.107) 式算出, 式中  $S/n$  就是光路长度. 为用 (6) 式算出  $D_o - D_b$ , 只须利用

$$D_o - D_b = (d - D_b) - (d - D_o) \quad (7)$$

即可。

### §3 初级色差

当光束很靠近光轴时, (5) 式中的  $PA$  约与近轴光线光路计算所得的  $h$  相等, 而  $\cos U \doteq 1 - \frac{1}{2} u^2$ , 此时由 (5) 式得:

$$d'_1 - D'_1 = \frac{h_1^2}{2r_1} - \frac{h_2^2}{2r_2} - \frac{d'_1 u_1^2}{2}. \quad (8)$$

由于 (6) 式已将大量相减表示为小量相乘, 故在 (6) 式中令  $PA = h$ ,  $\cos \theta = 1$ ,  $\sin \theta = \theta$ , 即可得出和 (8) 式同样准确的表示:

$$d'_1 - D'_1 = \frac{1}{2} (h_1 i'_1 - h_2 i_2). \quad (9)$$

不难证明 (8), (9) 两式是恒等的. 用 (4) 式和 (8) 式或 (9) 式就可导出初级色差表示

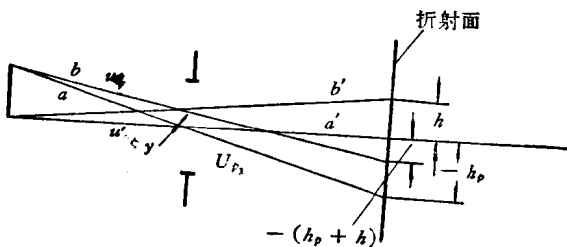


图 5.2

式. 设 (4) 式中  $a$  光线是光学系统的主光线, 通过光阑中心, 折射点高度为  $h_p$ ,  $b$  光线是由同一物点发出的任一子午光线, 它的折射点高度是  $h_p + h$ , 如图 5.2. 图中还画出了轴上点发出的相应光线  $a'$ ,  $b'$ . 此二光线在光阑上交

点位置和轴外光线相同 (在光阑上高度为  $o$  和  $y$ ), 轴上光线  $b'$  的折射点高度即  $h$ . 因此由 (4), (7), (8) 得:

$$\begin{aligned}
W_{FC} &= \sum_1^k (D_p - D_y) \delta n_{FC}, \\
&= \frac{1}{2} \sum_1^k \left\{ \frac{(h_{p1} + h_1)^2}{r_1} - \frac{(h_{p2} + h_2)^2}{r_2} - d_1' (u_{p1} + u_1')^2 - \frac{h_{p1}^2}{r_1} + \frac{h_{p2}^2}{r_2} + d_1' u_{p1}^2 \right\} \delta n_{FC,1}, \\
&= \frac{1}{2} C_I + C_{II}, \tag{10}
\end{aligned}$$

其中

$$\left. \begin{aligned}
C_I &= \sum_1^k \left( \frac{h_1^2}{r_1} - \frac{h_2^2}{r_2} - d_1' u_1'^2 \right) \delta n_{FC,1}, \\
C_{II} &= \sum_1^k \left( \frac{h_1 h_{p1}}{r_1} - \frac{h_2 h_{p2}}{r_2} - d_1' u_1' u_{p1}' \right) \delta n_{FC,1}.
\end{aligned} \right\} \tag{11}$$

(10), (11) 式中求和是对透镜作的。

或由 (4), (7), (9) 三式得:

$$\begin{aligned}
W_{FC} &= \frac{1}{2} \sum_1^k \{ (h_1 + h_{p1}) (i_1' + i_{p1}') - (h_2 + h_{p2}) (i_2 + i_{p2}) - h_{p1} i_{p1}' + h_{p2} i_{p2} \} \delta n_{FC,1}, \\
&= \frac{1}{2} C_I + C_{II},
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
C_I &= \sum_1^k h n i \left( \frac{\delta n_{FC}}{n'} - \frac{\delta n_{FC}}{n} \right), \\
C_{II} &= \sum_1^k \frac{h n i_p + h_p n i}{2} \left( \frac{\delta n_{FC}}{n'} - \frac{\delta n_{FC}}{n} \right) - \frac{\eta_1 u_1}{2} \delta n_{FC,1} + \frac{\eta_k' u_k'}{2} \delta n_{FC,k}, \\
&= \sum_1^k h n i_p \left( \frac{\delta n_{FC}}{n'} - \frac{\delta n_{FC}}{n} \right). \tag{12}
\end{aligned}$$

(12) 式已将透镜求和的表示式变换为对各折射面求和, 并将物平面和象平面看作是折射面之一, 在此面上  $h=0$ ,  $i=-u$ ,  $h_p=\eta$ ; 再由于:

$$\begin{aligned}
h n i_p - h_p n i &= n h \left( \frac{h_p}{r} - u_p \right) - n h_p \left( \frac{h}{r} - u \right) \\
&= n (h_p u - h u_p) = n (l_p - l) u u_p = j, \tag{13}
\end{aligned}$$

故 (12) 式中  $C_{II}$  化简成 (12) 式中的最后形式。实际上由 (11) 式直接导出 (12) 式更为方便。此时, 只须考虑到

$$d_1' u_1' = h_1 - h_2 \tag{14}$$

即可。

可以注意到  $C_I$  是和  $h_p$  无关的。即与象高无关。它与入射高度的平方成正比, 即与  $u^2$  成正比。由 (I.72) 知, 轴向移动  $LC$  产生的波象差是:

$$W_1 = \frac{1}{2} (LC_k' u_k'^2 - LC_1 u_1^2), \tag{15}$$

故  $C_I$  表示轴向色差. 轴向几何色差  $LC = l_C - l_F$  与  $C_I$  的关系是:

$$n'_k u_k^2 LC'_k - n_1 u_1^2 LC_I = C_I. \quad (15^*)$$

故  $LC'_k$  与孔径大小无关.

另一方面, 由参考点垂轴移动  $TC = \eta_O - \eta_F$  产生的波差是:

$$W_2 = 2n'_k u'_k TC'_k - 2n_1 u_1 TC_I, \quad (16)$$

式中的系数  $2u$  是波面对物点的张角. 由此得到:

$$n'_k u'_k TC'_k - n_1 u_1 TC_I = C_{II}, \quad (16^*)$$

故  $TC$  也和孔径大小无关, 并与象高  $\eta$  成正比, 称作垂轴色差或倍率色差. 显然总色差 (10) 式也就是倍率色差和轴向色差之和. 可以看到:  $C_{II}$  也就是对称于光阑中心的二轴外光线光程色差; 由 (10):

$$W_{FO}(h) - W_{FO}(-h) = 2C_{II}. \quad (17)$$

对于薄透镜组成的光学系统, 由于  $h_1 = h_2$ ,  $d'_1 = 0$ , (11) 式更简化为:

$$\left. \begin{aligned} C_I &= \sum_1^k h^2 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \delta n = \sum_1^k h^2 \frac{\varphi}{\nu}, \\ C_{II} &= \sum_1^k h h_p \frac{\varphi}{\nu}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式中  $\varphi$  是单透镜的焦距倒数 (即光焦度),  $\nu$  是亚倍数. 利用 (18) 式解决一系列薄透镜色差问题是很方便的, 例如相贴合的双薄透镜产生某一定色差的条件是:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 + \varphi_2 &= \varphi, \\ \frac{\varphi_1}{\nu_1} + \frac{\varphi_2}{\nu_2} &= C_I. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

即

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\nu\varphi}{\nu-1} - \frac{\nu_1 C_I}{\nu-1}, \\ \varphi_2 &= -\frac{\varphi}{\nu-1} + \frac{\nu_1 C_I}{\nu-1}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

其中  $\nu = \frac{\nu_1}{\nu_2}$ .

$C_I = 0$  时就得到消色差条件.

对于光阑处在透镜上的薄透镜  $h_p = 0$ , 故此时  $C_{II} = 0$ .

为使  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  不大 (焦距长, 半径大), 则  $\nu - 1$  愈大愈好. 当要求产生负色差 ( $C_I < 0$ ) 时, 正透镜的焦距变短, 亦即对单色象差不利.

从上面的公式组可以看出, 为变更或调整薄透镜组的初级色差只须知道近轴轴

上光线和主光线的折射高度  $h$ ,  $h_p$  以及透镜的光焦度  $\varphi$  和亚倍数  $\nu$ . 这就是说, 色差由焦距分配决定. 至于为算出一般透镜组的色差, 则须作上述两近轴光线的光路计算, 由算出的  $h$ ,  $i$ ,  $i_p$  就可以算出初级色差来.

### § 3.1 分离薄透镜

前面已经讨论了贴合薄透镜校正轴向色差  $C_1$  的条件, 相互分离的薄透镜情况稍有不同, 最主要的是焦距方程式变更. 对空气中的单个薄透镜有:

$$\frac{1}{l'} = \frac{1}{l} + \frac{1}{f}; \quad l_{k+1} = l'_k - d'_k,$$

故

$$\frac{h}{l'} = \frac{h}{l} + \frac{h}{f}; \quad l_{k+1} u_{k+1} = l'_k u'_k - d'_k u'_k,$$

亦即

$$u' = u + h\varphi, \quad h_{k+1} = h_k - d'_k u'_k. \quad (21)$$

对每个分离的薄透镜都写出上式, 相加, 则由于前一透镜的  $u'$  与后一透镜的  $u$  相等, 故得

$$u'_k - u_1 = \sum_1^k h\varphi. \quad (22)$$

当  $u_1 = 0$  时,  $u'_k = h_1 \varphi'_k$ ,  $\varphi'_k$  是透镜组的组合焦距倒数, 也就是总光焦度; 当  $u_1 \neq 0$  时, 也仍可写成:

$$u'_k - u_1 = \bar{\varphi} = \sum_1^k h\varphi, \quad (22a)$$

式中的“ $\bar{\varphi}$ ”只是  $u'_k - u_1$  的简写而已, 故产生定量轴向色差的要求一般可表达为:

$$\left. \begin{aligned} \sum h\varphi &= \bar{\varphi}; \\ \sum \frac{h^2 \varphi}{\nu} &= C_1. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

先讨论双薄透镜, 此时, (23) 式和 (19) 式的差别仅在于: 以  $h\varphi$  代替  $\varphi$ , 以  $\frac{h^2}{\nu}$  代替  $\frac{1}{\nu}$ . 因此 (23) 式的解就是:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{\bar{\varphi}}{\nu-1} - \frac{\nu_1 C_1}{h_1(\nu-1)}, \\ \varphi_2 &= \frac{-\bar{\varphi}}{\nu-1} + \frac{\nu_1 C_1}{h_1(\nu-1)}, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

其中  $\nu = \frac{\nu_1}{\nu_2} \cdot \frac{h_2}{h_1}$ .

若  $h_1=1, u_1=0$ , 则

$$\left. \begin{aligned} h_2 &= 1 - d\varphi_1, \\ \varphi_1 &= \frac{\nu\varphi}{\nu-1} - \frac{\nu_1 C_1}{\nu-1}, \\ h_2\varphi_2 &= \frac{-\varphi}{\nu-1} + \frac{\nu_1 C_1}{\nu-1}, \\ \nu &= h_2 \frac{\nu_1}{\nu_2}. \end{aligned} \right\} \quad (24a)$$

确定  $h_2$  后即可与解(20)一样地求出所有的量。

现在用(24)式来考虑一个特殊问题, 即  $\nu_1=\nu_2$  时能否校正轴向色差(即  $C_1=0$ )。按(20)式这是不可能的, 现在则显然是可能的。此时令  $h_1=1$  得:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{h_2\varphi}{h_2-1}, \\ \varphi_2 &= -\frac{\varphi}{h_2-1}. \end{aligned} \right\} \quad (24b)$$

若  $\varphi = u'_2 - u_1 > 0, h_2 > 1$  则

$$\varphi_1 = u'_1 - \nu_1 > 0, \quad \varphi_2 = u'_2 - u'_1 < 0,$$

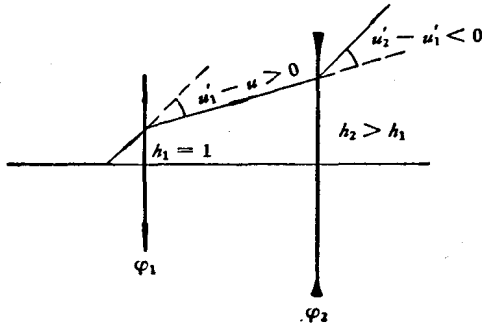


图 5.3

因此它只能将虚物体成实象或实物体成虚象, 如图 5.3 所示。一般来说, 这种物象位置无实用价值。

当  $\varphi_1 > 0, h_1=1, u_1=0$  时  $h_2 < 1$ , 故(24a)中的  $\nu$  比不分离时小。因此, 由(24a)得到的  $\varphi_1, \varphi_2$  比由(20)式得到的  $\varphi_1, \varphi_2$  大, 亦即分离导致二透镜焦距同时变短(相对于贴合者而言)。

用分离的双薄透镜也可以校正倍率

色差  $C_{II}$ 。为了由要求的  $C_{II}$  大小和组合焦距算出透镜的焦距分配, 设

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= 1, \\ h_{p2} &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

则

$$\left. \begin{aligned} h_2 &= h_1 - d u'_1 = 1 - d(\varphi_1 + u_1), \\ h_{p1} &= h_{p2} + d u_{p2} = 1 + d(u'_{p2} - \varphi_2), \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

式中  $u_1 = \frac{1}{l_1}, u'_{p2} = \frac{1}{l'_{p2}}$  是物体和光阑所在位置的倒数, 是预先给定的值。因之校正



倍率色差的要求就成为:

$$C_{II} = \frac{h_1 h_{p1} \varphi_1}{\nu_1} + \frac{h_2 h_{p2} \varphi_2}{\nu_2} = \frac{[1-d(\varphi_1+u_1)]\varphi_2}{\nu_2} + \frac{[1+d(u'_{p2}-\varphi_2)]\varphi_1}{\nu_1}.$$

用符号  $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \nu$  则上式成为:

$$\nu_2 C_{II} = [1-d(\varphi_1+u_1)]\varphi_2 + [1+d(u'_{p2}-\varphi_2)]\varphi_1 \nu,$$

即

$$d = \frac{\nu\varphi_1 + \varphi_2 - C_{II}\nu_2}{\varphi_1\varphi_2(1+\nu) + u_1\varphi_2 - u'_{p2}\nu\varphi_1}. \quad (27)$$

这就是为产生定值倍率色差时,二薄透镜间距  $d$  和二焦距的关系. 注意式中的  $C_{II}$  是在条件(25)下算出的. 当象靠近第二透镜时,条件  $h_{p2}=1$  差不多相当于象高等于1.

当物体在无限远:  $u_1=0$ ; 出瞳也在无限远:  $u'_{p2}=0$  时,校正  $C_{II}$  导致:

$$d = \frac{\nu\varphi_1 + \varphi_2}{(1+\nu)\varphi_1\varphi_2}, \quad (27a)$$

再当二透镜用同一材料因而  $\nu=1$  时

$$d = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2\varphi_1\varphi_2} = \frac{f'_1 + f'_2}{2}. \quad (27b)$$

把(27)和焦距方程(22)联立求解才能得到校正色差并同时满足焦距要求的结果. 但一般情况下的解过分复杂(为二次方程式)下面只求  $u_1=0$ ,  $u'_{p2}=0$  即物体和出瞳都在无限远时的解. 令总焦距等于1,由(25), (26)式得:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 + (1-d\varphi_1)\varphi_2 &= 1, \\ h_1 &= 1, \\ h_{p2} = \eta'_2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

将由(28)式决定的  $\varphi_2$  代入(27)得:

$$d = \frac{1 + (\nu-1)\varphi_1 - C_{II}\nu_2}{\varphi_1(1+\nu-\varphi_1 - C_{II}\nu_2)}, \quad (29)$$

当  $\nu=1$ ,  $C_{II}=0$  时

$$d = \frac{1}{\varphi(2-\varphi_1)} = \frac{f_1''}{2f_1' - 1}, \quad (29a)$$

用(29)式时,确定  $f_1'$  后即可算出  $d$ , 于是可再按(22)式算出  $f_2'$ .

## §4 二级光谱

色差和单色象差不同,不但孔径或视场增大会引起高级色差,而且使用波段变大也将引起高级色差,后者称为二级光谱. 由(4)式可知,我们在适当选定  $D_s - D_0$  和玻璃的  $n_F - n_C$  使  $W_F - W_C = 0$  后,这个光学系统对其他波长仍然可能是不消色的. 例

如  $W_F - W_e$  可由(4)式中将  $n_F - n_C$  代为  $n_F - n_e$  而得到, 为使  $W_F - W_e = 0$  就要求光学玻璃的相对色散具有一定特性, 例如要求所有玻璃的  $P_{eF}$  均为同一常数。但是这种要求不能由现在已知的光学材料来满足。

Abbe 时代就已经了解到, 一般光学玻璃的相对色散  $P$  和  $\nu$  成线性关系, 例如西德 Schott 厂玻璃表中(见图 5.4)表示为:

$$P_{eF} = 0.4884 - 0.000526\nu, \quad (30a)$$

$$P_{gF} = 0.6438 - 0.001682\nu. \quad (30b)$$

表中还给出实际玻璃与(30)式表示的线性关系的偏离值。可见 60% 的玻璃  $P_{gF}$  偏差小于  $2 \times 10^{-3}$ 。这部分玻璃包括了绝大部分常用玻璃。由此可见, 一般可以用(30)式描述光学玻璃产生的色差。我们下面来导出双薄透镜和三薄透镜的二级光谱表示式。

由(15), (18)薄透镜的轴向初级色差是:

$$2W = n\nu^2 LC = C_1 = \sum \frac{\varphi h^2 \delta n}{n-1}. \quad (31)$$

当所考虑的是  $C, F$  线消色时, 上式中的  $\delta n$  就是  $n_F - n_C$  而双薄透镜的焦距就由(20)式决定, 故此时  $e$  线的波面和  $F$  线的波面之差是:

$$\begin{aligned} 2W_{eF} &= n\nu^2 LC_{eF} = h^2 \varphi \left( \frac{\nu_1}{\nu_1 - \nu_2} \cdot \frac{\delta n_{eF,1}}{n_1 - 1} - \frac{\nu_2}{\nu_1 - \nu_2} \cdot \frac{\delta n_{eF,2}}{n_2 - 1} \right) \\ &= h^2 \varphi \frac{P_{eF,1} - P_{eF,2}}{\nu_1 - \nu_2} \doteq -0.00053 h^2 \varphi. \end{aligned} \quad (32)$$

当射入此透镜组的光束为平行光束且  $n'_1 = 1$  时,  $\frac{h}{u_2}$  就是焦距  $f'$ , 故此时有

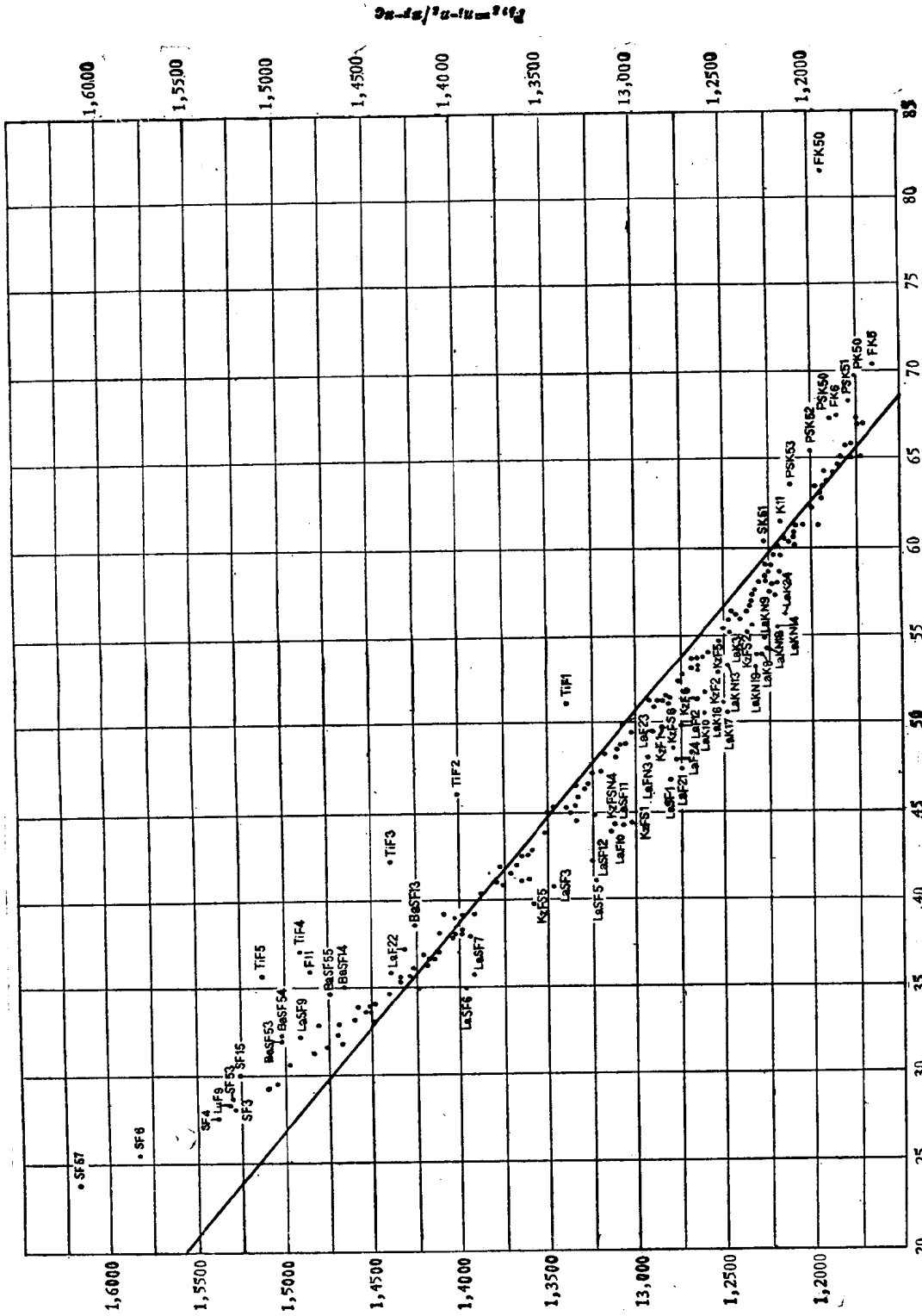
$$LC'_{eF} = \frac{P_{eF,1} - P_{eF,2}}{\nu_1 - \nu_2} f'. \quad (32a)$$

对于分离的双薄透镜, 图 5.3 所示的解由于只用一种玻璃, 因此显然是校正了二级光谱的, 对一般情况则可类似于(32)式得出:

$$\left. \begin{aligned} 2W_{eF} &= n\nu^2 LC_{eF} = \bar{\varphi} \cdot \frac{P_1 - P_2}{\nu_1 - \nu_2}, \\ \bar{\varphi} &= u'_2 - u_1, \\ \text{其中 } \bar{\nu}_1 &= \frac{\nu_1}{h_1}, \quad \bar{\nu}_2 = \frac{\nu_2}{h_2}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

当  $u_1 = 0$ ,  $n'_2 = 1$  时得到:

$$LC'_{eF} = \frac{1}{h_1} \cdot \frac{P_1 - P_2}{\nu_1 - \nu_2} f' = \frac{P_{eF,1} - P_{eF,2}}{\nu_1 - \frac{h_1}{h_2} \nu_2} f'. \quad (33a)$$



$f = 365 \text{ nm}$   
 $g = 436 \text{ nm}$   
 $F = 486 \text{ nm}$   
 $C = 656 \text{ nm}$

ABBE 数  $V_d$

图 5.4

若  $\nu_1 > \nu_2$ , 因  $\varphi_1 > 0$ ,  $h_2 < h_1$ , 故  $\nu_1 - \frac{h_1}{h_2} \nu_2 < \nu_1 - \nu_2$ , 因此望远物镜的二级光谱因两透镜分离而更为加大,  $\nu_1 < \nu_2$  时亦如此。

在一般情况下(33)式所得的结果也一样。

总结以上所述, 二级光谱  $W_{eF}$  和相对孔径平方及焦距一次方成正比。对一般玻璃组合而言, 比例常数几乎不因玻璃变更而变更。当双透镜分离而不如图 5.3 那样成象时, 二级光谱将更增大。

我们希望用三薄透镜来校正二级光谱, 这三薄透镜可以是贴合的, 也可以是分离的, 例如对  $C, e, F$ , 三色谱线同时校正色差, 于是消色差和满足焦距为定值的方程式可写为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{h_1^2 \varphi_1}{\nu_1} P_1 + \frac{h_2^2 \varphi_2}{\nu_2} P_2 + \frac{h_3^2 \varphi_3}{\nu_3} P_3 &= 2W_{eF}, \\ \frac{h_1^2 \varphi_1}{\nu_1} + \frac{h_2^2 \varphi_2}{\nu_2} + \frac{h_3^2 \varphi_3}{\nu_3} &= 2W_{CF}, \\ \frac{h_1^2 \varphi_1}{\nu_1} \frac{\nu_1}{h_1} + \frac{h_2^2 \varphi_2}{\nu_2} \frac{\nu_2}{h_2} + \frac{h_3^2 \varphi_3}{\nu_3} \frac{\nu_3}{h_3} &= \bar{\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

式中  $P$  是  $P_{eF}$  的简写, 将  $\frac{h^2 \varphi}{\nu}$  写作  $x$ , 则上式成为  $x_1, x_2, x_3$  的三元一次联立方程式, 即:

$$\left. \begin{aligned} P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 &= a, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= b, \\ \frac{\nu_1}{h_1} x_1 + \frac{\nu_2}{h_2} x_2 + \frac{\nu_3}{h_3} x_3 &= c. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

常数  $a, b, c$ , 即(34)式中的对应值。把  $\nu/h$  写作  $\bar{\nu}$ , 给定  $a, b, c$  后, 即可解出  $x_1, x_2$  和  $x_3$  来:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} a & P_2 & P_3 \\ b & 1 & 1 \\ c & \bar{\nu}_2 & \bar{\nu}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ \bar{\nu}_1 & \bar{\nu}_2 & \bar{\nu}_3 \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} P_1 & a & P_3 \\ 1 & b & 1 \\ \bar{\nu}_1 & c & \bar{\nu}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ \bar{\nu}_1 & \bar{\nu}_2 & \bar{\nu}_3 \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} P_1 & P_2 & a \\ 1 & 1 & b \\ \bar{\nu}_1 & \bar{\nu}_2 & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ \bar{\nu}_1 & \bar{\nu}_2 & \bar{\nu}_3 \end{vmatrix}}. \quad (36)$$

当玻璃组合使(36)式分母等于零, 则仅在所有分子均为零时才有解。当  $a=b=0$  (对三波长消色——称复消色)时, 就要求  $P_1=P_2=P_3$ 。当三个  $P$  值相等时, 可复消色是

很明显的,甚至没有用三透镜之必要。由此可见有意义的解仅是使分母不为零的玻璃组合,因此当  $P$  和  $\bar{\nu}$  之关系是线性关系时,三种玻璃也不能作出对三波长消色的结果。这就是说,相贴合的三薄透镜,因为  $h$  相等,  $\bar{\nu}=\nu$  故处在(30)式一直线上的玻璃就是用三块也无济于事。看来分离三透镜也许能使  $\bar{\nu}-P$  的关系非线性从而校正二级光谱。但还须这种解之性质不同于图 5.3 中的情况。下面就来对此作仔细讨论。

当  $a=b=0$  时, (36)式的分子即分别为  $P_2-P_3$ ,  $P_3-P_1$  和  $P_1-P_2$  与  $c$  之积,而分母则为  $P-\bar{\nu}$  图中三点联成的三角形的面积。因此  $P$  差之绝对值愈小,面积之绝对值愈大则  $x$  愈小,即愈好。

由于  $h$  之变化有助于面积加大,故分离三透镜不难得到校正二级光谱的解。

发展光学玻璃及其他透光材料,使色散显著不同于(30)式,曾是光学材料工作者长期努力的一个目标。早期发展含 Sb 玻璃,其中  $KzFS_1$  使  $P_{\sigma F}$  偏离  $-11 \times 10^{-3}$ 。后来的稀土火石玻璃中,也有不少有相近的改善。Abbe 已经了解  $CaF_2$  晶体有极好的二级光谱特性。近年来 Schott 厂发展的氟磷玻璃也有类似特点。如  $FK_{54}$  与(30b)式偏离  $+0.0418$ ,比火石玻璃改善作用要大。和(32)式相比, $FK_{54}$  和  $KzFS_1$  作的双胶合物镜的二级光谱减为 40%。日本 Hoya 厂近年发展的  $ADF_8$  玻璃,在二级光谱方面更有改进。这些特殊玻璃的化学稳定性和机械性能都不好,而且成本较高,所以只能用于特定的少数场合。

对于三透镜情况,采用特殊玻璃就可以使三点不在一直线上,而围出一定的面积,从而使(36)式有解。另外由于  $h$  不同时  $\nu$  改为  $\bar{\nu}$ ,就可以使点离开直线,使面积加大,使普通玻璃也可以有解,现比较  $h$  相等和不相等的解如下。

取三玻璃为 Schott 牌号  $FK_{50}$ ,  $KzFS_1$ ,  $SF_{59}$ 。它们接近于  $P-\nu$  图中使三角形面积有最大的组合,都属较特殊的玻璃。它们在相胶合时( $h$  相等时)也有解,现将  $h$  相等和不相等的解比较如下:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 81.49, & \nu_2 &= 44.34, & \nu_3 &= 20.36, \\ P_1 &= 0.4529, & P_2 &= 0.4611, & P_3 &= 0.4823, \\ h_1 &= h_2 = h_3 = 1, \end{aligned}$$

则由(36)式得:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.0359, & x_2 &= -0.0498, & x_3 &= 0.0139, \\ h_1 \varphi_1 &= 2.92, & h_2 \varphi_2 &= -2.20, & h_3 \varphi_3 &= 0.28. \end{aligned}$$

为表示透镜分离的效果,取  $h_3=20.36/81.49$ ,从而使  $\bar{\nu}_3=\nu_1$ ,其他不变。由于分母加

大, (36)式的解成为:

$$h_1\varphi_1=1.58, h_2\varphi_2=-1.19, h_3\varphi_3=0.61.$$

这二个结果表明, 采用较特殊的玻璃校正二级光谱是可能的, 形成的单透镜光焦度和一般的双胶合消色差透镜相近. 容易表明, 若用较普通的玻璃品种时, 光焦度会大得多. 另外, 可以看出, 分离薄透镜使光焦度大为下降; 事实上, 普通玻璃原来不能校正二级光谱者, 当分离后使  $\bar{\nu}$  大变, 就使  $P-\bar{\nu}$  图中三点不在一直线上, 就可以校正二级光谱.

### §5 讨论色差的光线光路方法, 色差图示——轴上点

各色波面的差异反映在光线光路方面的差异就是几何色差. 为算出几何色差的准确数值, 可按光学材料对各波长光线的折射率计算各波长的光线光路, 由算出的截距差或与高斯象面的交点高度差就可直接求得. 以轴向初级色差为例, 设我们已算出了  $C$  线和  $F$  线的两条近轴光线光路, 其相应量分别以下角标号  $C$  和  $F$  表示, 则当以  $\frac{n_F u_F u_C}{n'_F u'_F u'_C}$  作为轴向色差  $l_C - l_F$  的倍率时, 即可算出轴向色差的准确分布值:

$$\begin{aligned} & n'_F u'_F u'_C (l_C - l'_F) - n_F u_F u_C (l_C - l_F) \\ &= n'_F u'_F u'_C [(l_C - r) - (l'_F - r)] - n_F u_F u_C [(l_C - r) - (l_F - r)], \\ &= n_C i_C r \left( \frac{n'_F u'_F}{n'_C} - \frac{n_F u_F}{n_C} \right) - n_F i_F r (u'_C - u_C), \\ &= n_C i_C r \left[ \frac{n'_F (u'_F + i'_F)}{n'_C} - \frac{n_F (u_F + i_F)}{n_C} \right], \\ &= n_C i_C l_F u_F \left( \frac{n'_F}{n'_C} - \frac{n_F}{n_C} \right), \\ &= n_C i_C l_F u_F \left( \frac{n'_F - n'_C}{n'_C} - \frac{n_F - n_C}{n_C} \right). \end{aligned} \quad (37)$$

这就是我们前面导出的公式(15)\*的准确表示式. 对各折射面都写出上列公式, 再相加即得整个系统的公式. (12)和(15)\*式是假想  $n_F - n_C$  为无限小时由 Fermat 原理导出的. 公式(37)表明, 将  $C$  线的  $ni$ , 和  $F$  线的  $lu$  代替(12)式中的平均值, 并以  $\frac{\delta n_{FC}}{n_C}$  代替  $\frac{\delta n_{FC}}{n}$  时才能得到准确的初级轴向色差分布值. 这样看来, 由光程法导出的色差近似值即使在初级轴向色差中就已经不准确了. 但取  $C, F$  平均折射率计算所得的结果还是比较准确的. 实际上, 类似(37)可取  $\frac{n_C u_F u_C}{n'_F u'_F u'_C}$  代替  $\frac{n_F u_F u_C}{n'_F u'_F u'_C}$  作为倍率, 这时得:

$$n'_C u'_F u'_C (l'_C - l'_F) - n_C u_F u_C (l_C - l_F) = n_F i_F l_C u_C \left( \frac{n'_F - n'_C}{n'_F} - \frac{n_F - n_C}{n_F} \right). \quad (38)$$

(37), (38) 两式相加除 2 后的结果也可看作是  $C$ ,  $F$  两算法的平均。当然取平均折射率来计算不会和这种平均所得者一致, 但是这种相差毕竟是高次小量。在一般的象差理论中将这种差别完全忽视了, 但对于高质量的系统这种差别还可能引起一些影响。

通过这个最简单的问题, 我们已经可以看到前面所作的全部推导的近似性质的一个方面: 实际色差乃是对一定波段的光线而言的, 微分法不可能给出绝对准确的结果, 色散愈小结果愈准确。

对轴上点而言, 除上述初级轴向色差外还有色球差问题, 色球差是指各色光线的球差差别, 也就是各带光线的色差不同于近轴色差, 于是造成带色差。关于色球差, 我们须要澄清两个问题, 首先是用  $d-D$  法能不能用来讨论这个高级色差问题, 其次是  $d-D$  法的结果与光线光路计算结果间的关系。第一个问题是根本性的, 它将决定光程差法能被应用的范围。假若它只能用来讨论初级色差问题, 那么它的意义就很小了。如(37)式那样, 直接建立初级色差的更准确理论也并不困难。当  $\delta n$  非常小时 Fermat 原理并不认为这种光路差异不引起二级小量, 而色球差正是二级小量, 因此结果似乎是否定的。关于这个问题我们将在第六章中与其他类似问题一起解决。我们在这里只是肯定:  $d-D$  法是可以用来讨论高级色差的。用  $d-D$  法算出的结果与光线光路计算所得结果很符合。在这里只是讨论  $d-D$  法和光线光路计算结果的关系。这个关系实际上完全可以用讨论球差时所作的几何象差和波象差关系而得到。

例如实际算出了  $d$  线、 $C$  线和  $F$  线的轴上大光束并画出三色光的球差曲线, 三色的球差曲线之相对位置差别就是色差, 故在同一个坐标系中画出的这种曲线可称为球差色差曲线, 如图 5.5(a)。因人眼对  $e$  线最灵敏, 故设最佳焦点由  $e$  线的球差曲线决定, 此处最佳焦面即图 5.5(a) 中的虚线  $O^*O^*$ 。以此为参考点作出的三波长之波象差图如图 5.5(b), 图 5.5(b) 中波面  $C$  和波面  $F$  相交于边缘, 就表示用  $d-D$  法消色差时, 边缘带的  $\sum(d-D_M)\delta n_{CF}=0$ , 这就是说图 5.5(a) 中面积  $O^*O^*Ff$  和  $O^*O^*Cc$  相等, 也就是三角形  $CfE$  和  $cfE$  面积相等, 而中间带波面不相交就表示  $\sum(d-D_z)\delta n_{CF}\neq 0^{1)}$ 。图 5.5(b) 中数值  $W_C - W_F$  的大小就是带色差或色球差之残留值, 也就是图 5.5(a) 中三角形  $Efc$  或  $EFC$  面积之半, 从图 5.5(a) 看来, 中间带有色差就意

1)  $D_z$  的下角标号  $z$  表示是带光的光路长度, 前面的  $D_M$  表示边光的光路长度。

味着图 5.5(a) 中二色光线的球差曲线不重合, 关于色球差和带色差的同一性在此表现得更为清楚. 显然, 若边缘带  $\sum(d-D)\delta n=0$  则二色球差曲线必相交于  $0.707 \sin U_M$  带, 反之亦然.

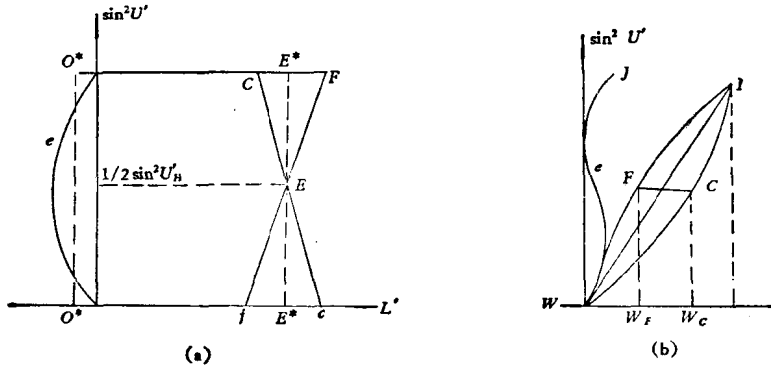


图 5.5

当考虑  $e$  线和  $CF$  的关系时, 我们用  $\sum(d-D_M)\delta n_{eF}$  算出的就是图 5.5(b) 中的距离  $IJ$ . 它也就是图 5.5(a) 中  $CF$  两球差曲线的平均位置  $E^*E^*$  和  $O^*O^*$  之间长方形的面积, 因之距离  $IJ$  就是  $CF$  二色球差曲线到  $e$  线球差曲线之间距离的标志, 两者都可称作是二级光谱.

由实际光线计算出色差球差曲线后就可利用图形积分法得到各色波面曲线. 而各色波面曲线也可以在已知  $e$  线的波面后, 由  $(d-D)\delta n_{eF}$ ,  $(d-D)\delta n_{CF}$  等式算出波面  $e$  和  $F$  之差, 波面  $O$  和  $F$  之差等等依次得到. 两种结果的差异就标志  $d-D$  法的误差量. 计算的实例表明  $d-D$  法充分准确.

由此看来,  $CF$  二色球差曲线不一致之根源在于  $d-D_M$  和  $d-D_s$  之比例在各透镜中不是常数, 因此在实际光线计算中如须控制色球差时只须注意这个比值适当, 使比值大的透镜多产生或少产生些色差就可以使色球差向预定方向变动.

为确定结构因素对色球差或高级色差的影响, 只须注意  $d-D$  中的高级量如何形成即可. 将(6)式展开为级数, 即由下式出发:

$$d'_1 - D'_1 = \frac{PA_1 \sin I'_1}{2 \cos \frac{1}{2} I'_1 \cos \frac{1}{2} U'_1} - \frac{PA_2 \sin I_2}{2 \cos \frac{1}{2} I_2 \cos \frac{1}{2} U_2},$$

设光线在透镜内的光路与理想光路一致:

$$I'_1 = I'_1, \quad \sin U'_1 = u'_1,$$

则上式可展开为:



$$\begin{aligned}
 d-D &= \frac{1}{2} l_1 u_1' i_1' \left(1 + \frac{1}{8} i_1'^2\right) \left(1 + \frac{1}{8} u_1'^2\right) \left[1 + \frac{1}{8} (i_1' - u_1')^2\right] \\
 &\quad - \frac{1}{2} l_2 u_2 i_2 \left(1 + \frac{1}{8} i_2^2\right) \left(1 + \frac{1}{8} u_2^2\right) \left[1 + \frac{1}{8} (i_2 - u_2)^2\right] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{C_I}{\delta n} + \frac{1}{8} \frac{CS_I}{\delta n}.
 \end{aligned} \tag{39}$$

其中二次项即为初级色差  $\frac{1}{2} C_I$ , 而四次项即为色球差, 以  $\frac{1}{8} CS_I$  表示:

$$\left. \begin{aligned}
 C_I &= (l_1 u_1' i_1' - l_2 u_2 i_2) \delta n, \\
 \frac{1}{8} CS_I &= l_1 u_1 i_1' (i_1'^2 + u_1'^2 - i_1' u_1') - i_2 u_2 i_2 (i_2^2 + u_2^2 - i_2 u_2).
 \end{aligned} \right\} \tag{39a}$$

对于薄透镜, 不难将上述公式表达成透镜弯曲的二次函数(类似于薄透镜单色球差理论中将  $P$  表示为  $Q$  的函数)。

$i$  和  $u$  的加大均将使高级色差加大,  $i$  和  $u$  异号时较同号时大。在聚敛光束中  $u > 0$ ,  $r < 0$  时高级色差大;  $r > 0$  时高级色差小。这就是高斯物镜的弯曲所以那样取向的原因。

可以注意, 色球差的表示式本可由初级球差表示式作微分而得到, 例如文献[4], 结果和(39a)当然不同, 也许认为这种结果的准确性要高一些。但是可以指出, 对于这类二级象差来说, 这种微分还是不够准的, 原因在于略去了前组产生的色差与倍率色差对色球差的影响; 假若我们要追求准确的话, 可类似于第六章 § 8 求出它们对色球差的影响。

## § 6 用光线光路方法讨论轴外色差

首先考虑高斯光学所决定的轴外细光束的色差。见图 5.6, 图中  $A'$  是  $A$  点对标准波长光束的高斯象, 标准波长的光束张角  $u$  为光学系统变换成为  $u'$ , 故物高  $\eta$  和象高  $\eta'$  满足  $n u \eta = n' u' \eta'$ 。现考虑波长  $\lambda$  的主光线  $BC$ , 它在标准波长的物面和象面上的高度各为  $\eta_\lambda$  和  $\eta'_\lambda$ ,  $\eta - \eta_\lambda$  就是垂轴色差  $TC$ , 容易写出下列等式:

$$\begin{aligned}
 n' u' TC' - n u TC &= n' u' (\eta' - \eta'_\lambda) - n u (\eta - \eta_\lambda), \\
 &= n' u' \eta'_\lambda - n u \eta_\lambda;
 \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
 &= n' u' u'_{p\lambda} (l' - l'_{p\lambda}) - n u u_{p\lambda} (l - l_{p\lambda}), \\
 &= n_\lambda i_{p\lambda} \cdot l u \left( \frac{n'_\lambda - n'}{n'_\lambda} - \frac{n_\lambda - n}{n_\lambda} \right).
 \end{aligned} \tag{41}$$

等式的最后一步是由(38)式得出的[将(38)式中下角标号  $O$  去掉同时将下角标号  $F$

改为  $p\lambda$  即得].

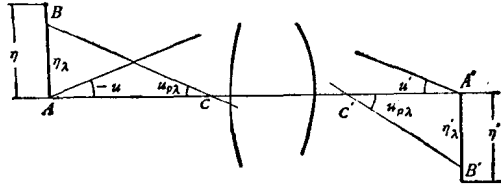


图 5.6

显然(41)式是(16)式的进一步准确化, (41)中给出的  $C_{II}$  的表示是(12)式的精确化.

轴外点象差的色差同样可以从光线光路计算得出,就象前节所述一样,这种计算的结果是与  $d-D$  法所得者一致的. 这种关系也可以用图解法表示出来. 这种情况下所得的是各种象差的总和之相互关系. 此问题将在下一章和其他象差一并讨论(见第六章 § 3.1).

## 参 考 文 献

- [ 1 ] 例如: Born, M. and Wolf, E., Principle of Optics, Pergamon Press(1960), Chapter XIII, pp. 612—621.
- [ 2 ] 例如: Розенберг, Г. Б., Оптика тонкослойных покрытий, Госфизиздат, Москва(1958).
- [ 3 ] Conrady, A. E., Microscop, Optics of Contribution to Glazbrock ed. Dictionary of Applied Physics, Vol. 5, Macmillan and Co. Ltd.(1923).
- [ 4 ] Weinstein, W. P., Chromatic Variation of Spherical Aberration, *Brit. Jour. of Appl. Phys.*, **1**(1950), 67.
- [ 5 ] 例如: Raine, H. C., Plastic Glasses, Proceedings of the London Conference on Optical Instruments 1950, Chapman & Hall Ltd.(1951), pp. 243—253. Parker, C. J., Optical Materials, and Welham, B., Plastic Optical Components, in *Applied Optics and Optical Engineering*, V. 7, Shannon, R. R. ed., Academic Press, 1979.

## 第 六 章

### 象差的一般性质

#### § 1 对称性和象差, 变数分离法, 规范化条件

描写光学系统象差特性时首要的问题是：须用几个参数才能完满地把通过光学系统的所有光束的一切特性都包罗无遗, 这就是“独立象差数有几个”的问题。运用对称性的概念就可以解决这个问题。在这个问题上运用象差的波面概念最为方便, 几何象差须要同时考虑两个函数  $T A_y$  和  $T A_z$  (第一章 § 4.3) 而运用波象差时就只须考虑一个函数。

我们在这一章内只讨论轴对称系统波象差  $W$  的特性。在第九章中将讨论非轴对称系统的性质。

由物空间一定点发出并经过光栏上某一点的光线, 在一定的光学系统内的光路就由这两点的坐标完全确定。图 6.1, 物面坐标为  $\eta, \zeta$ , 光栏坐标为  $y, z$ , 两组坐标

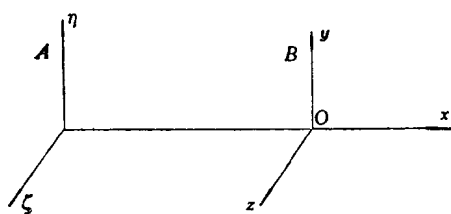


图 6.1

相互平行, 光线光路即由坐标  $A(\eta, \zeta), B(y, z)$  所完全确定。此处光线实际坐标本宜以大写

字母表示, 但由于本章 § 1.1 中所述的原因, 此处以小写字母表示。但光程  $W$  除与此光线有关外还与象空间中为考察此光线象差而选定的参考点和参考波面半径有关, 现确定

参考点是象空间光轴上某一定点, 参考面具有某一确定半径, 这就是说  $W$  是从  $A$  点起到光线和参考球面交点的光程长。

设  $A$  点的矢径为  $\vec{a}$ ,  $B$  点的矢径为  $\vec{b}$ , 当此两矢径同时绕  $ox$  轴旋转, 也即绕光学系统光轴旋转时, 因为光学系统对光轴对称, 故光程  $W$  不变。因此光程  $W$  只能是矢量  $\vec{a}, \vec{b}$  所组成的旋转不变量, 即  $\vec{a} \cdot \vec{a}, \vec{b} \cdot \vec{b}, \vec{a} \cdot \vec{b}$ , 亦即:

$$\eta^2 + \zeta^2, \quad y^2 + z^2, \quad \eta y + \zeta z \quad (1)$$

的函数.

这个結論也可以从逐次分析而得到, 首先我們旋轉坐标軸, 使  $\eta$  軸通过被考察物点, 即令坐标  $\zeta=0$ , 再因坐标  $y, z, \eta$  的光綫和  $-y, -z, -\eta$  的光綫光路相同, 故

$$W(y, z, \eta) = W(-y, -z, -\eta); \quad (2)$$

由于光束光路对  $oxy$  面对称, 故

$$W(y, z, \eta) = W(y, -z, \eta); \quad (3)$$

另外, 当  $\eta=0$  时,  $W$  只是  $y^2+z^2$  的函数, 即:

$$W(y, z, 0) = f(y^2+z^2) \quad (4)$$

滿足(2)式的只有  $y, z, \eta$  的偶次元  $y^2, z^2, \eta^2, yz, y\eta, z\eta$ , 其中  $z\eta, yz$  不滿足(3). 再为滿足(4)式因此就只剩下

$$y^2+z^2, \eta^2, y\eta. \quad (5)$$

将坐标系仍轉到任意位置就仍得(1)式所示的三个基本单元.

因之, 光程函数  $W$  可表示为:

$$W = W_0 + W_1 + W_2 + W_3 + \dots \quad (6)$$

其中

$$W_0 = K_1 + K_2(y^2+z^2) + K_3\eta y + K_4\eta^2 + K_5\eta^4 + K_6\eta^6 + \dots \quad (7)$$

$$\begin{aligned} 2W_1 = & \frac{1}{4} S_I (y^2+z^2)^2 + S_{II} \eta y (y^2+z^2) + S_{III} \eta^2 y^2 \\ & + \frac{1}{2} (S_{III} + S_{IV}) \eta^2 (y^2+z^2) + S_V \eta^3 y. \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} 2W_2 = & \frac{1}{6} S_I^I (y^2+z^2)^3 + S_{II}^I \eta y (y^2+z^2)^2 + S_{III}^I \eta^2 y^2 (y^2+z^2) \\ & + \frac{1}{4} (S_{III}^I + S_{IV}^I) \eta^2 (y^2+z^2)^2 \\ & + \frac{2}{3} S_{II}^I \eta^3 y^3 + (S_{II}^I + S_{IV}^I) \eta^3 y (y^2+z^2) + S_{III}^I \eta^4 y^2 \\ & + \frac{1}{4} (S_{III}^I + S_{IV}^I) \eta^4 (y^2+z^2) + S_V^I \eta^5 y. \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $W_0$  是常数項、二次項与仅含  $\eta^2$  的高次項之和, 以后我們將看到它們不是象差.  $W_1$  是四次項之和, 即所謂 Seidel 象差或初級象差(在有些文献中称三級象差, 大概是考慮到取三角函数正弦展开式到三次的意思).  $W_2$  是六次方項之和, 是光学系統的二級象差. 对于一定的物面、象面、参考点和一定的光学系統而言, (7), (8), (9) 式中所有的系数均为常数. 此处把系数写成上面那样的形式是为使有关的公式能有比較简单的形式.

光程  $W_0$  中的  $K_2$  项实是我们开始作参考点选择时的任意性带来的, 当我们把参考点沿轴移动时产生出的波象差正是这个形式, 假设将参考点移动至使  $K_2=0$  的位置, 则对于  $\eta=0$  且  $y^2+z^2$  为小量, 以致  $y^2+z^2$  的高次项可略去不计的细光束而言, 作这样的移动后, 由物点到象点的光程即为常数. 可见这样的参考点位置就是高斯象点位置.

当参考点在高斯象面上作垂轴移动时产生的波象差与  $y$  成正比, 因之对高度为  $\eta$  的物点所发出的光束而言, 我们总可以找到一个垂轴移动量使产生的波差恰与  $-K_3 y \eta$  相等. 对于高斯象面上的这个参考点而言,  $K_3=0$ , 由于每个物点要求的参考点移动量都与物点高成正比; 这也就是要求对每个物点选出一个和物点高成正比的象点, 也就是要求按某一定的倍率选定参考点(理想象点). 当象点已处在理想象面上理想高度时, 对每个一定的物点而言,  $W_0$  中只剩下了一些常数项, 光程中的常数项对于成象是没有什么作用的 ( $W$  对  $y, z$  的微分才是几何象差), 由此可见,  $W_0$  所表达的是光学系统在高斯光学区域内的光束特性, 而  $W_1, W_2, \dots$  则为波象差. 波象差是主光线光程和其他光线光程之差 ( $y=0, z=0$  时,  $W_1=W_2=0$ ).

这就是轴对称光学系统的单色象差特性.

初级波象差中各项顺次称为初级球差、彗差、象散、Petzval 和(或象面弯曲, 场曲)及畸变. 关于它们的意义将在下一节讨论, 由这种讨论就可看出它们与第二、第三章中已导出的各种初级象差是完全相同的.

二级波象差的各项名称是:

$S_I^I$  高级球差(或二级球差),

$S_{II}^I$  高级彗差(或二级彗差),

$S_{III}^I$  第二轴外球差,

$S_I^{IV}$  第一轴外球差,

$S_{III}^{II}$  第二轴外彗差,

$S_I^{IV}$  第一轴外彗差,

$S_{III}^{III}$  轴外象散(或二级象散, 高级象散),

$S_{III}^{IV}$  轴外场曲(或二级场曲, 高级场曲),

$S_V^{IV}$  轴外畸变(或二级畸变, 高级畸变).

关于它们的几何意义, 也将在一节讨论, 由这种讨论我们可以看出第三、第四章中所导出的九种象差准确表示式已将上述九种二级象差完全包括进去了, 因此上述两章内的个别考虑和本章的全局观点合起来恰好比较完善地反映了象差的性质.

由于組成光学系統的媒质对于各种波长的光具有不同的折射率,因此,經過光学系統折射后各色光将形成各自的波面,对于各单色光而言,上面的討論都是正确的,但上面沒有顾及各色波面間的相互关系. 假如我們对光譜中某一譜綫,例如对  $C$  綫选定了高斯象面和理想倍率,它們一般不会与其他譜綫例如  $F$  綫的高斯象面和理想倍率相同. 因此,从  $C$  綫的理想参考点观察  $F$  綫的波面时,波差还有二次方項:

$$W_{FC} = \frac{1}{2} C_1 (y^2 + z^2) + C_{11} y \eta. \quad (10)$$

这就說明一般光学系統具有两种初級色差,分別称为軸向色差和倍率色差. 另外,(8), (9) 式中的各种象差系数也随波长而改变,称为象差的色差別. 一般光学系統中所利用的光譜波段不寬,在这种波段範圍內折射率的差別很小(一般小于2%),因此象差的色差別很小,因而可划归高一級的象差的范疇,以符号  $CS_I, CS_{II}, \dots$  等代表球差、彗差……等的色差別,分別称为色球差、色彗差等等.

上面的結論無論对球面或非球面組成的系統,無論对連續变化或不連續变化的媒质組成的系統,只要媒质是各向同性的并且具有軸对称性的时候总是正确的. 在电子光学中,由于磁場的非各向同性,增加了三种象差<sup>[1]</sup>. 有时候須要用非軸对称的系統,此时由于破坏了对称,象差数大量增加(这个問題我們在后面尚將討論),故非极端必要不用非軸对称系統.

方程(8), (9), (10) 中的所有系数相对于光栏坐标  $y, z$  和物面坐标  $\eta, \zeta$  而言都是常数,但对于光栏位置,物面位置以及光学系統結構参数而言都是变数. 我們在討論和設計光学系統时,最希望的当然是将象差  $W$  表示为上述所有参数的显函数,这样才可能用解方程式的方法由象差要求求解出所需要的各种参数来. 这就能摆脱一切逐次接近法和試探法,使光学設計的面貌改观. 但是这种企图至今还沒能实现. 主要的原因是: 这种函数关系过于复杂,在个别特殊簡單的情况下,我們确实可以做到这一点,例如单个折射面,由同心球面組成的系統等<sup>[2]</sup>. 但按現有的水平,要普遍地做到这点似乎还是很遙远的. 正是由于这样,下面我們首先做变数分离的工作,按問題的繁簡将变数分类,将复杂的函数依存关系分解为多个比較簡單的易于表达和討論的关系. 本节所做的就是沿着这个方向的第一步: 首先固定了光学系統、物面位置和光栏位置后討論象差与光栏坐标和物面坐标的函数关系. 在 §3—§5 中我們还将討論象差和光栏位置及物面位置的关系. 然后只余下一个問題,即象差与光学系統結構的关系. 这最后一个复杂关系实际上就是整个光学設計工作所要解決的問題,它是个多变数的问题,本书的目的只在利用由象差理論導出的概念指出这个函数关系

的某些特性,从而为设计和校正指出一些可能的方向。

这种做法——分离变数和区别各种变数的特性来分别讨论,可以认为是更有物理意义的。在这样的分析之下,变数的意义和作用才明确起来,它们不再是一个抽象的对象差有影响的因素,而是在某一定范围内起确定作用的因素。以本节的结果为例,导出的公式确定了:对一定的光学系统并当物面和光瞳处在一定位置时,通过光学系统的光束特性在近轴区域由两个参数决定(高斯象面和倍率),当光线离轴移远时( $\eta, y, z$ 较大时)由五个参数决定——存在五种独立象差,而当光线离光轴更远时则由九个独立象差决定。独立象差的数目问题显然是重要的,当我们用任何方法(光线计算,由象差理论导出的各种表示式计算……)确定了这几个参数后,光学系统的象差特性就全部明了了。虽然我们的计算总是对一定的 $y, \eta, z$ 作的,而上述理论却赋予这种个别计算以普遍意义。

### § 1.1 规范化坐标

在方程式(8), (9), (10)中的 $y, z, \eta$ 量度的尺度是一个值得仔细考虑的问题,选择得好可以使同一个公式在使用时更方便,更有普遍性。由于波象差 $W$ 是转面不

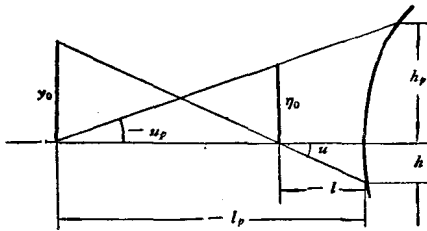


图 6.2

变量,它在任何物空间和象空间均具有同一数值。但光线的真实坐标 $Y, Z, H$ 在未加规范化时却都不是转面不变的,它们的大小随光阑和物面成像的倍率而变化。因之,象差系数要随物空间的选择而变更数值,此时的象差系数和公式显然是复杂的。但若我们已

经计算了通过光阑中心的主光线和通过物面轴上点的轴上光线,由这两条近轴光线算出各成象空间内光阑高度 $y_0$ 和物高 $\eta_0$ (图6.2):

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= (l-l_p)u, \\ \eta_0 &= -(l-l_p)u_p, \\ j_0 &= -n(l-l_p)uu_p = n\eta_0 u = -ny_0 u_p, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

再用光线在光阑上的真实坐标 $Y, Z$ 与 $y_0$ 之比,和光线在物面上的真实高度 $H$ 和 $\eta_0$ 之比作为(5)式中决定光线位置的坐标,称为规范化坐标,亦即取 $Y/y_0, Z/y_0, H/\eta_0$ 作为(8)–(10)式中的 $y, z, \eta$ ,则式中的变数将对所有物空间和象空间具有同一数值,因之系数 $S_I^I-S_V, S_I^I-S_V^I$ 对各空间均具有同一数值和同一形式。

坐标规范化后的公式组对物体或光阑移向无限远时也照样适用,公式中不会因此



而出现无限大的量。此时只須以实际張角  $u_x, u_y$  等与上述二近軸光綫的角量之比代替高度之比即可。由(11)式可以看出,当发出光綫的物面和光栏面不变,即  $l-l_0$  不变时,角度之比和长度(高度)之比是完全一样的。

使坐标規化只是我們使用两条近軸光綫的量的原因之一。按第三、四、五章的結果,同軸球面光学系統中的初級象差也可以用两条近軸光綫計算所得的量表示出来。例如公式(III.14), (III.56), (IV.62), (IV.70), (IV.72)計算  $S_I-S_V$ , 再如(V.12)計算色差  $C_I, C_{II}$ 。在这些章中我們首先求得了各种象差的准确表示式,然后将实际光綫的量代以其近似值(近軸光綫的相应量)而求出象差的初級近似值(初級象差)。也就是說我們把两条近軸光綫看作是一般空間光綫在两坐标面內投影的极限(第一章 § 3.4)。既然所得的是象差的近似值而非(8)—(10)式中的象差系数,因此似乎不应对两者使用同一个符号表示。实际上这个問題是不存在的。在(8)式中令  $y, z, \eta$  均等于1或0,即令近軸光綫坐标和实际光綫坐标一致( $Y=y_0, Z=0, H=\eta_0$ ; 或  $Y=0, Z=y_0, H=\eta_0$ )則波象差和象差系数就直接相等。这也就是說,当所用的近軸光綫量是实际光綫量的近似值时,按前列公式算出的象差也就可以看作是(8)式中的象差系数。(8)式中的坐标是規化了的,对于这点将在下节再詳細說明。

在同軸球面光学系統中采用这种表示象差系数的方法有一个更基本的根据,那就是任意两条近軸光綫光路已完全确定了这一光学系統的结构。因此,原則上任意高級象差也能用它們表示出来,只是表示式可能很繁而已。

为了方便,在本章中常将(11)式中的  $j_0$  写作  $j$ , 只在当它会被誤认作是前几章中的  $j=nHu$  时才写作  $j_0$ 。

## § 2 象差的几何意义和描写光束特性的方法

光程长度总是要在光路計算后才能算出的,因之通常总是先知道光綫光路然后再算光程。几何象差与光路計算关系更为密切,因之也更直观。計算所得的常是几何象差,因此,如果把波象差公式表示为几何象差公式,就可以使本章的一般理論与前几章的特殊理論建立联系,使象差特性更为明确。

为此,运用波象差和几何象差的关系式(I.64), (I.72)即:

$$nuT A_y = \frac{\partial W}{\partial y},$$

$$nuT A_z = \frac{\partial W}{\partial z},$$

$$nu^2 LA = 2 \frac{\partial W}{\partial (y^2 + z^2)}, \quad (\text{对于轴对称波象差}) \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} nu^2 LA_y &= 2 \frac{\partial W}{\partial y^2}, \\ nu^2 LA_z &= 2 \frac{\partial W}{\partial z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{对于偶次波象差})$$

因此当只存在初級象差时光束和高斯象面的交点离高斯象点的坐标是:

$$\left. \begin{aligned} 2nuT A_y(\text{初級}) &= S_{Iy}(y^2 + z^2) + S_{II}\eta(3y^2 + z^2) + (3S_{III} + S_{IV})\eta^2 y + S_V\eta^3, \\ 2nuT A_z(\text{初級}) &= S_{Iz}(y^2 + z^2) + S_{II}\eta(2yz) + (S_{III} + S_{IV})\eta^2 z. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

当有二級象差时尙須加上:

$$\left. \begin{aligned} 2nuT A_y(\text{二級}) &= S_{Iy}^{\text{II}}(y^2 + z^2)^2 + S_{II}^{\text{II}}\eta(5y^2 + z^2)(y^2 + z^2) + S_{III}^{\text{II}}\eta^2(5y^3 + 3yz^2) \\ &\quad + S_{IV}^{\text{II}}\eta^2 y(y^2 + z^2) + S_{II}^{\text{III}}\eta^3(5y^2 + z^2) + S_{III}^{\text{IV}}\eta^3(3y^2 + z^2) \\ &\quad + \frac{1}{2}(5S_{III}^{\text{III}} + S_{III}^{\text{IV}})\eta^4 y + S_V^{\text{IV}}\eta^5, \\ 2nuT A_z(\text{二級}) &= S_{Iz}^{\text{II}}(y^2 + z^2)^2 + S_{II}^{\text{II}}\eta(4yz)(y^2 + z^2) + S_{III}^{\text{II}}\eta^2(z^3 + 3zy^2) \\ &\quad + S_{IV}^{\text{II}}\eta^2 z(y^2 + z^2) + S_{III}^{\text{III}}\eta^3(2yz) + S_{III}^{\text{IV}}\eta^3(2yz) \\ &\quad + \frac{1}{2}(S_{III}^{\text{III}} + S_{III}^{\text{IV}})\eta^4 z. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

利用公式(14), (13), 原則上就可以通过一批光綫計算而解出所有象差系数. 这种做法看来似乎过于繁复, 須要解一組 14 元綫性齐次联立方程, 实际上, 当我们將各項象差的表现作一研究后, 就可以看出: 利用各別象差的几何特性就很容易在大量象差中把各种象差分离出来.

### § 2.1 球 差

令  $\eta = 0$  則除  $S_I$  和  $S_I^{\text{I}}$  外所有其他象差都对  $T A_y$ ,  $T A_z$  无影响, 这两种象差都是轴对称象差. 將这两項波差对  $y^2 + z^2$  微分得:

$$2nu^2 LA = S_I(y^2 + z^2) + S_I^{\text{I}}(y^2 + z^2)^2. \quad (15)$$

显然, 这就是前面已經討論过的球差. 初級球差和光栏直徑平方成正比, 二級球差与四方成正比. 按照(III.14)式可以算出球面系統的初級球差系数  $S_I$ , 按(III.18)式可算出  $S_I^{\text{I}}$ . 在这里須注意(III.18)式实际算出的不是  $S_I^{\text{I}}$ , 这是由于式中选用的球差的倍率是  $nu \sin U$  而不是  $nu^2$  之故, 但是很明显, 这种差别不是本质的, 对下面所有其他高級象差也有这种情况. 对于这种倍率上的差异我們下面就不再強調它, 实际上微

分公式(12)本身也只是近似公式, 因此本节中的所有关于高級象差的几何表示都是近似的. 至于前几章所导出的高級象差表示则在所选的倍率之下是绝对准确的(恒等式). 我們这一节討論的目的主要是說明前几章已經对球面系統的象差作了近于完整的討論.

由于  $S_I$ ,  $S_I^I$  与  $\eta$  无关, 因之球差对軸外点也起与軸上点同样的影响. 在第三章中由 (III.100), (III.101) 求近似得出初級球差时我們也看到了这一点. 为算出球差当然应算  $\eta=0$  的軸上光綫.

### § 2.2 軸外球差

严格来說, 軸外球差  $S_I^{III}$ ,  $S_I^{IV}$  已經和球差有些不同, 不再是軸对称象差了. 但是, 当只考虑子午光束 ( $z=0$ ) 或弧矢光束 ( $y=0$ ) 时, 二者的影响却与初級球差  $S_I$  相同. 由 (13), (14) 式写出  $z=0$  时的  $TA_y$  和  $y=0$  时的  $TA_z$ :

$$\left. \begin{aligned} 2nuTA_y(\text{初級}) &= S_I y^3, \\ 2nuTA_z(\text{初級}) &= S_I z^3, \end{aligned} \right\} \quad (16a)$$

$$\left. \begin{aligned} 2nuTA_y(\text{二級}) &= (5S_I^{III} + S_I^{IV}) \eta^2 y^3, \\ 2nuTA_z(\text{二級}) &= (S_I^{III} + S_I^{IV}) \eta^2 z^3. \end{aligned} \right\} \quad (16b)$$

这就表明: 从子午光束和弧矢光束計算出軸外光束的球差所造成的  $TA_y$ ,  $TA_z$  时, 我們可以认为是“初級”球差随象高而变化了; 子午光束和弧矢光束有不同的变化, 变化量和象高平方成正比, 这就是我們称  $S_I^{III}$ ,  $S_I^{IV}$  为軸外球差的原因. 实际上如 (14) 式所示, 情况是比较复杂的, 其主要原因是  $S_I^{III}$  非軸对称, 它对子午光束的影响比弧矢光束大五倍, 这是子午光束变化急陡的原因之一.

由 (6) 式直接对  $y^2$  或  $z^2$  微分后再令  $z=0$  (子午光束) 或  $y=0$  (弧矢光束) 就可得出“初級”子午球差  $LA_T$  或“初級”弧矢球差  $LA_S$ :

$$\left. \begin{aligned} 2nu^2 LA_T &= y^2 [S_I + (5S_I^{III} + S_I^{IV}) \eta^2], \\ 2nu^2 LA_S &= z^2 [S_I + (S_I^{III} + S_I^{IV}) \eta^2]. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

故为确定軸外球差的全貌除作子午光束計算外应作弧矢光綫計算, 由 (III.100), (III.101) 直接算出球面系統中的

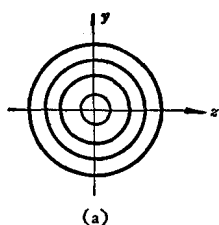
$$S_I + (S_I^{III} + S_I^{IV}) \eta^2 \quad \text{和} \quad S_I + (5S_I^{III} + S_I^{IV}) \eta^2.$$

$S_I^{III}$  所形成的点列图 (spot diagram) 即由于象差使光束散开在象面上而形成的图案用 (14) 式討論是不大方便的, 由于光栏为圓形, 将  $y, z$  表示为极坐标要更方便些, 即令

$$\left. \begin{aligned} y &= \rho \sin \varphi, \\ z &= \rho \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

此时得

$$\left. \begin{aligned} 2nu\Gamma A_y &= S_{II}^I \rho^3 \eta^2 (5 \sin^2 \varphi + 3 \cos^2 \varphi) \sin \varphi, \\ 2nu\Gamma A_z &= S_{II}^I \rho^3 \eta^2 (3 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$



由此就不难算出与光栏面相交为等间隔同心圆的光束(图 6.3a)在高斯象面上的点列图如图 6.3b.

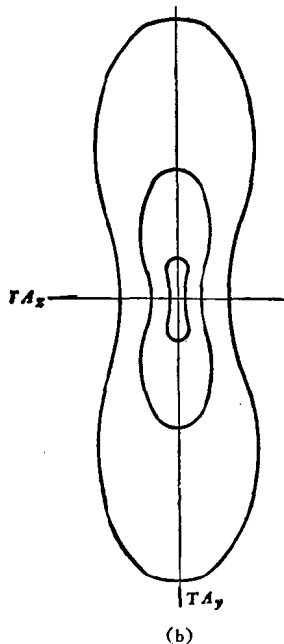


图 6.3

球差形成的点列图就是些同心圆,但球差和轴外球差等组合形成的点列图就复杂些.当已知所有象差系数后,由(13), (14)式就可算出象差的总影响所形成的点列图.

### § 2.3 畸 变

畸变是指与光栏坐标  $y, z$  无关的象差,这就是主光线的象差,由(13), (14), 这种象差是:

$$nu^2 T A_y = S_V \eta^3 + S_V^V \eta^5.$$

它随象高的三次、五次方增大.关于球面系统的初级畸变和高级畸变已都在第四章讨论过了.

### § 2.4 彗 差

凡是使点列图失对称的象差都称为彗差.在波象差(8), (9)式中的奇次项或几何象差(13), (14)式中的偶次项,有下角标号“II”的就是彗差.现在首先考虑与  $\eta$  正比的两项  $S_{II}$  和  $S_{II}^I$ , 这两项使近轴物点成出的象与轴上点不相似.由(6)式:

$$\begin{aligned} & \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{W - \left[ \frac{1}{8} S_I (y^2 + z^2)^2 + \frac{1}{12} S_I^I (y^2 + z^2)^4 + \dots \right]}{\eta} \\ &= \frac{1}{2} S_{II} y (y^2 + z^2) + \frac{1}{2} S_{II}^I y (y^2 + z^2)^2. \end{aligned} \quad (20)$$

也就是说对充分小的  $\eta$  有下列关系:

$$2W - 2W_{\eta=0} = S_{II} \eta y (y^2 + z^2) + S_{II}^I \eta y (y^2 + z^2)^2.$$

将此式与(III.40c)相比较可见偏离正弦条件的程度就是彗差;注意到 $y$ 就是实际光线与光栏交点所定的直径规范化值,因此(III.40c)式中的 $\frac{\sin v_1}{u_1} \cos \psi$ 就是现在的规范化坐标 $y$ ,即可由此二式相等而得:

$$2j_0(OSC'_k - OSC_1) = S_{II}(y^2 + z^2) + S_{II}^H(y^2 + z^2)^2, \quad (21)$$

式中的 $j_0$ 与(III.55)中的 $j$ 不同( $j_0 = n\eta_0 u$ ;  $j = nHu$ ).

由(21)式可见,各彗差系数都可以由轴上光束计算而得,如(III.55)所示,它的初级量则如(III.56)式.

为在轴外光束计算结果中判定彗差的存在及其大小,只须利用它区别于其他象差的不对称性.我们定义子午彗差 $K_T$ 和弧矢彗差 $K_S$ 为:

$$\left. \begin{aligned} K_T &= \left( \frac{TA_y + TA_{-y}}{2} - TA_{y=0} \right)_{z=0}, \\ K_S &= \left( \frac{TA_z + TA_{-z}}{2} - TA_{z=0} \right)_{y=0}, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

则由(13), (14)得出:

$$\left. \begin{aligned} 2nuK_T &= \eta(3S_{II}y^2 + 5S_{II}^Hy^4), \\ 2nuK_S &= \eta(S_{II}z^2 + S_{II}^Hz^4). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

这样就可以由复杂的总象差中把彗差分离出来.由(23)式可见,当视场大小和孔径大小都相同时,初级子午彗差为弧矢彗差的三倍,二级子午彗差为弧矢彗差的五倍.这两种彗差和象高之比(即彗差的百分数)与象高无关.初级彗差与孔径平方成正比,二级则和四方成正比.

将(21), (23)二式相比较可知弧矢彗差百分数与正弦差相等,即

$$OSC'_k - OSC_1 = \frac{K'_{s,k}}{H'_k} - \frac{K_{s,1}}{H_1}. \quad (24)$$

这也是我们在第三章§7中所已证明的,这就是彗差的特征表现以及它和正弦差之间的关系.

彗差形成的点列图形如彗星,这是它所以被称作彗差的原因,为讨论它的点列图形状,首先将光栏坐标换为极坐标,此时得:

$$\text{初级彗差} \begin{cases} 2nuTA_y = S_{II}\rho^2\eta(2 - \cos 2\varphi), \\ 2nuTA_z = S_{II}\rho^2\eta \sin 2\varphi, \end{cases} \quad (25)$$

$$\text{二级彗差} \begin{cases} 2nuTA_y = S_{II}^H\rho^4\eta(3 - 2\cos 2\varphi), \\ 2nuTA_z = S_{II}^H\rho^4\eta 2\sin 2\varphi. \end{cases} \quad (26)$$

二者图形均如图6.4.光瞳上 $\rho$ 相同的一束光线与高斯象面的交点均为一圆,圆心

处在离高斯象点  $2S_{II}\rho^2\eta$  或  $3S_{II}^H\rho^4\eta$  处, 圆的半径则各为  $S_{II}\rho^2\eta$  和  $2S_{II}^H\rho^4\eta$ . 由于对每束光线所形成的圆, 其圆心距与半径之比是不变的, 对初级彗差为  $\frac{1}{2}$ , 对二级彗差为  $\frac{2}{3}$ , 因之所有的圆具有公切线, 切线通过高斯象点, 且与子午面夹角,  $\theta = \sin^{-1} \frac{1}{2}$  或  $\theta = \sin^{-1} \frac{2}{3}$ , 即  $30^\circ$  或  $41.81^\circ$ .

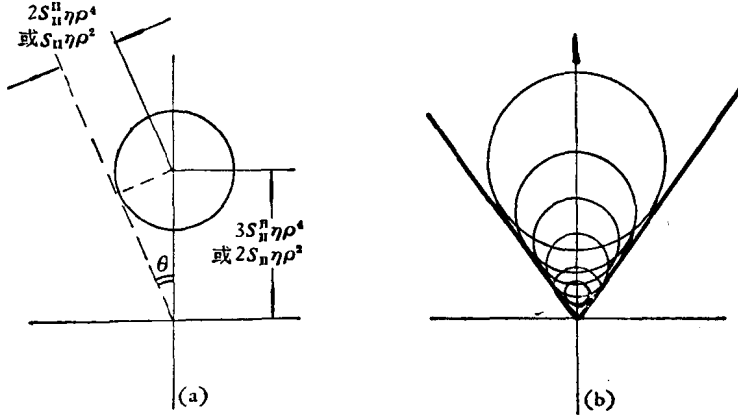


图 6.4

### § 2.5 轴外彗差

当物点不是离轴很近而是离轴很远时, 不单存在初级彗差和高级彗差而且还有轴外彗差  $S_{III}^H$ ,  $S_{III}^Y$  所引起的不对称效应. 当然, 这种彗差与 *OSC* 已无丝毫关系. 由 (13), (14) 可以看出: 其中  $S_{III}^Y$  与  $S_{II}$  的表现几乎完全一样, 不同的只是  $S_{III}^Y$  项与  $\eta^3$  成正比而  $S_{II}$  项与  $\eta$  成正比; 但  $S_{III}^H$  与  $S_{II}$  有相当的区别: 它使每个圆带光束形成的图案不再是圆而是椭圆. 但它的最终图形还是一样的——彗星状, 其顶角之半是  $\tan^{-1} \left[ \frac{1}{2} \tan \left( \sin^{-1} \frac{1}{1.5} \right) \right]$  即约  $24.1^\circ$  (顶角大小可由下述考虑得到: 首先将坐标  $TA_y$  缩小一倍, 此时每带的点列图成为圆形, 而且公切线交角是  $\sin^{-1} \frac{1}{1.5}$ , 然后将此坐标长度复原, 此时张角的正切变小一倍).

由于轴外彗差 (当不考虑高级彗差  $S_{III}^H$  时), 子午彗差  $K_T$  和弧矢彗差  $K_S$  将成为:

$$\begin{cases} 2nuK_T = y^2 [3S_{II}\eta + (5S_{III}^H + 3S_{III}^Y)\eta^3], \\ 2nuK_S = z^2 [S_{II}\eta + (S_{III}^H + S_{III}^Y)\eta^3]. \end{cases}$$

这就是说轴外彗差  $S_{III}^H$  对于子午光束的影响为对弧矢光束的五倍. 这是子午光束变化

急陡的又一原因。为算出两种轴外彗差也必须计算弧矢光束。

用公式(IV.96),(IV.97)可以直接算出同轴球面系统的  $3S_{II}\eta + (5S_{III}^{III} + 3S_{IV}^{IV})\eta^3$  和  $S_{II}\eta + (S_{III}^{III} + S_{IV}^{IV})\eta^3$  之值。

### § 2.6 象散和象面弯曲

当象差中除去了前述所有的项后,波象差(6)式中余下的象差就都是和  $y^2$  或  $z^2$  成正比的象差。由(12)式可以看出,它们相当于子午和弧矢光束具有不同于高斯象面的焦面位置。称子午象面弯曲为  $x_t$ ,弧矢象面弯曲为  $x_s$ ,则按(12)式最后两式将波象差(6)式微分就得:

$$\left. \begin{aligned} 2m^2x_t &= \eta^2(3S_{III} + S_{IV}) + \frac{1}{2}\eta^4(5S_{III}^{III} + S_{IV}^{IV}), \\ 2m^2x_s &= \eta^2(S_{III} + S_{IV}) + \frac{1}{2}\eta^4(S_{III}^{III} + S_{IV}^{IV}). \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

所以,它们的几何意义就是轴外光束的邻主光线焦点距高斯象面的距离。它表示对各种象高  $\eta$  而言,为消去  $y^2, z^2$  项(见§1)所需要的轴向移动量是不同的,这就是说象面不再是平面,而且当  $S_{IV}^{IV}$  和  $S_{III}^{III}$  不等于零时,子午象面和弧矢象面都不一致,这就是我们在第四章中讨论过的象散和象面弯曲,其初级者和  $\eta^2$  成正比,二级者和  $\eta^4$  成正比。 $S_{III}$  和  $S_{III}^{III}$  对子午光束的影响各为对弧矢光束的三倍和五倍,这又是子午光束变化急陡的原因。对球面组成的同轴系统而言,无论对初级量或总和都已有可用的表式,即(IV.58), (IV.70), (IV.56)和(IV.35)。

### § 2.7 色 差

将(10)式对  $y^2 + z^2$  微分就得到轴向色差  $C_I$  的表达式:

$$m^2LC = C_I. \quad (28)$$

它和(V.15\*)式全同,这表示对两一定波长的光束而言,轴向色差是常数。由(10)式对  $y$  微分得:

$$mTC = C_I y + C_{II}\eta. \quad (29)$$

$C_{II}\eta$  就是倍率色差,当  $H = \eta_0$ , 即  $\eta = 1$  时(29)式中这一部分就和(V.16\*)全同。

总起来看,当光束通过光学系统后,为描写光束结构特性可以在两个方面进行:一是孔径,二是视场。首先是轴上一点发出的光束中近轴和远轴者与光轴相交在不同位置,这就是球差  $S_I$ ,当孔径再增大时因入射高度增大而导致的截距变化更为严重

( $y^2 \rightarrow y^4$ ) 这就是二級球差  $S_I^2$ , 孔径再增大时还将有更高級的球差产生(与  $y^6, y^8 \dots$  正比).

由于波长不同, 二色光綫的近軸截距也不同, 这就是初級色差  $C_I$ , 当孔径增大时, 各色光綫的球差也不同, 这就是色球差  $CS_I$ ; 二級球差不同, 就是  $CS_I^2$ , 等等.

对軸外点而言, 首先就考虑細光束的聚焦状况是否与高斯光学要求相一致. 垂軸的不一致(倍率不一致)就是畸变; 軸向的不一致則按光束的一般特性(第四章 § 3)可知須分两个主截面来考虑, 这就是弧矢象面和子午象面. 当視場不太大时, 这些就是初級象差  $S_V, S_{III} + S_{IV}, 3S_{III} + S_{IV}$ , 当視場加大时, 这两类象差都将发生更急剧的变化; 由正比于  $\eta^3$  变到和  $\eta^5$  正比, 或由与  $\eta^2$  正比变为与  $\eta^4$  正比, 这就是高級畸变  $S_V^V$ , 高級象散和場曲  $S_{III}^H, S_{III}^H$ . 由于軸对称性, 它們的更高次項将与  $\eta^7, \eta^9, \dots$  正比, 或与  $\eta^6, \eta^8, \dots$  正比.

軸外大光束当然也不会和細光束相一致, 一般說来一定和細光束焦点发生垂軸的和軸向的歧离, 垂軸的初級差异就是彗差  $S_{II}$ ; 可以想見軸向的差异的初級近似就是球差  $S_I$ .

$S_{II}$  是邻軸点象差与軸上点象差間的差异, 当孔径增大时差异更形严重, 由与  $y^2$  成正比变到与  $y^4$  正比, 这就是二級彗差  $S_{II}^H$ ; 至于孔径增大所影响的軸向象差当然仍是  $S_I^2$ , 等等.

視場加大也会使軸外大光束的象差变化: 使球差不同于初級球差, 使彗差不同于初級彗差, 这就是軸外初級球差和軸外初級彗差,  $S_I^{II}, S_I^{IV}, S_{II}^H, S_{II}^H$ .

視場再加大时軸外球差和軸外彗差又将更急剧变化. 孔径再增大則軸外二級球差也将与軸上二級球差不同…….

至于色差則首先表现为倍率不同(或焦距不同)即  $C_{II}$ , 其次就是各种初級象差不同…….

从这种思想看来, 前面由对称性理論所得的結果, 其大致輪廓是不用运算就可以想見的. 仔細运算的結果使我們不但能了解輪廓而且使細微末节都显现出来, 使輪廓更形鮮明. 也許有人认为这些仔細的公式組是不必要的, 过于繁瑣的, 沒有它們也一样可以想見光束的性质. 但可以說, 简单的概念更为基本, 而量的表示則更深入一步.

利用这些概念和关系就可以从光綫計算的結果把各种象差分离出来, 并用它来內插和外推出其他孔径和視場的象差大小.



## §3 光栏移动时的象差变化, 计算结果的图示和判断

在 §1 中讨论波差是三个量  $y, z, \eta$  的函数时, 我们不但固定了一定的光学系统, 也即不把波差看作是光学系统结构的函数; 而且是固定了一定的物平面和一定的光栏面. 由此可见所得公式中的象差系数  $S_I, S_{II}, \dots, S_V$  等等不但是光学系统结构的函数, 而且也是物体位置和光栏位置的函数. 这些系数和物体位置及光栏位置的关系可以由简单的考虑得到, 从而证明一个光学系统只有六个独立的初级象差(十种二级象差). 也就是说, 一个光学系统在 Seidel 区域内的特性由六个常数所完全确定. 这就使我们考虑问题和讨论问题大大简化.

首先考察光栏移动的影响, 由公式(6)可见: 若对于一定物体位置和光栏位置的  $S_I-S_V$  已知, 那么由物体发出的波面经光学系统折射后的形状就确定了, 也就是说光束的结构确定了. 波差方程式中的光栏坐标  $y$  和  $z$  在这里是作为决定波面位置的参数出现的. 显然, 光束结构是光学系统的客观特性, 同一条光线的象差不会因光栏位置的不同而变化. 光栏坐标之所以在波差方程式中出现并不意味它决定波差, 它只是描写光线位置的参数罢了, 至于光栏位置移动不过表示方程式的参数变更或坐标变换而已. 由此可见, 我们只须找出两个光栏坐标间的关系就能解决问题了.

图 6.5 设  $B, y, z$  是原光栏坐标系, 现将光栏中心由  $B$  移到  $B^*$  处, 任一条射向  $A$  点的光线原来和光栏交于  $P(y, z)$  点, 它与新光栏交于  $P^*(y^*, z^*)$  点, 距离

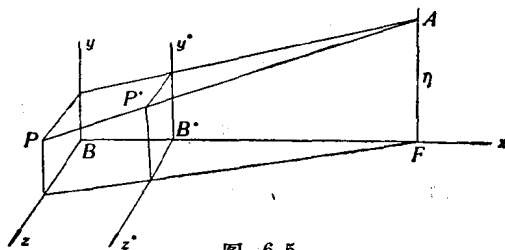


图 6.5

$$BF = l - l_p, \quad B^*F = l - l_p^*.$$

显然

$$\frac{H - Y^*}{H - Y} = \frac{z^*}{z} = \frac{l - l_p^*}{l - l_p} = \frac{x^*}{x}. \quad (30)$$

即

$$z = \frac{l - l_p}{l - l_p^*} z^*; \quad (31)$$

$$y = \frac{l - l_p}{l - l_p^*} y^* + \frac{l_p - l_p^*}{l - l_p^*} H. \quad (32)$$

此时由(11)式表示的  $y_0, \eta_0$  也将因移动而变更, 由于物体未动, 因此轴上光线不

用重算. 光栏移动后主光綫須随之重算. 我們假想重算时也仍按图 6.5 和公式 (31), (32) 的条件, 亦即保持物高不变, 即:

$$\eta_0^* = -(l-l_p^*)u_p^* = -(l-l_p)u_p = \eta_0 \quad (33)$$

亦即保持 Lagrange 不变量不变:

$$j_0^* = nu\eta_0^* = nu\eta_0 = j_0, \quad (34)$$

此时:

$$y_0^* = (l-l_p^*)u. \quad (35)$$

因此, 由 (31) — (35) 得出規化后的新坐标和旧坐标之間有下列关系:

$$\left. \begin{aligned} \eta^* &= \eta, \\ z^* &= z, \\ y^* &= y - A\eta. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

式中标志光栏移动的量  $A$  是:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(l_p - l_p^*)\eta_0}{(l - l_p^*)y_0} = \frac{[(l - l_p^*) - (l - l_p)]\eta_0}{(l - l_p^*)(l - l_p)u} \\ &= \frac{\eta_0}{(l - l_p)u} - \frac{\eta_0}{(l - l_p^*)u} = \frac{-u_p}{u} + \frac{u_p^*}{u} = \frac{\bar{\Delta}u_p}{u}. \end{aligned} \quad (37)$$

其中  $\bar{\Delta}$  表示光栏移动前后之差.

再由 (33) 式可得:

$$A = \frac{l(u_p^* - u_p)}{lu} = \frac{l_p^*u_p^* - l_pu_p}{lu} = \frac{\bar{\Delta}h_p}{h}. \quad (38)$$

再因为:

$$i_p = \frac{h_p}{r} - u_p, \quad i_p^* = \frac{h_p^*}{r} - u_p^*, \quad i = \frac{h}{r} - u,$$

故:

$$\frac{\bar{\Delta}i_p}{i} = \frac{\frac{1}{r}\bar{\Delta}h_p - \bar{\Delta}u_p}{\frac{1}{r}h - u} = A. \quad (39)$$

总括 (37) — (39) 式, 光栏移动量可以表示为:

$$A = \frac{(l_p - l_p^*)}{(l - l_p^*)} \frac{\eta_0}{y_0} = \frac{\bar{\Delta}h_p}{h} = \frac{\bar{\Delta}u_p}{u} = \frac{\bar{\Delta}i_p}{i}. \quad (40)$$

它显然是个轉面不变量, 且已在第三章 § 8.1 中引用过.

将 (36) 式代入 (8), 并归并同类項后即可看出用新坐标  $y^*$ ,  $z^*$ ,  $\eta^*$  表示的波象差方程式中新象差系数  $S_I^*$ ,  $S_{II}^*$ ,  $S_{III}^*$ ,  $S_{IV}^*$ ,  $S_V^*$  是原系数的函数:

$$\left. \begin{aligned} S_I^* &= S_I, \\ S_{II}^* &= S_{II} + AS_I, \\ S_{III}^* &= S_{III} + 2AS_{II} + A^2S_{III}, \\ S_{IV}^* &= S_{IV}, \\ S_V^* &= S_V + A(3S_{III} + S_{IV}) + 3A^2S_{II} + A^3S_I. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

这就是初級象差随光栏移动而变化的規律, 其中  $S_I, S_{IV}$  不变. 将 (36) 式代入 (9) 式就得到二級象差的公式:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} S_I^{I*} &= S_I^I, \\ S_{II}^{II*} &= S_{II}^{II} + AS_I^I, \end{aligned} \right. \\ & \left\{ \begin{aligned} S_I^{IV*} &= S_I^{IV}, \\ S_{II}^{IV*} &= S_{II}^{IV} + AS_I^{IV}, \\ S_{III}^{IV*} &= S_{III}^{IV} + 2AS_{II}^{IV} + A^2S_I^{IV}, \end{aligned} \right. \\ & \left\{ \begin{aligned} S_I^{III*} &= S_I^{III} + 4AS_{II}^{III} + 2A^2S_I^I, \\ S_{II}^{III*} &= S_{II}^{III} + 3AS_I^{III} + 6A^2S_{II}^{III} + 2A^3S_I^I, \\ S_{III}^{III*} &= S_{III}^{III} + A(4S_{II}^{III} + 2S_{II}^{IV}) + A^2(6S_I^{III} + S_I^{IV}) + 8A^3S_{II}^{III} + 2A^4S_I^I, \\ S_V^{V*} &= S_V^V + \frac{1}{2}A(5S_{III}^{III} + S_{III}^{IV}) + A^2(5S_{II}^{III} + 3S_{II}^{IV}) + A^3(5S_I^{III} + S_I^{IV}) \\ & \quad + 5A^4S_{II}^{III} + A^5S_I^I. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

由 (42) 可以看出, 由于我們在 (9) 式中运用了这种系数表示方法, 分离出了一組帶上角标号“IV”的系数, 它們随光栏移动的变化与初級象差相同, 亦即具有比較简单的性质, 在下一节中将看到这还有更多的作用.

### § 3.1 计算结果的图解法

从公式 (41), (42) 的推导过程我們就可想見它們的几何意义. 以畸变为例, 公式 (41), (42) 实际上和 (13), (14) 全同. 在 (13), (14) 的  $TA_y$  等式中令  $z=0$  即得  $TA_y$  和  $y$  的关系:

$$\left. \begin{aligned} \text{初級: } 2nuTA_y &= S_I y^3 + 3S_{IV} \eta y^2 + (3S_{III} + S_{IV}) \eta^2 y + S_V \eta^3. \\ \text{二級: } 2nuTA_y &= S_I^I y^5 + 5S_{II}^{II} \eta y^4 + (5S_I^{III} + S_I^{IV}) \eta^2 y^3 \\ & \quad + (5S_{II}^{III} + 3S_{II}^{IV}) \eta^3 y^2 + \frac{1}{2}(5S_{III}^{III} + S_{III}^{IV}) \eta^4 y + S_V^V \eta^5. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

当  $y=0$ , 就得  $2nuTA_y = S_V^V \eta^5$  或  $2nuTA_y = S_V \eta^3$  即主光綫的垂軸象差就是畸变. 当我們把  $y=y$  的光綫看作主光綫 (光栏移动), 則当  $y=y$  时的垂軸象差  $2nuTA_y$  (即此时的畸变) 为  $S_V^*$  或  $S_V^{V*}$ . 此时  $y$  的意义也就是主光綫在光栏上的入射高度变动量

(由  $h_p=0$  变到  $h_p=\bar{y}$ ) 的规范化值 (因  $h=y_0$ ), 亦即 (40) 式中的  $A$ .

故在 (43) 式中令  $\eta=1$ , 再把  $2niTA_y$  写作  $S_V^*$  或  $S_V^{V*}$ , 把  $y$  写作  $A$  就和 (41), (42) 中  $S_V^*$  和  $S_V^{V*}$  的公式完全一致了.

由此可见, 当我们将由子午光线计算结果得到的  $TA_y$  和  $y$  的关系 [关系 (43)] 图示于直角坐标系中, 如图 6.6, 那么我们无须得出象 (43) 式那样的解析表示 (各种象差多大), 就可以由图上直接看出光栏移动后的新畸变. 这件事情本是非常明显, 不须作任何演算就可由畸变的定义得到, 这也是在第四章 § 2.2 做过的.

但是把这一点再深入考察时, 可以得出更多的对计算结果的处理有用的概念.

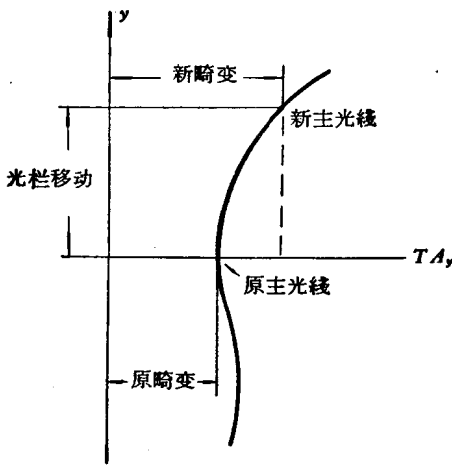


图 6.6

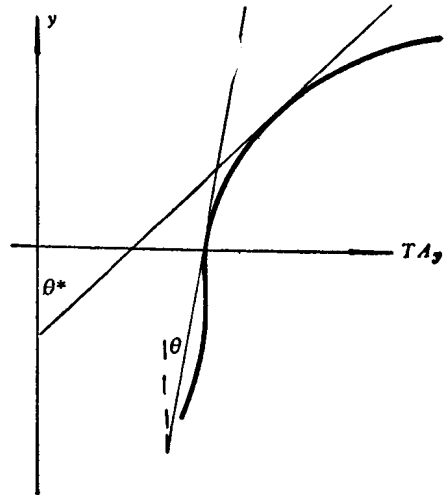


图 6.7

将 (43) 对  $y$  微分, 得到:

$$\left. \begin{aligned} \text{初级: } \frac{\partial 2niTA_y}{\partial y} &= 3S_I y^2 + 6S_{II} \eta y + (3S_{III} + S_{IV}) \eta^2, \\ \text{二级: } \frac{\partial 2niTA_y}{\partial y} &= 5S_I y^4 + 20S_{II} \eta y^3 + 3(5S_{III} + S_{IV}) \eta^2 y^2 \\ &\quad + 2(5S_{III} + 3S_{IV}) \eta^3 y + \frac{1}{2}(5S_{III} + S_{IV}) \eta^4. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

令式中  $y=0$  并与 (27) 式比较就得到下列结论: 图 6.6 中曲线和横轴交点处的斜率就是子午象面弯曲的函数:  $2ni^2x_s$ , 因之, 曲线上任一点的斜率就是以此点为主光线时的子午象面弯曲, 如图 6.7 中的  $\tan \theta$  就是  $x_s$ ,  $\theta$  愈大表示象面愈弯. 把公式 (44) 中  $\frac{\partial 2niTA_y}{\partial y}$  写作  $\frac{1}{2}(5S_{III}^* + S_{IV}^*)$  或  $(3S_{III}^* + S_{IV}^*)$  令  $\eta=1$ , 将  $y$  写作  $A$ , 就得到公式 (42), (41) 中的相应部分.

关于曲线的斜率就是子午象面弯曲的问题, 可有更准确的几何解释. 图 6.8 表示两条与光轴夹角各为  $U_1, U_2$  的光线, 它们与高斯象面交点的高度各为  $H_1, H_2$ , 二光线的交点离高斯象面距离为  $X_T$ , 由图易见:

$$X_T \tan U_1 - X_T \tan U_2 = H_2 - H_1;$$

即:

$$X_T = -\frac{H_2 - H_1}{\tan U_2 - \tan U_1}. \quad (45)$$

因此将子午光线计算结果图示时, 纵坐标不象图 6.6 那样取  $y$ , 而取  $\tan U'$ , 横坐标取  $-H'$  而不取  $TA_y$ , 如图 6.9, 那么这样的曲线上任意两点联线的斜率就是这两条光线交点离高斯象面的距离——广义的子午象面弯曲  $X_T$ , 此联线与横轴交点的坐标就是交点高度——广义象高  $H_T$  (图 6.8).

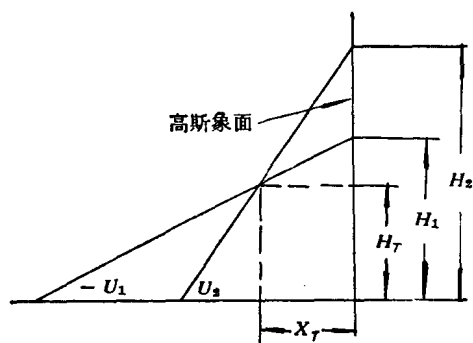


图 6.8

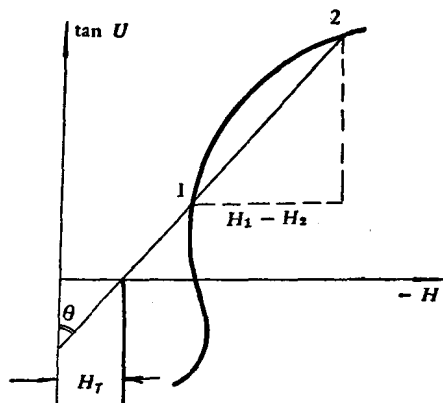


图 6.9

由 (45) 求极限可知: 曲线上切线的斜率就是子午象面弯曲, 与此光线邻近的子午细光束焦点离高斯象面距.

这就是说, 图 6.9 那样的切线斜率是具有准确的几何意义的, 但是它所取的坐标似乎和图 6.6 不同, 因此还不能用来解释公式 (44) 所显示的几何意义. 实际上, 图 6.6 的坐标是和图 6.9 几乎一样的, 这是由于:  $TA_y = H_0 - H$ , 其中  $H_0$  是高斯象高, 因之横坐标之差异仅是零点移动. 可以证明: 纵坐标除比例尺不同外, 也几乎只是零点移动, 如图 6.10, 光线具有坐标  $H, U$  者与光栏交于高  $Y$  处, 则可见:

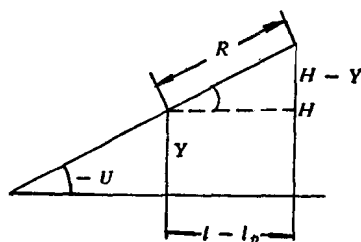


图 6.10

$$Y - H = (l - l_p) \tan U$$

即

$$\tan U = \frac{Y}{y_0} u - \frac{H}{l-l_p} = yu - \frac{H}{l-l_p} \quad (46)$$

将  $H$  看作常数, 则可见  $\tan U$  和  $y$  的差别在于乘以常数比例因子  $u$  以及坐标原点不同, 这就证明了 (45) 式的极限与 (44) 一致. 当然 (45) 式才是准确公式, 而 (44) 式是近似的, 其近似性是由 (12) 式带来的.

从上面的讨论可以看到, 光栏移动对于畸变和子午象面弯曲的影响以图 6.9 的形式 ( $H$ - $\tan U$  图) 来判断是最为明显清楚了, 实际上由  $H$ - $\tan U$  图判断子午彗差和球差也是方便的.

按 (45) 式, 当只有象面弯曲时, 图形是一倾斜的直线. 图形的偶次弯曲 (抛物线形) 是彗差的标志, 奇次弯曲是球差的标志如图 6.11 a, 曲线两端 (通过光栏边缘的两条子午光线)  $AC$  联线的中点  $\bar{B}$  表示此二光线的平均位置 (见图 6.11 b), 它和主光线  $B$  平行, 二者间距 (图 6.11 a 中的距离  $B\bar{B}$ ) 就是子午彗差.  $AC$  联线的斜率和  $B$  点切线的斜率之差就是轴外球差, 在图 6.11 a 中可以用此二直线的夹角  $\varphi$  标志.

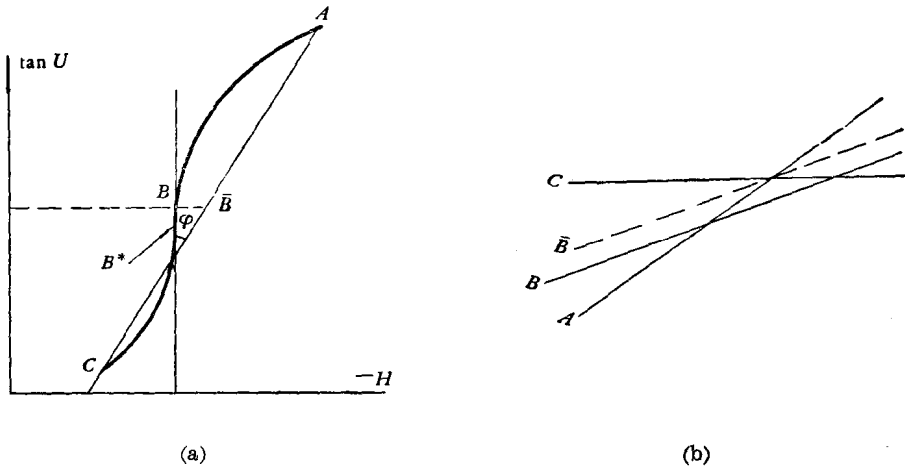


图 6.11

从这种观点来处理计算结果是较方便的, 例如图 6.11 a 的结果中将主光线移到位置  $B^*$  且将通光孔径稍微减小即可得到较好的结果.

这种图形判断的缺点是: 不能将两种轴外球差和两种轴外彗差分离出来以及不能同时看出弧矢光束的变化.

由上述可知, 为了能由图形上的曲线斜率准确判断光栏移动对象面弯曲的影响, 曲线的坐标应是  $\tan U'$ . 我们下面考虑另一种要求, 即为由图形积分以得到波象差

时所要求的坐标系。也就是说，希望找出一个光线坐标，它和图 6.10 或图 1.8 中的坐标  $Y$  相当。由图 6.10 可见：

$$-R \sin U = H - Y,$$

对上式微分即得：

$$d \sin U = \frac{1}{R} dY. \quad (47)$$

因此按 (I.72)，当坐标尺度是  $\sin U$  和  $TA$  时，其面积即为波象差。当  $\sin U$  和  $\tan U$  有显著差别时，为进行图形积分应在  $\tan U$  坐标上标出  $\sin U$  之值，例如当  $U$  的范围在  $60^\circ$  到  $70^\circ$ ，则  $\Delta \tan U = 1.0$  而  $\Delta \sin U$  则仅  $0.07$ ，此时按  $\tan U$  作图形积分所得波象差的错误数值将比实际大十倍还多。假若计算了由同一物点发出的几种波长的光束，各个波长的象差曲线的意义显然和上述没有区别，而各象差曲线间相对位移和其他的差别也就是倍率色差与象差色差别之总和。当坐标选择恰当时，二象差曲线之间所包围的面积就是光程差。将面积相对于孔径作图所得的曲线应近似与  $(d-D)$  法算出的波色差曲线重合。反过来，由  $(d-D)$  法算出波色差曲线与一单色象差曲线组合，可算出另一色的单色象差曲线。

#### §4 光栏象差与物面象差的关系

光学系统的特性既已归结为象差系数  $S_I - S_V$ ， $S_I^I - S_V^V$  的特性，而象差系数又已可表示为光栏移动的函数，故对某一定的光学系统来说，剩下的问题只是各个物体位置间象差的函数关系。下面将看到这种关系是存在的，为了能最容易地导出这种关系，首先考虑光栏象差。

在前面的公式中，我们总把  $y, z$  看作光瞳面上坐标， $\eta, \zeta$  看作物面上坐标，所考察的是从一定的点  $\eta, \zeta$  发出的波面变形情况。显然，我们完全可以反过来看，把  $\eta, \zeta$  看作光瞳坐标而  $y, z$  看作物面坐标，考察从一定的点  $y, z$  发出的波面变形情况，亦即光束不相交于  $y', z'$  点的情况。这种象差称为光栏象差。把以前所用的符号加下角标号“ $p$ ”，以之标志相应的光栏象差，即  $W_p$  表示光栏波象差， $S_{I_p}, S_{II_p}, S_{III_p}, S_{IV_p}, S_{V_p}$  表示光栏象差的初级象差系数等。

我们考虑物空间发出的任意一条光线，经光学系统后成为象空间的一条确定的光线。我们可以把这条光线看作是由物点  $\eta, \zeta$  发出而经过光栏上  $y, z$  点的，因此，象差可由  $W$  描述。再由于这同一条光线可看作是由  $y, z$  点发出并通过  $\eta, \zeta$  点的光线，故其象差可由  $W_p$  描述，由此可见这两种描述之间一定存在着某种一定的关系，

找出这种关系就是我们现在的目的。

为此首先将波面方程式 (8) 中的特殊表示 ( $\zeta=0$ ) 改为一般表示, 即将 (1) 代替 (5), 并采用符号:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= y^2 + z^2, \\ \beta &= \eta y + \zeta z, \\ \gamma &= \eta^2 + \zeta^2. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

则以初级象差为例由 (8) 式得:

$$\left. \begin{aligned} 2W_I &= \frac{1}{4} S_{I\alpha} \alpha^2 + S_{II} \alpha \beta + S_{III} \beta^2 + \frac{1}{2} (S_{III} + S_{IV}) \alpha \gamma + S_{V} \beta \gamma, \\ 2W_{Ip} &= \frac{1}{4} S_{I\beta} \gamma^2 + S_{II\beta} \gamma \beta + S_{III\beta} \beta^2 + \frac{1}{2} (S_{III\beta} + S_{IV\beta}) \gamma \alpha + S_{V\beta} \beta \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

它们所用的参量相同, 现在就来导出  $W$  和  $W_p$  间的一般关系。

图 6.12 中设  $Oyz$ ,  $O'y'z'$  各为入瞳和出瞳坐标系;  $C\eta\zeta$ ,  $C'\eta'\zeta'$  各为物面和象面坐标系. 物空间发出光线  $AB$  通过  $A(\eta, \zeta)$ ,  $B(y, z)$  点, 为光学系统折射后应交出瞳于  $B'(y', z')$  点, 交象面于  $A'(\eta', \zeta')$  点,  $A'$ ,  $B'$  是  $A$ ,  $B$  的高斯象;  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $y$ ,  $z$  是规范化后的值, 规范化前的实际大小是  $H$ ,  $I$ ,  $Y$ ,  $Z$ . 因为光学系统具有象差, 故实际光线一般不会通过这两点, 它与象面的交点  $A'_1$  离  $A'$  的距离就是物面象差  $TA'_y$ ,  $TA'_z$ , 而与出瞳交点  $B'_1$  离  $B'$  的距离即为光栏象差  $TA'_\eta$ ,  $TA'_\zeta$ .

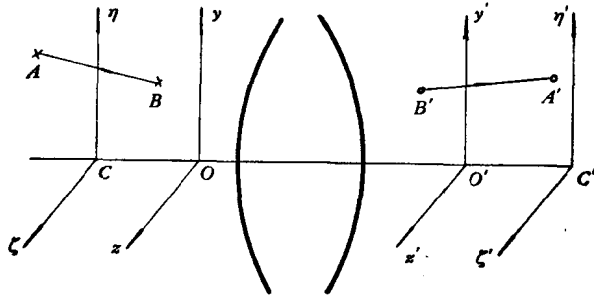


图 6.12

光线  $AB$  的波象差  $W$  是光程  $[ABA']$  和光程  $[AOA']$  之差;  $W_p$  是光程  $[BAB']$  和  $[BCB']$  之差, 即:

$$\left. \begin{aligned} W(\eta, \zeta; y, z) &= [AOA'] - [ABA'], \\ W_p(y, z; \eta, \zeta) &= [BCB'] - [BAB']. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

而对轴上点则同样有:

$$\left. \begin{aligned} W(0, 0; y, z) &= -[CBC'] + [COC'], \\ W_p(0, 0; \eta, \zeta) &= -[OAO'] - [OCO']. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$



由于象差,相应光线也可能不经过  $A', O', B', C'$  等点,由(50)式:

$$W(\eta, \zeta; y, z) - W_p(y, z; \eta, \zeta) = [AOA'] - [BCB'] + [BA] + [A'B'], \quad (52)$$

式中  $[AB], [A'B']$  已是物空间和象空间的一定长度,可以很简单地表示出来,但(52)式已是近似式,这是由于我们在  $[ABA'], [BAB']$  二光程相减时,略去了象空间中实际光路  $B_1A_1'$  与理想光路  $B'A'$  的区别,由 Fermat 原理,这种简略所引起的误差比之  $TA_y', TA_z', TA_\eta', TA_\zeta'$  是二极小量,下面将一贯使用这种近似方式以导出我们需要的关系式,这种公式在高级象差领域内的可靠性问题将在后面讨论。

(52)式中的光程  $[AOA']$  可以由(51)式中的  $W_p(0, 0; \eta, \zeta)$  表示,  $[BCB']$  可用  $W(0, 0; y, z)$  表示,此时引入的误差和(52)式相似。

$$\left. \begin{aligned} [AOA'] &= -[OA] - [A'O'] + [OCO'] - W_p(0, 0; \eta, \zeta), \\ [BCB'] &= -[CB] - [B'C] + [COC'] - W(0, 0; y, z). \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

再由于

$$[OCO'] - [COC'] = [OC] + [O'C'], \quad (54)$$

就可得到:

$$\begin{aligned} W(\eta, \zeta; y, z) - W_p(y, z; \eta, \zeta) - [W(0, 0; y, z) - W_p(0, 0; \eta, \zeta)] \\ = ([O'A'] + [B'C'] - [O'C'] - [B'A']) \\ - ([OA] + [BC] - [OC] - [BA]). \end{aligned} \quad (55)$$

(55)式右方都是物空间和象空间的已知长度,均可用  $y, z; \eta, \zeta$  表示出来:

$$\left. \begin{aligned} [OC] &= n(l - l_p), \\ [BC] &= n\sqrt{(l - l_p)^2 + y^2 + z^2}, \\ [OA] &= n\sqrt{(l - l_p)^2 + H^2 + I^2}, \\ [BA] &= n\sqrt{(l - l_p)^2 + (H - y)^2 + (I - z)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

对象空间也有相似表示。类似(48)式引用符号  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$  并令  $x = l - l_p$ , 用  $\Delta$  表示物空间与象空间对应量之差。则(55)式即可写成:

$$\begin{aligned} W - W_p - (W_0 - W_{p0}) &= \Delta n \{ \sqrt{x^2 + \bar{\alpha}} + \sqrt{x^2 + \bar{\gamma}} \\ &\quad - x - \sqrt{x^2 + \bar{\alpha} - 2\bar{\beta} + \bar{\gamma}} \}, \end{aligned} \quad (57)$$

将(57)式作牛顿二项式展开,其二次项是两 Lagrange 不变量之差:

$$\frac{n'\bar{\beta}'}{x'} - \frac{n\bar{\beta}}{x} = 0; \quad (58)$$

由其四次项可得初级象差系数关系:

$$\begin{aligned}
& (S_{II} - S_{Vp})\alpha\beta + (S_{III} - S_{IIIp})\beta^2 + \frac{1}{2}(S_{III} + S_{IV} - S_{IIIp} - S_{IVp})\alpha\gamma + (S_V - S_{IIp})\beta\gamma \\
&= \frac{1}{4}\Delta\frac{n}{x^3}\{(\bar{\alpha} - 2\bar{\beta} + \bar{\gamma})^2 - \bar{\alpha}^2 - \bar{\gamma}^2\} = \Delta\frac{n}{x^3}\left(\bar{\beta}^2 + \frac{1}{2}\bar{\alpha}\bar{\gamma} - \bar{\alpha}\bar{\beta} - \bar{\beta}\bar{\gamma}\right) \\
&= -\alpha\beta\Delta\frac{ny_0^3\eta_0}{x^3} + \beta^2\Delta\frac{ny_0^2\eta_0^2}{x^3} + \frac{1}{2}\alpha\gamma\Delta\frac{ny_0^2\eta_0^2}{x^3} - \beta\gamma\Delta\frac{ny_0\eta_0^3}{x^3}. \quad (59)
\end{aligned}$$

由(11)式:

$$\frac{y_0}{x} = u, \quad \frac{\eta_0}{x} = -u_p,$$

再运用 Lagrange 不变量

$$j_0 = \frac{ny_0\eta_0}{x} = \frac{n'y_0'\eta_0'}{x'}, \quad (\text{以下简称为 } j)$$

即可由(59)式得出各系数间关系:

$$\left. \begin{aligned}
S_{II} - S_{Vp} &= -j(u_k'^2 - u_1^2), \\
S_{III} - S_{IIIp} &= -j(u_k'u_{pk}' - u_1u_{p1}), \\
S_{IV} - S_{IVp} &= 0, \\
S_V - S_{IIp} &= -j(u_{pk}'^2 - u_{p1}^2).
\end{aligned} \right\} \quad (60)$$

由(57)式展开到六次方项可得二级象差关系:

$$\begin{aligned}
& (S_{II}^H - S_{Vp}^V)\alpha^2\beta + (S_I^{III} - S_{IIIp}^{III})\alpha\beta^2 + \frac{1}{4}(S_I^{III} + S_I^{IV} - S_{IIIp}^{III} - S_{IVp}^{IV})\alpha^2\gamma \\
&+ \frac{2}{3}(S_{II}^{III} - S_{IIp}^{III})\beta^3 + (S_{II}^{III} + S_{II}^{IV} - S_{IIp}^{III} - S_{IIp}^{IV})\alpha\beta\gamma + (S_{III}^{III} - S_{I_p}^{III})\beta^2\gamma \\
&+ \frac{1}{4}(S_{III}^{III} + S_{III}^{IV} - S_{I_p}^{III} - S_{I_p}^{IV})\alpha\gamma^2 + (S_V^V - S_{IIp}^H)\beta\gamma^2 \\
&= \frac{1}{8}\Delta\frac{n}{x^5}\{\bar{\alpha}^3 + \bar{\gamma}^3 - (\bar{\alpha} + \bar{\gamma} - 2\bar{\beta})^3\}. \quad (61)
\end{aligned}$$

用同样的步骤得到:

$$\left. \begin{aligned}
S_{II}^H - S_{Vp}^V &= \frac{3}{4}j\Delta u^4, \\
S_I^{III} - S_{IIIp}^{III} &= \frac{3}{2}j\Delta u^3 u_p, \\
S_I^{IV} - S_{IVp}^{IV} &= 0, \\
S_{II}^{III} - S_{IIp}^{III} &= \frac{3}{2}j\Delta u^2 u_p^2, \\
S_{II}^{IV} - S_{IIp}^{IV} &= 0, \\
S_{III}^{III} - S_{I_p}^{III} &= \frac{3}{2}j\Delta u u_p^3, \\
S_{III}^{IV} - S_{I_p}^{IV} &= 0, \\
S_V^V - S_{IIp}^H &= \frac{3}{4}j\Delta u_p^4.
\end{aligned} \right\} \quad (62)$$

公式(60), (62)就是所求的两种象差系数間关系. 从这些关系可以得出結論: 光栏象差中除光栏球差  $S_{I_p}, S_{I_p}^I \dots$  之外都不是独立的, 它們都可以用物面象差表示出来.

对光栏象差来說, 物体位置移动的作用也就只是个坐标变换問題, 其影响完全可以由和(41), (43)类似的公式表示出来——所有符号均加下角标号  $p$ , 其中符号  $A_p$  的意义是:

$$A_p = \frac{l-l^*}{l_p-l^*} \frac{y_0}{\eta_0} = \frac{\Delta h}{h_p} = \frac{\Delta u}{u_p} = \frac{\Delta i}{i_p}. \quad (63)$$

### § 5 物面移动时的象差变化

如前节所述, 光栏象差随物体移动而变的規律是易于得出的, 再由于光栏象差可表示为物面象差, 因之就可以得到除  $S_{I_p}, S_{I_p}^I; S_I, S_I^I$  外的所有象差与物面移动的关系. 由于关系式(60), (62)中还包含量  $u$ , 对新物体位置就变为  $u^*$ , 故尚須将  $u^*$  表示为原位置的量及移动量  $A_p$  的函数. 現在不用符号  $A_p$  而将它写作  $B$ , 即:

$$B = \frac{l-l^*}{l_p-l^*} \frac{y_0}{\eta_0} = \frac{\Delta h}{h_p} = \frac{\Delta u}{u_p} = \frac{\Delta i}{i_p}. \quad (64)$$

因此:

$$\left. \begin{aligned} u^* &= u + Bu_p, \\ u^{*2} &= u^2 + 2Buu_p + B^2u_p^2, \\ u^{*3} &= u^3 + 3Bw^2u_p + 3B^2uu_p^2 + B^3u_p^3, \\ u^{*4} &= u^4 + 4Bw^3u_p + 6B^2u^2u_p^2 + 4B^3uu_p^3 + B^4u_p^4. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

故:

$$\left. \begin{aligned} j \Delta u^* u_p &= j \Delta uu_p + B j \Delta u_p^2, \\ j \Delta u^{*2} &= j \Delta u^2 + 2B j \Delta uu_p + j B^2 \Delta u_p^2, \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

这就得出当  $j$  不变, 主光綫不变时象差系数由物体移动而引起的变化, 对初級象差有:

$$\left. \begin{aligned} S_{I_p}^* &= S_{I_p}, \\ S_V^* &= S_V + BS_{I_p}, \\ S_{IV}^* &= S_{IV}, \\ S_{III}^* &= S_{III} + B(2S_V + j \Delta u_p^2) + B^2 S_{I_p}, \\ S_{II}^* &= S_{II} + B(3S_{III} + S_{IV} + j \Delta uu_p) + B^2(3S_V + 2j \Delta u_p^2) + B^3 S_{I_p}. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

对二級象差有:

$$\left. \begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned}
 S_{I_p}^{I^*} &= S_{I_p}^I, \\
 S_V^{V^*} &= S_V^V + BS_{I_p}^I, \\
 S_{III}^{III^*} &= S_{III}^{III}, \\
 S_{II}^{II^*} &= S_{II}^{II} + BS_{III}^{III}, \\
 S_{I^*}^{IV^*} &= S_{I^*}^{IV} + 2BS_{II}^{II} + B^2S_{III}^{III},
 \end{aligned} \right. \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 S_{III}^{III^*} &= S_{III}^{III} + B \left( 4S_V^V - \frac{3}{2} j \Delta u_p^4 \right) + 2B^2S_{I_p}^I, \\
 S_{II}^{II^*} &= S_{II}^{II} + B \left( 3S_{III}^{III} - \frac{3}{2} j \Delta u_p^3 \right) + B^2 \left( 6S_V^V - 3j \Delta u_p^4 \right) + 2B^3S_{I_p}^I, \\
 S_{I^*}^{III^*} &= S_{I^*}^{III} + B \left( 4S_{II}^{II} + 2S_{I^*}^{IV} - \frac{3}{2} j \Delta u^2 u_p^2 \right) + B^2 \left( 6S_{III}^{III} + S_{III}^{III} - \frac{9}{2} j \Delta u u_p^3 \right) \\
 & \quad + B^3 \left( 8S_V^V - \frac{9}{2} j \Delta u_p^4 \right) + 2B^4S_{I_p}^I, \\
 S_{II}^{II^*} &= S_{II}^{II} + B \left( \frac{5}{2} S_{III}^{III} + \frac{1}{2} S_{I^*}^{IV} + \frac{7}{4} j \Delta u^3 u_p \right) + B^2 \left( 5S_{II}^{II} + 3S_{I^*}^{IV} - 3j \Delta u^2 u_p^2 \right) \\
 & \quad + B^3 \left( 5S_{III}^{III} + S_{III}^{III} - \frac{9}{2} j \Delta u u_p^3 \right) + B^4 \left( 5S_V^V - 3j \Delta u_p^4 \right) + B^5S_{I_p}^I.
 \end{aligned} \right. \quad (68)
 \end{aligned}$$

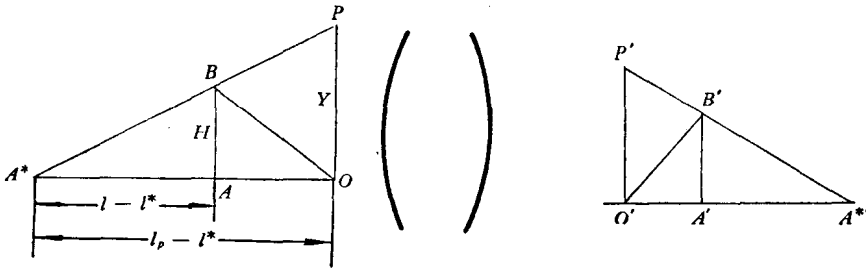


图 6.13

现在还余下的问题是各物面位置的球差是相关的还是独立的,用§4的观点来考察就可以回答这个问题. 现希望求出的只是新球差系数,所以只考虑于午面内的光线就够了. 图6.13中 $A^*$ 表示新物面上的轴上点,由此发出的光线 $A^*BP$ 交原物面于 $B(H, O)$ 点,交光瞳于 $P(Y, O)$ 点,则由与§4相似的考虑有:

$$\left. \begin{aligned}
 W^*(O, O; Y, O) &= [A^*AOO'A'A''] - [A^*BPP'B'A''], \\
 W(H, O; Y, O) &= [BOO'B'] - [BPP'B'], \\
 W_p(O, O; H, O) &= [OAA'O'] - [OBB'O'].
 \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

故

$$\begin{aligned}
 & W^*(O, O; Y, O) - W(H, O; Y, O) - W_p(O, O; H, O) \\
 & = [A^*AO] - [A^*BO] - [A^*A'O'] + [A^*B'O']. \quad (70)
 \end{aligned}$$

取准到四次方项的初级近似值即可得出新的初级球差系数与旧象差系数的关系。

(70)式右方的光程可由图 6.13 得:

$$\begin{aligned} & [A^*AO] - [A^*BO] - [A''A'O'] + [A'A'O'] \\ & = \Delta n \{ (l^* - l_p) - \sqrt{H^2 + (l^* - l)^2} - \sqrt{H^2 + (l - l_p)^2} \}. \end{aligned} \quad (71)$$

仍由图 6.13 有:

$$\frac{H}{Y} = \frac{l - l^*}{l_p - l^*}, \quad (72)$$

故此时:

$$\frac{\eta}{y} = \frac{l - l^*}{l_p - l^*} \frac{y_0}{r_0}, \quad (73)$$

再由 (64) 式:

$$\frac{\eta}{y} = B. \quad (73a)$$

因此 (70) 式中低于四次方的项可写作:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} S_I^* y^4 - \left\{ \frac{1}{4} S_{II} y^4 + S_{III} \eta y^3 + \left( \frac{3}{2} S_{III} + \frac{1}{2} S_{IV} \right) \eta^2 y^2 + S_V \eta^3 y + \frac{1}{4} S_{I_p} \eta^4 \right\} \\ & = \Delta n H^2 \left( \frac{-1}{l^* - l} + \frac{-1}{l - l_p} \right) + \frac{1}{4} \Delta n H^4 \left( \frac{1}{(l^* - l)^3} + \frac{1}{(l - l_p)^3} \right). \end{aligned} \quad (74)$$

由 (72) 式:

$$n H^2 \frac{l^* - l_p}{(l - l_p)(l^* - l)} = \frac{n H Y}{l - l_p}$$

故为不变量, 因此, 等式右方的二次方项等于零. 为将四次方项化简, 将  $l - l_p$  写作  $l - l^* + l^* - l_p$ , 则四次方项为:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \Delta n H^4 \frac{(l^* - l_p)^3 + 3(l^* - l_p)^2(l - l^*) + 3(l^* - l_p)(l - l^*)^2}{(l^* - l)^3(l - l_p)^3} \\ & = \frac{1}{4} \Delta \left\{ \frac{n H Y^3}{(l - l_p)^3} - 3 \frac{n H^2 Y^2}{(l - l_p)^3} + 3 \frac{n H^3 Y}{(l - l_p)^3} \right\} \\ & = \frac{1}{4} j \eta y^3 \Delta u^2 + \frac{3}{4} j \eta^2 y^2 \Delta(u u_p) + \frac{3}{4} j \eta^3 y \Delta u_p^2, \end{aligned} \quad (75)$$

故由 (74), (75), (73a) 即得出新初级球差与原象差关系:

$$\begin{aligned} S_I^* & = S_I + B(4S_{II} + j \Delta u^2) + B^2(6S_{III} + 2S_{IV} + 3j \Delta u u_p) \\ & \quad + B^3(4S_V + 3j \Delta u_p^2) + B^4 S_{I_p}. \end{aligned} \quad (76)$$

同样由 (70) 式的展开式取六次方项, 可以得出二级球差随物体位置移动而变的表示式:

$$\begin{aligned}
S_I^* = S_I + B \left( 6S_{II} - \frac{3}{4} j \Delta u^4 \right) + B^2 \left[ \frac{15}{2} S_{III} + \frac{3}{2} S_{IV} - \frac{15}{4} j \Delta (u^3 u_p) \right] \\
+ B^3 \left[ 10S_{III} + 6S_{IV} - \frac{15}{2} j \Delta (u^2 u_p^2) \right] \\
+ B^5 \left( 6S_V - \frac{15}{4} j \Delta u_p^4 \right) + B^6 S_{I_p}. \quad (77)
\end{aligned}$$

公式組(67), (68), (76), (77)就表明了物体位置和象差系数間的普遍函数关系,再和§3的关系联系起来,就可得到下列普遍結論:

对一給定的軸对称光学系統,任意物体位置和光栏位置的象差都可以用某一物面位置的象差和另一位置上的球差表示出来.

上面这些討論的意义在于将有关成象的各种因素所起的作用分离开来,将与光学系統結構有关的因素与其他因素(物体位置的三个坐标和光栏位置的三个坐标)分开来.因此,当我们已知某个光学系統对特定物体位置和光栏位置的象差后,它的全部特性也就知道了,以后(§7)将举一些运用这一方法的例子.

## §6 初級色差

在§1已提到有两种初級色差,对于光学系統的独立色差数目問題可以用类似单色象差的方法得到,例如我們把导出(57)式的过程中所有表示光程长的括号不看作长度与折射率的乘积,而看作长度与折射率差 $\delta n$ 的乘积,那么(57)式就成为对波色差的相互关系了,即

$$\begin{aligned}
W_c - W_c(0) - W_{c_p} + W_{c_p}(0) \\
= \Delta \delta n \{ \sqrt{x^2 + \alpha} - x + \sqrt{x^2 + \gamma} - \sqrt{x^2 + \alpha - 2\beta + \gamma} \}. \quad (78)
\end{aligned}$$

当只考虑初級色差时,取到二次項,即:

$$\begin{aligned}
W_c &= \frac{1}{2} C_I (y^2 + z^2) + C_{II} (y\eta + z\zeta), \\
W_{c_p} &= \frac{1}{2} C_{I_p} (\eta^2 + \zeta^2) + C_{II_p} (y\eta + z\zeta).
\end{aligned}$$

故得:

$$C_{II} - C_{II_p} = j \Delta \frac{\delta n}{n}. \quad (79)$$

这就是倍率色差和光栏倍率色差間关系.相似于(41)式的推导过程易于得光栏移动对色差的影响,显然:

$$\left. \begin{aligned}
C_I^* &= C_I, \\
C_{II}^* &= C_{II} + \Delta C_{I_p}.
\end{aligned} \right\} \quad (80)$$

物面移动的影响则为:

$$\left. \begin{aligned} C_{I_p}^* &= C_{I_p}, \\ C_{II_p}^* &= C_{II_p} + BC_{I_p}. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

故

$$C_{II}^* = C_{II} + BC_{I_p}. \quad (82)$$

类似于(70)式,物面移动对轴向色差的影响可以由(70), (71)中将  $n$  写作  $\delta n$  而得:

$$\begin{aligned} W_c^*(0, 0; y, 0) - W_c(\eta, 0; y, 0) - W_{c_p}(0, 0; \eta, 0) \\ = \Delta \delta n \{ (l^* - l_p) - \sqrt{(l^* - l)^2 + H^2} - \sqrt{(l - l_p)^2 + H^2} \}. \end{aligned} \quad (83)$$

在只取二次项时就得到:

$$C_I^* = C_I + B \left[ 2C_{II} - j \left( \frac{\delta n_k'}{n_k} - \frac{\delta n_1}{n_1} \right) \right] + B^2 C_{I_p}. \quad (84)$$

由此可知,光学系统的独立初級色差系数只有三个,当对某一定物体位置和光栏位置已知三个系数  $C_I$ ,  $C_{II}$ ,  $C_{II_p}$  后,其他位置的色差就都能由这三个系数表示出来.

对于二級色差,即初級单色象差的色差别之间的关系式,可由前面的已知关系得出来.

## § 7 球面的初級象差

球面的初級象差表示式已在前几章个别地导出过,当我们运用本章前几节的一般理论时,它们就可以作为一个整体同时导出来.

### § 7.1 由球差表示式导出其他象差表示式——将轴外象差看作球差

由(76)式,若  $S_I$  和  $S_I^*$  均已知,则由此得出所有其他象差. 由(III.14),  $S_I = l u n i (i' - u) (i - i')$ , 令光栏处在球心; 当  $j$  不变而移动物体时,由于光栏直径不变,故  $(l - r)u = (l^* - r)u^*$  即  $i = i^*$ , 因此得:

$$S_I^* - S_I = n i (i - i') \{ l^* u^* (i' - u^*) - l u (i' - u) \}.$$

按(65)式将  $u^*$  用  $B$  表示,且因

$$l^* u^* = l u + r (u^* - u),$$

即得:

$$S_I^* - S_I = \{ B u_p r (-u - u') - B^2 u_p^2 r \} n i (i - i'). \quad (85)$$

由于此时:

$$j = -n(l - r)u_p u = -n r i u_p,$$

故将(85)式和(76)式比较即得光栏在球心的象差系数:

$$\left. \begin{aligned} S_{II} &= 0, \\ 3S_{III} + S_{IV} &= j^2 \frac{n' - n}{nm'r}, \\ S_V &= 0, \\ S_{I\rho} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (86a)$$

由于光栏在球心,波面具有轴对称性,波象差(8)中不可能含有非轴对称项,故由(86a)式断定:

$$\left. \begin{aligned} S_{III} &= 0, \\ S_{IV} &= j^2 \frac{n' - n}{nm'r}. \end{aligned} \right\} \quad (86b)$$

这个结论,与  $S_{IV}$  不因物面和光栏移动而变的要求也很符合. 这种导出  $S_{IV}$  的方法不需要什么限制条件,但显然很不直观. 可以表明,当物体对球心所张的幅角很小时,  $S_{IV}$  有明显的几何意义,下面对此作一更为直观的推导. 因光栏在球心,此时轴外点除有球差和象面弯曲外无其他象差. 如图 6.14, 由于主光线就是辅助轴,所以轴外光束的波象差只有轴对称的项,即与  $y^2 + z^2$  有关的项,由(8)式:

$$2W_1 = \frac{1}{4} S_I (y^2 + z^2) + \frac{1}{2} S_{IV} \eta^2 (y^2 + z^2).$$

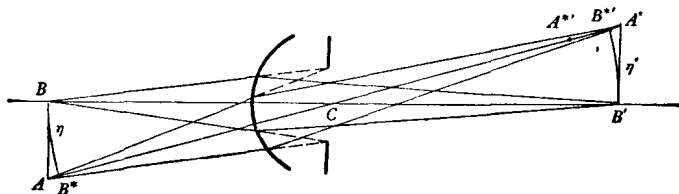


图 6.14

原来的系数( $S_{III} + S_{IV}$ )中由于象差中不应有  $\eta^2 y^2$  的项,故  $S_{III}$  等于零. 上式中第一项显然是此面产生的轴上点球差,第二项则为轴外点因折射而致的象面弯曲.

以球心  $C$  为中心通过  $B$  和  $B'$  点各作两个球面,如图 6.14, 由于  $B'$  是  $B$  的高斯象,故  $B''$  是  $B^*$  的高斯象. 点  $A'$  虽是  $A$  的高斯象点,却不是  $A$  的近辅轴光线的象点. 由于

$$\left. \begin{aligned} B^*A &= \frac{1}{2} \eta^2 \frac{1}{l-r}, \\ B^*A' &= \frac{1}{2} \eta'^2 \frac{1}{l'-r}. \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

因此当物点由  $B^*$  移到  $A$  点时,近辅轴光线象点将由  $B''$  移到  $A''$  ( $A''$  是  $A$  的“近辅



軸"象点)。由于轴向倍率  $\alpha$  是  $\frac{nu^2}{n'u'^2}$ , 故:

$$nu^2 B^* A = n'u'^2 B^{*'} A^{*'}$$

故近輔軸象  $A^{*'}$  到  $A'$  的距离是:

$$\begin{aligned} A^{*' } A' &= A^{*' } B^{*' } + B^{*' } A', \\ &= \frac{1}{2} \eta'^2 \frac{1}{l'-r} - \frac{1}{2} \eta^2 \frac{1}{l-r} \frac{nu^2}{n'u'^2}, \\ &= \frac{n^2 u^2 \eta^2}{2n'u'^2} \left[ \frac{1}{n'(l'-r)} - \frac{1}{n(l-r)} \right], \\ &= \frac{n^2 u^2 \eta^2}{2n'u'^2} \frac{u'-u}{rni} = \frac{n^2 u^2 \eta^2}{2n'u'^2} \cdot \frac{1}{nr} \cdot \frac{i-i'}{i}, \\ &= \frac{n^2 u^2 \eta^2}{2n'u'^2} \frac{n'-n}{nn'r}, \\ &= \frac{1}{2n'u'^2} j^2 \frac{n'-n}{nn'r}. \end{aligned} \quad (88)$$

因  $A$  点发出的波面經折射后在  $A^{*'}$  观察时, 与軸上点  $B$  发出的波面由  $B'$  点观察几乎一样, 即只有球差  $S_I$ . 但参考点由  $A^{*'}$  移到  $A'$  就多产生一項波差  $S_{IV}$ . 由 (88) 式可見,  $S_{IV}$  的表示式也就是 (86b). 由这个討論可以看出,  $S_{IV}$  的成因是軸外高斯象点和近輔軸象点間的差异.

运用光栏移动的公式組 (41), 就可以从特殊情况的象差 (86) 导出单球面在一般情况下的象差:

$$\left. \begin{aligned} S_I &= l u n i (i' - u) (i - i'), \\ S_{II} &= A S_I, \\ S_{III} &= A^2 S_I, \\ S_{IV} &= j^2 \frac{n' - n}{n n' r}, \\ S_V &= A S_{IV} + A^3 S_I. \end{aligned} \right\} \quad (89a)$$

按 (40), 由于原来  $i_p = 0$ , 故  $A$  的最简单表示是:

$$A = \frac{i_p}{i}. \quad (89b)$$

(89) 式所表示的系数, 我們在前几章都已經知道了. 上面的討論給出了象差之間的相互关联, 这种关联建立在一个重要的基础概念上, 即軸外象差可以看作是球差的衍生物, 是由于我們的光束中心綫 (主光綫) 不通过球心, 是由于描写光束的坐标原点不在球心而产生. 当然这种看法并不否认軸外象差的客观存在, 并不认为不必用五个参数来描写光束而只須用球差来描写就够了, 这是由于光学系統并不是单球面

或同心球面系統,对整个系統而言,一般找不到一条貫穿始終的“輔助軸”。輔助軸的經常变更就使最后得到的波面上找不到一条对称軸。但是这个基础概念显然是很有意义的,它使我們在考虑每个单个折面对光束所起的作用时,它的影响变成很容易把握住的东西而不再是五、六个互不相干的因子了。

$A = \frac{i_p}{i}$  可以称作光束的偏心率,它是主光綫离球心的距离与光束半徑之比[参考(40)式]。

将軸外象差看作球差的概念也有它的局限性:它要求物体对球心所張的幅角不太大(图 6.14),只有这样我們才能把  $S_I$  和  $S_{IV}$  看作是相互独立的两个产生象差的原因。当幅角很大时,由图 6.14 所作出的  $S_{IV}$  的解釋就完全失效。例如物体在球心时,按图 6.14 的作图法就得出:参考象面退化为一点,即曲率为无限大。同时,球差  $S_I = 0$ 。但軸外象差并不因此而等于零。是不是由此可推論說这个位置是高級象差很大的位置呢(例如假想幅角不变的点具有同样大的高級象差,幅角增大将使此点高級象差增大)?是不是物面处在球心时,象差的性质就純是高級的,不能由初級理論描述呢?由直观的把軸外象差看作球差的解釋似乎很容易导致肯定的答复,但是这种判断却是錯誤的

将軸外象差看作球差是 Conrady 首先提出的,在 Hopkins 的著作中也运用了这个概念,但他們都沒有能够証明这样导出的結果对球心附近和球心上的物体是仍可运用的。

令  $S_I \rightarrow 0$ ;  $A \rightarrow \infty$ , 可以由 (89a) 求出象差极限值是:

$$\left. \begin{aligned} S_I &= 0, \\ S_{II} &= 0, \\ S_{III} &= -S_{IV}, \\ S_{IV} &\equiv S_{IV}, \\ S_V &= j(u_p^2 - u'_p{}^2) \end{aligned} \right\} \quad (89c)$$

計算表明,只要滿足光束和光軸夹角不太大的条件,其准确度就絲毫不逊于其他位置的初級象差的准确度。

由象差的一般理論所导出的(86)式具有上述性质是明显的。由特殊情况导出的一般公式,其准确度由光栏移动和物体移动規律的准确度所保証,只要光束是足够靠近光軸的,或者說是“近軸的”,它們就是准确的。

按第三、第四章的象差推导法,显然也能得到同样的結論。

## §7.2 由畸变表示式导出其他象差表示式——将子午象差看作畸变差异

根据象差的一般理論,只要知道一种象差的准确的一般表示式,就可以导出所有其他象差的表示式,前面由球差出发不过是一个例子罢了,这里再提出另一个例子,由它所提供的概念对于分析判断也是有帮助的,由它也得出另一个公式組,在某些特殊情况下用起来更方便些。

由初級畸变表示式(IV.71)

$$S_V = \sum_1^k \left\{ \frac{h_p^3}{h^2} P + 3j \frac{h_p^2}{h^2} W + j^2 \frac{h_p}{h^2} (3\Phi + \Pi) + j^3 \frac{1}{h^2} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) \right\}, \quad (90)$$

当物点不动而主光綫換为另一条主光綫时,畸变  $S_V^*$  就是:

$$S_V^* = \sum_1^k \left\{ \frac{h_p^{*3}}{h^2} P + 3j \frac{h_p^{*2}}{h^2} W + j^2 \frac{h_p^*}{h^2} (3\Phi + \Pi) + j^3 \frac{1}{h^2} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) \right\}. \quad (91)$$

除  $h_p$  变为  $h_p^*$  外,其他量与主光綫变动毫无关系,故均不变. 将(91)式和(90)式相减,再由于(40):

$$h_p^* = hA + h_p, \quad (92)$$

其中  $A$  是不变量,可提到括号外,于是得:

$$\begin{aligned} S_V^* - S_V = A \sum_1^k \left\{ 3 \frac{h_p^2}{h} P + 6j \frac{h_p}{h} W + j^2 \frac{1}{h} (3\Phi + \Pi) \right\} \\ + A^2 \sum_1^k \{ 3h_p P + 3jW \} + A^3 \sum_1^k hP. \end{aligned} \quad (93)$$

与(41)式最后一式相比較,即得:

$$\left. \begin{aligned} S_I &= \sum_1^k hP, \\ S_{II} &= \sum_1^k \{ h_p P + jW \}, \\ 3S_{III} + S_{IV} &= 3 \sum_1^k \left\{ \frac{h_p^2}{h} P + 2j \frac{h_p}{h} W + j^2 \frac{1}{h} \Phi \right\} + \sum_1^k j^2 \frac{1}{h} \Pi. \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

这里不能将  $S_{IV}$  分出来,这些表示式也都是我們在前面所已經知道的。

在这里,我們把各种子午象差看作是各条光綫的畸变差异,这种概念实际上在 §3 中討論計算結果的表示和判断处理时已运用过了。

## §7.3 薄透鏡的初級象差

由(90), (94)式,当一組折射面上  $h, h_p$  不变,亦即  $d=0$ , 且  $n'_k = n_1 = 1$  时可得:

$$\left. \begin{aligned} S_I &= hP, \\ S_{II} &= h_p P + jW, \\ S_{III} &= \frac{h_p^2}{h} P + 2j \frac{h_p}{h} W + j^2 \frac{1}{h} \Phi, \\ S_{IV} &= j^2 \frac{1}{h} \Pi, \\ S_V &= \frac{h_p^3}{h^2} P + 3j \frac{h_p^2}{h^2} W + j^2 \frac{h_p}{h^2} (3\Phi + \Pi). \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

式中的  $P, W, \Phi, \Pi$  是对各折射面取和, 即

$$\left. \begin{aligned} P &= \sum ni(i' - u)(i - i'), \\ W &= \sum (i' - u)(i - i'), \\ \Phi &= \sum (i' - u) \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right) = \sum \left( \frac{u'}{n'} - \frac{u}{n} \right) = h \sum \varphi, \\ \Pi &= \sum (i + u) \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right) = \sum h \frac{1}{r} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right) = h \sum \frac{1}{n} \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

同时对色差有:

$$\left. \begin{aligned} C_I &= h^2 \sum \frac{\varphi}{\nu}, \\ C_{II} &= hh_p \sum \frac{\varphi}{\nu}. \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

注意 (96) 式后两式中最后一个和号及 (97) 式的和号是以一块块的薄透镜作为单元的。

用符号  $\mu$  表示  $\frac{1}{n}$  以  $\varphi$  为权的平均值, 用  $\bar{\nu}$  表示各单透镜  $\frac{1}{\nu}$  以  $\varphi$  为权的平均值, 则公式 (95), (97) 可写作:

$$\left. \begin{aligned} S_I &= hP, \\ S_{II} &= h_p P + jW, \\ S_{III} &= \frac{h_p^2}{h} P + 2j \frac{h_p}{h} W + j \sum \varphi, \\ S_{IV} &= j^2 \mu \sum \varphi, \\ S_V &= \frac{h_p^3}{h} P + 3j \frac{h_p^2}{h^2} W + (3 + \mu) j^2 \frac{h_p}{h} \sum \varphi; \\ C_I &= h^2 \bar{\nu} \sum \varphi, \\ C_{II} &= hh_p \bar{\nu} \sum \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

这就是薄透镜组的象差特性, 由此可见, 量  $P, W, \mu, \bar{\nu}$  完全决定了薄透镜本身的特征, 其中  $\mu$  和  $\bar{\nu}$  的性质是很简单的。

当光栏处在这组透镜上时  $h_p = 0$ , (98) 式成为:

$$\left. \begin{aligned} S_{\text{I}} &= hP, \\ S_{\text{II}} &= jW, \\ S_{\text{III}} &= j^2\varphi, \\ S_{\text{IV}} &= j^2\mu \Sigma \varphi, \\ S_{\text{V}} &= 0; \\ C_{\text{I}} &= h^2\bar{\nu} \Sigma \varphi, \\ C_{\text{II}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (98a)$$

前三組公式里的  $\Sigma \varphi$  是各薄透鏡的光焦度之和, 为简单起見, 以后就用  $\varphi$  表示.

因  $h_p = 0$ , 此时光栏球差也等于零, 即

$$S_{\text{Ip}} = 0. \quad (98b)$$

故(98)实可看作是运用(41)式于(98a)的结果, 即光栏移动对象差(98a)发生的影响.

当物体处在透鏡上时,  $h=0$ , 方程式(95)中出现  $\frac{1}{h}$ , 故不合用, 此时宜由(89)式来考虑, 易見此时  $S_{\text{I}} = S_{\text{II}} = S_{\text{III}} = 0$ ,  $S_{\text{IV}} \neq 0$ ,  $S_{\text{V}}$  中因有  $S_{\text{IV}}$  衍生的項也不等于零.

由(67), (76), (81), (84)可知, 对某一定物面薄透鏡組的象差已知后, 其他物面的象差也就定了. 仍設光栏在透鏡上, 将(98a)代入上列諸公式就可得出这种公式, 它表明  $P, W$  等如何随物体位置而变化, 至于其他的項显然是不变的. 由(67):

$$jW^* = jW + B[(3 + \mu)j^2\varphi + ju_p \Delta u],$$

即:

$$W^* = W + B[j(3 + \mu)\varphi + hu_p\varphi] = W + Bj(2 + \mu)\varphi \quad (99)$$

由(76):

$$hP^* = hP + B(4jW + j\Delta u^2) + B^2j^2[(6 + 2\mu)\varphi - 3\varphi],$$

即:

$$P^* = P + \frac{Bj}{h}(4W + \Delta u^2) + \frac{B^2j^2}{h}(3 + 2\mu)\varphi, \quad (100)$$

其中  $B$  的意义按(64)是  $\frac{\Delta h}{h_p}$ , 即图 6.15 中的  $KG/MG$ , 即:

$$B = \frac{(l^* - l)u^*}{\eta_0},$$

故:

$$\begin{aligned} Bj &= nuu^*(l^* - l) \\ &= nh(u - u^*) = h(u_1 - u_1^*). \quad (101) \end{aligned}$$

因此当原物处在无限远处时,  $u_1 = 0$ , 此时的  $P, W$  以  $P^\infty, W^\infty$  表示, 则由(99),

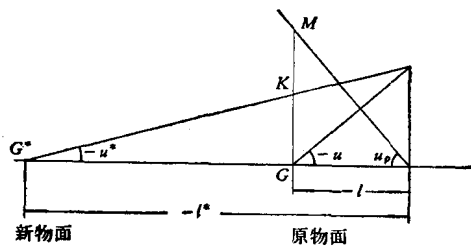


图 6.15

(100)式有:

$$\left. \begin{aligned} W^* &= W^\infty - u_1^*(2 + \mu)h\varphi, \\ P^* &= P^\infty - u_1^*(4W^\infty + h^2\varphi^2) + u_1^{*2}(3 + 2\mu)h\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

取规范化条件—— $h\varphi=1$  (取规范化条件后的  $P, W, u_1$  用相应的黑体字表示), 并除去不必要的 \* 号, 则 (102) 成为:

$$\left. \begin{aligned} W &= W^\infty - u_1(2 + \mu), \\ P &= P^\infty - u_1(4W^\infty + 1) + u_1^2(3 + 2\mu). \end{aligned} \right\} \quad (102a)$$

(102) 式中  $u_1^*$  是新物体位置参数,  $l_1^*u_1^*=h$ , 当  $h\varphi=1$  时,  $u_1 = \frac{h}{l_1} = \frac{1}{l_1\varphi}$ .

规范化的  $P, W$  和未规范化的  $P, W$  有下列关系:

$$\left. \begin{aligned} W &= W h^2 \varphi^2, \\ P &= P h^3 \varphi^3. \end{aligned} \right\} \quad (102b)$$

由此, 只须研究薄透镜组的规范化象差  $P^\infty, W^\infty$ , 就可了解它的全部  $P, W$  的性质了.

薄透镜的另外两个变量  $\mu$  和  $\bar{\nu}$  由各单透镜的  $n$  和  $\nu$  决定. 设透镜是单透镜, 则  $\nu$  在光学玻璃所可能的范围内变化, 约自 18—70,  $\bar{\nu}$  为 0.055—0.014; 当由二透镜组成时, 设  $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$ , 则

$$\bar{\nu} = \frac{\frac{\varphi_1}{\nu_1} + \frac{\varphi_2}{\nu_2}}{\varphi_1 + \varphi_2} = \frac{\varphi_1}{\nu_1} + \frac{\varphi_2}{\nu_2}.$$

现将一些可能的组合列于下表:

$\bar{\nu}$ \begin{matrix} \varphi_1/\varphi_2 \\ \frac{1}{\nu_1}/\frac{1}{\nu_2} \end{matrix}	1.5/-0.5	2/-1	2.5/-1.5	3/-2
0.015/0.045	0	-0.015	-0.030	-0.045
0.018/0.031	0.011	0.005	-0.001	-0.008
0.045/0.015	0.06	0.075	0.90	0.105
0.031/0.018	0.037	0.044	0.050	0.057

其中组合 0.015/0.045 接近于极限可能情况; 组合 0.018/0.031 是不难实现的, 它接近可能作出的等折射率胶合的极限. 由此可见, 易于得到  $\nu < -100$  或  $\nu > 18$  的结果, 要想  $\nu < -22$  或  $\nu > 10$  也是可能的.

$S_{IV}$  由  $\mu$  决定, 对单透镜的  $\mu = \frac{1}{n}$  如下表:

$n$	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
$\mu$	0.71	0.67	0.62	0.59	0.55	0.52	0.50

由(V.20)决定,故:

$$\mu = \frac{\frac{\nu_1}{n_1} - \frac{\nu_2}{n_2}}{\nu_1 - \nu_2}. \quad (103)$$

对现有玻璃作  $\nu_D/n - \nu_D$  图,如图 6.16,图中采用国产玻璃牌号.两种玻璃的联线的斜率即为此组合的  $\mu$  值,可见此时  $\mu$  约为常数,数值约 0.73.在不消色差的双透镜中,若  $|\varphi_{1,2}| < 3$ ,  $1.48 < n_{1,2} < 1.8$ ,则其组合得到的  $\mu$  值在 0.3 到 0.9 之间.可见贴合薄透镜组校正  $S_{IV}$  是困难的.

## § 7.4 将球面的二級本征象差看作球差

有了公式組 (42), (68), (77) 之后, 我們只須知道光栏处在某一定位置时的象差系数即可得到光栏处在任意位置时的象差系数. 对于球面, 我們先令光栏处在球心, 同时入射球面的光束又无象差, 則各高級象差系数易于求出, 然后利用上述公式就得到球面在任意状况下产生的所有高級象差系数. 但是有个条件: 入射光束是无象差的, 这种条件下的象差我們称之为本征的.

由于光栏在球心, 可能誤认为波差  $W$  只是  $(y^2+z^2)$  和  $\eta^2$  的函数, 实际上并非如此,

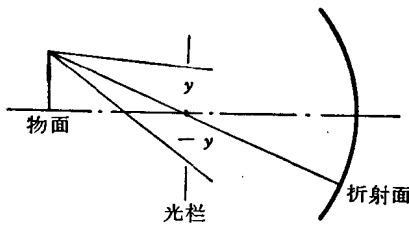


图 6.17

例如对于光栏坐标  $+y$ ,  $-y$  的两条子午光綫, 如图 6.17, 象差显然毫不相同, 因之虽然光栏在球心, 波象差  $W$  也并非  $(y^2+z^2)$  的函数, 虽然取了这样特殊的光栏位置也不能得出非常简单的系数表示式.

为求出这些系数, 我們采取下述方案: 首先求出不随光栏移动而变的两个球差系数  $S_I$  和  $S_{II}$ , 而后由 (68) 和 (77) 式展开求出所有其他系数. 为展开方便起见, 我們仍然令光栏处在球心, 球差系数  $S_I^{IV}$  显然是軸外点与軸上点的初級球差差别, 由初級象差理論可求出这个差别. 在物体移动对象差影响的关系式中我們只考虑到二級象差, 因此移动量  $B$  是小量, 略去  $B^2$  以上的項后, 即得:

$$S_I^* = S_I + B[4S_{II} + j(u'^2 - u^2)].$$

今因光栏在球心  $S_{II} = 0$ , 而

$$B = \frac{\Delta u}{u_p} = \frac{-u \Delta l}{(l-l_p)u_p} = \frac{u \Delta l}{\eta} = -\frac{u}{\eta} \cdot \frac{\eta^2}{2(l-r)} = -\frac{\eta u}{2(l-r)} = \frac{-j}{2n(l-r)}, \quad (104)$$

$$S_I^{IV} = S_I^* - S_I = -\frac{j^2}{2n(l-r)}(u'^2 - u^2) = -S_{IV}u \left\{ \frac{1}{2}(i-i') + u \right\}. \quad (105)$$

这个公式也可以在  $j$  不变 ( $i$  不变) 时从初級球差表示式微分而得.

至于高級球差  $S_I^I$  則可由  $\Delta L \sin U \sin i$  的展开式求得其近似值

$$S_I^I = \frac{1}{8} S_I \{ (i'+u)^2 + (i+i')^2 + (i-u)^2 \}.$$

下面由物面移动的关系式寻出其它系数. 由于 (105),  $S_I^{IV}$  是已知的, 于是 (68) 式中  $S_I^{IV*}$  和  $S_I^{IV}$  都可以知道, 从而求出  $S_{II,0}^{IV}$  和  $S_{III,0}^{IV}$  (下角标号 "0" 表示光栏在球心时的系数). 由于光栏在球心, 故:



$$(l-r)u = (l^* - r)u^*, \quad \text{即} \quad i = i^*,$$

故

$$S_{I^*}^{IV} - S_I^{IV} = S_{IV} \left\{ \frac{1}{2} (i - i') (u^* - u) + u^{*2} - u^2 \right\}.$$

将  $u^*$  按(65)式变换为  $B$ , 得:

$$\begin{aligned} S_{I^*}^{IV} - S_I^{IV} &= -S_{IV} \left\{ \frac{1}{2} (i - i') B u_p + B^2 u_p^2 + 2u u_p \right\} \\ &= -S_{IV} \left\{ \frac{1}{2} (i - i' + 4u) u_p B + u_p^2 B^2 \right\}, \end{aligned} \quad (106)$$

其中

$$u_p = \frac{i}{-n(l-r)u} = -\frac{j}{hr i}. \quad (107)$$

故与(68)式比較即得:

$$\left. \begin{aligned} S_{II,0}^{IV} &= \frac{j S_{IV}}{nr i} \left( \frac{1}{4} (i - i') + u \right), \\ S_{III,0}^{IV} &= -\frac{j^2 S_{IV}}{n^2 r^2 i^2}. \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

再由(42)求得光栏处在任意位置时的系数:

$$S_{II}^{IV} = S_{II,0}^{IV} + \frac{i_p}{i} S_I^{IV} = -S_{IV} \left\{ \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{n}{n'} \right) (i_p u + i u_p) u u_p \right\}, \quad (109)$$

$$S_{III}^{IV} = S_{III,0}^{IV} + 2 \frac{i_p}{i} S_{II,0}^{IV} + \left( \frac{i_p}{i} \right) S_I^{IV} = -S_{IV} u_p \left\{ u_p + \frac{i_p - i'_p}{2} \right\}. \quad (110)$$

这就是全部带上角标号“IV”的三个象差系数。对于其他系数,可利用(77)式仍令光栏在球心,即  $i$  不变,于是因

$$\begin{aligned} S_I^I &= \frac{1}{8} l n i (i' - u) (i - i') \{ (i' + u)^2 + (i + i')^2 + (i - u)^2 \} \\ &= \frac{1}{4} n i (i + i') \{ (i^2 + i'^2 + i i') i' - (i^2 + 2i i') u + i u^2 - u^3 \} l u, \end{aligned} \quad (111)$$

并因

$$l^* u^* = l u + r (u^* - u) = l u + r u_p B,$$

且将  $u^*$  变换为  $B$ , 则

$$\begin{aligned} 4 \frac{1}{n i (i - i')} (S_{I^*}^I - S_I^I) &= B^4 (-r u_p^4) + B^3 u_p^3 (r i - 3r u - l u) \\ &\quad + B^2 u_p^2 \{ r (-3u^2 + 2i u - i - 2i i') + l u (-3u + i) \} \\ &\quad + B u_p \{ r [-u^3 + i u^2 - (i + 2i') i u + (i^2 + i'^2 + i i') i] \\ &\quad + l u (-3u^2 + 2i u - i^2 - 2i i') \}, \end{aligned} \quad (112a)$$

由于

$$S_{IV} = j^2 \frac{i-i'}{nir} = -j(i-i')u_p = ni(i-i')ru_p^2,$$

故上式即

$$\begin{aligned} S_I^* - S_I^I &= B^4 \left( -\frac{1}{4} S_{IV} u_p^2 \right) + B^3 \left( \frac{1}{4} S_{IV} u_p \right) (i - 3u - i - u) \\ &+ B^2 \left( \frac{1}{4} S_{IV} \right) \{ (2iu - 3u^2 - i^2 - 2ii') + (i+u)(i-3u) \} \\ &+ B \left( \frac{S_{IV}}{4u_p} \right) \{ iu^2 - u^3 - (i+2i')iu + (i^2 + i'^2 + ii')i' \\ &+ (i+u)(2iu - 3u^2 - i^2 - 2i'i) \} = B^4 \left( \frac{-1}{4} S_{IV} u_p^2 \right) \\ &+ B^3 (-S_{IV} u_p u) + B^2 \left( \frac{-S_{IV}}{2} \right) (3u^2 + ii') \\ &+ B \left( \frac{S_{IV}}{4u_p} \right) (-4u^3 - 4ii'u + i'^3 + i^2i - i'i^2 - i^3). \end{aligned} \quad (112b)$$

与(77)式比较系数即得:

$$\left. \begin{aligned} S_{I\rho,0} &= 0, \\ S_V^V &= 0, \\ S_{III,0}^III &= \frac{35}{30} j^2 \frac{S_{IV}}{n^2 r^2 i^2}, \\ S_{II,0}^III &= -\frac{j S_{IV}}{n r i} \left\{ \frac{9}{10} (i-i') + 2u \right\}, \\ S_{I,0}^III &= S_{IV} \left\{ 3u^2 + \frac{16}{5} u(i-i') + (i-i')^2 - \frac{2}{15} ii' \right\} \\ &= S_{IV} \left( u'^2 + \frac{6}{5} u'u + \frac{4}{5} u^2 - \frac{2}{15} ii' \right), \\ S_{II,0}^II &= \frac{-1}{4} j(i-i') \{ 2u'^3 + 6u'^2 u - 4i^2 u' - 4i(u-u')u \}. \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

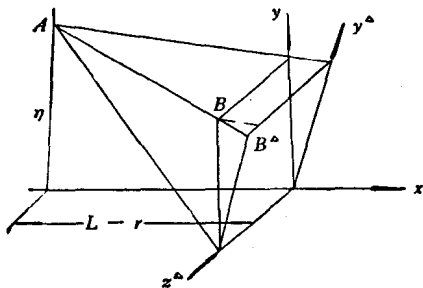


图 6.18

一般情况下的系数可由(42)求得.

方程(113)所表示的是光栏处在球心时的象差系数, 假若我们初始取的光栏坐标如图6.18的 $y^d, z^d$ , 即轴外点的主光线(通过球心)与坐标平面 $y^d z^d$ 垂直, 在这样的坐标系内本征波差 $W$ 只是 $(y^{d2} + z^{d2})$ 的函数, 因此, 除 $S_I, S_{IV}, S_I^I, S_I^{IV}$ 及 $S_{III}^{IV}$ 外均等于零. 由此可

見, 方程式(113)中的复杂表示式本质上是  $S_I$  和  $S_{IV}$  由坐标变换而衍生出来的项, 而并非折射面的重要本质. 但即使如此, 也不能简单地略去它们使之等于零. 所以不能这样做的原因是在球心附近的坐标差异特大, 这种忽略将引起重大误差. 只有保留这些项时才能在球心附近得出不趋于无限大的表示式, 并且也只有如此的表示才合乎物体移动和光栏移动的規則. 但是当物体远离球心时, 在高级象差计算中可略去它们. 这样, 象差表示式就大为简化, 在这种情况下轴外高级象差纯由两个原因引起: 按方程组(42), 所有象差均为  $S_I^I$  和  $S_{IV}^I$  与  $\frac{i_p}{i}$  之乘积, 即与初级象差类似, 可将轴外象差看作是球差. 对二级本征象差来说, 都由轴外本征球差  $S_{IV}^I$  和高级球差  $S_I^I$  所引起, 而球面的  $\frac{i_p}{i}$  此时即为(42)式中的光瞳位移量  $A$ , 它决定了象差的具体产生情况. 由(42)式

$$\left. \begin{aligned} S_{II}^{III} &= AS_I^I, \\ S_{IV}^{III} &= AS_{IV}^I, \\ S_{III}^{III} &= A^2 S_{IV}^I + S_{III,0}^{III}, \\ S_I^{III} &= 2A^2 S_I^I, \\ S_{II}^{III} &= 2A^3 S_I^I, \\ S_{III}^{III} &= 2A^4 S_I^I + A^2 S_{IV}^I, \\ S_V^{III} &= A^5 S_I^I + A^3 S_{IV}^I + \frac{1}{2} S_{III,0}^{III}. \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

由此可见带上角标号“III”的轴外象差基本上由高级球差  $S_I^I$  所引起, 高级球差对带上角标号“IV”的象差无影响. 在大孔径系统中, 高级球差比轴外球差大得多, 带上角标号“III”的象差是主要的(它们严重影响子午光束). 对大视场小孔径系统而言,  $S_{IV}^I \gg S_I^I$ , 此时带上角标号“IV”的象差成为主要的.  $A$  大而  $S_I^I$  小的折射面上产生的高级象散以  $S_{III}^{III}$  为主, 轴外球差  $S_I^{III}$  则不大; 反之, 则  $S_I^{III}$  为主而  $S_{III}^{III}$  不大. 运用这类概念即可控制高级象差的产生.

## § 8 衍生二級象差

当入射于光学系统某一折射面的光束并非由理想物点发出的同心光束, 而是已有象差的光束, 则显然将因光线入射位置变化而使此折射面产生的象差变更, 由光束原有初级象差引起的折射面初级象差变化就是衍生二级象差.

根据初级象差理论, 入射光束的结构由六个常数  $S_I^I, S_{II}^I, S_{III}^I, S_{IV}^I, S_V^I, S_{VI}^I$  完全决定, 符号“←”标志“此面之前”的象差, 它们使入射光线坐标  $y, z, \eta, \zeta$  变为  $y - TA_\eta/y_0, z - TA_z/y_0, \eta - TA_\eta/\eta_0, \zeta - TA_z/\eta_0$  或写作  $y + \Delta y, z + \Delta z, \eta + \Delta \eta,$

$\zeta + \Delta\zeta$ . 我們仍設  $\zeta = 0$ , 則由初級象差理論:

$$\left. \begin{aligned} 2nu_0TA_y &= S_I^-(y^2+z^2)y + S_{II}^-(3\eta y^2 + 2\zeta zy + \eta z^2) + 2S_{III}^-(\eta^2 y + \eta\zeta z) \\ &\quad + (S_{III}^- + S_{IV}^-)(\eta^2 y + \zeta^2 y) + S_V^-(\eta^2 + \zeta^2)\eta, \\ 2nu_0TA_z &= S_I^-(y^2+z^2)z + S_{II}^-(3\zeta z^2 + 2\eta yz + \zeta y^2) + 2S_{III}^-(\zeta^2 z + \zeta\eta y) \\ &\quad + (S_{III}^- + S_{IV}^-)(\zeta^2 z + \eta^2 z) + S_V^-(\eta^2 + \zeta^2)\zeta. \end{aligned} \right\}$$

对光栏象差  $TA_y, TA_z$  也有类似公式. 除  $S_I$  外, 光栏象差系数均可用物面象差表示出来. 故

$$\left. \begin{aligned} 2j\Delta y &= S_{I_p}^-\eta^3 + 3(S_V^- + j\tilde{\Delta}u_{p0}^2)\eta^2 y + 2(S_{III}^- + j\tilde{\Delta}u_0 u_{p0}) (\eta y^2) \\ &\quad + (j\tilde{\Delta}u_0 u_{p0} + S_{III}^- + S_{IV}^-) (\eta y^2 + \eta z^2) + (S_{II}^- + j\tilde{\Delta}u_0^2) y (y^2 + z^2), \\ 2j\Delta z &= (S_V^- + j\tilde{\Delta}u_{p0}^2)\eta^2 z + 2(S_{III}^- + j\tilde{\Delta}u_0 u_{p0}) \eta y z + (S_{II}^- + j\tilde{\Delta}u_0^2) z (y^2 + z^2), \\ -2j\Delta\eta &= S_I^-(y^2+z^2)y + S_{II}^-(3\eta y^2 + \eta z^2) + (3S_{III}^- + S_V^-)\eta^2 y + S_V^-\eta^3, \\ -2j\Delta\zeta &= S_I^-(y^2+z^2)z + 2S_{III}^-\eta y z + (S_{III}^- + S_{IV}^-)\eta^2 z. \end{aligned} \right\} (115)$$

(115) 式中已考虑到  $nu_0\eta_0 = j = -nu_{p0}y_0$  而在等式左方除去了  $u_0, u_{p0}$  等系数. 将 (8) 式求微分即可求出这些  $\Delta y, \Delta z, \Delta\eta, \Delta\zeta$  在此折射面上所衍生的  $\Delta W$ :

$$\begin{aligned} 2\Delta W &= S_I (y^2+z^2) (y\Delta y + z\Delta z) + S_{II} \{ (y^2+z^2) (y\Delta\eta + z\Delta\zeta + \eta\Delta y) \\ &\quad + 2\eta y (y\Delta y + z\Delta z) \} + 2S_{III} (\eta y) (\eta\Delta y + y\Delta\eta + z\Delta\zeta) \\ &\quad + (S_{III} + S_{IV}) \{ \eta^2 (y\Delta y + z\Delta z) + (y^2+z^2)\eta\Delta\eta \} \\ &\quad + S_V \eta^2 (\eta\Delta y + 3y\Delta\eta + z\Delta\zeta). \end{aligned} \quad (116)$$

将 (115) 式代入 (116), 再与 (9) 式比較系数, 即求得所有二級衍生象差之值.

$$\left. \begin{aligned} j\Delta S_I^I &= 3\{S_I (S_{II}^- + j\tilde{\Delta}u^2) - S_{II} S_I^-\}, \\ j\Delta S_{II}^{II} &= \frac{1}{2}\{S_I (3S_{III}^- + S_{IV}^- + 3j\tilde{\Delta}uu_p) + 3S_{II} j\tilde{\Delta}u^2 - (3S_{III}^- + S_{IV}^-) S_I^-\}, \\ j\Delta S_{III}^{III} &= S_I (S_V^- + j\tilde{\Delta}u_p^2) + S_{II} (3S_{III}^- + S_{IV}^- + 4j\tilde{\Delta}uu_p) \\ &\quad - (3S_{III}^- + S_{IV}^-) S_{II}^- + S_{III} j\tilde{\Delta}u^2 - S_V S_I^-, \\ j\Delta S_{III}^{III} + j\Delta S_{IV}^{IV} &= 2\{S_I (S_V^- + j\tilde{\Delta}u_p^2) + S_{II} j\tilde{\Delta}uu_p + (S_{III}^- + S_{IV}^-) j\tilde{\Delta}u^2 - S_V S_I^-\}, \\ j\Delta S_{II}^{III} &= 3\{S_{II} (S_V^- + j\tilde{\Delta}u_p^2) + S_{III} j\tilde{\Delta}uu_p - S_V S_{II}^-\}, \\ j(\Delta S_{III}^{III} + \Delta S_{IV}^{IV}) &= S_I S_{I_p}^- + S_{II} (4S_V^- + 5\tilde{\Delta}u_p^2) + (5S_{III}^- + 3S_{IV}^-) j\tilde{\Delta}uu_p \\ &\quad + S_V (-4S_{II}^- + j\tilde{\Delta}u^2), \\ j\Delta S_{III}^{III} &= S_{II} S_{I_p}^- + S_{III} (3S_V^- + 4\tilde{\Delta}u_p^2) + S_{IV} (S_V^- + \tilde{\Delta}u_p^2) \\ &\quad + S_V (-3S_{III}^- - S_{IV}^- + \tilde{\Delta}uu_p), \\ j(\Delta S_{III}^{III} + \Delta S_{IV}^{IV}) &= 2\{S_{II} S_{I_p}^- + (S_{III}^- + S_{IV}^-) j\tilde{\Delta}u_p^2 + S_V j\tilde{\Delta}uu_p\}, \\ j\Delta S_V^V &= \frac{1}{2}\{(3S_{III}^- + S_{IV}^-) S_{I_p}^- + 3S_V j\tilde{\Delta}u^2\}. \end{aligned} \right\} (117)$$

式中象差系数带“←”号者为此面之前的象差而不带“←”号者即此面产生的象差。由(117)式可見,入射光束的任一初級象差都将衍生出相应的高级象差。另一方面,高級衍生象差一般受多个入射光束象差影响。虽然如此,每个表示式的每一项都有它本身的意义,例如入射光束具有畸变  $S\zeta$ , 則由于光束射向高于(或低于)理想象高的点,从而使光束产生的畸变、象散和場曲,彗差均变大(或小)。

将初級色差引起的坐标变化:

$$\left. \begin{aligned} -2j\Delta\eta &= \bar{C}_{I\eta}y + \bar{C}_{II}\eta, \\ -2j\Delta\zeta &= \bar{C}_{I\zeta}z, \\ 2j\Delta y &= \bar{C}_{I\eta}\eta + \left(\bar{C}_{II} - j\bar{\Delta}\frac{\delta n}{n}\right)y, \\ 2j\Delta z &= \left(\bar{C}_{II} - j\bar{\Delta}\frac{\delta n}{n}\right)z. \end{aligned} \right\} \quad (118)$$

代入(116)式就可以求出前組色差所衍生的象差色差系数,例如色球差  $CS_I$  的变化量是

$$j\Delta CS_I = S_I \left( \bar{C}_{II} - j\bar{\Delta}\frac{\delta n}{n} \right) - S_{II}\bar{C}_I. \quad (119)$$

## § 9 用 Fermat 原理討論高級象差的可能性

在上一章討論高級色差以及在本章中討論高級象差間关系时,我們使用了 Fermat 原理。但是,它原則上本来不能用来討論高級象差的,这是由于按 Fermat 原理規定,光路变化时光程变化为二級以上的小量,而高級象差也正是二級小量,故仅当所略去的小量高于二級时,用 Fermat 原理所得的結果才能看作合理的,否則應該对它修正。§ 8 所作的运算就是这种修正的一个例子。显然我們运用这种方法可以得出准到二級的所有准确表示式。更进一步又可以依据已知的二級象差修正出准到三級的表示,如此可逐次接近到任意的准确度。我們前面沒有作这种修正的原因是为了避免由此而使表示式大大复杂化。

实际上,直接采用 Fermat 原理而不加修正时,所得的結果还是可能有高度准确性的,其原因在于光路位置变化形成的光程变化是随象差校正情况而定的,在象差接近完全校正的条件下,例如,当我们运用 § 4 理論于象差接近完全校正的系統来考察二級象差間的关系时,其誤差就是小于二級的。

用  $d-D$  法討論高級色差的情况也是如此,这个似乎原則上不宜用来考察高次小量的方法,在实际上一般总是給出很准确的结果,原因也在此。从这种看法也可想

見在特殊的条件下,  $d-D$  法会有較大的誤差, 例如色差符号相反的两組系統相距很远, 組合起来以消色差时就会如此.

### 参 考 文 献

- [1] Glasser, W., Grundlagen der Elektronen-Optik, Springer, Wien (1952).
- [2] Herzberger, M., Modern Geometrical Optics, Interscience, New York (1958), Part IV, pp 193—214.

# 第七章

## 由象差确定光学系统结构

### §1 引言;初級象差公式組

光学設計的基本目的是使光学系統的结构滿足某种已定的象差要求。为了同时达到校正几个象差的目的,用逐次接近法一般不易得出結果,而用初級象差理論可以解决这个問題。当然只考虑初級象差是不够的,因此除了这个方法以外还应有一些挑选解案的标准和評断方向的方法作为补充,才能真由这种方法得到好的結果,亦即先由初級理論确定結構参数(半徑、折射率、厚度等)然后給出挑选解案的准則。光学系統中可能遇到的零件,除反射鏡外就是透鏡,透鏡則又可分为厚透鏡和薄透鏡两类。下面对这两个方面分别加以討論。

为方便起見,先列出有关的公式組。

#### §1.1 象差系数和象差的关系

計算两条通过光学系統的近軸光綫,其一由物面軸上点发出,另一由物面軸外点发出通过光栏中心,如图 7.1。

一般光綫的位置由物面坐标  $H, I$  和光瞳坐标  $Y, Z$  确定,如图 7.2。波象差  $W$  是由以高斯象点为中心所作的通过出瞳中心的球面——参考球面和通过光瞳中心的

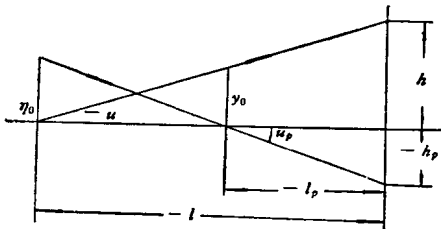


图 7.1

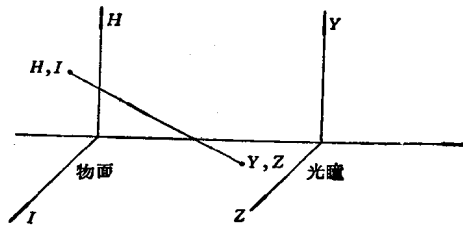


图 7.2

实际波面间距,也就是主光线光程和其他光线光程之差.

$$2W(\eta, 0, y, z) = \frac{1}{4} S_I (y^2 + z^2)^2 + S_{II} \eta y (y^2 + z^2) + S_{III} \eta^2 y^2 \\ + \frac{1}{2} (S_{III} + S_{IV}) \eta^2 (y^2 + z^2) + S_V \eta^3 y,$$

式中  $y, z, \eta$  是实际坐标(图 7.2)  $Y, Z, H$  被  $y_0$  和  $\eta_0$  (图 7.1) 相除所得的商. 也就是光线坐标的规范化值.

按(1.64), 光线与高斯象面交于坐标  $TA_y, TA_z$  的位置, 由  $W$  的微分得到:

$$\begin{cases} 2nuTA_y = S_I y (y^2 + z^2) + S_{II} \eta (3y^2 + z^2) + (3S_{III} + S_{IV}) \eta^2 y + S_V \eta^3, \\ 2nuTA_z = S_I z (y^2 + z^2) + S_{II} \eta (2yz) + (S_{III} + S_{IV}) \eta^2 z. \end{cases}$$

坐标  $TA_y$  和  $TA_z$  恰与坐标  $H, I$  反向, 其原点在 Gauss 象点上.

### § 1.2 轴对称光学系统中象差系数间的相互关系

(a) 物面象差系数和光阑象差系数(带下角标号  $p$ ) 有下列关系 [(VI.60), (VI.79)]:

$$\begin{cases} S_{II} - S_{Vp} = -j(u_k'^2 - u_1^2), \\ S_{III} - S_{IIIp} = -j(u_k' u_{pk}' - u_1 u_{p1}), \\ S_{IV} - S_{IVp} = 0, \\ S_V - S_{IIp} = -j(u_{pk}'^2 - u_{p1}^2), \\ C_{II} - C_{IIp} = j \left( \frac{\delta n_k'}{n_k} - \frac{\delta n_1}{n_1} \right), \end{cases}$$

其中  $j$  为 Lagrange 不变量(对图 7.1 中的光线而言, 即为  $j_0$ ).

$$j = n_1 u_1 \eta_1 = n_k' u_k' \eta_k' = -n_1 u_{p1} y_1 = -n_k' u_{pk}' y_k'.$$

(b) 不同光阑位置同一物面的象差系数间有下列关系 [(VI.41), (VI.80)]:

$$\begin{cases} S_I^* = S_I, \\ S_{II}^* = S_{II} + AS_I, \\ S_{III}^* = S_{III} + 2AS_{II} + A^2 S_I, \\ S_{IV}^* = S_{IV}, \\ S_V^* = S_V + A(3S_{III} + S_{IV}) + 3A^2 S_{II} + A^3 S_I; \\ C_I^* = C_I, \\ C_{II}^* = C_{II} + AC_I. \end{cases}$$

式中  $A$  为标志光阑移动量的转面不变量:

$$A = \frac{\Delta h_p}{h} = \frac{\Delta u_p}{u},$$



对于单个球面,  $\Delta$  还等于

$$\frac{\Delta i_p}{i}$$

(c) 同一光栏位置不同物面的象差系数間有下列关系 [(VI. 67), (VI. 76), (VI. 81), (VI. 84)]:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{I_p}^* = S_{I_p}, \\ S_V^* = S_V + BS_{I_p}, \\ S_{IV}^* = S_{IV}, \\ S_{III}^* = S_{III} + B[2S_V + j(u_{pk}'^2 - u_{p1}^2)] + B^2 S_{I_p}, \\ S_{II}^* = S_{II} + B[3S_{III} + S_{IV} + j(u_{pk}'u_k' - u_{p1}u_1)] \\ \quad + B^2[3S_V + 2j(u_{pk}'^2 - u_{p1}^2)] + B^3 S_{I_p}, \\ S_I^* = S_I + B[4S_{II} + j(u_k'^2 - u_1^2)] \\ \quad + B^2[6S_{III} + 2S_{IV} + 3j(u_k'u_{kp}' - u_1u_{p1})] \\ \quad + B^3[4S_V + 3j(u_{pk}'^2 - u_{p1}^2)] + B^4 S_{I_p}; \\ \\ C_{I_p}^* = C_{I_p}, \\ C_{II}^* = C_{II} + BC_{I_p}, \\ C_I^* = C_I + B \left[ 2C_{II} - j \left( \frac{\delta n_k'}{n_k} - \frac{\delta n_1}{n_1} \right) \right] + B^2 C_{I_p}. \end{array} \right.$$

式中  $B$  是标志物体移动量的轉面不变量:

$$B = \frac{\Delta h}{h_p} = \frac{\Delta u}{u_p},$$

对单个球面  $B$  还等于

$$\frac{\Delta i}{i_p}.$$

### § 1.3 同軸球面光学系統中的象差系数表示式

(a) 用主光綫入射角  $i_p$  表示主光綫 [(VI. 89a)].

$$\left\{ \begin{array}{l} S_I = \sum_1^k l u n i (i' - u) (i - i') = \sum \mathcal{S}_1, \\ S_{II} = \sum_1^k \mathcal{S}_1 (i_p/i), \\ S_{III} = \sum_1^k \mathcal{S}_1 (i_p/i)^2, \\ S_{IV} = \sum_1^k j^2 \frac{n' - n}{n n' r} = \sum_1^k \mathcal{S}_4, \\ S_V = \sum_1^k [\mathcal{S}_1 (i_p/i)^2 + \mathcal{S}_4] (i_p/i). \end{array} \right.$$

(b) 用主光线入射高度  $h_p$  表示主光线 [(VI. 95), (VI. 96)].

$$\left\{ \begin{aligned} S_I &= \sum_1^k hP, \\ S_{II} &= \sum_1^k (h_p P + jW), \\ S_{III} &= \sum_1^k \left( \frac{h_p^2}{h} P + 2j \frac{h_p}{h} W + j^2 \frac{1}{h} \Phi \right), \\ S_{IV} &= \sum_1^k j^2 \frac{1}{h} \Pi, \\ S_V &= \sum_1^k \left( \frac{h_p^3}{h^2} P + 3j \frac{h_p^2}{h^2} W + j^2 \frac{h_p}{h^2} (3\Phi + \Pi) + j^3 \frac{n'^2 - n^2}{n^2 n'^2 h^2} \right), \end{aligned} \right.$$

其中

$$\left\{ \begin{aligned} P &= ni(i' - u)(i - i'), \\ W &= (i' - u)(i - i'), \\ \Phi &= (i' - u) \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right) = \left( \frac{u'}{n'} - \frac{u}{n} \right), \\ \Pi &= (i + u) \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right) = \frac{h}{r} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right). \end{aligned} \right.$$

#### § 1.4 一组贴合薄透镜的象差系数表示式和相互关系

(a) 光栏在透镜上时的象差系数 [(VI. 98a), (VI. 98b)].

$$\left\{ \begin{aligned} S_I &= hP, \\ S_{II} &= jW, \\ S_{III} &= j^2 \varphi, \\ S_{IV} &= j^2 \mu \varphi, \\ S_V &= 0, \\ S_{I_p} &= 0; \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} C_I &= h^2 \bar{\nu} \varphi, \\ C_{II} &= 0, \end{aligned} \right.$$

其中  $\mu$  为折射率倒数  $\frac{1}{n}$  以  $\varphi_i$  为权的平均值,  $\bar{\nu}$  是亚培数倒数  $\frac{1}{\nu}$  以  $\varphi_i$  为权的平均值.  $P, W, \varphi, \mu$  及  $\bar{\nu}$  定义如下:

$$\left\{ \begin{aligned} P &= \sum_1^k P, \\ W &= \sum_1^k W, \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = \sum_1^k \varphi_i, \\ \mu = \frac{\sum_1^k \frac{1}{n} \varphi_i}{\sum_1^k \varphi_i}, \\ \bar{\nu} = \frac{\sum_1^k \frac{1}{\nu} \varphi_i}{\sum_1^k \varphi_i}. \end{array} \right.$$

(b) 物距有限时的  $P$ ,  $W$  和物距无限时的  $P^\infty$ ,  $W^\infty$  的关系 [(VI. 102)]:

$$\left\{ \begin{array}{l} P = P^\infty - u_1(4W^\infty + h^2\varphi^2) + u_1^2(3+2\mu)h\varphi, \\ W = W^\infty - u_1(2+\mu)h\varphi, \end{array} \right.$$

其中

$$u_1 = \frac{h_1}{l_1}.$$

(c) 規化条件:

取規化条件:  $h\varphi=1$ , 此时的  $P$ ,  $W$  写成黑体字, 則有 [(VI. 102a)]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P} = \mathbf{P}^\infty - u_1(4\mathbf{W}^\infty + 1) + u_1^2(3+2\mu), \\ \mathbf{W} = \mathbf{W}^\infty - u_1(2+\mu). \end{array} \right.$$

按規化条件写出的  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{W}$  和一般情况的  $P$ ,  $W$  有下列关系 [(VI. 102b)]:

$$\left\{ \begin{array}{l} P = (h\varphi)^3 \mathbf{P}, \\ W = (h\varphi)^2 \mathbf{W}. \end{array} \right.$$

因之:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_I = h^4 \varphi^3 \mathbf{P}, \\ S_{II} = h^3 h_p \varphi^3 \mathbf{P} + j h^2 \varphi^2 \mathbf{W}, \\ S_{III} = h^2 h_p^2 \varphi^3 \mathbf{P} + 2j h h_p \varphi^2 \mathbf{W} + j^2 \varphi, \\ S_{IV} = j^2 \mu \varphi, \\ S_V = h h_p^3 \varphi^3 \mathbf{P} + 3j h_p^2 \varphi^2 \mathbf{W} + j^2 \frac{h_p}{h} (3 + \mu) \varphi. \end{array} \right.$$

在負透鏡中,  $r$ ,  $l$  均反符号时  $i$ ,  $u$  与对应的正透鏡恰等值异号, 因此对負透鏡而言, 只須將上式中的  $\varphi$  取負值, 而  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{W}$  則仍是对应正透鏡的 (即  $r$ ,  $l$  均异号时算出的).

当光綫由正向計算变为反向計算时, 若物象位置及入射点高度均不变則有 (箭头表示光綫进行方向):

$$\begin{cases} \vec{u} = -\vec{u}', \\ \vec{i} = -\vec{i}', \\ \vec{i}' - \vec{u} = -\vec{i} + \vec{u}' = -(\vec{i}' - \vec{u}), \\ \vec{i} - \vec{i}' = -\vec{i}' + \vec{i} = \vec{i} - \vec{i}'. \end{cases}$$

故由  $P, W$  的定义得:

$$\begin{cases} \vec{P} = \vec{P}, \\ \vec{W} = -\vec{W}. \end{cases}$$

## § 2 由象差要求决定薄透镜焦距分配

为校正初级象差首先可将象差分类,分类的标准是它们和结构的关联.如果某个象差与某一因素有很强的关联或完全由这个因素决定,另一象差虽也与此因素有关,但其他因素也对它有作用,那么我们就确定用此因素以校正前一象差.同属这个特性的象差就归为一类.若属同一特性的象差有几个,而结构中控制这类象差的因素不足,那就应设法增加这种因素.概括地说,分类就是要在同一中找差别,在差别中找同一.在不同的现象中找出相似之处才可以用一类方法和结构解决不同问题;在相似的效应中找出区别才可能同时满足几个要求而不致满足了这一要求就一定不能满足另一要求.在遇到问题时多作各种分析比较以找出共同点和分歧点,解决问题的线索有时也就会同时出现了.

在第五章中校正色差的问题就是一个例子,它说明某些象差由薄透镜的焦距分配所完全决定;所谓焦距分配是指各透镜的焦距及其相对位置而言,只要焦距分配保持不变那么色差的校正也就有了保证.然后我们再可以“弯曲”透镜(即在焦距不变的条件下变更半径)来校正其他象差.

在第五章中引入的两个象差  $C_I$  和  $C_{II}$  都具这种特点,它们都完全由焦距分配所决定,在其他单色象差中仅  $S_{IV}$  具有这种性质.因此,常可用确定焦距分配的方法来把这几个象差校正并同时满足焦距要求.

另外,当主光线在薄透镜上的入射高度  $h_p$  不大以至可将  $h_p^2, h_p^3$  项略去时,  $S_V$  也由焦距分配所确定,此时

$$S_V = j^2 \frac{h_p}{h} (3 + \mu) \varphi.$$

显然这只是近似的,其误差由  $P, W$  的大小决定.

现将由焦距分配决定的要求列如下:

$$\left. \begin{aligned}
 \sum h\varphi &= \bar{\varphi}, & (a) \\
 \sum \frac{h^2\varphi}{\nu} &= C_I, & (b) \\
 \sum \frac{hh_p\varphi}{\nu} &= C_{II}, & (c) \\
 j^2 \sum \mu\varphi &= S_{IV}, & (d) \\
 j^2 \sum \frac{h_p}{h} (3 + \mu)\varphi &= S_V. & (e)
 \end{aligned} \right\} (1)$$

方程组一般将是高次非线性的，解的形式也很复杂。如第五章 § 3.1 中的两个例子所表明的那样，为在普遍的条件下求出产生定量  $C_{II}$  的解就已是很繁的事。这还仅仅是将 (1a) 和 (1c) 二式联立所得的最简单情况，当五个要求同时出现时显然要更繁得多。因为这样，常须再采取一些近似或使解简化的假设才能把解的函数形式写出来。随问题性质不同，近似假设也随之而异，这就是具体应用初级象差理论时的主要问题之一。此外也可用逐次接近法求数字解。

解方程式总是在预先确定的要求下进行的，例如是两片透镜还是三片；其排列是“+ - +”还是“- - +”；透镜相贴合还是相分离；校正全部象差还是只校正其中一部分等等。这些要求有的是由使用要求引伸出来的（例如若是为一般观察用的小视场系统，则  $S_V, S_{IV}$  均可不加考虑），有的是由经验知道只有这种排列才能够把其他象差校正，等等。

在透镜与透镜之间留有较长间距是为校正  $S_{IV}$  之故。如单为满足方程组 (1) 中  $S_{IV}$  以外的其他象差时，可令  $h_p = 0$  则  $C_{II}$  及  $S_V = 0$ ，而  $C_I$  及  $\bar{\varphi}$  则可利用双胶合组校正和满足，但此时不能校正  $S_{IV}$ 。为此先把 (1a) 和 (1d) 联立求解。

按第六章 § 7.3，贴合薄透镜组的  $\mu$  近乎常数（约 0.7 左右），故当该组的组合焦距确定后它的  $S_{IV}$  也就确定了。唯有  $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$ ，而  $h_1\varphi_1 + h_2\varphi_2 \neq 0$  的状况才能使

$S_{IV}$  得到校正而又有一定焦距。这就是说，校正  $S_{IV}$  的必要充分条件是正负透镜上具有不同的入射高度。如  $\varphi_1$  正而  $h_1$  大， $\varphi_2$  负而  $h_2$  小，则组合的  $\bar{\varphi}$  为正而  $S_{IV}$  可为零或小于  $\mu\bar{\varphi}$ 。所以，校正  $S_{IV}$  的原则是使正负光焦度分离。各组元的光

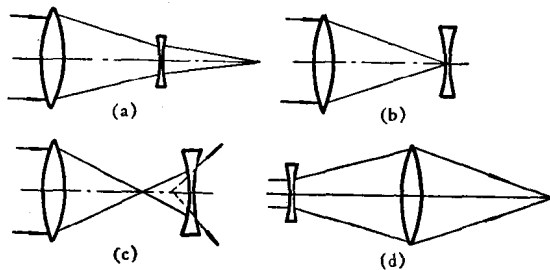


图 7.3

焦度愈大（半径愈小）而间隔愈大则  $S_{IV}$  愈小。间隔等于正透镜焦距时（如图 7.3b），

負透鏡的  $\varphi$  对总光焦度无影响, 而純影响  $S_{IV}$ , 这种負透鏡就可用来方便地校正  $S_{IV}$ . 当間隔长过焦距时(如图 7.3c),  $h_2$  为負, 負透鏡反产生正光焦度. 若結構不变而將負透鏡放在前面即成为长工作距离的物鏡, 如图 7.3d. 上面这些就是校正  $S_{IV}$  并同时产生正光焦度的全部可能性.

### § 3 象差和薄透鏡弯曲 ( $P, W$ )

当焦距分配确定后, 为了校正其他象差就应弯曲透鏡, 下面以一个  $\gamma$  倍伽利略望远镜設計为例.

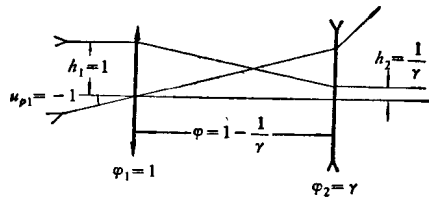


图 7.4

图 7.4, 設  $f'_1=1$ , 近軸光綫初始值是  $h_1=1$ ,  $u_{p1}=-1$ , 并設光栏在第一透鏡上, 則由 § 1.4(c), 因  $j=1$ ,  $h_1\varphi_1=-h_2\varphi_2=1$ , 故得:

$$\left. \begin{aligned} \gamma S_I &= \gamma P_1 - \bar{P}_2, \\ \gamma S_{II} &= -(\gamma-1)\bar{P}_2 + \gamma(W_1 - \bar{W}_2), \\ \frac{\gamma}{\gamma-1} S_{III} &= -(\gamma-1)\bar{P}_2 - \gamma(1+2\bar{W}_2), \\ \frac{\gamma}{(\gamma-1)^2} S_V &= -(\gamma-1)\bar{P}_2 - \gamma\left(\frac{3.7\gamma}{\gamma-1} + 3\bar{W}_2\right). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

在最后一式中已設  $\mu_2=0.7$ ,  $3+\mu_2=3.7$ , 所有  $P, W$  都是物距无限远时的值, 为求簡略未写上角标号“ $\infty$ ”.

令  $S_{III}=0$ , 由后两式即可得:

$$\left. \begin{aligned} \bar{W}_2 &= -\frac{2.7\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{S_V}{(\gamma-1)^2}, \\ \bar{P}_2 &= \frac{\gamma(4.4\gamma+3)}{(\gamma-1)^2} + \frac{2\gamma S_V}{(\gamma-1)^3}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

再将(3)代入(2)并令  $S_I=S_{II}=0$  得:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{4.4\gamma+3}{(\gamma-1)^2} + \frac{2S_V}{(\gamma-1)^3}, \\ W_1 &= \frac{1.7\gamma+2}{\gamma-1} + \frac{S_V}{(\gamma-1)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

由(2)式可知, (3)式实际上是使负透镜组对离负透镜组距离为

$$l_{p1} = -d = -\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)$$

的光栏校正畸变并产生小量象散时所引起的结果。而W的数值所以这样大则是由于 $S_{III}$ 和 $S_V$ 中常数项大小不同,且 $S_V$ 中的常数项很大之故。

现将

$$\begin{cases} \gamma = 1.66; 1.8; 2.0; 2.3; 3; 6; 30, \\ S_V = 0; -4; -0.7(\gamma-1)^2; -0.7(\gamma-1)(2\gamma-1); -0.7(\gamma-1)(2\gamma-1)-4 \end{cases}$$

等情况下的P, W表列于下。

伽利略望远镜对薄透镜象差的要求

$S_V$	$\gamma$	$W_2$	$P_2$	$W_1$	$P_1$
0	1.66	-8.30	39.3	7.30	23.7
	1.8	-7.34	30.7	6.33	17.1
	2.0	-6.40	23.6	5.40	11.8
	2.3	-5.54	17.8	4.55	7.8
	3.0	-4.55	12.2	3.55	4.0
	6.0	-3.44	7.1	2.44	1.2
	30	-2.83	4.8	1.83	0.2
-4	1.66	0.90	-7.2	-1.90	-4.3
	1.8	-1.09	2.5	0.08	1.4
	2.0	-2.40	7.6	1.40	3.8
	2.3	-3.17	9.2	2.18	4.1
	3.0	-3.55	9.5	2.55	3.0
	6.0	-3.28	6.7	2.28	1.1
	30	-2.82	4.8	1.83	0.1
$-0.7(\gamma-1)^2$	1.66	-7.60	35.8	6.60	21.6
	1.8	-6.64	27.5	5.63	15.4
	2.0	-5.70	20.8	4.70	10.4
	2.3	-4.84	15.4	3.86	6.7
	3.0	-3.85	10.1	2.85	3.3
	6.0	-2.74	5.4	1.74	0.9
	30	-2.13	3.4	1.13	0.1
$-0.7(\gamma-1)(2\gamma-1)$	1.66	-5.84	26.9	4.84	16.2
	1.8	-5.06	20.5	4.05	11.4
	2.0	-4.30	15.2	3.30	7.6
	2.3	-3.60	11.0	2.61	4.8
	3.0	-2.80	6.9	1.80	2.3
	6.0	-1.90	3.4	1.90	0.6
	30	-1.40	1.9	0.40	0.1
$-0.7(\gamma-1)(2\gamma-1)-4$	1.66	3.35	19.6	-4.36	-11.8
	1.8	1.19	7.7	-2.19	-4.3
	2.0	-0.30	0.8	-0.70	-0.4
	2.3	-1.23	-2.6	0.23	1.1
	3.0	-1.80	-3.9	0.80	1.3
	6.0	-1.74	-3.0	0.74	0.5
	30	-1.40	-3.4	0.40	0.0

$S_V$  取这些值的意义是:  $S_V=0$  意指当光栏处在第一透镜上时校正了畸变;  $S_V=-4$  意指对同一光栏位置保留畸变, 以致  $u_{p1}=-1$  时畸变为 200%, 即  $u_{p1}=-0.5$  时畸变为 50%, 或  $u_{p1}=-0.1$  时为 2%。  $S_V=-0.7(\gamma-1)^2$  意指将光栏移在第二透镜上就恰好校正畸变。这样移动光栏相当于

$$\frac{\Delta h_p}{h} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \bigg/ \frac{1}{\gamma} = -(\gamma-1),$$

而因  $S_I=S_{II}=S_{III}=0$ ,  $S_{IV}=0.7(1-\gamma)$ , 故光栏移动时其他象差均不变而仅畸变变化  $0.7(\gamma-1)^2$ 。  $S_V=-0.7(\gamma-1)(2\gamma-1)$  就是对出瞳在第二透镜外  $1/\gamma$  处校正畸变的解, 而  $S_V=-0.7(\gamma-1)(2\gamma-1)-4$ , 则是对此光栏位置还保留畸变,  $u_{p1}=-0.1$  时为 4%。

从上述结果可以看出, 随着要求的变更, 二薄透镜组具有截然不同的  $P, W$  值, 这就提出了一个问题: 薄透镜组是否能满足这种要求? 能满足的话又应如何来实现? 有没有好的方法能立即地得出结构数据? 这就是我们在下一节中要讨论的问题。

#### § 4 用薄透镜产生定值象差的可能性

对单个薄透镜而言, 只有一个可变量即弯曲能使  $P, W$  发生变化, 因此  $P$  和  $W$  之间必定存在一个一定的关系。对于胶合在一起的透镜组来说, 也仍然如此。因此, 它的  $P, W$  之间也必定存在一个一定的关系。一般的多透镜胶合, 情况比较复杂, 双透镜则比较简单, 我们将把这种关系找出来。

既然对于一定的胶合薄透镜组  $P, W$  之间存在着一定的关系, 于是只有把玻璃选择和胶合组内部焦距分配作为变数时才能满足提出的“任意”要求。但是玻璃的变换是有限度的。在不能满足要求时, 我们就考虑分离薄透镜组。对分离透镜而言, 双透镜已有两个变数, 足可适应  $P, W$  两个要求。多薄透镜组虽有多变数, 但它在初级象差领域内仍然只能变更  $P, W$  之值而已。但考虑到高级象差的存在和校正, 有时仍不能用简单结构而须用多组薄透镜来满足  $P, W$  这两个要求。下面分别讨论这些问题, 讨论方法的要点不过是将  $P, W$  中的  $i, u$  等等用  $\varphi, r$ , 等表示出来, 于是就可以直接由  $P, W$  找出半径值来。

##### § 4.1 单薄透镜

由前节公式组, 我们只须讨论  $h\varphi=1$ , 物距无限远时的象差单元  $P^\infty, W^\infty$  即可



得出薄透鏡在所有情况下的初級象差特性。

先导出薄透鏡的  $P^\infty$ ,  $W^\infty$  表示式。設此薄透鏡光焦度为  $\varphi$ , 两面曲率各为  $c_1$ ,  $c_2$  則:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= (n-1)(c_1 - c_2), \\ u_1 &= 0, \\ i_1 &= ni_1' = hc_1, \\ u_2 &= h\varphi, \\ i_2 &= ni_2' = h(c_2 - \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

由此, 所有量均可以  $i_2'$  和  $\varphi$  表示出来。以符号  $Q$  表示  $\frac{i_2'}{h}$  例如:

$$\left. \begin{aligned} c_2 &= Q + \varphi, \\ c_1 &= i_1/n = \left(\frac{\varphi}{n-1}\right) + Q + \varphi = \frac{n}{n-1}\varphi + Q, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

故

$$\left. \begin{aligned} P^\infty/h^3 &= c_1 \left(\frac{c_1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) c_1 + Q \left(\frac{Q}{n} - \varphi\right) \left(\frac{1}{n} - 1\right) Q \\ &= \frac{n+2}{n} Q^2 \varphi + \frac{3}{n-1} Q \varphi^2 + \frac{n}{(n-1)^2} \varphi^3, \\ W^\infty/h^2 &= \frac{c_1^2}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{Q}{n} - \varphi\right) \left(\frac{1}{n} - 1\right) Q \\ &= \frac{n+1}{n} Q \varphi + \frac{1}{n-1} \varphi^2. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

因此, 当  $h\varphi = 1$ , 并用符号  $Q = i_2'/h\varphi$  則有

$$\begin{aligned} P^\infty &= \left(1 + \frac{2}{n}\right) Q^2 + \frac{3}{n-1} Q + \frac{n}{(n-1)^2} \\ &= P_{\min}^\infty + \left(1 + \frac{2}{n}\right) \left[ Q + \frac{3n}{2(n-1)(n+2)} \right]^2, \end{aligned} \quad (8)$$

$$= P_{\min}^\infty + \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right] \left[ W^\infty + \frac{1}{2(n+2)} \right]^2, \quad (9)$$

其中

$$P_{\min}^\infty = \frac{n}{(n-1)^2} \left[1 - \frac{9}{4(n+2)}\right]. \quad (10)$$

$$W^\infty = \frac{n+1}{n} Q + \frac{1}{n-1}. \quad (11)$$

$P_{\min}^\infty$  是  $P^\infty$  的极小值, 其对应的  $Q = Q_0 = -\frac{3n}{2(n+2)(n-1)}$ , 为求简便, 以后将  $P_{\min}^\infty$  写成  $P_0$ .

按 § 1.4(b) 得物体在近距离时的相应公式:

$$P = P_{\min} + \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \left[W + \frac{1}{2(n+2)}(1+2u_1)\right]^2, \quad (12)$$

$$P_{\min} = P_{\min}^{\infty} - \frac{n}{n+2}(u_1 + u_1^2), \quad (13)$$

$$W = W^{\infty} - \left(2 + \frac{1}{n}\right)u_1. \quad (14)$$

单薄透镜可能产生的  $P_{\min}^{\infty}$  和  $W_0 = \frac{1}{2(n+2)}$  列如下表.

$n$	1.30	1.44	1.48	1.52	1.56	1.60	1.64	1.68	1.72	1.76	1.8	2.00
$P_{\min}^{\infty}$	4.54	2.57	2.27	2.03	1.83	1.67	1.53	1.41	1.31	1.22	1.15	0.88
$W_0$	0.15					0.14					0.13	0.12

当物距在近距离时引入的校正项为

$$\Delta W_0 = \frac{u_1}{n+2}, \quad \Delta P_{\min} = -\frac{n}{n+2}(u_1 + u_1^2),$$

以  $n=1.6$  为例列表于下:

$u_1 = \frac{1}{b_1\varphi}$	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0	0.5	1.0	1.5	2.0
$\Delta P_{\min}$	-0.89	-0.33	0	0.11	0	-0.33	-0.89	-1.67	-2.67
$\Delta W_0$	-0.56	-0.42	-0.28	0.14	0	0.14	0.28	0.42	0.56

除场镜以外,透镜的  $u_1$  很少会超出  $\pm 2$ , 故物体在近距离时的球差极小值在  $-1$  到  $1.7$  之间变动 ( $n=1.6$ ).  $P_0=0$  的情况相当于物体处在透镜的不晕点(第一面不晕折射,第二面同心折射).

若我们要求透镜不过分弯曲(不产生过大的高级象差),则须限制曲率的绝对值,例如  $|c| < 3$ , 这时  $W^{\infty}$  约在  $+1.5$  到  $-4.5$  之间,又当  $P_{\min}^{\infty}=1.5$  时相应的  $P^{\infty}$  是:

透镜形状 编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$W^{\infty}$	+1.5	+1.0	+0.5	0	-0.5	-1.0	-1.5	-2.0	-2.5	-3.0	-3.5	-4.0	-4.5
$P^{\infty}$	3.8	2.6	1.8	1.5	1.7	2.1	3.2	4.4	6.3	8.5	11.8	14.9	17.8

将表中透镜形状按编号顺序示于图 7.5.

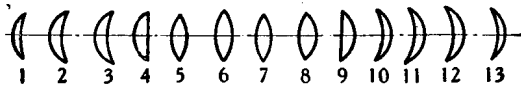


图 7.5

上面的公式和表中的数字表明,单薄透鏡的初級象差性质可以用  $P_{\min}^{\infty}$  一个量全部表达出来,这也就是說,物距无限远时的球差极小值完全决定了这个透鏡对象差的可能贡献。由于折射率有限,单薄透鏡的  $P_{\min}^{\infty}$  只可能在 1—4 之間变动,普通常用玻璃則約为 2,在球差极小位置上彗差約等于零 ( $W_0$  很小)。

通过物距影响的計算,表明物体由无限远移到焦点(象由焦点移到无限远)的过程中,球差极值不起变化,而且在极值位置时彗差仍等于零。只是物体移到焦点之内时才会发生少許变动。

由于  $P_{\min}^{\infty}$  的限制,再加透鏡不能过于弯曲,单透鏡能负担的  $P, W$  范围是有限的。

### § 4.2 正負胶合双透鏡

下面我們將証明双胶透鏡仍然具有上述单透鏡的全部特征,差别只在  $P_{\min}^{\infty}$  能够在較大的范围内变动。

· 当二透鏡相胶合时,第二透鏡的第一面半徑与第一透鏡的第二面半徑相等,即  $r_3 = r_2$ , 此时,第二透鏡的  $P, W$  也可以由  $i'_2 = Q$  表示出来,这是由于:

$$\left. \begin{aligned} i_3 = i'_2 = c_2 - \varphi_1 = n_2 i'_3 = Q, \\ u_3 = u'_2 = \varphi_1, \\ u'_4 = (\varphi_1 + \varphi_2) = 1, \quad (\text{令 } \varphi_1 + \varphi_2 = 1), \\ i'_4 = (c_4 - 1) = \left( Q - \frac{n_2}{n_2 - 1} \varphi_2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

因此第二透鏡的  $P, W$  是:

$$\left. \begin{aligned} P &= Q^2 \left( \frac{Q}{n_2} - \varphi_1 \right) \left( 1 - \frac{1}{n_2} \right) + \left( Q - \frac{n_2}{n_2 - 1} \varphi_2 \right)^2 \\ &\quad \times \left( \frac{Q}{n_2} - \frac{1}{n_2 - 1} \varphi_2 - 1 \right) \left( \frac{1}{n_2} - 1 \right) \\ &= \frac{n_2 + 2}{n_2} \varphi_2 Q^2 - \left( \frac{3\varphi_2^2}{n_2 - 1} + 2\varphi_2 \right) Q + \frac{n_2}{(n_2 - 1)^2} \varphi_2^3 + \frac{n_2}{n_2 - 1} \varphi_2^2, \\ W &= Q \left( \frac{Q}{n_2} - \varphi_1 \right) \left( 1 - \frac{1}{n_2} \right) + \left( Q - \frac{n_2}{n_2 - 1} \varphi_2 \right) \\ &\quad \times \left( \frac{Q}{n_2} - \frac{1}{n_2 - 1} \varphi_2 - 1 \right) \left( \frac{1}{n_2} - 1 \right) \\ &= \frac{n_2 + 1}{n_2} \varphi_2 Q - \frac{1}{n_2 - 1} \varphi_2^2 - \varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

第一透镜的  $P, W$  由(7)式表示, 故两透镜产生的总象差只须由(7), (16)相加即得:

$$\left. \begin{aligned} P^\infty &= aQ^2 + bQ + c, \\ W^\infty &= \frac{a+1}{2}Q + \frac{b-\varphi_2}{3}; \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{n_1+2}{n_1}\varphi_1 + \frac{n_2+2}{n_2}\varphi_2 = 1 + 2\left(\frac{\varphi_1}{n_1} + \frac{\varphi_2}{n_2}\right) = 1 + 2\mu, \\ b &= \frac{3\varphi_1^2}{n_1-1} - \frac{3\varphi_2^2}{n_2-1} - 2\varphi_2, \\ c &= \frac{n_1}{(n_1-1)^2}\varphi_1^3 + \frac{n_2}{(n_2-1)^2}\varphi_2^3 + \frac{n_2}{n_2-1}\varphi_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

和上节一样, 可将方程式(17)改写为:

$$\left. \begin{aligned} P^\infty &= c - \frac{b^2}{4a} + a\left(Q + \frac{b}{2a}\right)^2, \\ &= P_{\min} + \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^2}\right](W^\infty + W_0)^2, \\ W_0 &= -\frac{b-\varphi_2}{3} + \frac{b}{2a} \cdot \frac{a+1}{2} = \frac{(\mu-1)Q_0 + \varphi_2}{3}, \\ P_{\min} &= c - \frac{b^2}{4a}, \quad Q_0 = -\frac{b}{2a}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

可见当  $W^\infty = -W_0$ , 亦即

$$Q = Q_0 = -\frac{b}{2a} \text{ 时,} \quad (20)$$

$P^\infty$  有极小值  $P_{\min}$ . 相应的  $W^\infty$  的表示式是:

$$W^\infty = (1+\mu)(Q-Q_0) - W_0. \quad (21)$$

各种玻璃的折射率组合和焦距分配所能给出的  $P_{\min}$ , 以及  $Q_0, W_0, \mu$  等如表1所列, 表中以  $\nu$  表示焦距分配:

$$\nu = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2}, \quad \varphi_1 + \varphi_2 = 1. \quad (22)$$

这种分配的范围选择是根据实际玻璃能作出消色组合的范围而大致确定的. 若二玻璃的亚培数  $\nu_1, \nu_2$  满足

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \nu, \quad (23)$$

则为消色的, 若  $\frac{\nu_1}{\nu_2} \neq \nu$  即可产生出适量的色差. 因  $h=1$ , 故色差是:

$$C_1 = \frac{\varphi_1}{\nu_1} + \frac{\varphi_2}{\nu_2}. \quad (23a)$$

当物体在近距离处时,将(19), (21)代入 § 1.4c 即可得出:

$$\left. \begin{aligned} W &= W^\infty - u_1(2 + \mu), \\ P &= P_{\min} + \left[ 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^2} \right] \left\{ W + W_0 \left[ 1 + \frac{\mu}{W_0(1+2\mu)} u_1 \right] \right\}^2, \\ P_{\min} &= P_{\min}^\infty - \frac{1}{1+2\mu} u_1^2 - (1-4W_0) u_1. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

此式中若令  $\mu = \frac{1}{n}$ ,  $W_0 = \frac{1}{2(n+2)}$ , 即得单薄透鏡的公式(12), (13), (14). 亦即表 1 中  $n_1 = n_2$  的各組. 到此,我們已經証實了双透鏡組和单透鏡的相似性.

双胶透鏡組的基本特征  $P_{\min}$  (簡写作  $P_0$ ) 与透鏡組結構之关系可以由简单的考虑而預先知道个大概. 例如上述,当  $n_1 = n_2$  則与单透鏡无异;另外还可想見几点: 如  $\nu$  很大时,  $\varphi_1$  趋近于 1,  $\varphi_2$  趋近于零, 故  $\nu$  較大时  $P_0$  与单正透鏡相同, 由表可見  $\nu = 2.5$  时  $P_0$  已几乎不变.

由于胶面产生的負球差随折射率差加大而加大, 故可认为  $n_2 - n_1$  愈大則  $P_0$  愈負.

当  $\nu$  趋近于 1 时,  $\varphi_1, \varphi_2$  趋于  $\pm\infty$ , 由表 1 可見, 此时  $P_0$  很容易是很大的正值或負值, 小量的折射率差即可使  $P_0$  发生大变化, 这就意味着这种解是不宜使用的, 这現象的原因是  $\varphi$  很大致使半徑很小. 由上述考虑可得出  $P_0$  和  $n, \nu$  之間的粗略經驗公式:

$$P_0 \doteq 1.25m_1 - 0.4 + \frac{1.36(m_1 + m_2) - 0.3}{(\nu - 1)^{2.6}} (m_2 - m_1), \quad (25)$$

其中

$$m = \frac{1}{n-1}.$$

由表 1 可見,  $Q_0$  几乎和  $n_2$  无关, 它和  $n_1$  及  $\nu$  的关系可用下列經驗公式表示:

$$-Q_0 = \frac{1.13m_1 + 0.82}{\sqrt{\nu} - \frac{1}{\sqrt{\nu}}} = \frac{\varphi_1}{\sqrt{\nu}} \left( \frac{1.13}{n_1} \cdot \frac{n_1}{n_1 - 1} + 0.8 \right). \quad (26)$$

由表 1 还可見在  $\nu$  不太小时  $W_0$  及  $\mu$  变动很少. 因之可以取  $\mu = 0.7$ ,  $W_0 = 0.14$  而将(19), (24)近似写作:

$$\left. \begin{aligned} P^\infty &= P_0 + 0.83(W^\infty + 0.14)^2, \\ W^\infty &= 1.7(Q - Q_0) - 0.14, \end{aligned} \right\} \quad (19^*)$$





$$\left. \begin{aligned} P &= P_{\min} + 0.83[W + 0.14(1 + 2u_1)]^2, \\ P_{\min} &= P_0 - 0.44(u_1 + u_1^2), \\ W &= W^\infty - 2.7u_1. \end{aligned} \right\} \quad (24^*)$$

当然这些式子不很准确，在某些要求准确求解的情况下必須将它作修正以适应准备取用的  $n$  和  $\nu$  的范围。

光学工作者早就知道单薄透鏡的球差有极小值，且当球差极小时彗差也几乎等于零。由光学設計的实际經驗也知道双胶透鏡也是如此。

Г. Г. Слюсарев<sup>[1]</sup> 对实际光学玻璃的消色和近消色組合作了大量計算，結果肯定了这个結論 ( $W_0 = 0$ )，并第一个作出了多种玻璃組合的  $P_0 Q_0$  表。这个表是对实际存在的玻璃作的，因此象差变化的規律不够明显。对于物体不在无限远时的极值問題，尚未見有文献論及，我們在上面証明了它和物距无限时的性质是极相似的。

我們这里的表是一个准备作內插外推用的表，从这个表可以确定近似式 (19\*)，(24\*) 的可用范围，例如当球差为极小时彗差实是可正可負的， $W_0$  最大时可达  $-0.9$ 。再如，Petzval 和的特征值  $\mu$  实际上也在相当大的幅度內变化 (1—0.3)，就是在  $\nu$  不太小时也可由 0.4 变到 0.8。这个表又可看作是对任意波长的光綫所作的，因之設計紅外和紫外光学系統时仍可利用这个表。表中只把  $P_0$ ， $W_0$  等表达为  $n_1$ ， $n_2$  和  $\varphi_1/\varphi_2$  的函数，因此要求胶合組产生任意大小的色差时都可用这个表，只須适当选择玻璃的亚培数  $\nu_1\nu_2$  即可，色差  $C_1$  为：

$$C_1 = \frac{\varphi_1}{\nu_1} + \frac{\varphi_2}{\nu_2}. \quad (27)$$

表中只有  $\varphi_1$  为正  $\varphi_2$  为負的情况 (所謂冕玻璃在前)，而缺乏火石玻璃在前的表。实际上火石玻璃在前时，即  $\varphi_1$  为負的情况完全可以由公式 (24) 确定。

$$\begin{cases} \tilde{P}^\infty = \bar{P}_{(u_1=-1)}, \\ \tilde{W}^\infty = -\bar{W}_{(u_1=-1)}. \end{cases}$$

故

$$P_{0(F \text{ 在前})} = P_{0(K \text{ 在前})} + \frac{2\mu}{1+2\mu} - 4W_0. \quad (28)$$

由此可見当  $W_0 = \frac{\mu}{2(1+2\mu)}$  时两种情况的  $P_0$  完全一样，由于后兩項的差数一般不大，故兩情况下的  $P_0$  也只有很小的差別。現將  $\mu$  的函数表列如下：

$\mu$	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\frac{\mu}{2(1+2\mu)}$	0.094	0.111	0.125	0.136	0.146	0.154	0.161	0.166



$W_0$  的变化則如表 1 所列.

由于这个表具有上述的比較广泛的性质,因之在某些特定情况下使用时(如設計目視消色差的望远鏡物鏡)它可能並沒有 Слюсарев 的表格方便;当然,在更特定的情况,例如望远鏡物鏡設計,更方便的表就是已計算好的半徑、厚度、折射率等的數據表.

从表可以看出,就是只利用实际存在的光学玻璃也可以得出几乎任意大小的  $P_0$  (如由 +20—-50). 而且对中等的  $P_0$  而言,可取的玻璃組合是非常多的. 在所有各种可能的組合中我們怎样才能得到最好的或者接近最好的設計呢? 这是下一节将要討論的問題.

利用表格求出結構的程序是:

1. 由初級象差要求值,求出透鏡組的規化  $P, W$  值[§ 1.4(a)—(c)].
2. 由  $P, W$  求出  $P_{\min}^{\infty}$  [按 § 1.4(c): 由  $P, W$  求出  $P^{\infty}, W^{\infty}$ ; 再利用 (19\*), 或由 (24\*) 式].
3. 由  $P_{\min}^{\infty}$  (即  $P_0$ ) 查表找出合用的玻璃組合.
4. 有必要时由此玻璃組合的  $\mu$  和  $W_0$  修正  $P_{\min}^{\infty}$ ; 重新查表找玻璃組合[由 (19) 或 (24) 式].
5. 由表中查出的  $Q_0$  計算  $Q$  [由 (21) 或 (24) 与 (21) 式].
6. 由  $Q$  和表中的  $\varphi_1, \varphi_2$  計算半徑[由 (15) 式].

### § 4.3 无光焦度胶合双透鏡

当要求产生大的  $P, W$  而又希望半徑不太小时,用复合透鏡組可能达到目的.

用定焦距透鏡一般易于使象差减小,但計算处理不大方便. 最方便的当是采用无光焦度的薄透鏡組,因为,多組无光焦度透鏡的迭合效果只是使象差简单地倍加,而不象定焦距透鏡須随情况之变化重作計算. 現先考虑无光焦度的胶合双透鏡. 設二透鏡的折射率各为  $n_1, n_2$ , 且  $-\varphi_2 = \varphi_1 = \varphi$ , 則由 (7) 式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{P^{\infty}}{l^3} &= \frac{n_1+2}{n_1} Q^2 \varphi + \frac{3}{n_1-1} Q \varphi^2 + \frac{n_1}{(n_1-1)^2} \varphi^3 \\ &\quad - \left[ \frac{n_2+2}{n_2} Q^2 \varphi + \frac{3}{n_2-1} Q \varphi^2 + \frac{n_2}{(n_2-1)^2} \varphi^3 \right], \\ &= 2 \frac{n_2-n_1}{n_1 n_2} \varphi^3 \left[ \frac{Q^2}{\varphi^2} + \frac{3Q}{2\varphi} \frac{n_1 n_2}{(n_1-1)(n_2-1)} + \frac{n_1 n_2 (n_1 n_2 + 1)}{2(n_1-1)^2 (n_2-1)^2} \right]; \\ \frac{W^{\infty}}{h^2} &= \frac{n_2-n_1}{n_1 n_2} \varphi^2 \left[ \frac{Q}{\varphi} + \frac{n_1 n_2}{(n_1-1)(n_2-1)} \right]. \end{aligned} \right\} (29)$$

用符号:

$$\left. \begin{aligned} Q &= \frac{i'_2}{h\varphi}, \\ P &= \frac{P}{(h\varphi)^3}, \\ W &= \frac{W}{(h\varphi)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

则(29)式成为:

$$\left. \begin{aligned} P^\infty &= \left[ \left( Q + \frac{3}{4} \frac{n_1 n_2}{(n_1 - 1)(n_2 - 1)} \right)^2 - \frac{n_1 n_2 (n_1 n_2 + 8)}{16(n_1 - 1)^2 (n_2 - 1)^2} \right] 2 \frac{n_2 - n_1}{n_1 n_2}, \\ &= 2 \frac{n_1 n_2}{n_2 - n_1} \left[ W^\infty - \frac{n_2 - n_1}{4(n_1 - 1)(n_2 - 1)} \right]^2 - \frac{(n_2 - n_1)(n_1 n_2 + 8)}{8(n_1 - 1)^2 (n_2 - 1)^2}; \\ W^\infty &= \frac{n_2 - n_1}{n_1 n_2} \left[ Q + \frac{n_1 n_2}{(n_1 - 1)(n_2 - 1)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

极值位置的状况是:

$$\left. \begin{aligned} Q_0 &= -\frac{3n_1 n_2}{4(n_1 - 1)(n_2 - 1)}, \\ W_0 &= -\frac{n_2 - n_1}{4(n_1 - 1)(n_2 - 1)}, \\ P_0 &= -\frac{(n_2 - n_1)(n_1 n_2 + 8)}{8(n_1 - 1)^2 (n_2 - 1)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

用这些符号后(31)式可写作:

$$\left. \begin{aligned} P^\infty &= P_0 + \frac{2n_1 n_2}{n_2 - n_1} (W^\infty + W_0)^2, \\ W^\infty &= \frac{n_2 - n_1}{n_1 n_2} (Q - Q_0) - W_0. \end{aligned} \right\} \quad (31^*)$$

产生的 Petzval 和是

$$S_{IV} = \left( \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} \right) \varphi = \frac{n_2 - n_1}{n_1 n_2} \varphi = \mu \varphi. \quad (33)$$

当物体移到近距离处时  $P, W$  变更的规则可由 § 1.4(b) 中令  $h\varphi = 0$  而得:

$$\left. \begin{aligned} P &= P^\infty - 4u_1 W^\infty, \\ W &= W^\infty, \\ u_1 &= \frac{1}{l_1}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

或由(30)式,

$$\left. \begin{aligned} P &= P^\infty - 4u_1 W^\infty, \\ W &= W^\infty, \\ u_1 &= \frac{1}{l_1 \varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (34^*)$$

即  $W$  不随物体移动而变化. 这是无光差度透鏡組的特色.

由(32)式可見  $P_0, W_0$  基本上由  $\Delta n$  完全決定;  $W_0$  約为  $P_0$  的  $1/10$  到  $1/20$ . 当  $n_1 > n_2$  时  $P_0$  等均为正, 当  $n_1 < n_2$  时  $P_0, W_0, \mu$  均易号, 因此它所产生的象差是可正可負的. 当  $\varphi$  易号时  $P$  变号而  $W$  不变号, 因此  $P, W$  可以是同号也可以异号. 由于  $Q_0$  是很大的負值, 故在极值位置时透鏡已极度弯曲, 可見在透鏡弯曲平緩时即可产生大量象差.

$|Q| < 2$  时, 胶合无光焦度組可产生的  $P, W$  各为  $\pm 15$  和  $\pm 1$ .

#### § 4.4 无光焦度等折射率双薄透鏡

无光焦度等折射率胶合双薄透鏡的  $P, W$ , 因  $n_2 - n_1 = 0$ , 所以恒等于零, 但若两相分离即可产生出很大的  $P, W$ , 这种象差是由  $i_2' \neq i_3$  而产生的. 由(7)式 ( $\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi$ ), 得这两透鏡的象差为

$$\left. \begin{aligned} P^\infty &= \frac{n+2}{n} \varphi (Q_2^2 - Q_3^2) + \frac{3}{n-1} \varphi^2 (Q_2 - Q_3), \\ W^\infty &= \frac{n+1}{n} \varphi (Q_2 - Q_3). \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

其中  $Q_2, Q_3$  即为  $i_2'$  和  $i_3$ ; 即

$$Q_2 + \varphi = c_2, \quad Q_3 + \varphi = c_3.$$

写成規化的形式得:

$$\left. \begin{aligned} P^\infty &= (Q_2 - Q_3) \left[ \frac{n+2}{n} (Q_2 + Q_3) + \frac{3}{n-1} \right] \\ &= W^\infty \left[ \frac{n+2}{n+1} (Q_2 + Q_3) + \frac{3n}{n^2-1} \right]; \\ W^\infty &= \frac{n+1}{n} (Q_2 - Q_3). \end{aligned} \right\} \quad (35^*)$$

物体移动的影响仍由(34)式表示, 由此可見  $W$  仍然与物体位移无关, 而且由于它正比于  $Q_2 - Q_3$ , 故当两薄透鏡同时作等量弯曲时,  $c_2 - c_3$  不变,  $W$  不变, 而  $P$  与整体弯曲的关系則是綫性的. 故为使透鏡組产生定量的  $P, W$  时, 首先确定相邻面的曲率差 ( $Q_2 - Q_3$ ) 以适应  $W$  的要求, 而后整体弯曲以定  $P$ .

## § 4.5 兩組定焦距薄透鏡

設兩組薄透鏡本身单独产生的象差  $P^\infty, W^\infty$  分別写为  $P_1^\infty, W_1^\infty, P_2^\infty, W_2^\infty$ , 光焦度分別为  $\varphi_1, \varphi_2$  且  $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$ , 則由物体移动的关系式 § 1.4b 即可得出总象差是:

$$\left. \begin{aligned} P^\infty &= \varphi_1^3 P_1^\infty + \varphi_2^3 \left[ P_2^\infty - \frac{\varphi_1}{\varphi_2} (4W_2^\infty + 1) + \frac{\varphi_1^2}{\varphi_2^2} (3 + 2\mu_2) \right] \\ &= \varphi_1^3 P_1^\infty + \varphi_2^3 P_2^\infty - 4\varphi_1 \varphi_2^2 W_2^\infty + (3 + 2\mu_2) \varphi_1^2 \varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2^2; \\ W^\infty &= \varphi_1^2 W_1^\infty + \varphi_2^2 W_2^\infty - (2 + \mu_2) \varphi_1 \varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

可見象差并不是兩組的象差以  $\varphi^3$  或  $\varphi^2$  为权的平均数, 而是需考慮到附加項. 这附加項可以是一个很大的数字, 如下表所列. 附加項的大小由焦距分配决定, 令  $\mu_2 = 0.7$  則有:

$$\Delta P = (3 + 2\mu_2) \varphi_1^2 \varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2^2 = 4.4 \varphi_1^2 \varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2^2,$$

$$\Delta W = (2 + \mu_2) \varphi_1 \varphi_2 = 2.7 \varphi_1 \varphi_2.$$

$\varphi_1$	2.5	2.0	1.5	1.2	1.0	0.8	0.5	0.2	0	-0.2	-0.5	-1.0	-1.5
$\varphi_2$	-1.5	-1.0	-0.5	-0.2	0	0.2	0.5	0.8	1	1.2	1.5	2	2.5
$\Delta P$	-46.9	-19.6	-5.33	-1.31	0	0.53	0.42	0.01	0	0.50	2.77	12.8	34.2
$\Delta W$	-10.1	-5.4	-2.0	-0.6	0	0.4	0.7	0.4	0	-0.6	-2.0	-5.4	-10.1

由此可見当  $P_1^\infty = P_2^\infty = W_1^\infty = W_2^\infty = 0$ , 兩透鏡組以  $\varphi_1 = 2.5, \varphi_2 = -1.5$  組合起来后  $P^\infty = -47, W^\infty = -10$ , 相当于  $P_0 = -53$ . 为得出这种組合的最好結果須作較多次的比較計算.

## § 5 薄透鏡产生象差的可能性——对高級象差的考虑

假使沒有高級象差的話, 我們根本不須要作什么其他考虑, 只須用初級象差理論解出結構就行. 但是前面几章的理論告訴我們, 这种做法是不易得到好結果的, 我們必須在所有可能的簡單結構中找寻高級象差尽可能小的結構. 由前面几章的結果可知, 减少高級象差的原則之一是尽可能增大半徑; 其二是使半徑都弯向光栏. 随着問題的性質不同(大孔徑还是大視場)着重点也須随之不同.

§ 5.1 胶合双透鏡的  $P_0$  和  $W^\infty$  的限度

基于上面的考虑, 欲用胶合双透鏡达到一定的  $P_0$  时, 应尽可能選擇  $\nu$  大  $n$  差大

的組合,例如設計望远物鏡( $P^\infty = W^\infty = 0, P_0 = 0$ )时应取  $\nu = 2, n_1 = 1.54, n_2 = 1.72$  的結果(BaK<sub>2</sub>, SF18), 而不应取  $\nu = 1.5, n_1 = 1.54, n_2 = 1.56$  的結果. 只有当要求  $P_0 = -10$  之类的情況我們方取  $\nu = 1.5$  来实现它.

当要求半徑不太小时,就象单透鏡产生的象差有限制那样,胶合透鏡所能产生的象差也是限于一定范围的. 如限定  $|c| < 3$  則須  $\nu > 1.5$  (在  $\nu = 1.5$  时  $\varphi_1 = 3$ , 再如  $n_1 = 1.5$  并取双凸形时  $c = 3$ ), 故  $P_0$  不应超出下列范围:

$$10 > P_0 > -20.$$

可以更仔細地限定这种胶合組的  $P_0, W^\infty$  可能值范围. 令  $c_1 < 3, c_2 > -3$ , 再因为

$$c_1 = \frac{n_1}{n_1 - 1} \varphi_1 + Q, \quad c_2 = Q + \varphi_1,$$

故  $Q$  的上界和下界就是:

$$3 - \frac{n_1}{n_1 - 1} \varphi_1 \text{ 和 } -3 - \varphi_1.$$

故  $Q - Q_0$  的上下界各为:

$$3 - \frac{n_1}{n_1 - 1} \varphi_1 - Q_0, \quad -3 - \varphi_1 - Q_0$$

前已得到  $Q_0$  的近似經驗公式(26), 它几乎由  $n_1$  和  $\varphi_1$  完全决定. 由此可見  $3 - \frac{n_1}{n_1 - 1} \varphi_1 - Q_0$  几为常数, 計算表明可取为 1.6; 而下界  $(-3 - \varphi_1 - Q_0)$  則是变动的. 因此,  $W^\infty$  的上界恒为 +2.7,  $W^\infty$  大于 2.7 的要求必使  $c_1 > 3$ ; 由  $Q - Q_0$  的下界  $-3 - \varphi_1 - Q_0$  算出的  $W^\infty$  下界如下表所列:

+2.7 >  $W^\infty$  在表列值 ( $|c| < 3$ )

$W^\infty$ \ $\nu$	2.50	2.25	2.00	1.875	1.75	1.625	1.50	1.375
$n_1$								
1.80	-4.0	-3.6	-3.3	-2.7	-2.4	-1.8	-1.0	+0.4
1.76	-3.8	-3.4	-3.1	-2.5	-2.2	-1.6	-0.7	+0.8
1.72	-3.6	-3.2	-2.9	-2.3	-1.9	-0.3	-0.3	+1.3
1.68	-3.4	-3.1	-2.7	-2.0	-1.6	-0.9	+0.2	+2.0
1.64	-3.3	-2.9	-2.4	-1.7	-1.3	-0.5	+0.7	+2.7
1.60	-3.1	-2.7	-2.0	-1.3	-1.0	-0.1	+1.2	—
1.56	-2.9	-2.4	-1.7	-1.0	-0.7	+0.3	+1.8	—
1.52	-2.6	-2.0	-1.3	-0.7	0.0	+1.0	+2.5	—
1.48	-2.2	-1.7	-0.8	-0.3	+0.5	+1.7	—	—

火石玻璃在前的  $W^\infty$  限界可由 (24) 得出为:

$$W_{F \text{ 在前}}^\infty = -2.7 - W_{K \text{ 在前}}^\infty, \quad (37)$$

由此得出  $|c| < 3$  对  $W_{F \text{ 在前}}^\infty$  的限制是:

$$-5.4 < W_{F \text{ 在前}}^\infty < \text{表列值} (|c| < 3)$$

$W^\infty \begin{matrix} \nu \\ n_j \end{matrix}$	2.5	2.25	2.00	1.875	1.75	1.625	1.50	1.375
1.80	1.3	0.9	0.6	0.0	-1.3	-0.9	-1.7	-3.1
1.76	1.1	0.7	0.4	-0.2	-0.5	-1.1	-2.0	-3.5
1.72	0.9	0.5	0.2	-0.4	-0.8	-1.4	-2.4	-4.0
1.68	0.7	0.4	0.0	-0.7	-1.1	1.8	-2.9	-4.7
1.64	0.6	0.2	-0.3	-1.0	-1.4	-2.2	-3.4	-5.4
1.60	0.4	0.0	-0.7	-1.4	-1.7	-2.6	-3.9	—
1.56	0.2	-0.3	-1.0	-1.7	-2.0	-3.0	-4.5	—
1.52	-0.1	-0.7	-1.4	-2.0	-2.7	-3.7	-5.2	—
1.48	-0.5	-1.0	-1.9	-2.4	-3.2	-4.4	—	—

由此可见,  $W^\infty$  的范围超出  $2.7 > W^\infty > -5.4$  时不可避免要使  $|c| > 3$ , 亦即  $W^\infty$  的范围并不比单透镜大, 只是同一  $W^\infty$  的  $P^\infty$  可在一范围内变动而已。由上述结果还可以看出当  $W^\infty$  在 0—1 的范围内时取冕玻璃在前较恰当; 当  $W^\infty$  在 -2.5—-3.5 的范围内时取火石玻璃在前较恰当。在这种范围内时容易选出半径不很小的结果, 这就限制了  $|P_0| < 4$ 。  $W^\infty$  不在这个范围内时要使半径之一减小, 此时我们应使球面弯向光栏的方向。

胶合透镜中的小半径胶合面常是产生高级象差的原因, 为使半径不太小就得用一些比胶合双透镜更复杂的结构。这就是 § 4.3—§ 4.5 的目的。使用它们产生一些  $P, W$  就可以减轻胶合组的负担。

为了能更清楚地看出用怎样的透镜组才能达到某个预定要求, 我们再作下面的讨论。

## § 5.2 薄透镜象差的极值

前面所述及的球差极小位置可以看作是象差产生状况的一个标志, 在极小位置时单正透镜两面产生出几乎同样大小的球差, 两面恰处在最少产生球差的位置。由于高级球差与初级者成正比, 初级球差的极值位置一定与高级球差的极值位置相近。对轴外象差而言, 在第四章 § 8 中曾考虑过一种使轴外象差尽量少产生的方案, 那时的考虑显然是不严格的, 现在按  $P, W$  初级象差方法对此再加讨论。由于高级

象差总接近与初級正比地产生，初級象差的极值位置可作为少产生高級象差的重要标志。

把軸外象差和  $P, W$  的关系式微分，可以求得透鏡弯曲时各軸外象差的极值；按(21)式可将  $W$  作为弯曲的尺度，因由 § 1.4(c) 可得：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S_I}{\partial W} &= h^4 \varphi^3 \frac{\partial P}{\partial W}, \\ \frac{\partial S_{II}}{\partial W} &= h_p h^3 \varphi^3 \frac{\partial P}{\partial W} + j h^2 \varphi^2, \\ \frac{\partial S_{III}}{\partial W} &= h_p^2 h^2 \varphi^3 \frac{\partial P}{\partial W} + 2j h_p h \varphi^2, \\ \frac{\partial S_V}{\partial W} &= h_p^3 h \varphi^3 \frac{\partial P}{\partial W} + 3j h_p^2 \varphi^2. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

这四种象差为极值时必须使  $\frac{\partial P}{\partial W}$  等于下列值：

$$\frac{\partial P}{\partial W} = 0; \quad \frac{-j}{h h_p \varphi}; \quad \frac{-2j}{h h_p \varphi}; \quad \frac{-3j}{h h_p \varphi}. \quad (39)$$

而由(24)可得  $\frac{\partial P}{\partial W}$  的表示式：

$$\frac{\partial P}{\partial W} = \frac{2(1+2\mu)}{(1+\mu)^2} \left[ W + W_0 \left( 1 + \frac{\mu}{W_0(1+2\mu)} \mathbf{u}_1 \right) \right]. \quad (40)$$

故随着物体位置 ( $\mathbf{u}_1$ ) 的不同和光栏位置 ( $h_p$ ) 的不同， $W$  应取不同的值方能使某一軸外象差为极值，亦即不可能使所有軸外象差同时为极值。在軸外象差的极值位置上，透鏡向光栏弯曲，使畸变极小时透鏡最弯。另外， $h_p$  愈小弯曲亦愈甚，下面的計算表明，此时軸外象差比  $h_p$  大的情况要小，这些結果和第四章 § 8 中所述及的初步概念相符，但现在的結果在初級範圍内是精确定量的。以下討論一下其数量大小。

因  $W_0$  一般很小，作粗略討論时可看作等于零，則极值位置的  $W_m$  是：

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{(1+\mu)^2}{2(1+2\mu)} \cdot \frac{Kj}{h h_p \varphi} - W_0 \left( 1 + \frac{\mu}{W_0(1+2\mu)} \mathbf{u}_1 \right) \\ &\doteq \frac{(1+\mu)^2}{2(1+2\mu)} \cdot \frac{Kj}{h h_p \varphi} \\ &\doteq \frac{0.6Kj}{h h_p \varphi} \quad (\text{式中 } K=0, -1, -2, -3). \end{aligned} \quad (41)$$

此位置上的  $P_m$  是：

$$P_m = P_{\min} + \frac{(1+\mu)^2}{4(1+2\mu)} \cdot \frac{K^2 j^2}{h^2 h_p^2 \varphi^2} \doteq P_{\min} + \frac{0.3K^2 j^2}{h^2 h_p^2 \varphi^2}. \quad (42)$$

将(41), (42)式代入 §1.4(c) 的象差系数表示式, 即可得到各象差系数的极值及该极值位置时的其他象差系数值如下:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= h^4 \varphi^3 \mathbf{P}_{\min} + \frac{(1+\mu)^2}{4(1+2\mu)} \cdot \frac{j^2 K^2 h^2 \varphi}{h_p^2} \\
 &\doteq h^4 \varphi^3 \mathbf{P}_{\min} + \frac{0.3 K^2 j^2 h^2 \varphi}{h_p^2}, \\
 S_{II} &= h^3 h_p \varphi^3 \mathbf{P}_{\min} + \frac{(1+\mu)^2}{4(1+2\mu)} \cdot \frac{j^2 h \varphi}{h_p} (K^2 + 2K) \\
 &\quad - j^2 h^2 \varphi^2 \mathbf{W}_0 \left( 1 + \frac{\mu}{\mathbf{W}_0 (1+2\mu)} \mathbf{u}_1 \right) \\
 &\doteq h^3 h_p \varphi^3 \mathbf{P}_{\min} + \frac{0.3 K (K+2) j^2 h \varphi}{h_p}, \\
 S_{III} &= h^2 h_p^2 \varphi^3 \mathbf{P}_{\min} + \frac{(1+\mu)^2}{4(1+2\mu)} \cdot j^2 \varphi (K^2 + 4K) \\
 &\quad + j^2 \varphi - 2 j h h_p \varphi^2 \mathbf{W}_0 \left( 1 + \frac{\mu}{\mathbf{W}_0 (1+2\mu)} \mathbf{u}_1 \right) \\
 &\doteq h^2 h_p^2 \varphi^3 \mathbf{P}_{\min} + j^2 \varphi [1 + 0.3 K (K+4)], \\
 S_V &= h h_p^3 \varphi^3 \mathbf{P}_{\min} + (3+\mu) j^2 \varphi \frac{h_p}{h} + \frac{(1+\mu)^2}{4(1+2\mu)} \cdot j^2 \varphi \frac{h_p}{h} (K^2 + 6K) \\
 &\quad - 3 j h_p^2 \varphi^2 \mathbf{W}_0 \left( 1 + \frac{\mu}{\mathbf{W}_0 (1+2\mu)} \mathbf{u}_1 \right) \\
 &\doteq h h_p^3 \varphi^3 \mathbf{P}_{\min} + j^2 \varphi \frac{h_p}{h} [3.7 + 0.3 K (K+6)].
 \end{aligned} \tag{43}$$

令式中  $j=1$ ,  $h\varphi=1$ , 此时  $h_p = -l_{p1}\varphi$ , 即规化的入瞳距的负值 将此时的象差系数上加一短横表示, 则  $K=0, -1, -2, -3$  时的象差系数近似值如下表列:

表 2

$K$	$K=0$	$K=-1$	$K=-2$	$K=-3$
$\bar{S}_I \varphi$	$\mathbf{P}_{\min}$	$\mathbf{P}_{\min} + \frac{0.3}{h_p^2}$	$\mathbf{P}_{\min} + \frac{1.2}{h_p^2}$	$\mathbf{P}_{\min} + \frac{2.7}{h_p^2}$
$\bar{S}_{II}$	$h_p \mathbf{P}_{\min}$	$h_p \mathbf{P}_{\min} - \frac{0.3}{h_p}$	$h_p \mathbf{P}_{\min}$	$h_p \mathbf{P}_{\min} + \frac{0.9}{h_p}$
$\bar{S}_{III} / \varphi$	$h_p^2 \mathbf{P}_{\min} + 1$	$h_p^2 \mathbf{P}_{\min} + 0.1$	$h_p^2 \mathbf{P}_{\min} - 0.2$	$h_p^2 \mathbf{P}_{\min} - 0.1$
$\bar{S}_V / \varphi^2$	$h_p^3 \mathbf{P}_{\min} + 3.7 h_p$	$h_p^3 \mathbf{P}_{\min} + 2.2 h_p$	$h_p^3 \mathbf{P}_{\min} + 1.3 h_p$	$h_p^3 \mathbf{P}_{\min} + h_p$



对单正透鏡而言,上表中的  $P_{\min}$  約等于 2. 当  $h_p=1$  时,在  $K$  由 0 到  $-3$  的範圍內,  $\bar{S}_I/f$ ,  $\bar{S}_{II}$ ,  $f\bar{S}_{III}$  和  $\bar{S}_V f^2$  与  $P_{\min}$  都沒有数量級上的差別,变化也并不大,且除因  $h_p$  为負而使  $\bar{S}_{II}$ ,  $\bar{S}_V$  为負值外,都不会是負数. 当  $|h_p|$  变小时,畸变的絕對数值和变化量都随之变小,其符号則由  $h_p$  决定. 象散随  $|h_p|$  变小而逐漸接近表中常数項(可等于零或稍負). 彗差則不同,当  $|h_p|$  变小时变化量随之加大,無論  $h_p$  为正或負时彗差均可为很大的負值或正值. 球差的变化更甚,可以成很大的正值;由(41)式可知,这是由于  $W_m$  很大,致使透鏡向光栏弯曲而且弯得很厉害的原故.

$h_p$  为小数值时,在軸外象差极值位置上,軸外象差都可很小(如  $K=-2$  时)仅球差大.

很明显,在光学系統中的单透鏡應該处在上述的区域内,在这种区域内它产生的象差是最小的,这里的“象差产生得少”不是正負相消而是根本没有产生. 当用胶合透鏡时虽也可以因  $P_{\min}$  变小、变負而使象差变小(当然它也不可能使所有軸外象差都同时变小),但是这种变小属于正負相抵消,随单面产生的象差值的大小而会有大小不同的高級象差剩余. 单面产生值愈大則余留的未相消的量也会愈大.

### §5.3 双透鏡象差的极值

上节考虑了单正透鏡或单負透鏡的象差极值問題,現在考虑两相分离但很貼近的双透鏡組的极值. 由此判定复合透鏡組和单透鏡的差別及复合透鏡可能具有的优点.

运用上节的結果,将两透鏡均处于某象差的极值位置,此时两透鏡的  $K$  值相同. 再由于两透鏡相貼近,故  $h$ ,  $h_p$  均相同. 故当略去和  $W_0$  有关的項后,(43)式中各个象差系数对双透鏡取和时可写成下列普遍形式:

$$S = a(\varphi_1^3 P_{1,\min} + \varphi_2^3 P_{2,\min}) + b(\varphi_1 + \varphi_2). \quad (44)$$

式中  $S$  代表各个象差系数,  $a$ ,  $b$  是由  $h$ ,  $h_p$ ,  $j$  和  $K$  等决定的对各象差系数取不同值的常数,此常数对两透鏡是同一的. 当两透鏡的組合焦距等于 1, 即  $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$  时,上式更簡化为

$$S = a(\varphi_1^3 P_{1,\min} + \varphi_2^3 P_{2,\min}) + b.$$

再用公式(24\*)把  $P_{1,\min}$  和  $P_{2,\min}$  用  $P_0$  表示,設物距  $l = \frac{1}{u}$ , 則

$$u_1 = \frac{u}{\varphi_1}, \quad u_2 = \frac{u + \varphi_1}{\varphi_2},$$

故(44)式成为:

$$\begin{aligned}
S-b &= \alpha [\varphi_1^3 P_{0,1} + \varphi_2^3 P_{0,2} - 0.44(\varphi_1^2 u + \varphi_1 u^2 + \varphi_2 u^2 \\
&\quad + 2u\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1^2\varphi_2 + u\varphi_2^2 + \varphi_1\varphi_2^2)] \\
&= \alpha [\varphi_1^3 P_{0,1} + \varphi_2^3 P_{0,2} - 0.44(\varphi_1 + \varphi_2)(u + \varphi_1) \\
&\quad (u + \varphi_2)]. \tag{45}
\end{aligned}$$

(45)式对  $\varphi_1$  微分,微分时注意  $\partial\varphi_2/\partial\varphi_1 = -1$ , 则有:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial S}{\partial \varphi_1} = 3(P_{0,1}\varphi_1^2 - P_{0,2}\varphi_2^2) - 0.44(\varphi_2 - \varphi_1),$$

故当焦距分配满足条件:

$$P_{0,1}\varphi_1^2 - P_{0,2}\varphi_2^2 + 0.15(\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \tag{46a}$$

则此组合的象差为极值。当两透镜均由同一成分组成(例如均为单透镜且  $n$  相等)则

(46a)式的解就是  $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{1}{2}$ , 此时

$$\varphi_1^3 P_{1,\min} + \varphi_2^3 P_{2,\min} = \frac{1}{4} P_0 - 0.44(u_1 + u_1^2 + \frac{1}{4}). \tag{46b}$$

由(46b)式可见,当两透镜均为单透镜且两者折射率相等时,此双透镜所产生的象差极小值相当于单透镜之  $P_0$  变为  $\frac{1}{4} P_0$ , 也约相当于  $P_{\min}$  变为  $\frac{1}{4} P_{\min}$ . 由表 2 可看出这种变更有时是很有意义的,但在某些情况下(如  $h_p$  很小时)可能毫无价值,即双单透镜的象差并不比单透镜小些。

可以看到,由(46)式决定的极值位置与物距、光栏位置等等均无关系。

#### § 5.4 胶合面或无光焦度双透镜的作用和限度

任意一个胶合薄透镜组总可以看作是一个一定焦距的单透镜与一个或几个无光焦度胶合双透镜的和,而分离双薄透镜也可以看作是一个一定焦距的单透镜与无光焦度分离双透镜之和。凡是无光焦度而产生象差的机构我们将一概称之为“校正板”,按这种看法,所有薄透镜组均可看作是单薄透镜和校正板之和。单薄透镜应该怎样弯曲和组合我们已经作了详细的探讨,剩下的问题只是校正板应该怎样安排。很明显,校正板的观点比胶合透镜或定焦距分离双透镜的观点应用更为广泛,但胶合透镜和定焦距分离双透镜结构较为简单。

当校正板是和薄透镜处在一起而成为一组元的组成部分时(如胶合双透镜中的胶合面),考察结构是否恰适的准则之一是:除去校正板后所余下的主体(如胶合双透镜中的两个与空气接触的面)是否处在产生象差极小的位置。也就是说,所须校正量是否已预先减到最小限度。

当我们不考虑最佳玻璃选择而只对某一定的组合而言，校正板中单个透鏡的光焦度应能找到最佳数值；另外校正板在光束中应该处在什么位置也应有所选择。当然，这两种选择会使校正板不能和主体看作一个整体而成为相互分离的两部分。对无光焦度胶合双透鏡而言，用微分方法可使  $i'_2$  或  $i'_{p2}$  之一为极小，当认为另两面的象差相等相消时，这种位置就可看作是最好的。

### § 6 以厚透鏡代替分离薄透鏡

在光学系统中的透鏡总有一定厚度，对于这种厚度可以作两种理解，一种是为使薄透鏡具有一定的孔径而需要的。薄透鏡的相对孔径愈大则厚度和焦距之比也愈大，这是由于

$$d \doteq \frac{h^2}{2f}, \quad \frac{d}{f} \doteq \frac{1}{2} \left( \frac{h}{f} \right)^2,$$

即随相对孔径的平方而加大。因此，薄透鏡相对孔径愈大则以前略去厚度而得的解将发生愈大的误差，由此可见前述的薄透鏡解不太宜于解决单透鏡负担大相对孔径时的問題。这不单是因为高级象差加大，也是由于大相对孔径时的系统不能看作是“薄”的了，近轴光线在这种透鏡组各折射面上具有不同的高度，从而使前面解法中  $h$  相等的假设失效。显然误差是  $\Delta h$  的函数，亦即是相对孔径平方的函数。这种透鏡的厚度还将由于消色差或产生负色差而更加增大，这是由于消色差将使正透鏡具有更短焦距之故。相对孔径 1:5 以下时近消色的薄透鏡解一般是可靠的；到 1:3 以上时应该看作是不适用的。在这种透鏡中中心厚度虽可能很厚但它的正透鏡边缘总还是薄的，我们一般不称这种透鏡为厚透鏡而仍旧说它是“薄”透鏡，它的厚度不是校正象差的参数而是相对孔径和薄透鏡消色差公式所确定的。

透鏡的厚度还有另一种与上述完全不同的理解，在这种透鏡中厚度是作为校正象差的参数而出現的。这时可以把它理解为是代替分离薄透鏡组的空气隙而出現的，厚度为空气隙的变种，它是由預定的象差要求而确定的。在 § 2 中我们已論及薄透鏡焦距分配可作为校正象差的参数，且焦距分配中就包括間距  $d$  在内，(1) 式列出了和焦距分配有关的，亦即可靠焦距分配来滿足的方程式组。我们在下面只研究单厚透鏡問題，且只用单透鏡来滿足一些和光栏位置无关的要求，即类似于 (1a), (1b) 和 (1d) 的三个要求。

用厚透鏡来代替分离薄透鏡的目的在于少产生象差并简化结构。一个单厚透鏡只有两个折射面，而被代替的分离薄透鏡則有四个折射面，多出的折射面一定要多产

生象差,而这种多产生的象差也许并不是所需要的.例如图 7.6, (a) 是厚透镜, (b) 是分离双薄透镜, (b) 的第一面和第四面上轴上光线光路与 (a) 全同, 而中间两面  $r_2, r_3$

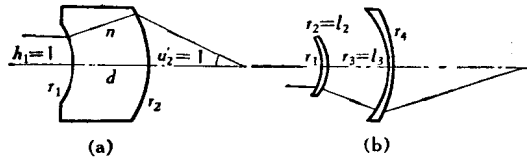


图 7.6

则均与轴上光线同心; 即  $r_2=l_2, r_3=l_3$ . 因之对轴上光线来说具有相同的外形尺寸和象差, 但是二者对主光线的作用就不同了. 它的  $S_{IV}$  较厚透镜大 ( $|r_2| < |r_3|$ ), 同时还要产生与  $S_{IV}$  变化量等值异号的象散, 即  $-\Delta S_{III} = \Delta S_{IV}$ ; 产生的畸变也不同. 假若本来就需要这种变化当然是很好的事, 假若这种象差是不利的, 那么就可以用厚透镜来避免.

### § 6.1 用厚透镜校正 $S_{IV}$

光学系统中以厚度校正  $S_{IV}$  者占多数, 本节主要讨论这个问题, 在下节再讨论以厚度校正色差的问题. 首先列出所需的方程式.

如图 7.6a 所示, 设厚透镜焦距等于 1, 并且轴上光线入射高度  $h_1=1$  故  $u'_2=1$ , 第一面半径为  $r_1=1/c_1$ , 第二面半径为  $r_2=1/c_2$ , 则光线和轴的夹角为:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= 0, \\ u'_1 &= (i_1 - i'_1) = i_1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{r_1} \frac{n-1}{n}, \\ u_2 &= u'_1, \\ u'_2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

由  $u'_2$  和半径、厚度的关系就可由上式得到  $r_1, r_2, d$  之间的关系. 因第二面上入射高度是

$$h_2 = l_2 u_2 = l_1 u_1 - d u'_1 = 1 - \frac{d}{r_1} \frac{n-1}{n}, \quad (48)$$

再因

$$u'_2 - u_2 = (i_2 - i'_2) = i_2 \left(\frac{1}{n} - 1\right), \quad i_2 = \frac{h_2}{r_2} - u'_2,$$

将 (47), (48) 式代入即得:

$$1 - \frac{n-1}{nr_1} = \frac{1-n}{n} \left\{ \left[ 1 - \frac{d(n-1)}{nr_1} \right] \frac{1}{r_2} - 1 \right\}, \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \text{或} \quad 1 &= (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{d(n-1)^2}{nr_1r_2}, \\ &= (n-1)(c_1 - c_2) + \frac{d(n-1)^2}{n} c_1c_2. \end{aligned} \quad (50)$$

而 Petzval 和与軸向色差也可用这种方法表示出来, 即

$$S_{IV} = j^2 \frac{n-1}{n} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = j^2 \frac{n-1}{n} (c_1 - c_2). \quad (51)$$

令  $u_{p1} = -1$  則  $j=1$ , 此时, 由 (50), (51) 式得出:

$$c_1 - c_2 = \frac{nS_{IV}}{n-1} = 2a, \quad c_1c_2 = \frac{(1-nS_{IV})n}{(n-1)^2d} = b. \quad (52)$$

此处把由  $d, n, S_{IV}$  所决定的上式中的常数写作  $2a$  和  $b$ , 只是为了求解方便. 解出  $c_1, c_2$  为

$$c_1 + c_2 = \pm 2\sqrt{a^2 + b},$$

$$\text{故} \quad c_1 = a \pm \sqrt{a^2 + b}, \quad c_2 = -a \pm \sqrt{a^2 + b}. \quad (53)$$

这就是說,  $n, d, S_{IV}$  决定后, 厚透鏡两面的半徑也就定了, 于是对于一定的光栏位置和物体位置的象差也就确定了, 再由 § 1.2, 对任意光栏位置和物体位置的象差也就确定了. 故将初級象差表示为  $n, d, S_{IV}$  的代数函数并无困难, 但因所得的公式很复杂不便使用, 我們宁愿用列表和曲綫来表示厚透鏡可能产生的象差数值. 为方便起見, 我們取定的物体在无限远而光栏則在凹面頂点, 即取  $l_1 = -\infty, h_1 = 1, l_{p1} = 0, u_{p1} = -1$  为象差計算的規化条件, 此时  $j=1$ .

按上述規化条件, 对于折射率 1.5, 1.6, 1.7, 1.8;  $S_{IV}$  为 0.2, 0.1, 0, -0.1; 厚度由 0.02 到 1.0 之間取十个值作了初級象差計算, 結果如表 3 所列. 并用图 7 表示几种象差随上述参数而变化的規律. 由該表作內插外推, 即可对原透鏡能产生的象差值有个大致的概念.

表列的仅是 (53) 式解的一部分, 即  $r_1, r_2$  均为負的情况, 对  $r_1, r_2$  均为正的情况未列出. 鉴于象差理論, 这种情况的初級象差 (相当于将物体处于焦点, 象在正无限远) 可由表列的六种特殊条件下的初級象差算出来. 当然这种計算不太方便.

由表 3 图 7 可見, 初級象差均随折射率  $n$  和 Petzval 和  $S_{IV}$  的加大而减小, 这种减小是單調的. 初級象差随厚度  $d$  的变化情况略为复杂些, 其中  $S_I$  随  $1/d$  綫性降低;  $S_{II}$  則近乎随  $1/d$  綫性升高;  $S_{III}$  約为  $d$  的二次函数, 有极小值;  $S_V$  和  $S_{I\theta}$  变化較小, 未画出, 但它們和  $d$  的函数关系則更复杂. 其中  $S_V$  和  $d$  的关系約为三立方拋物綫, 随  $d$  而單調增大, 但在  $d=0.4$  附近有拐点.  $S_{I\theta}$  的变化量虽小, 由于光栏約在第二折射面的球差反常区域, 故变化很不規則.

表 3

$n=1.5$										
$d$	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$r_1$	-0.0704	-0.1005	-0.1239	-0.1438	-0.1616	-0.2329	-0.3385	-0.4232	-0.4973	-0.5646
$r_2$	-0.0676	-0.0948	-0.1153	-0.1324	-0.1473	-0.2044	-0.2813	-0.3375	-0.3830	-0.4217
$h_2$	1.095	1.133	1.161	1.185	1.206	1.286	1.394	1.472	1.536	1.590
$h_{p2}$	0.0133	0.0267	0.0400	0.0533	0.0667	0.1333	0.2667	0.4000	0.5333	0.6667
$S_{IV}$	0.2									
$S_I$	708.9	391.1	280.9	224.1	189.2	116.1	76.1	61.65	54.00	49.22
$S_{II}$	-10.28	-5.22	-2.75	-1.14	0.05	3.70	7.73	10.60	13.02	15.20
$S_{III}$	-0.900	-0.996	-1.047	-1.072	-1.080	-0.953	-0.246	0.833	2.187	3.774
$S_V$	0.261	0.344	0.398	0.437	0.466	0.550	0.666	0.895	1.317	1.980
$S_{Ip}$	-0.0030	-0.0037	-0.0035	-0.0030	-0.0023	0.00001	-0.0039	0.0089	0.0889	0.2944
$r_1$	-0.0632	-0.0897	-0.1102	-0.1276	-0.1430	-0.2040	-0.2921	-0.3611	-0.4203	-0.4732
$r_2$	-0.0620	-0.0874	-0.1067	-0.1229	-0.1371	-0.1922	-0.2685	-0.3258	-0.3732	-0.4144
$h_2$	1.105	1.148	1.181	1.209	1.233	1.327	1.456	1.554	1.634	1.704
$h_{p2}$	0.0133	0.0267	0.0400	0.0533	0.0667	0.1333	0.2667	0.4000	0.5333	0.6667
$S_{IV}$	0.1									
$S_I$	888.1	491.1	353.3	282.3	238.5	146.9	96.9	78.8	69.31	63.39
$S_{II}$	-8.04	-3.03	-0.54	1.11	2.34	6.22	10.67	13.89	16.62	19.09
$S_{III}$	-1.223	-1.302	-1.333	-1.337	-1.323	-1.085	-0.146	1.162	2.738	4.533
$S_V$	0.280	0.364	0.417	0.455	0.483	0.567	0.697	0.964	1.440	2.160
$S_{Ip}$	-0.0027	-0.0032	-0.0028	-0.0022	-0.0015	-0.00005	-0.0038	0.0165	0.1108	0.3314
$r_1$	-0.0577	-0.0816	-0.1000	-0.1155	-0.1291	-0.1826	-0.2582	-0.3162	-0.3651	-0.4082
$r_2$	-0.0577	-0.0816	-0.1000	-0.1155	-0.1291	-0.1826	-0.2582	-0.3162	-0.3651	-0.4082
$h_2$	1.115	1.163	1.200	1.231	1.258	1.365	1.516	1.632	1.730	1.816
$h_{p2}$	0.0133	0.0267	0.0400	0.0533	0.0667	0.1333	0.2667	0.4000	0.5333	0.6667
$S_{IV}$	0.0									
$S_I$	1078.4	598.1	431.2	345.1	292.1	181.0	120.3	98.5	87.1	80.0
$S_{II}$	-5.16	-0.33	2.11	3.77	5.04	9.11	13.98	17.59	20.69	23.49
$S_{III}$	-1.538	-1.595	-1.603	-1.585	-1.547	-1.189	-0.009	1.535	3.339	5.349
$S_V$	0.295	0.381	0.434	0.470	0.498	0.576	0.726	1.035	1.564	2.340
$S_{Ip}$	-0.0025	-0.0027	-0.0023	-0.0016	-0.0010	-0.0002	-0.0031	0.0248	0.1322	0.3655
$r_1$	-0.0534	-0.0753	-0.0919	-0.1059	-0.1182	-0.1659	-0.2322	-0.2821	-0.3235	-0.3596
$r_2$	-0.0543	-0.0770	-0.0946	-0.1094	-0.1226	-0.1746	-0.2496	-0.3082	-0.3583	-0.4030
$h_2$	1.125	1.177	1.217	1.252	1.282	1.402	1.574	1.708	1.824	1.927
$h_{p2}$	0.0133	0.0267	0.0400	0.0533	0.0667	0.1333	0.2667	0.4000	0.5333	0.6667
$S_{IV}$	-0.1									
$S_I$	1281.3	712.6	514.9	412.9	350.1	218.7	146.7	120.9	107.6	99.4
$S_{II}$	-1.74	2.81	5.18	6.83	8.11	12.36	17.68	21.72	25.22	28.41
$S_{III}$	-1.845	-1.877	-1.861	-1.817	-1.754	-1.270	0.161	1.950	3.988	6.221
$S_V$	0.310	0.396	0.448	0.483	0.509	0.584	0.758	1.108	1.689	2.520
$S_{Ip}$	-0.0023	-0.0024	-0.0018	-0.0012	-0.0006	0.0005	-0.0021	0.0335	0.1528	0.3969

(續表)

$n=1.6$										
$d$	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$r_1$	-0.0831	-0.1186	-0.1463	-0.1699	-0.1909	-0.2755	-0.4008	-0.5016	-0.5899	-0.6702
$r_2$	-0.0796	-0.1116	-0.1357	-0.1558	-0.1733	-0.2402	-0.3302	-0.3957	-0.4487	-0.4937
$h_2$	1.090	1.126	1.154	1.176	1.196	1.272	1.374	1.448	1.508	0.1359
$h_{p2}$	0.0125	0.0250	0.0375	0.0500	0.0625	0.1250	0.250	0.375	0.500	0.625
$S_{IV}$	0.2									
$S_I$	491.3	272.3	196.2	156.9	132.8	82.1	54.38	44.20	38.97	35.63
$S_{II}$	-11.90	-7.20	-4.96	-3.53	-2.48	0.60	3.83	6.03	7.87	9.49
$S_{III}$	-0.485	-0.596	-0.668	-0.717	-0.751	-0.785	-0.487	0.098	0.894	1.864
$S_V$	0.250	0.335	0.392	0.435	0.468	0.566	0.659	0.776	0.991	1.342
$S_{Ip}$	-0.0036	-0.0049	-0.0052	-0.0049	-0.0044	-0.0010	-0.0017	-0.0041	0.0181	0.0987
$r_1$	-0.0739	-0.1049	-0.1289	-0.1493	-0.1673	-0.2387	-0.3419	-0.4229	-0.4923	-0.5545
$r_2$	-0.0725	-0.1021	-0.1246	-0.1435	-0.1601	-0.2244	-0.3133	-0.3800	-0.4352	-0.4831
$h_2$	1.101	1.143	1.174	1.200	1.224	1.314	1.438	1.532	1.609	1.676
$h_{p2}$	0.0125	0.0250	0.0375	0.0500	0.0625	0.1250	0.250	0.375	0.500	0.625
$S_{IV}$	0.1									
$S_I$	624.7	346.8	250.1	200.3	169.6	105.2	69.9	57.18	50.45	46.28
$S_{II}$	-10.97	-6.13	-3.79	-2.28	-1.16	2.17	5.75	8.24	10.32	12.17
$S_{III}$	-0.762	-0.866	-0.927	-0.965	-0.987	-0.951	-0.500	0.243	1.19	2.30
$S_V$	0.270	0.358	0.415	0.457	0.489	0.582	0.678	0.815	1.06	1.448
$S_{Ip}$	-0.0033	-0.0043	-0.0043	-0.0039	-0.0033	-0.0004	-0.0025	-0.0022	0.0281	0.1195
$r_1$	-0.0671	-0.0949	-0.1162	-0.1342	-0.1500	-0.2121	-0.3000	-0.3674	-0.4242	-0.4743
$r_2$	-0.0671	-0.0949	-0.1162	-0.1342	-0.1500	-0.2121	-0.3000	-0.3674	-0.4242	-0.4743
$h_2$	1.112	1.158	1.193	1.223	1.250	1.353	1.500	1.612	1.707	1.790
$h_{p2}$	0.0125	0.0250	0.0375	0.0500	0.0625	0.1250	0.250	0.375	0.500	0.625
$S_{IV}$	0.0									
$S_I$	766.6	426.6	308.3	247.2	209.6	130.6	87.5	71.9	63.81	58.80
$S_{II}$	-9.54	-4.66	-2.27	-0.71	0.45	4.00	7.95	10.74	13.09	15.20
$S_{III}$	-1.032	-1.126	-1.175	-1.199	-1.207	-1.095	-0.484	0.420	1.52	2.791
$S_V$	0.288	0.377	0.435	0.476	0.507	0.596	0.695	0.853	1.13	1.555
$S_{Ip}$	-0.0031	-0.0038	-0.0036	-0.0031	-0.0025	-0.0001	-0.0029	0.0005	0.0383	0.1391
$r_1$	-0.0617	-0.0870	-0.1063	-0.1225	-0.1367	-0.1918	-0.2684	-0.3259	-0.3738	-0.4153
$r_2$	-0.0628	-0.0891	-0.1094	-0.1266	-0.1419	-0.2022	-0.2891	-0.3570	-0.4151	-0.4670
$h_2$	1.121	1.172	1.211	1.245	1.274	1.391	1.559	1.690	1.803	1.903
$h_{p2}$	0.0125	0.0250	0.0375	0.0500	0.0625	0.1250	0.250	0.375	0.500	0.625
$S_{IV}$	-0.1									
$S_I$	917.2	511.9	370.7	297.8	252.9	158.6	107.2	88.8	79.2	73.3
$S_{II}$	-7.68	-2.84	-0.44	1.14	2.35	6.10	10.42	13.54	16.20	18.59
$S_{III}$	-1.297	-1.377	-1.412	-1.421	-1.413	-1.221	-0.443	0.627	1.893	3.312
$S_V$	0.303	0.394	0.451	0.492	0.522	0.607	0.713	0.894	1.203	1.662
$S_{Ip}$	-0.0028	-0.0033	-0.0031	-0.0025	-0.0019	-0.0000	-0.0033	0.0036	0.0487	0.1575

(續表)

$n=1.7$										
$d$	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$r_1$	-0.0956	-0.1365	-0.1684	-0.1956	-0.2199	-0.3175	-0.4625	-0.5795	-0.682	-0.7754
$r_2$	-0.0914	-0.1280	-0.1556	-0.1786	-0.1986	-0.2751	-0.3777	-0.4522	-0.5123	-0.5632
$h_2$	1.086	1.121	1.147	1.168	1.187	1.259	1.356	1.426	1.483	1.531
$h_{p2}$	0.0118	0.0235	0.0353	0.0471	0.0588	0.1176	0.2353	0.3529	0.4706	0.5882
$S_{IV}$	0.2									
$S_I$	360.3	200.6	145.08	116.37	98.68	61.51	41.095	33.66	29.72	27.26
$S_{II}$	-12.14	-7.85	-5.835	-4.558	-3.634	-0.978	1.693	3.468	4.917	6.196
$S_{III}$	-0.192	-0.305	-0.383	-0.441	-0.486	-0.597	-0.516	-0.202	0.279	0.896
$S_V$	0.239	0.324	0.382	0.427	0.463	0.573	0.668	0.743	0.861	1.058
$S_{IP}$	-0.0040	-0.0085	-0.0065	-0.0067	-0.0065	-0.0031	-0.0002	-0.0040	-0.0016	0.0273
$r_1$	-0.0842	-0.1196	-0.1469	-0.1701	-0.1906	-0.2721	-0.3899	-0.4825	-0.5619	-0.6330
$r_2$	-0.0825	-0.1162	-0.1418	-0.1633	-0.1822	-0.2552	-0.3562	-0.4319	-0.4944	-0.5486
$h_2$	1.098	1.138	1.168	1.193	1.216	1.303	1.422	1.512	1.586	1.6505
$h_{p2}$	0.0118	0.0235	0.0353	0.0471	0.0588	0.1176	0.2353	0.3529	0.4706	0.5882
$S_{IV}$	0.1									
$S_I$	465.29	259.25	187.54	150.47	127.67	79.70	53.40	43.86	38.83	35.71
$S_{II}$	-11.96	-7.42	-5.26	-3.89	-2.89	0.0187	3.01	5.02	6.671	8.13
$S_{III}$	-0.434	-0.546	-0.619	-0.671	-0.709	-0.775	-0.586	-0.158	0.436	1.162
$S_V$	0.260	0.349	0.408	0.453	0.488	0.593	0.683	0.766	0.904	1.125
$S_{IP}$	-0.0037	-0.0052	-0.0056	-0.0055	-0.0051	-0.0018	-0.0007	-0.0044	0.0022	0.0384
$r_1$	-0.0759	-0.1074	-0.1315	-0.1519	-0.1698	-0.2401	-0.3396	-0.4159	-0.4802	-0.5369
$r_2$	-0.0759	-0.1074	-0.1315	-0.1519	-0.1698	-0.2401	-0.3396	-0.4159	-0.4802	-0.5369
$h_2$	1.108	1.153	1.188	1.217	1.243	1.343	1.485	1.594	1.686	1.767
$h_{p2}$	0.0118	0.0235	0.0353	0.0471	0.0588	0.1176	0.2353	0.3529	0.4706	0.5882
$S_{IV}$	0.0									
$S_I$	576.8	322.08	233.28	187.42	159.16	99.79	67.29	55.56	49.43	45.65
$S_{II}$	-11.35	-6.66	-4.41	-2.965	-1.905	1.231	4.535	6.799	8.67	10.33
$S_{III}$	-0.670	-0.777	-0.844	-0.888	-0.917	-0.933	-0.633	-0.088	0.621	1.457
$S_V$	0.279	0.370	0.430	0.4745	0.509	0.609	0.697	0.790	0.947	1.192
$S_{IP}$	-0.0035	-0.0046	-0.0049	-0.0046	-0.0041	-0.0010	-0.0013	-0.0041	0.0067	0.0495
$r_1$	-0.0696	-0.0981	-0.1198	-0.1380	-0.1540	-0.2161	-0.3022	-0.3669	-0.4206	-0.4673
$r_2$	-0.0708	-0.1005	-0.1234	-0.1428	-0.1600	-0.2280	-0.3261	-0.4028	-0.4685	-0.5272
$h_2$	1.118	1.168	1.206	1.239	1.267	1.381	1.545	1.673	1.783	1.881
$h_{p2}$	0.0118	0.0235	0.0353	0.0471	0.0588	0.1176	0.2353	0.3529	0.4706	0.5882
$S_{IV}$	-0.1									
$S_I$	695.17	389.11	282.38	227.25	193.26	121.87	82.86	68.88	61.64	57.23
$S_{II}$	-10.38	-5.611	-3.301	-1.803	-0.694	2.647	6.272	8.806	10.923	12.812
$S_{III}$	-0.901	-1.002	-1.06	-1.095	-1.114	-1.077	-0.659	0.0054	0.831	1.779
$S_V$	0.296	0.389	0.449	0.493	0.527	0.622	0.709	0.814	0.990	1.259
$S_{IP}$	-0.0033	-0.0042	-0.0042	-0.0039	-0.0033	-0.0005	-0.0018	-0.0034	0.0116	0.0602



(續表)

$n=1.8$										
$d$	0.02	0.04	0.06	0.08	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$r_1$	-0.1079	-0.1542	-0.1902	-0.2211	-0.2485	-0.3593	-0.5240	-0.6572	-0.7741	-0.8808
$r_2$	-0.1029	-0.1442	-0.1752	-0.2011	-0.2235	-0.3093	-0.4240	-0.5072	-0.5741	-0.6308
$h_2$	1.082	1.115	1.140	1.161	1.179	1.247	1.339	1.406	1.459	1.505
$h_{p2}$	0.01111	0.0222	0.0333	0.0444	0.0555	0.1111	0.2222	0.3333	0.4444	0.5555
$S_{IV}$	0.2									
$S_I$	275.35	154.08	111.78	89.91	76.41	48.00	32.35	26.64	23.61	21.72
$S_{II}$	-11.814	-7.927	-6.111	-4.97	-4.15	-1.830	0.434	1.906	3.094	4.136
$S_{III}$	0.0222	-0.0869	-0.165	-0.226	-0.276	-0.424	-0.465	-0.311	-0.021	0.380
$S_V$	0.228	0.311	0.370	0.416	0.453	0.572	0.677	0.737	0.810	0.927
$S_{Ip}$	-0.0044	-0.0066	-0.0078	-0.0083	-0.0084	-0.0056	-0.0002	-0.0018	-0.0049	0.0025
$r_1$	-0.0941	-0.1337	-0.1642	-0.1902	-0.2132	-0.3044	-0.4364	-0.5402	-0.6293	-0.7091
$r_2$	-0.0922	-0.1298	-0.1584	-0.1824	-0.2034	-0.2849	-0.3974	-0.4816	-0.5512	-0.6115
$h_2$	1.094	1.133	1.162	1.187	1.208	1.292	1.407	1.494	1.565	1.627
$h_{p2}$	0.01111	0.0222	0.0333	0.0444	0.0555	0.1111	0.2222	0.3333	0.4444	0.5555
$S_{IV}$	0.1									
$S_I$	361.44	202.07	146.55	117.91	100.18	62.93	42.47	35.04	31.13	28.69
$S_{II}$	-12.111	-7.893	-5.918	-4.672	-3.77	-1.194	1.361	3.04	4.399	5.591
$S_{III}$	-0.192	-0.304	-0.381	-0.446	-0.484	-0.603	-0.5658	-0.326	0.0514	0.537
$S_V$	0.250	0.333	0.399	0.445	0.482	0.596	0.693	0.755	0.837	0.971
$S_{Ip}$	-0.0040	-0.0059	-0.0067	-0.0069	-0.0068	-0.0037	-0.0000	-0.0028	-0.0042	0.0079
$r_1$	-0.08433	-0.1192	-0.1461	-0.1687	-0.1886	-0.2667	-0.3771	-0.4619	-0.5333	-0.5963
$r_2$	-0.08433	-0.1192	-0.1461	-0.1687	-0.1886	-0.2667	-0.3771	-0.4619	-0.5333	-0.5963
$h_2$	1.105	1.149	1.183	1.211	1.236	1.333	1.471	1.577	1.667	1.745
$h_{p2}$	0.01111	0.0222	0.0333	0.0444	0.555	0.1111	0.2222	0.3333	0.4444	0.5555
$S_{IV}$	0.0									
$S_I$	452.47	254.20	184.02	148.10	125.99	79.417	53.89	44.68	39.86	36.90
$S_{II}$	-12.007	-7.588	-5.479	-4.146	-3.180	-0.380	2.460	4.35	5.897	7.256
$S_{III}$	-0.4013	-0.513	-0.586	-0.640	-0.68	-0.765	-0.646	-0.318	0.147	0.717
$S_V$	0.270	0.361	0.423	0.469	0.506	0.615	0.707	0.771	0.866	1.015
$S_{Ip}$	-0.0038	-0.0053	-0.0059	-0.0059	-0.0056	-0.0025	-0.0002	-0.0034	-0.0027	0.0138
$r_1$	-0.0770	-0.1084	-0.1324	-0.1526	-0.1702	-0.2388	-0.3339	-0.4053	-0.4646	-0.5161
$r_2$	-0.0783	-0.1112	-0.1365	-0.1580	-0.1770	-0.2524	-0.3610	-0.4460	-0.5188	-0.5839
$h_2$	1.1155	1.164	1.201	1.233	1.261	1.372	1.5325	1.658	1.765	1.861
$h_{p2}$	0.01111	0.0222	0.0333	0.0444	0.0555	0.1111	0.2222	0.3333	0.4444	0.5555
$S_{IV}$	-0.1									
$S_I$	549.35	308.34	224.20	180.77	153.92	97.53	66.791	55.65	49.93	46.46
$S_{II}$	-11.60	-7.012	-4.823	-3.425	-2.402	0.602	3.719	5.847	7.593	9.140
$S_{III}$	-0.606	-0.714	-0.783	-0.832	-0.866	-0.914	-0.709	-0.291	0.262	0.919
$S_V$	0.287	0.381	0.443	0.489	0.525	0.631	0.717	0.788	0.895	1.059
$S_{Ip}$	-0.0036	-0.0048	-0.0052	-0.0050	-0.0046	-0.0016	-0.0005	-0.0037	-0.0008	0.0197

田

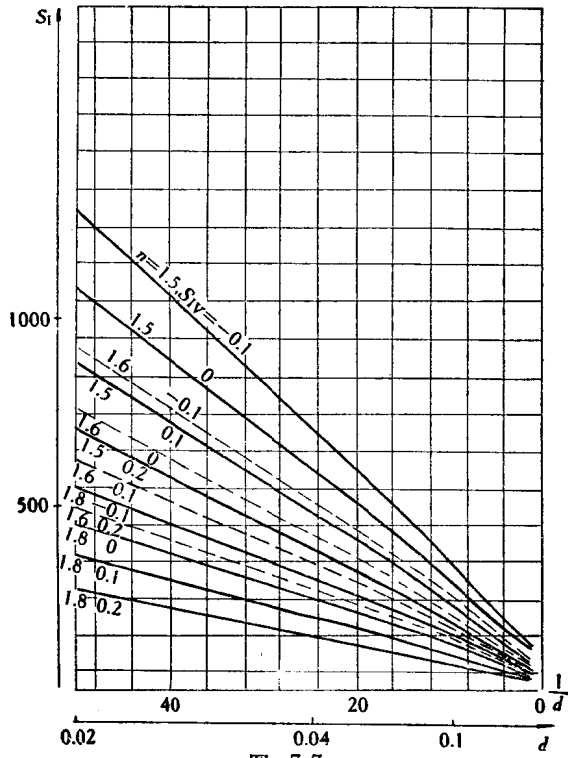


图 7.7a

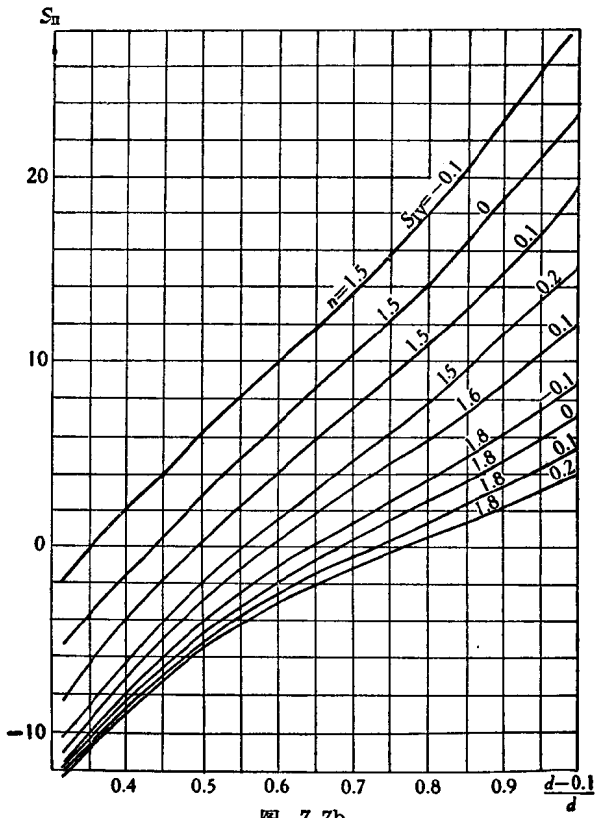


图 7.7b

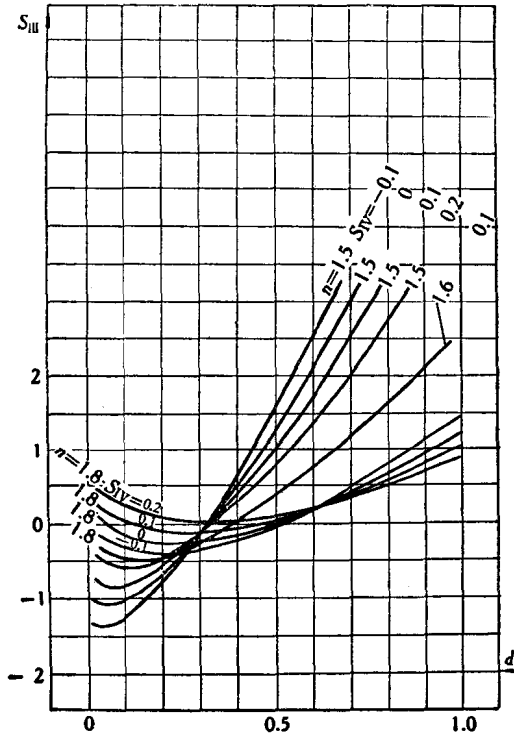


图 7.7c

§ 6.2 校正色差的厚透镜, 球差校正板

就如同一材料的分离薄透镜可以消色差一样, 单厚透镜也可以作成消色差的, 但是它和分离薄透镜一样, 不能把实物体成出实象。首先考虑对无限远物体消色差, 如图 7.6a 所示, 此时由公式(47), (48)得:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \sum h n i \left( \frac{\delta n'}{n'} - \frac{\delta n}{n} \right), \\
 &= \sum h \frac{u' - n}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}} \left( \frac{\delta n'}{n'} - \frac{\delta n}{n} \right), \\
 &= \frac{\delta n}{n} \left\{ \frac{n-1}{1 - \frac{1}{n}} \left[ \frac{n-1}{nr_1} + \left( 1 - \frac{d(n-1)}{nr_1} \right) \left( 1 - \frac{n-1}{nr_1} \right) \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{v} \left\{ 1 - \frac{d(n-1)}{nr_1} \left( 1 - \frac{n-1}{nr_1} \right) \right\}. \tag{54}
 \end{aligned}$$

如  $C_1=0$ , 即得

$$d = \frac{nr_1}{(n-1)\left(1 - \frac{n-1}{nr_1}\right)}. \quad (55)$$

由  $\frac{\partial d}{\partial r_1} = 0$  可得  $d$  的极小值等于 4, 此时  $r_1 = 2 \frac{n-1}{n}$ . 既然  $d > 4$ , 它就是一个形成虚焦点的系統而且厚度过长, 因之是没有实用价值的. 这就是說  $f' = 1, u_1 = 0$  时不能作出有实际意义的消色厚透鏡.

当  $f' = -1$  亦即  $u'_2 = -1$  时, 仍由上列演算方式可得:

$$-1 = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{d(n-1)^2}{nr_1r_2}, \quad (56)$$

$$C_1 = \frac{1}{\nu} \left[ -1 + \frac{d(n-1)}{nr_1} \left(1 + \frac{n-1}{nr_1}\right) \right], \quad (57)$$

故当  $C_1=0$  时, 必須有:

$$d = \frac{nr_1}{(n-1)\left(1 + \frac{n-1}{nr_1}\right)} = \frac{1}{(1+u'_1)u'_1}. \quad (58a)$$

于是  $d$  的极小值等于  $-4$ , 此时不难得出  $d$  很小的解. 当  $r_1$  很小以致  $d$  很小时, (58a) 式中  $\frac{n-1}{nr_1}$  比 1 大得多, 略去 1 即得:

$$d \doteq \left(\frac{nr_1}{n-1}\right)^2 = \frac{1}{u'^2_1}. \quad (58b)$$

利用这种消色差校正板产生的負球差与反射鏡的正球差相抵消即所謂 *Максутов* 系統. 可以算出滿足 (58) 式的一系列厚透鏡所产生的球差和彗差并列出其图表, 由这种图表即不难作出 *Максутов* 系統的設計. 当不要求  $C_1=0$  时,  $d$  和  $C_1$  的关系可由 (57) 式得出:

$$d = \frac{(1+\nu C_1)nr_1}{(n-1)\left(1 + \frac{n-1}{nr_1}\right)} = \frac{1+\nu C_1}{u'_1(1+u'_1)}. \quad (58c)$$

对于不太厚的校正板, *Максутов* 由大量計算的結果得出一組經驗公式<sup>[2]</sup>, 这組經驗公式只是对于单个反射鏡产生的象差而言的, 假若列出的是厚透鏡的象差表, 則应用的普遍性会更大些.

为校正单反射鏡的象差而采用同心校正板时, 可校正球差而且同时使彗差、象散为零, 因之軸外质量更好. 但色差則一般須用等折射率胶合的方法才能除去. *Bowers* 列出了这种情况下的計算結果<sup>[3]</sup>.

滿足(56), (58)式的結構只有在物距无限远时才是消色差的, 当物距在近距离时須另作考虑.

令收斂光束中的厚透鏡初級色差按下列規化条件計算:

$$l_1=1, \quad u_1=1, \quad l_1u_1=1,$$

以  $u'_1$  为参数, 并写作  $u$ ;  $u'_2$  写作  $1+\Delta$ , 即  $\Delta=u'_2-u_1$  (即此厚透鏡所产生的偏角), 則

$$\begin{aligned} C_I &= \sum h \frac{u'-n}{\frac{1}{n}-\frac{1}{n'}} \left( \frac{\delta n'}{n'} - \frac{\delta n}{n} \right), \\ &= \frac{\frac{\delta n}{n}}{1-\frac{1}{n}} \{u-1+(1-du)(1+\Delta-u)\}, \\ &= \frac{1}{\nu} \{ \Delta - du(1+\Delta-u) \}, \end{aligned}$$

故  $d$  和  $C_I$  的关系是:

$$d = \frac{\Delta - \nu C_I}{u(1+\Delta-u)}. \quad (59)$$

确定  $u$ ,  $\Delta$ ,  $C_I$  后即可算出  $d$ , 此时的半徑是:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{1 - \frac{n}{n-1}(1-u)}, \\ r_2 &= \frac{(1-u + \nu C_I)(n-1)}{(1-u+\Delta)(nu-1-\Delta)}. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

## § 7 用厚透鏡与薄透鏡組合以校正象差

如前所述, 厚透鏡用于光学系統中的目的大都为校正  $S_{IV}$ , 由于相貼合的薄透鏡原則上不能校正  $S_{III}$ ,  $S_{IV}$ , 故在消象散系統中常以厚透鏡作为組成部分, 使用厚透鏡的复杂单元常可看作是上节的厚透鏡与无光焦度的薄透鏡的組合.

下面討論如何由一个厚透鏡与无光焦度薄透鏡組合成一个总焦距为 1 的校正各种象差的系統.

例 1. 校正  $S_I$ ,  $S_{III}$ .

对于对称型照相物鏡, 作半部的初步設計时只須校正  $S_I$ ,  $S_{III}$  (詳見本章 § 8). Planar 型照相物鏡設計中, 为簡便起見将无光焦度的薄透鏡之一与厚透鏡相貼合而为一, 这就限制了設計的可能性——不能校正  $S_I$  或沒有合适的校正  $S_{III}$  的光栏位置.

使用一般的无光焦度薄透镜，原则上可以选取合适的  $P, W$  值，使在校正  $S_I$  的同时使校正  $S_{III}$  的光阑处在预先要求的位置。

以  $S_{I0}, S_{II0}, S_{III0}$  分别表示厚透镜的象差值。以  $P, W$  表示无光焦度薄透镜的特性，则组合的象差是：

$$\left. \begin{aligned} S_I &= S_{I0} + hP, \\ S_{II} &= S_{II0} + h_p P + jW, \\ S_{III} &= S_{III0} + \frac{h_p^2}{h} P + 2j \frac{h_p}{h} W. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

若预先要求： $S_I = 0, S_{III}^* = 0 (-l_{i1}^* = A)$ ，则由于

$$-l_{i1}^* = h_{p1}^* = \frac{\Delta h_{p1}}{h_1} = A, \quad (62)$$

得：

$$\left. \begin{aligned} hP &= -S_{I0}, \\ S_{III}^* &= A^2 S_I + 2AS_{II} + S_{III}, \\ &= 2AS_{II} + S_{III} = 0, \end{aligned} \right\}$$

即

$$\begin{aligned} 2A &= -\frac{S_{III}}{S_{II}}, \\ &= -\frac{S_{III0} - \frac{h_p^2}{h^2} S_{I0} + 2j \frac{h_p}{h} W}{S_{II0} - \frac{h_p}{h} S_{I0} + jW}, \end{aligned}$$

故

$$\bar{A} = \frac{\frac{1}{2} K_3 - \frac{1}{2} K_1 + W}{K_2 - K_1 + W}. \quad (63)$$

式中：

$$\left. \begin{aligned} \bar{A} &= -\frac{h}{h_p} A, \\ K_3 &= \frac{h}{h_p} S_{III0}, \\ K_2 &= S_{II0}, \\ K_1 &= \frac{h_p}{h} S_{I0}. \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

或

$$\left. \begin{aligned} W &= \frac{\bar{A}(K_2 - K_1) - \frac{1}{2}(K_3 - K_1)}{\bar{A} - 1}, \\ P &= -\frac{S_{I0}}{h}. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

这就是說对已定的厚透鏡和已定的光栏位置总可找出薄透鏡应有的  $P, W$  以使  $S_I, S_{III}$  同时等于零。当凸面和薄透鏡相貼合时,  $h = h_2, h_p = h_{p2}$ , 在表 3 中列出了各厚透鏡的  $h_2, h_{p2}$  之值。当凹面和薄透鏡貼合时,  $h = 1, h_p = 0$ , 上式簡化为:

$$\left. \begin{aligned} W &= \frac{2AS_{III0} + S_{III0}}{2A}, \\ P &= -S_{I0}. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

例 2. 同时校正  $S_I, S_{II}, S_{III}$ .

这个要求实质上就是要使  $A$  为任何数值时(光栏在任何位置时)  $S_{III}^* = 0$ , 即要求 (63) 式成为不定式。由 (63) 式的分子分母等于零而得:

$$W = -K_2 + K_1 = \frac{1}{2}(-K_3 + K_1), \quad (67)$$

即

$$K_3 - 2K_2 + K_1 = 0. \quad (68)$$

这表示只有滿足 (68) 式的厚透鏡才有达到此要求的可能。其中  $h/h_p$  是由薄透鏡位置而定的。

对  $h_p = 0$  的薄透鏡而言, 則要求变为:

$$\left. \begin{aligned} W &= S_{III0}, \\ S_{III0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

例 3. 校正  $S_{II}, S_{III}, S_V$ .

用薄透鏡校正两种象差毫无困难, 但为同时校正三种象差, 則必須要求原系統滿足一定条件方可, 現在也是如此。

校正  $S_{II}, S_{III}, S_V$ , 是一般目鏡的要求。在此若以光栏位置  $A$  [(4) 式] 作为变数, 則达到目的并无困难(三参数, 三要求), 但如又要求一定的光栏位置, 則厚透鏡須滿足一定要求。下面就来导出这种要求。

若

$$\left\{ \begin{aligned} S_V^* = 0 &= S_V + A(3S_{III} + S_{IV}) + 3A^2S_{II} + A^3S_I, \\ S_{III}^* + \frac{S_{IV}^*}{3} = 0 &= S_{III} + 2AS_{II} + S_I + \frac{S_{IV}}{3}, \\ S_{II}^* = 0 &= S_{II} + AS_I, \end{aligned} \right.$$

則

$$-A = \frac{S_{II}}{S_I} = \frac{S_{III} + \frac{S_{IV}}{3}}{S_{II}} = \frac{S_V}{S_{III} + \frac{S_{IV}}{3}}.$$

將  $S_{II}$ ,  $S_{III}$ ,  $S_{IV}$ ,  $S_V$  以  $S_{I0}$ ,  $S_{II0}$ ,  $S_{III0}$ ,  $S_{IV0}$ ,  $S_{V0}$  及  $P$ ,  $W$  表示即得:

$$\begin{aligned} -A &= \frac{S_{V0} + \frac{h_p^3}{h^2} P + 3 \frac{h_p^2}{h^2} W}{\left(S_{III0} + \frac{S_{IV0}}{3}\right) + \frac{h_p^2}{h} P + 2 \frac{h_p}{h} W} \\ &= \frac{\left(S_{III0} + \frac{S_{IV0}}{3}\right) + \frac{h_p^2}{h} P + 2 \frac{h_p}{h} W}{S_{II0} + h_p P + W} \\ &= \frac{S_{II0} + h_p P + W}{S_{I0} + h P}. \end{aligned}$$

即

$$\left. \begin{aligned} (S_{II0} + AS_{I0}) + (h_p + Ah)P + W &= 0, \\ \left(S_{III0} + \frac{S_{IV0}}{3} + AS_{II0}\right) + \frac{h_p}{h}(h_p + Ah)P + \frac{1}{h}(2h_p + Ah)W &= 0, \\ \left[S_{V0} + A\left(S_{III0} + \frac{S_{IV0}}{3}\right)\right] + \frac{h_p^2}{h^2}(h_p + Ah)P + \frac{h_p}{h^2}(3h_p + 2Ah)W &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

可見易于消去  $P$ ,  $W$ , 而得  $\bar{A}$ :

$$\left. \begin{aligned} \bar{A} &= \frac{K_5 - 2K'_3 + K_2}{K'_3 - 2K_2 + K_1}; \\ K_5 &= \frac{h^2}{h_p^2} S_{V0}, \\ K'_3 &= \frac{h}{h_p} \left(S_{III0} + \frac{S_{IV0}}{3}\right). \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

式中其他符号同(64)式.

如  $\bar{A}$  有預定值, 則厚透鏡的象差須滿足关系式(71).

为使  $\bar{A}$  是不太大的負值, 由前列厚透鏡表可見(71)式是得不到滿足的, 此时須再增加一組  $h_p = 0$  的无光焦度薄透鏡, 以产生負球差和正彗差(使  $K_1$  变負,  $K_2$  变正), 这样才能使光瞳处于透鏡外合适的位置.

例 4. 同时校正  $S_I$ ,  $S_{II}$ ,  $S_{III}$ ,  $S_V$ .

由(71)式, 这就要求

$$\begin{cases} K'_3 - 2K_2 + K_1 = 0, \\ K_5 - 2K'_3 + K_2 = 0, \end{cases}$$



即  $K_1, K_2, K'_3, K_5$  是等差级数, 根据表 3 和实际计算看来, 这个要求一般是做不到的。

上面的讨论是对一组贴合的薄透镜与厚透镜相组合而言的, 假若有两组不相贴合的无光焦度薄透镜同时用来校正象差, 那么由于变数增加, 这种要求是能够达到的。

厚透镜和薄透镜可以组合成多种可能的形式, 其中一些最简单的结构如图 7.8, 图中(a)是表示怎样的无光焦度薄透镜和厚透镜相组合, (b)是同一组合的实际形式。为了校正象差必要时还可以作出更复杂的组合。

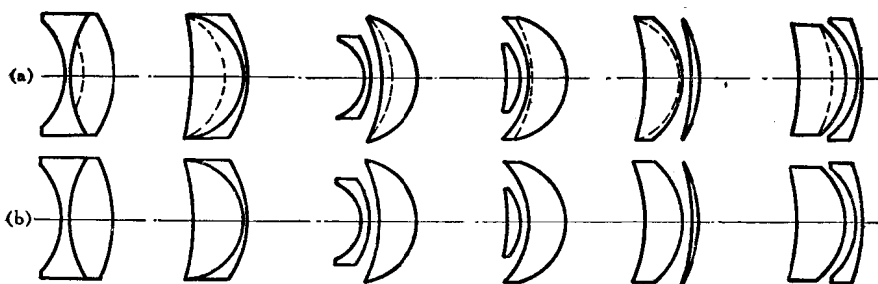


图 7.8

§8 对 称 型

光学设计者很早就已认识到对称性可以校正垂轴象差, 1860 年左右在照相物镜中就出现了双单透镜对称于光阑的组合以校正象差。

光学系统常常由于消除畸变而使透镜过于弯曲, 由 §5.2 就可以看出这点。要作出校正畸变的大视场光学系统是非常困难的, 此时高级畸变可达初级的 300%。但是采用对称结构时, 由于前半部产生的畸变与后半部恰相反, 畸变可以得到校正。粗略地说明如下: 假如一个折射面或一组折射面使某一条光线过分偏折的话, 那么按此光线射出的位置反向射入光线的话, 它也将是过分偏折的, 但偏折方向恰相反, 如图 7.9 所示, 因之组合的结果将使两种过分偏折相互抵偿, 使总效果是不过分偏折的。§3 中的伽利略望远镜也可以这样来理解, 解出的结果  $W$  愈大,  $P_0$  愈负则表示透镜愈弯曲且胶合面所起的校正板作用也愈大。可以看出, 光阑越向负透镜外移动则  $W$  越小同时  $P_0$  也变得愈正, 这就表示不用校正板且不

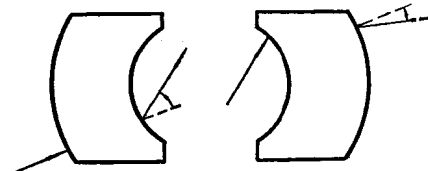


图 7.9

太弯曲的单透镜即可满足校正象差的要求。这种位置正就是光束被正透镜产生的过度偏折恰与负透镜的偏折相互补偿的位置，如图 7.10 所示，图中的箭头方向表示象差使光线方向偏离理想光路的趋向。

由上述可知，对称的概念是具有比较广泛的意义，用这种概念来分析光学系统的各部分，就有可能使光束结构由不对称校正到对称，这一点常是校正垂轴象差的主要方式。

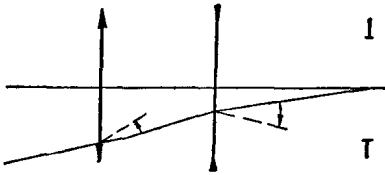


图 7.10

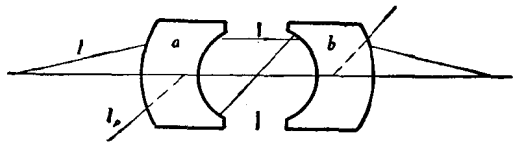


图 7.11

下面研究一个模型，即绝对对称型的初级象差问题，由于这个模型所具有的性质特别简单，它常成为设计的出发点。

当光学系统由完全相同的对称于光阑的两组组成，且物体和象也处在对称的共轭位置，亦即  $-1$  倍的位置（如图 7.11 所示）时，把两半的量分别标以下角标号  $a$  及  $b$ ，则在两半的各个对称面上有

$$r_a = -r_b,$$

$$l_a = -l'_b,$$

$$u_a = -u'_b,$$

$$u_{pa} = u'_{pb},$$

$$n_a = n'_b.$$

故

$$i_a = -i'_b, \quad i_{pa} = i'_{pb},$$

因此

$$[l u n i (i' - u) (i - i')]_a = [l u n i (i' - u) (i - i')]_b,$$

$$(i_p/i)_a = -(i_p/i)_b,$$

$$\left(\frac{n' - n}{n n' r}\right)_a = \left(\frac{n' - n}{n n' r}\right)_b,$$

$$[l u n i (i' - u) (i - i')]_{p, a} = [l u n i (i' - u) (i - i')]_{p, b}.$$

(下角标号  $p$  标志属于光阑的量。)

即:

$$\left. \begin{aligned} S_{I,a} &= S_{I,b}, \\ S_{II,a} &= -S_{II,b}, \\ S_{III,a} &= S_{III,b}, \\ S_{IV,a} &= S_{IV,b}, \\ S_{V,a} &= -S_{V,b}, \\ S_{Ip,a} &= S_{Ip,b}. \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

对于色差则因:

$$(\delta n)_a = (\delta n')_b,$$

故

$$\left. \begin{aligned} C_{I,a} &= C_{I,b}, \\ C_{II,a} &= -C_{II,b}. \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

将两半部象差相加, 则此对称型对于对称的物象位置而言, 轴向象差为半部的一倍而垂轴象差则等于零, 即

$$\left. \begin{aligned} S_I &= 2S_{I,b}, \\ S_{II} &= 0, \\ S_{III} &= 2S_{III,b}, \\ S_{IV} &= 2S_{IV,b}, \\ S_V &= 0, \\ S_{Ip} &= 2S_{Ip,b}, \\ C_I &= 2C_{I,b}, \\ C_{II} &= 0, \\ C_{Ip} &= 2C_{Ip,b}. \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

因此, 若半部对平行光束和一定的光栏位置校正了轴向象差, 则两半部对称于光栏而组成的对称型就完全校正了初级象差, 这种处理方式使校正象差变得容易了。

这样的对称型对于其他物体位置当然不是完全校正象差的。由 § 1.2c, 任意物体位置的象差可由物体移动量  $B$  决定; 即

$$\left. \begin{aligned} S_{Ip}^* &= S_{Ip}, \\ S_V^* &= BS_{Ip}, \\ S_{IV}^* &= S_{IV}, \\ S_{III}^* &= S_{III} + B^2 S_{Ip}, \\ S_{II}^* &= B(3S_{III} + S_{IV} + 2ju'_p u') + B^3 S_{Ip}, \\ S_I^* &= S_I + B^2(6S_{III} + 2S_{IV} + 6ju'_p u') + B^4 S_{Ip}; \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{I_p}^* &= C_{I_p}, \\ C_{II}^* &= BC_{I_p}, \\ C_I^* &= C_I + B^2 C_{I_p}. \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

现在来计算一种规范化情况下的象差以明确(75), (76)式中各量的意义. 设半部的焦距等于1, 平行光束入射到后半部的高度等于1, 则  $u' = 1$ ; 再令主光线入射到后半部时和轴夹角  $u_p = -1$ , 则  $j = 1$ ,  $\eta' = 1$ , 如图 7.12.

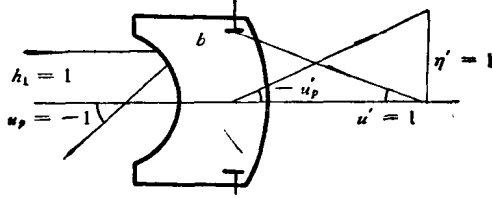


图 7.12

当物体移向无限远时,  $u^* = 0$ , 故  $B = \frac{\Delta u}{u_p} = \frac{0 - (-1)}{u_p} = \frac{1}{u_p}$ , 因之若入射此对称型的通过光栏边缘的平行光线在象空间和光轴夹角为  $u^{*'}$  则  $Bu_p' = u^{*'} - 1$ , 因为  $u_p = u_p'$ , 所以  $u^{*'} = 2$ . 入射高度  $h_1$  则因  $-h_1 u_{p1} = j = 1$ ,  $h_1 = -\frac{1}{u_p}$ , 故组合焦距  $f'$  是  $f' = -\frac{1}{2u_p'}$ . 因此  $u_p'$  可写作  $u_p' = -\frac{\varphi}{2}$ , 即  $B = -2f'$ . 此时(75), (76)式成为:

$$\left. \begin{aligned} S_{I_p}^* &= S_{I_p}, \\ S_V^* &= -2f' S_{I_p}, \\ S_{IV}^* &= S_{IV}, \\ S_{III}^* &= S_{III} + 2f'^2 S_{I_p}, \\ S_{II}^* &= 2 - 2f'(3S_{III} + S_{IV}) - 8f'^3 S_{I_p}, \\ S_I^* &= S_I - 12f' + 4f'^2(6S_{III} + 2S_{IV}) + 16f'^3 S_{I_p}; \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{I_p}^* &= C_{I_p}, \\ C_{II}^* &= -2f' C_{I_p}, \\ C_I^* &= C_I + 4f'^2 C_{I_p}. \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

由此可得一系列推论:

1. 欲校正对称型的畸变只须校正光栏球差  $S_{I_p}$ , 畸变随光栏球差而加大. 易于由光线光路观点证明, 这个结论对高级象差也适用, 光栏球差校正后余下的带球差就衍生带畸变.

2. 在光栏球差接近于零时, 校正了半部的象散  $S_{III, b}$  也就校正了整体的象散  $S_{III}^*$ .

3. 在  $3S_{III} + S_{IV} = 0$ ,  $S_{I_p} = 0$  时, 对称型对无限远物体有定值的彗差  $S_{II}^* = 2$ . 須注意这并不表示有很大的彗差, 因为这是在相对孔径  $1:0.25$  ( $u' = 2$ ) 时的  $S_{II}$ , 当相对孔径为  $1:2.5$  时,  $S_{II}$  仅  $0.02$ . 但是这表明, 绝对对称的光学系統一定具有小量彗差.

4. 当  $3S_{III} + S_{IV} = 0$ ,  $S_{I_p} = 0$  时,  $S_I$  宜为正值才能使  $S_I^* = 0$ , 即半部的球差  $S_{I_0}$  宜等于

$$6f' = -\frac{3}{u'_p}.$$

5.  $u'_p$  愈大則組合焦距愈短, 象差系数所代表的視場愈大(象差系数即为視場半角  $u'_p$ , 相对孔径  $0.25$  时的象差). 因之, 半部对光瞳的角倍率大于  $1$ , 則得到大視場系統的可能性大, 否則达到大視場是困难的. 由于正透鏡的角倍率小于  $1$ , 物体离透鏡愈远則倍率愈小, 反之, 負透鏡离光瞳愈远則角倍率愈大, 因之負光焦度在外的对称型达到大視場的可能性大.

## § 9 光学設計概論

在設計一个实用的光学系統时, 須先将使用要求归結为几点設計要求, 然后由具体的設計計算过程来实现这些要求. 首先須判定这些要求原則上是否可行, 亦即是否与几何光学与物理光学的基本定律相矛盾, 然后定出实现这些要求的方案, 亦即决定物面与光栏的位置、須要成象傳遞的次數、焦距和倍率等长度方向的量值范围以及孔径視場等直徑方向量值范围, 再决定所需要的成象范围和清晰度的要求. 一般而言設計方案对具体設計有决定性的意义. 不好的方案, 虽作了特別好的具体設計, 結果也仍然是不好的; 优良的方案也許只要求很简单的具体設計. 考虑方案的主要基础是高斯光学和物理光学的某些方面, 虽比象差理論简单, 但更重要. 这些問題在第二章各节已討論过.

由于光学設計的最終目的是要实现一个光学仪器, 因此在設計中也应考虑到仪器机械設計和工艺方面的問題, 以至装校調整的可能性. 一般情况下, 設計的初始要求是根据使用要求和机械結構的初步布置决定的, 但在光学設計完成后, 由于光学結構涉及复杂的象差校正問題, 一般不宜再加以改动. 机械設計应根据光学設計所定的要求进行.

在具体設計要求确定后, 光学設計工作中最主要的是拟定校正象差的步驟. 充分利用象差理論的概念和結果, 經過慎重考虑后决定正确的工作步驟, 这将使工作尽量少走弯路. 另一个重要問題是仔細分析計算結果的含意, 并作一些必要的补充計

算,使能得到明确肯定的結論. 这类似于物理学史上的一些判定性实验工作的情况,要求明确地判定是或非. 只能得出模棱两可的結論的計算工作是很少有价值的. 再有一个问题是充分利用已有的結果,通过比較来发现问题,一般來說这总是一个有效的方法.

从第二章已經看到高斯光学經常起到确定結構形式的作用,从而对具体的象差校正工作的难易有重大影响. 在高斯光学方面所作的具体分析在另一方面也决定了所提的要求是否可能. 如前所見,可能不可能的限制来自各个方面,如机械結構限制,如物理光学定律(即清晰度和亮度等),另外还有象差校正的可能性. 光学設計工作的主要工作量常在象差校正方面,而校正象差的要求并不是都能實現的. 这种不可能性有两类:一类是原則上不可能的,亦即違反光能傳播基本定律的. 另一类則属于技巧水平的限制. 已有的經驗和理論水平决定了某些要求易于实现,而某些則暂时很难实现,亦即离現有水平有很大距离. 但是,当結構思想巧妙而合理,突破了已有結構思想的某几方面的局限性时,光学系統的性能和质量发生数量級的突进也并非是不可能的.

### § 9.1 校正象差的可能性

光学仪器的作用在于将一定的光管轉变为另一光管. 在高斯光学可用的条件下,这种傳遞轉变特性由高斯光学决定. 但是实际上由于象差的存在,光綫經過光学系統后一般不再遵守共綫成象定律所决定的光路,这就是說象差将使光管的傳遞受影响. 它使光管內的光綫部分地越出高斯光学决定的光管,使一点发出的光綫不再聚焦于一点. 我們首先研究象差校正可能达到的完善程度.

#### A. 对整个物空間校正象差的可能性

对各个物面都理想的 optical 系統原則上是不存在的. 按現在所知,不可能的原因有二,首先是这个要求与光能傳播的基本定律相矛盾,由 Lagrange 不变量积分可得出两个相互垂直的綫段成象均为理想的条件——正弦条件和 Herschel 条件,此二条件相互矛盾. 此外,正弦条件又与无畸变的共綫成象要求——正切条件相矛盾,这两个矛盾在初級象差理論中都已用各种初級象差間关系的形式表达出来. 此外在初級象差的領域內我們还导出了很多其他象差間关系,这些关系應該都能推广成为更一般的說明各象面不能同时理想成象的定律. 下面先从 Lagrange 不变量出发对正弦条件与 Herschel 条件另作一个証明.

当物空間一点所发出的光束为光学系統在象空間焦聚于一点时,若要求垂直于

此光束軸綫的綫上的邻近点成象也理想，則此光束結構須滿足正弦条件，图 7.13 中  $A$  点是成象理想的点，成象大光束以  $OA$  为軸，若  $B$  点成象也理想，于是由 Lagrange 不变量：

$$n\eta \cos \theta \cdot d\theta = n'\eta' \cos \theta' d\theta'. \quad (79)$$

此处以  $\eta \cos \theta$  代替 (1.52) 式中的  $\eta$  是由于現在的綫段  $AB$  与所討論的元光束  $d\theta$  不垂直之故。若角度在  $O$  至  $\theta$  範圍內的光束都射到同一高度  $\eta'$  的点，則上式可积分得出：

$$n\eta \sin \theta = n'\eta' \sin \theta', \quad (80)$$

这就是正弦条件。

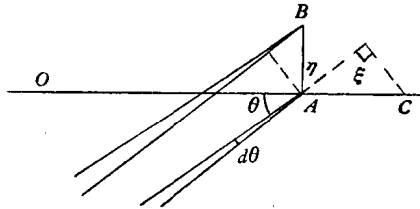


图 7.13

另一方面，假若我們要求光束軸上距离  $A$  点为  $\xi$  的点  $C$  成象理想，由图 7.13 可得：

$$n\xi \sin \theta d\theta = n'\xi' \sin \theta' d\theta',$$

于是积分得出：

$$\begin{aligned} n\xi(1 - \cos \theta) &= n'\xi'(1 - \cos \theta'), \\ n\xi \sin^2 \frac{\theta}{2} &= n'\xi' \sin^2 \frac{\theta'}{2}, \end{aligned} \quad (81)$$

这就是 Henschel 条件。

由正弦条件， $\theta$  和  $\theta'$  之間的关系必須使其正弦的比为定值常数，而由 Herschel 条件則要求  $\frac{\theta}{2}$  和  $\frac{\theta'}{2}$  的正弦之比为定值常数，因此凡垂軸綫段成象理想时軸向綫段一定成象不理想。在此，軸是任意选定的。

因此我們不能要求光学系統对整个空間成象理想，只能要求它对某一定物面成象理想。

上面的証明是在  $A$  点成象理想的条件下作出的，实际上对两点成象不理想但焦綫相似的情况也同样适用。

当然，上面的全部結果都是假設物象空間为均匀媒质时得到的，假若物象空間都由折射率連續变化的媒质构成，則这种理想系有可能存在，已有不少文献論及这个问题<sup>[4]</sup>。

## B. 同軸系統中校正象差的可能性

第九章将說明軸对称系統的优点，軸对称系統虽然好象减少了自由变数，但由此减少的要求数則更多，因此“軸对称”实际上是校正光学系統象差时费力少而收效大

的重要步骤。对于轴对称系统的初级象差我们已经知道它们之间存在的关系，我们现在就限于在 Seidel 区域内讨论轴对称系统校正象差的可能性。

由校正象差可能性的观点来看，第六章公式(VI. 60)中第一式和末式都表示正弦条件和正切条件相矛盾。即物面彗差校正时光瞳面畸变一般不可能等于零。再由(VI. 41)式，若此点球差彗差均为零，则对任一光阑位置彗差均为零，因之所有其他面均有畸变。(VI. 60)式还表示物面象散校正时光阑面恒有象散，这个关系实际上是邻主光线细光束高斯光学的普遍结果在 Seidel 区域的表示。再加上(VI. 41)式，则可知  $S_I = S_{II} = 0$  时  $S_{III}$  不变，因而空间其他点象散在此时有定值。由(VI. 41)，(VI. 60)式可见，若对一定物面有：

$$S_I = S_{II} = 3S_{III} + S_{IV} = S_V = 0,$$

则空间任何其他点的象差除  $S_I$  外均有恒定的不等于零的值，此值由  $u, u_p$  之值完全决定，与光学系统的结构无关。再由(VI. 77)式，其他各点的  $S_I$  还受光阑球差  $S_{I_p}$  的影响。

由(VI. 41)式可见一般可能有三个光阑位置使  $S_V = 0$ ，有两个光阑位置使  $S_{III} = 0$ ，有一个光阑位置使  $S_{II} = 0$ 。这些结论实际上都是可以由几何曲面性质直接导出的。

由(VI. 67)式及(VI. 77)式可见一般可能有四个物面上球差为零，三个物面上彗差为零等等，易于导出为使这些位置相互重迭对光学系统所须的严格要求；(VI. 77)式是正弦条件与 Herschel 条件相冲突这个普遍定律在 Seidel 区域的表现。

我们上面所作的全部讨论，其目的在于说明：按照几何光学的一般定律，各点的成像情况是相互关联的，由于这些关联我们已可肯定当此物面成像理想时另一物面成像不可能再理想。因此光学设计只能抛弃所有物面成像都理想的要求，也得抛弃几个物面同时成像理想的要求，认为这不是合理要求；光学系统只可能对某一定物面设计到尽可能理想，对几个物面都提出要求一般都不可能实现。既然对 Seidel 区域就已如此，超出 Seidel 区域的复杂讨论在此就没有必要了。

### C. 同轴系统对某一定物面成像理想的可能性

由于象差系数与光学系统结构间的关系极为复杂，即使在初级象差领域内也只有少数特例情况下才能把象差系数表示为结构元素的显函数形式，因此我们不能作出严格的有系统的讨论，而只能由某些特殊情况作一些不完整的推论。求出象差系数与光学系统结构的关系就是光学设计的全部任务，由于光学系统可能具有极为复杂多样的结构，这种讨论难以达到最后的终极。前面各节的内容就是解决这个问



題的方法实例。

## §9.2 象差校正方案的确定

所謂校正象差的方案就是由使用要求来确定应该对那一位置成象理想，或者应该校正什么象差的問題。

如前所述，理想的光学系統是沒有的，我們只能要求光学系統对某一定平面成出較理想的象。再因为被光学系統所傳遞的光管总可以看作是由两个平面区域所圍限的，既然光学系統只能对两平面位置之一成出較为理想的象，我們就不能不分別清楚：那一个位置应该成象清晰，那一个位置則比較次要，即它的成象清晰与否可以不加考虑。

在有些光学系統中這個問題的回答是簡單而明确的。如望遠鏡和顯微鏡的物鏡和目鏡以及照象物鏡等，它們当然应该使被观察瞄准的点成象清晰。望遠鏡物鏡应使无限远点在焦点上成清晰的象，目鏡应把它焦点上的象清晰地成到无限远处，反过來說也是一样。顯微鏡物鏡則应使一定的共軛点成象理想。但是，它們对圍限光管的另一平面——光瞳面的成象也并不是完全沒有要求的。关于光瞳应处的位置我們已經討論过了，我們在这里要說的是：光瞳位置的象差过大也将使光学系統不合用，它会使某些光綫进入眼瞳时另一些不能同时进入，如图 7.14。一般目鏡光瞳球差不大，這個問題虽不考虑也不致发生問題，但光瞳球差很大的可能性是存在的。

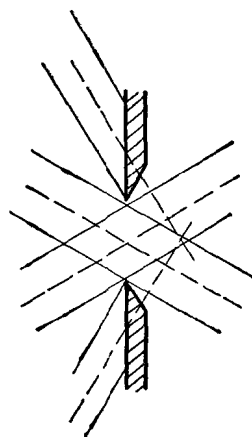


图 7.14

一般來說光瞳象差的存在会使光管亮度受到影响。在第十四章 § 2.3 中将討論象面照度和象差的关系。由初級象差理論可得出下列結論(第十四章 § 2.3)：光栏球差与 Petzval 和不会使軸外点的光瞳有效直徑变更而只使它发生一个位移；光栏彗差使圓形光栏形成橢圓形入瞳，可使軸外点入瞳面积增加(或减小)；光栏象散将使入瞳成三“角”形；光栏畸变則使入瞳直徑变大(或变小)。当光栏直徑不大时，影响軸外光束入瞳直徑的主要因素是彗差。当光栏靠近透鏡組时不可能产生大的光栏象差；有时为了故意得到大的光栏象差以使軸外点变亮，在物面和光栏之間应放有較远离光栏的透鏡組。

一般小視場光学系統中并无增减軸外点照度的必要，光栏又靠近透鏡組，故設計光学系統时不考虑光栏象差。首先利用光栏彗差使大視場照象物鏡軸外点亮度改善

的结构是苏联 M. M. Русинов 作出的,为了满足这类要求,我们在设计时应该把光瞳象差考虑在内。

对于其他很多光学系统来说,它们的目的是不全为观察或瞄准一定的物体,有时是为了由它看到特定的现象,遇到这种问题的时候我们只能个别地按照它们的特性,分别确定应该作怎样的象差校正或不需要校正象差,例如:

例 1. 一种为检查平面质量用的平面干涉仪对光学系统象差校正的要求。

如图 7.15 a,这是为观察标准平面 A 与被检平面 A' 间等厚干涉条纹,由条纹直

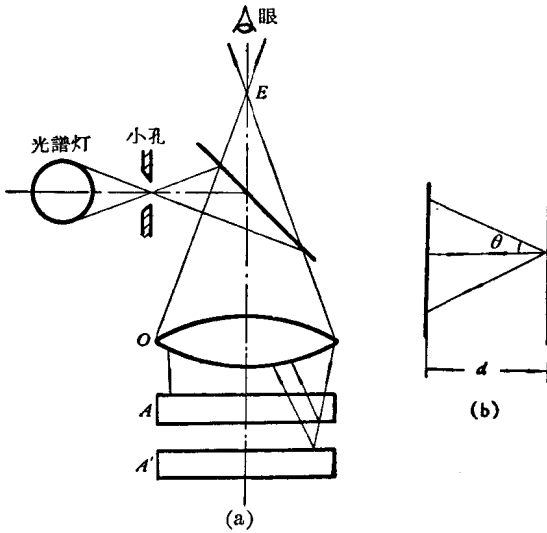


图 7.15

线性的程度确定被检平面质量的仪器。为了使条纹的直线或曲线能够真实地代表质量优劣,对物镜应该提出什么要求呢?首先,在两面上反射回来的光线不是由物镜上同一点接收的,因此若物镜有球差,以致从这两个位置入射的平面波的光程不同当然就影响到精度,但是这两点非常靠近,因之球差的差别亦即光程的差别不大,还不致引起严重影响。但是当然应该根据光线的分离量控

制球差在一定的范围以内,使球差的影响比允许的测量误差小得多。其次由于有球差,由物镜 O 射出的光线不相互平行,因之虽然二面相平行,但光线还是会有不同光程,由图 7.15 b 可见光程差为:

$$2d(\cos \theta - 1) \cong d\theta^2,$$

这程差应小于允许的测量误差,因之球差引起的角差  $\theta$  应该限制在一定范围内。一般而言,当  $\theta$  大时( $10^\circ$  左右)这一点才须严格限制。小孔的直径对此有同样影响,孔大时光束不平行将引起条纹不清晰。这就是等厚干涉要求单色光束等光程所引起的对球差的限制。除此之外,眼睛还通过物镜 O 来看到这组条纹,若 O 不合乎无畸变的正切条件,则原来是直线的也会被看作曲线,因此物镜 O 应对于光瞳 E、物体 A 校正好畸变(因等厚干涉条纹生成在 AA' 附近)。

例 2. 聚光镜。

聚光镜是为了使不发光的物体得到照明的光学系统,它应该满足两个要求:

(1) 使物面得到尽可能均匀的照明；(2) 使光管尽可能充满观察系统的入瞳和物面。后一要求是为有效利用光学系统所绝对必须的，不然虽然观察系统可以通过的光管 Lagrange 不变量很大，即本来可以通过大功率，但由于照明系统未满足后一要求而被缩减。这要求也可以表达为：光源和聚光镜所组成的光管的 Lagrange 不变量应大于或等于观察系统的 Lagrange 不变量；同时光管截面之一应与观察系统重合。至于第一个要求，在某些象面照度不要求均匀的场合是可以不满足的。

有时光源很大以致观察系统的光管完全可以包含在内，此时可以不用聚光镜，如图 7.16。可见光源越靠近物面则它的面积只须稍大于物面就可以了，但此时若光源各点亮度不等就会直接影响到物面照度不均匀。

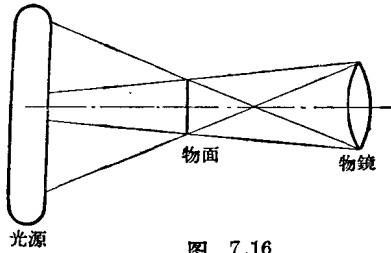


图 7.16

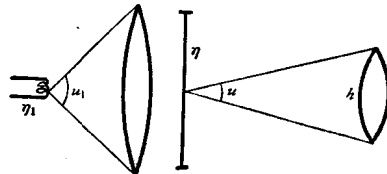


图 7.17

一般情况下灯丝不能太靠近物面(有灯泡壳)而且大小也不够大,这时就必须有一个适当的聚光系统才能得到光学系统所需的光管,如图 7.17。若物镜要求孔径角为  $u$ , 要求照亮的物高为  $\eta$ , 则如灯丝高度为  $\eta_1$ , 聚光镜孔径角为  $u_1$ , 由上述对 Lagrange 不变量的要求可知必须满足:

$$\eta_1 u_1 \geq \eta u.$$

聚光镜可以将  $\eta_1$  成象为  $\eta$ , 也可以将  $\eta_1$  成象为入瞳  $h$ , 前者使物面照度不均匀, 后者则照明均匀。很明显, 这种成象并无理想的要求, 但象差太大将使由  $\eta_1$  射出的能量不能通过入瞳  $h$ , 灯丝越大象差就越不重要, 当灯丝很小时象差可能使某些光束完全不能射入  $h$  从而使象面上一些点完全是暗的。如图 7.18,  $h$  是  $\eta_1$  的近轴光线象点, 但边缘光束由于球差, 却相交于  $h_M$  处。很明显, 象面边缘点就照不亮了。从图中也可以看出若  $\eta_1$  或  $h_M$  很大时就没有问题。这就是聚光镜球差不能太大的原故。

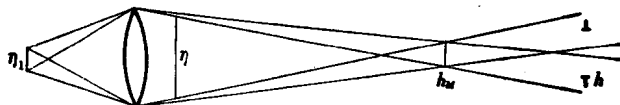


图 7.18

聚光鏡所轉換的光管兩端孔徑角有大有小，我們設計聚光鏡時應該使其中的大孔徑角端尽可能少產生球差，因為小孔徑角端就是不注意也不會有太大球差的。這就是聚光鏡設計的一般要求。

### § 9.3 校正象差的結構的選擇和有效參數

#### A. 同心系統

這是可能有的最簡單的系統，由於通過共同球心的直綫都可看做是光軸，因此所有的點都可以看做是軸上點，軸外點與軸上點無任何差別，因而唯一的象差是初級球差和高級球差。它的缺陷是象面彎曲——象面是以共同球心為中心的球面。面數無論增加多少，這個缺陷絕不會作一點改動，這種系統的軸外象點質量是所有其他系統所不能比擬的。為了使象面變平，我們只能在絕大多數情況下不運用同心系統，隨之而來的是要設法克服因而伴生的軸外點與軸上點的差別。如果存在着大量的軸外象差，那麼永遠也校正不到完善的地步。可以說：接近於同心的系統，軸外象差會少一些，根本不象同心樣子的系統中軸外象差肯定不會有好結果。

由於同心系統要解決的問題只是球差一種，因此它總是結構簡單而質量優越，實際存在並使用着的同心系統有：純反射式雙反射面顯微物鏡；以同心校正板校正反射鏡球差的大孔徑廣角望遠物鏡；X 光照象物鏡；小型、中型天文望遠鏡等。Schmidt 物鏡也可以算同心系統，它以處在球心的一塊薄薄的非球面校正板校正反射鏡的球差從而獲得了前所未有的成功。

#### B. 非球面

同軸球面的每個面都由其半徑一個參數所完全決定，而非球面則一個面可以起多個參數的作用。這樣一來好像用一個非球面就能解決所有象差要求似的，實際上當然不是如此。以單個非球面為例，它若能使某一定點成象理想，則面形也就完全決定了（初級、二級、三級以及更高級球差的要求就把面形方程式中所有方次的系數都完全確定了），因此它完全不能再照顧軸外象差。單個消球差的非球面（反射或折射面）無例外地都有大量彗差，拋物面的彗差使大望遠鏡只能使用小視場，雙反射面可以完善校正球差彗差，然而由於複雜的非球面加工困難，這種理想的機構一直未能實際應用。多用幾個非球面或許能控制住多種高級象差，但 Petzval 和是無論如何解決不了的。非球面製造工藝是個難以解決的問題。在大型的、必須用簡單結構（兩、三個折反射面）實現的場合（如天文望遠鏡和天文照象物鏡）廣泛使用了非球面。在雖非大型但已證明非用“它不能解決問題時，非球面也將有它的前途。現在，精度要求

不高的非球面已广泛使用在聚光鏡中，少量使用在目鏡中，偶然使用在照象物鏡中（校正航摄物鏡的小量剩余畸变），精确的非球面的使用还只有极少数特例。对于非球面下一章将作仔細討論。

### C. 单个球面折射面

当光栏处在球心时即为同心系統，它只有球差。光栏不在球心时軸外光束就受軸外象差影响，但这些軸外象差都可以看成是由球差所形成的。由球差形成的軸对称焦散面中取出一个局部，这个局部不再是軸对称的了，須用多个参数（軸外象差）来描述。这在討論由球面組成的各种复杂系統时是一个重要的概念。单球面在焦距一定时，孔径显然不能超出一定范围，这就是光学系統的相对孔径所以有限制的原因，也是大相对孔径一定导向复杂結構的原因。

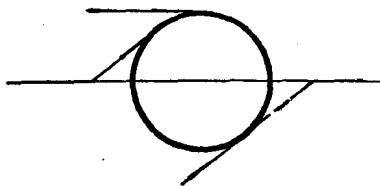


图 7.19

由图 7.19，当物距无限远时入射高度不可能大于半径，物距为負时高度只可能比半径小得多，当物距与半径同号时入射点超过半球也是可能的。当然在掠入射时高級象差一定很大，此时的入射角急剧变化，与近軸区域相比，同一高度增量所引起的变化量要大得多。这也說明大相对孔径的系統再想稍微增加一些相对孔径都是极困难的。这也說明为什么球面处在同向光束中时高級象差小些，处在反向光束中則大些。一般物点都在远处，可以用入射高度与半径之比（单折射面的相对孔径）来标志这个面的工作情况。一般來說，相对孔径不宜大于 0.5；超过 0.7 象差就难以平衡了（第三章）。

### D. 薄透鏡

球面系統中最简单的是单透鏡，虽然它有两个自由度，但它无论如何也不能校正球差（在焦距一定时只有一个一定的物体位置可能校正球差），但却可能对于一定光栏位置同时校正初級彗差和象散，这就是简单的照象物鏡。单透鏡也是所有其他光学系統的原始雛形。

双透鏡胶合消色組在以玻璃为变数时，可能同时校正球差和彗差，这就是最常用的望远物鏡。由于薄透鏡在校正球差彗差后象散恒为定值（由焦距完全决定），而 Petzval 和則是即使牺牲球差，彗差也不可能校正好的，因此单組透鏡无论如何不能构成大視場的物鏡。

用正負相互分离的两薄透鏡組合可以同时校正好所有的象差——例如远距摄影物鏡（正負透鏡分离）。双正透鏡系統則由于 Petzval 和不能校正故存在象散或者象

而是弯曲的。这类系统形势上很不同心，轴外高级象差（轴外球差、轴外彗差）大，所以总不是大视场系统。

根据透镜在光束中所处的地位和目的，适当选择其基本形状是很重要的 (§5)。

### E. 透镜组

由前面的叙述可见：使用透镜组的两个基本原因是校正 Petzval 和以及增大相对孔径。前者在总光焦度为正时要求正负光焦度分离，并使负透镜处在入射高度较低处，甚至异号处；当要求总光焦度为负时恰相反。后一要求则是由于单个折射面或单透镜只能负担一定量光焦度（偏角）的原故，使用多透镜就能平均负担光焦度。

厚透镜可以看作是二分薄透镜，其间充以非空气的介质。它的主要作用是校正 Petzval 和。

实际仪器中需要大孔径的光学系统，这就要求校正高级球差。为实现这个目的，用多组透镜适当组合是可能成功的，用反射面则更易于达到这个目的。

对称型、尤其是弯向光阑的对称型被广泛用作照象物镜。在这种情况下初级垂轴象差很小 (§8)，实际上在近对称的系统中高级垂轴象差也很小，或易于用稍失对称的方法校正，这一点尚未有理论上的恰当证明。虽然看来对称要求似乎使原来可以任意变更的自由参数数目受到限制而失去了一半，但是这种作法还是合算的，因为它使光束不对称的程度减弱了。

现有的光学系统绝大多数还不够复杂，考虑到二级象差时变数还少于要求数（要求数是：焦距、七个初级象差、十四级二级象差，共 22 个）。

在考虑光学系统时，考虑必须产生的偏角的量是很重要的。在照象物镜中光阑处在中心，因之光学系统对主光线根本不需产生偏角，考虑的重点就可以放在轴上光束的偏角上。显微镜物镜和望远镜物镜的视场小，因此注意力也可以完全放在轴上光束的偏角方面。对目镜来说情况完全不同，需要多个透镜组的原因是由于光瞳在系统之外，它必须对主光线产生大偏角的原故。它所以不象照相物镜那样易于得到大视场系统，是由于它对主光线而言，相对孔径太大了。因此在设计光学系统时应力求避免光瞳在系统之外的情况，这就是复杂光学系统需要场镜的原因（第二章 §4.4）。

在设计聚光镜时也要考虑两个方面的偏角，把注意力放在大偏角方面，从而选定聚光镜应有的形势安排。更具体来说，单透镜在产生偏角 0.3 时还不致产生很大的球差（因高级球差不大，球差尚未突然加大），在用作聚光镜时为了实现  $NA=0.3$  或相对孔径 1:1.6 用单透镜是可以的，但它应该处在球差极小位置。超出这个相对孔径时一般须用两透镜，两单透镜的球差比等光焦度的单透镜球差小四倍以上。

为成象理想,每个透鏡可用胶合組来代替。胶合面相当于一个象差校正板,能在产生不大的偏角时产生出很大的象差。为使残余带象差(或高級象差)减小,单組負担相对孔徑 1:1.6 是較少見的;或者說,这样的单組处在这种条件下一般不能給出高质量的象。高质量系統中单組負担的孔徑只为其一半左右,即相对孔徑 1:3 或  $NA=0.15$  左右。多个单透鏡組成的胶合組中,由于各个单透鏡的光焦度負担减小,因而与多組单透鏡相当,可以負担更大的偏角。

任何复杂的光学系統本质上就都是由这种单元組成的。因此,分析实现同一目的的各种可能方案的相对孔徑負担和分配的差别是很要紧的;当选定了光焦度分配之后,按負担的相对孔徑(光焦度)而选择用多少組透鏡也是重要的。

正透鏡組合的 Petzval 和永为正,当在所要求的視場中 Petzval 和超过容許值时就不能用,但  $NA$  小或者視場小时,单用正透鏡組合完全可以滿足要求。

在校正球差、彗差的单組薄透鏡中象散为定值,已不能校正,因之对于已定焦距分配的光学系統是否能用一組組同时校正球差和彗差的正透鏡胶合組来实现,不作出判断。如果光学系統是由很多正透鏡連貫地組合而成,就可預計累加后的 Petzval 和;再如象散又不能校正,則其影响又是可以預見的。如两者之和已超出容許值,則应設法使象散校正。例如兩組分离的  $1\times$  轉象系統,由于兩組分离其产生的象散就成为可控制的。于是我們又可以預先估計为保持象面弯曲为某定值时所必須殘留的象散量。若这样做之后还不合要求,我們就只能放弃全部用簡單双胶組和单透鏡的希望,而在某些适当的地方用比較复杂的結構,如用正負透鏡分离(例如三片照象物鏡)或月牙形厚透鏡(例如双高斯型照象物鏡)等代替正薄透鏡組,以期减少 Petzval 和。

上面的着眼点基本上是光軸附近的点,着重在偏角的产生及其后效上。但是有些系統的軸上光束并不需要很大相对孔徑,却要求軸外大視場光束能够很好地聚斂,这就要求把光瞳作为物体那样对待,应该使各折射面对主光綫产生均匀的偏角,有可能的話至少产生偏角。拿这种观点去看待照象物鏡和目鏡的差别是恰当的。目鏡产生的偏角一定比視場角大,而照相物鏡却由于光瞳位置合适,可以只产生很少偏角或不产生偏角(当光瞳和主面重合时)。但是光瞳与光学系統主面重合也并不說明主光綫从未偏折,它是由數次相反的偏折而相消的。为了使透鏡处在軸外象差极小位置,透鏡应向光栏作适当弯曲,使主光綫至少作任何偏折。目鏡中不能避免这种偏折,它一定要把主光綫作大量偏折。場鏡上主光綫虽有偏折但不产生不良的軸外象差,但是如果把偏折主光綫的任务过多地放在場鏡上时瞳孔就会太近。瞳孔愈远,目鏡愈

难设计。多数目镜由于要负担的主光线偏角太大,不得不采用多组正透镜来平均负担,因而 Petzval 和不好,象散很坏。在第八章 § 5(O)中举了一个解决这种困难的例子。

光学系统的各个部分、各个折射面所起的作用概括来说就是将物方光管逐渐转变为象方光管,将 Lagrange 不变量的组成部分向所需方向变换(如物高逐渐缩小角度同时加大等)。在变换过程中也会有反向变化的时候,但这只应是迫于绝对必要(如 Petzval 和要小就非使光束收敛后再发散或发散后再收敛不可)不然是不利的。尤其在变换过程中将这个不变量转换为一特大数量和一小量的乘积(光管的一端极度收缩)是特别不利的,这一定导致设计困难,而且一定使最后的结果不良。

不必要的复杂结构不仅使成本变高,同时使质量降低。过长的光路,光管转换的次数过多等对于质量都是不利的。

长而粗的光路,有时是为通过更多的能量。但假如面数太多,反而可能得不偿失。四个优良的金属反射面或十个涂单层膜的折射面都要使光能损失 20%。若涂膜稍差,十个折射面可以损失光能的 30%,至于不涂增透膜则损失 40%。我们要注意,上述的面数并不是很少遇到的。由于多层膜技术的发展(见第十四章 § 5.3),近代光学系统有采用很多折射面来改善象质的倾向。当然这只能用于一些高质量系统。

另外,也不能不考虑由长度和直径的增加引起的体积和重量的增加,诚然只有加大直径才能使望远镜增大通光量,但必须看到直径 400 的镜片重量即达 20 公斤左右,重量是随直径三次方增大的。

上述两方面应该可以从制造工艺和镀膜技术方面设法改进。

设计结构选择中要十分重视技术经济效果,例如公差和工艺要求对成本的影响等等。

#### § 9.4 现代光学设计所达到的水平

总起来可以说,光学设计还面临着很多未解决的任务。由于高级象差理论不完善,零碎片断的方法还不足以解决能量传递和信息传递之间的矛盾(也就是性能指标和成象质量间的矛盾)。再由于已往对于不理想的象质缺乏适当的评价方法,因此在各种校正状况之间作选择都有一定困难。由于有时在解决高斯光学问题和初级象差问题时须作大量计算,因此连这两类问题的解决都是不彻底的。为解决大量计算问题,先进国家在 1950 年左右开始运用电子计算机。从现在来看,到 1963 年时自动平



衡程序已基本完善。由于计算机可以从事大量的重复性劳动,这在过去用人力是不可能达到的。因此光学系统的复杂度和质量水平均有明显变化。但是,假若计算机的存在使人懒于思想,企图以大量计算来达到目的的话,作用就成为消极的,也是不可能成功的。计算机不能超过人的思想,尤其是战略思想,而光学设计工作的成就大小恰就在战略思想的成败。

关于电子计算机对光学设计的作用,认识有种种分歧是很自然的。由于计算机能够从事大量的重复性劳动,对复杂光学系统易于作详细的计算、分析、优化。使不太懂得光学的人,也可以利用现成的程序对光学系统进行一定程度的优化,等等。从而使有些人得出这种错觉:光学设计的理论已经没有什么意义。这在原则上显然是错误的。就如同用计算数学代替一切数学理论一样,计算机并未使任何数学理论成为不必要。这是由于现有的电子计算机还远远未能代替人类的思维,战略性决策性的判断还未能包含在机器程序中;而现有程序的本质又都相互一致,即用微分插求优化解,不进行人工干预时,常陷入局部极小而不能找出较优的解。人工干预的是否恰当,对结果的影响还很大。所以,应该认为:① 电子计算机是十分重要的工具;② 应期望优化程序能够有突破性的改革;③ 对于计算机的作用也不宜过于夸大;最后,就如数次国际透镜设计会议上重复申述的那样:对于是否已达到了最优的结果,计算机对设计者几乎没有什么帮助。

Lagrange 不变量原指细光束的特征,我们也可以将它推广为大光管的数字指标,例如入瞳直径与视场角正弦之积,或数值孔径(孔径角正弦)与视场直径之积,它也近似为不变量,而且它也就决定了此光学系统所能传递的能量,在成象理想时它也就是通过此光学系统的信息量(第十一、十二章)。故此广义 Lagrange 不变量可以作为所有光学系统的性能指标。但是,此不变量超过一定限度后象差就急剧增大,故信息传递能力并不由此增加或增加不多。由信息传递能力的观点来找寻最合适的相对孔径和视场是一个重要问题。

虽然如此,光学设计在现代已是处在相当高的水平上。虽不是十分完善但也已相当充分地满足了各种仪器的使用要求,从实用的观点来看,绝大多数的设计也还是接近可能的最佳方案的。这是由于光学系统的完满与否是建立在实践基础上的原故。下面列出一些设计所能达到的性能和质量供考虑设计可能性时的参考。

短焦距的望远镜物镜( $F < 200$ )相对孔径在双透镜胶合时可达 1:4,用两片分离或三透镜等可达 1:3,此时二级光谱在一个波长的数量级,其他象差则可小于 1/4 波长的判断标准。按现在的设计水平用晶体作出二级光谱减小的更理想的望远镜物镜

并无特别困难。

长焦距望远镜物镜( $F > 1000$ )相对孔径总不大(1:10—1:20),这主要是由于二级光谱。由于相对孔径小其他象差不成问题,当用特殊玻璃减小二级光谱时半径变小(由于 $\nu$ 值差太小),故各折射面的相对孔径增大,用两、三片透镜仍然只能得1:10—1:15左右的结果。

由于望远镜物镜不能有过的大的相对孔径,故目镜也不需要过大的相对孔径(在特殊情况下也可能要求目镜的相对孔径很大)。一般目镜的相对孔径小于1:4,目镜的近轴点质量接近理想,而视场边缘的象差可能超出 $1/4\lambda$ 的十倍,畸变在 $2U_p = 40^\circ$ 时约5%, $60^\circ$ 时约10%,视角更大时会达30%。较早期的广角目镜中Petzval和都是正的,为了平象场均须有很大的象散。近年来目镜中使用了小半径厚透镜,象散有显著改善。用非球面的近代目镜视场可达 $120^\circ$ ,且瞳孔距可接近于焦距。用正负透镜分离的方式可以得出广角平象场(校正Petzval和)无畸变的目镜,这种目镜的另一优点是瞳孔距长于焦距,但其工作点在目镜光学系统内部且体积大,故在某些情况下不适用。

单反射镜可以作出大孔径短焦距的望远镜物镜——抛物面反射镜,其视场角在大相对孔径时仅数分。用Schmidt校正板时不难得出1:2视场 $30^\circ$ 的结果。用Максудов校正板校正球面镜球差后适于作中等大小的望远镜物镜,它在焦距2000,1:10时长度可短于500。这些反射镜-校正板类型的物镜,在短焦距时(例如100)相对孔径可达1:1以至1:0.6,且在中等大小的视场内(如 $2U_p = 20^\circ$ )有接近理想的质量。采用非同轴反射系统可得更好结果。

折射式显微镜物镜对轴上点的单色象差可以接近理想。用特种材料可以达到复消色的结果,但就是这样的物镜也不能对整个可见波段满足瑞利判断。轴外点( $2U_p = 6^\circ$ )时的象差就已很坏——比目镜的边缘象点更坏。近年来出现的所谓平象场复消色物镜在 $2U_p = 3^\circ$ 时象差也会超过 $1/4\lambda$ 判断的十倍。油浸时 $NA = 1.3$ ,干镜头 $NA = 0.9 - 0.95$ 都是可能的,后者质量较差。

用双反射面和适当的折射面结合不但可以达到宽波段复消色,轴外象质( $2U_p = 6^\circ$ 时)也可接近理想,但中心有孔,使物镜对低对比物体的分辨能力降低,这种比较理想的设计用于大量生产时尚有工艺困难须待解决。

显微镜目镜只需要更小的相对孔径,一般无特殊困难。

“性能”——由视场和相对孔径决定的广义Lagrange不变量,是结构复杂度的函数,对相物镜也不例外,结构不太复杂(六片透镜左右)的照相物镜可具有的“性

能”如下表(焦距小于 100):

相对孔径	1:1	1:2	1:3	1:4.5	1:6.3	1:8
视 场	18°	45°	60°	75°	90°	120°

比较复杂的结构可以超出此数,例如广角物镜:1:6.3, 120° 或大孔径物镜, 40°, 1:1 以至 1:0.8 都是有可能的. 但如 120°, 1:1 这种要求距离现在的设计水平还远.

照相物镜的象差与理想的情况距离很远,一般只在 1:5—1:10 时接近理想. 大相对孔径时分辨能力在视场中心为每毫米 20 线,视场边缘每毫米 10 线就算不错了.

对某些高质量要求的照相物镜须作特殊设计,此时视场和相对孔径均须大为缩小.

最近几年已经制出一些焦距可变的照象物镜,其质量与一般照相物镜相差不远,但体积太大. 用非球面则可使体积变小.

## 参 考 文 献

- [ 1 ] Слюсарев, Г. Г., Таблица для расчёта двуклинновых склеенных объективов, ГОИ (1949).
- [ 2 ] Maksutov, D. D., New Catadioptric Meniscus Systems, *Jour. Opt. Soc. Amer.* **34** (1944), 270.
- [ 3 ] Bouwers, A., *Achievements in Optics*, Elsevier Publish Co. Inc. (1950), p. 40.
- [ 4 ] Caratheodory, C., *Geometrische Optik*, J. Springer, Berlin (1937).

## 第八章 軸对称非球面

### §1 使用非球面的可能性

到現在为止球面几乎是在光学工业中唯一使用的折射(或反射)面形,非球面只是被少量使用着。其所以如此,是由于球面加工已經有成熟的經驗和方法,而非球面則否。

在很多場合下,当我们感到光学設計的可能性受到局限时就会想到非球面。对球面而言,面形由一个参数  $r$  所完全确定,因此不能希望它能同时完成多个任务;非球面則否,原則上它可以有无限多个自由度,即須无限多个参数才决定面形。这似乎可能引起这样一种想法:用一个非球面就可以滿足对光学系統提出的所有要求。但是这种观点是不对的,非球面虽有其卓越的优点,但也有其局限性,由下面的討論可以看出这点。

由第六章的討論,我們已可看到軸对称非球面的优点:它不会增加象差数(要求),但由它却多出了变数(自由度),因此对設計是极有利的。

应用非球面于光学系統中所遇到的問題主要是工艺問題——成批制造的可能性,加工和檢查的方法等,可以說在設計理論上的問題与工艺相比是比較簡單的。

用塑料薄膜压型加工法解决一般非球面加工问题看来是很有希望的,这样一来可能避免塑料压出后发生的收縮。如果非球面加工能与球面加工的成本具有同一数量数,那么广泛使用于一般光学系統中以簡化結構——用来校正初級象差——或提高质量才是合理的,否則它就只宜用于非它不可的場合。例如:大型天文反射望遠鏡中将反射面非球面化(抛物面)或加非球面校正板(Schmidt板),此处如不用非球面則单个球面反射面不能得到必要的成象质量。但是随着球面校正板理論和实践的发展(例如 Марсюттов板),非球面在这方面的应用有日漸被球面校正板所替代的趨勢。但对于相对孔徑特大的情况,复杂的球面校正系統似乎不如非球面。再如大孔徑聚光

鏡，当光束聚斂角达  $100^\circ$  以上时用球面透鏡必然有很大的直徑、厚度和随之而来的重量。用非球面可以解决这个問題。由于加工要求較低，非球面聚光鏡可以成批生产。本来，大孔徑显微鏡物鏡也可以用非球面，但是加工要求太高了。另外，假若塑料压型成功的话，压制 Fresnel 透鏡作为聚光鏡可以更为輕便。

广角目鏡对于主光綫(光瞳位置)而言是大相对孔徑的系統，因之用球面透鏡組成时必然非常厚，瞳孔距离难于加大。长瞳孔距的广角目鏡只有用非球面才可能。

将球面非球面化也就是使离軸較远的面形改变，这种变形显然可以用来控制高級象差。

总起来說，宜采用非球面使光学系統厚度变薄，使大相对孔徑(或大視場)成为可能，或用非球面控制某一高級象差。假如这两点能同时达到，那就更好了。

用非球面能达到的效果，部分可由初級象差理論預見到，某些高級象差特性則可由光綫光路和光程观点用解方程式来解决；更普遍的情况則須作逐次近似。很多非球面的特性可由球面的类似性质推广而得。

## § 2 光綫光路計算

非球面的光綫光路計算問題要比球面复杂，这是因为計算法綫的位置或方向时，必須先求出光綫与曲面的交点。对于高次曲面來說，这意味着每算一条光綫就須先解一个高次代数方程，由解方程式来决定折射点位置。

折射点位置确定后，就可以由微分法算出此折射点处的折射面法綫方向，从而确定入射角，并由折射定律算出折射角。这样，折射后的光綫位置就可以确定了。

因此非球面上光路計算的問題可归結为：求入射光綫与非球面的交点，定出折射点的法綫方向，然后运用折射定律，由折射角算出折射后光綫坐标。除了折射定律形式和光綫坐标选择的問題对計算的方便程度有影响外，曲面的参数表示方法也对計算有影响。

### § 2.1 曲面的参数表示

为作光綫光路計算，首先就要考虑非球面的参数表示法。仍取  $x$  軸为光軸——对称軸，則  $x$  是  $y^2+z^2$  的函数。当原点在非球面頂点时，可能的函数表示式是：

$$\left. \begin{aligned} y^2+z^2 &= f(x), \\ y^2+z^2 &= 2r x + b x^2 + \frac{2}{3} c x^3 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

或

$$\left. \begin{aligned} x &= f^{-1}(y), \\ x &= \frac{1}{2r}(y^2+z^2) + \beta(y^2+z^2)^2 + \gamma(y^2+z^2)^3 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中  $r$  是此曲面在近軸部分的曲率半徑或等价球面的半徑。若(2)和(1)式表示同一个曲面,則可将(2)式代入(1)式求得两种表示法的系数間的关系:

$$\left. \begin{aligned} b &= -8r^3\beta, \\ \frac{2}{3}c &= 64r^5\beta^2 - 16r^4\gamma, \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

用一种表示式时只有有限項的曲面,用另一种表示法时就須用无限級数来表达。一般所称的二次曲面在表示式(1)中是二次的,在表示式(2)中則一般为无限級数。例如球面,  $b = -1$ ,  $c = d = \dots = 0$ ,但以(2)式表示时就成为无限級数:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{1}{8r^3}, \\ \gamma &= \frac{1}{16r^5}, \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

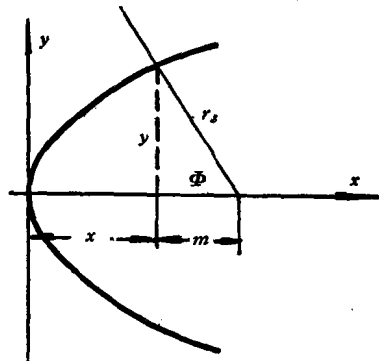


图 8.1

用(1)式中  $x$  的幂次称呼曲面的次数,各种二次曲

面的区别在于  $b$  的大小,  $b < 0$  为椭圆;  $b = 0$  为抛物綫;  $b > 0$  为双曲綫。  $b \neq -1$  的程度就是非球面的程度。

看来,表示式(1)更簡洁些。但在考虑初級象差理論时,用表示式(2)更好,我們將証明  $\beta$  和(4)式的差别就是初級象差。

对折射有意义的当然是曲面的法綫方向和曲率半徑。現在来將它們的表示式写出来,这些結果是大家在微分几何中所熟知的。由于軸对称,法綫通过光軸,曲面的子午截綫如图 8.1,图中画出了折射点的幅角  $\Phi$  (法綫与軸交角),折射点坐标  $x, y$ , 显然

$$\tan \Phi = \frac{dx}{dy}, \quad (5)$$

法綫和軸交点的坐标为  $m+x$  和  $y$ ,  $m$  可以用  $f'(x)$  表示出来:

$$\tan \Phi = \frac{y}{m} = \frac{1}{y},$$

故

$$m = y\dot{y}, \quad (6)$$

其中用  $\dot{y}$  表示  $y$  对  $x$  的一次微商, 以后还用  $\ddot{y}$  表示二次微商.

由(1)式的級数表示可得:

$$m = r + bx + cx^2 + \dots, \quad (7)$$

它与(1), (2)式一样可作为曲面方程式. 这个方程式的特色是次数低, 以符号  $r_0$  表示  $m+x$ , 即:

$$r_0 = m + x = r + (b+1)x + cx^2 + \dots. \quad (7a)$$

弧矢方向曲率半徑  $r_s$  (由图 8.1) 是:

$$r_s^2 = m^2 + y^2 = y^2(1 + \dot{y}^2). \quad (8)$$

至于子午方向的曲率半徑则为:

$$r_t = -\frac{(1 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\dot{y}}. \quad (9)$$

为确定(8), (9)式中开方的正負, 取  $\sqrt{1 + \dot{y}^2}$  和  $\dot{y}$  同号.

### § 2.2 三角法計算子午光綫光路

为求出光綫和曲面的交点, 只須将直綫方程式代入曲面方程式中求解即可. 以曲面頂点为直角坐标原点时, 光綫方程式是:

$$\tan U = \frac{y}{L-x},$$

即

$$y = \tan U(L-x),$$

或

$$x = L - y \cot U. \quad (10)$$

其中  $L$  是要計算的这条子午光綫与  $x$  軸交点到曲面頂点的距离,  $U$  則是此光綫与  $x$  軸的夹角.

(10)与(1)或(2)式联立即可定出交点位置的坐标(对于子午光綫  $z^2=0$ ), 在幂次高于2时为解出这組方程式宜用各种逐次接近法, 例如由(10)式令  $x_0=0$  算出  $y_0$ :  $y_0 = L \tan U$ , 将  $y_0, x_0$  代入(1)式按下列方式算  $x_1$ :

$$x_1 = \frac{y_0^2 + bx_0^2 - \frac{2}{3}cx_0^2 \dots}{2r},$$

再将算出的  $x_1$  代入(10)式算  $y_1$ :



$$y_1 = \tan U (L - x_1),$$

如此逐次接近就可求出交点坐标  $x, y$ .

再例如将(10)式代入(1)式得到  $x$  的高次方程式:

$$\tan^2 U (L - x)^2 - f(x) = 0, \tag{11}$$

用牛頓逐次接近法即可求出方程式(11)式的解. 在文献上还提及一种收敛更快的逐次接近法(見第一章).

求出交点后即可按(5)式算出法綫与光軸的夹角  $\Phi$ . 又因

$$\Phi = I + U = I' + U', \tag{12}$$

而  $U$  是已知的, 故(12)式就决定了折射角  $I$  之值. 由折射定律:

$$n \sin I = n' \sin I' \tag{13}$$

算出  $I'$ , 再由(12)式算出  $U'$ . 再由于折射后的光綫和折射面的交点不变, 故即可由(10)式算出  $L'(x, y, U'$  均已知). 这样就完成了子午光綫在非球面上折射过程的光綫光路計算.

将一个循环所用的公式列于下:

$x = L - y \cot U,$	求 $x$	}	(14)
$y^2 = f(x),$	求 $y$		
$\tan(I + U) = \frac{dx}{dy},$	求 $I$		
$n \sin I = n' \sin I',$	求 $I'$		
$I + U = I' + U',$	求 $U'$		
$x = L' - y \cot U'.$	求 $L'$		

### § 2.3 用代数方法計算空間光綫

和球面的情况相同, 我們仍然可以用矢量代数来作光綫光路計算. 我們为使公式形式简单須将坐标系的原点放在法綫与光軸的交点上, 但由于曲面不是球面, 这个交点位置是我們原先不知道的. 和前面叙述的情况相同, 我們須先求出光綫与曲面的交点. 在計算开始时仍設坐标系在曲面的頂点上, 如图8.2, 光綫为第一面折射后坐标为  $x'_1, 0, z'_1$ , 方向余弦为  $\xi', \eta', \zeta'$  均已知, 求此光綫与第二面交点的坐标  $x_2, y_2, z_2$ . 易見光綫方程式是:

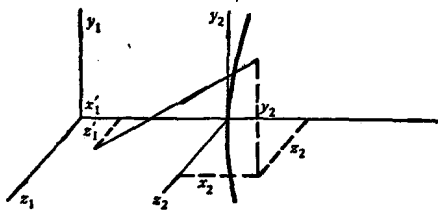


图 8.2

$$\frac{y_2}{\eta'_1} = \frac{z_2 - z'_1}{\zeta'_1} = \frac{x_2 + e'_1 - x_1}{\xi'_1}, \quad (15)$$

式中  $e'_1$  是两坐标系間距。若前一坐标系在前一面球心, 則

$$e'_1 = d'_1 - r_1. \quad (15a)$$

將(15)式和(1)式或(2)式联立即可解出  $x_2, y_2, z_2$  之值, 子午光綫計算中提及的两种方法都可以用来求出交点坐标。例如由(15)式令  $x_2 = 0$  即可得出  $y_2, z_2$  的初步近似值  $y_{2,0}, z_{2,0}$ , 然后把这三个量的近似值代入(1)式, 求  $x_2$  的較准确数值:

$$x_{2,1} = \frac{y_{2,0}^2 + z_{2,0}^2 - \left( bx_0^2 + \frac{2}{3} cx_0^3 + \dots \right)}{2r}, \quad (16)$$

將(15)式中的  $x_2$  用(16)式代入即可得到更准确的  $y$  和  $z$  之值, 如此进行下去即可求出  $x_2, y_2, z_2$  的准确值, 即光綫和曲面的交点位置。于是就可以按(7a)式和(8)式算出法綫的两个特征量:  $r_0$  和  $r_s$ 。

我們此时可将坐标原点移到法綫与軸的交点, 以“\*”号标志移动后的新坐标, 則有:

$$\left. \begin{aligned} x^* &= x - r_0, \\ y^* &= y, \\ z^* &= z. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

对于这个新坐标系而言, 第一章 § 8 中对于球面的討論完全适用于此时, 唯一的差别只是以弧矢曲率半徑  $r_s$  代替了原来的半徑  $r$ 。

将一个循环須用的关系綜列于下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{y_2}{\eta'_1} &= \frac{z_2 - z'_1}{\zeta'_1} = \frac{x_2 + e'_1 - x_1}{\xi'_1}, \\ y_2^2 + z_2^2 &= 2r_2 x_2 + bx_2^2 + \frac{2}{3} cx_2^3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

逐次接近解  $x_2, y_2, z_2$ ,

$$\left\{ \begin{aligned} r_{0,2} &= m + x_2 = r_2 + (b+1)x_2 + cx_2^2 + \dots, \\ r_{s,2}^2 &= m_2^2 + y_2^2 = y_2^2(1 + y_2^2), \end{aligned} \right.$$

求  $r_{0,2}, r_{s,2}$ 。

## § 2.4 逐次接近法

既然对非球面而言总需要用逐次接近法求交点, 那么象第一章 § 10 那样用逐次接近法求出折射后的光綫方向也就比較方便。实际上, 第一章 § 10 中对于球面的运

算步驟对于任意曲面也是完全正确的,此时求折射后的方向余弦的表示式应推广为:

$$\frac{\xi' - \xi}{-r - bx - cx^2 \dots} = \frac{\eta' - \eta}{y} = \frac{\zeta' - \zeta}{z} \quad (19)$$

这是由于法綫方向余弦正比于矢量  $(-r - bx - cx^2 \dots, y, z)$  之故, 由(1)式偏微分即可証明这点. 因之对二次曲面而言, 用逐次接近法計算光綫并不比算球面系統复杂.

### § 3 初級象差理論

由于初級象差理論非常簡單, 因之在設計非球面时首先用初級象差来考虑一下, 把那些用初級象差理論就可預見其不可能的要求除去. 这种考虑方法对复杂問題是很有幫助的.

同軸非球面系統完全遵守第六章中导出的象差一般性质. 所不同的只是象差分布值不同. 为求出一般非球面的初級象差分布值, 可将一般非球面(1)或(2)式看作是由球面与一中心厚度无限薄的校正板之迭合. 如图 8.3 a. 由(2)式, 任意一个曲面的方程是:

$$\bar{x} = \frac{1}{2r} (\bar{y}^2 + \bar{z}^2) + \beta (\bar{y}^2 + \bar{z}^2)^2 + \dots,$$

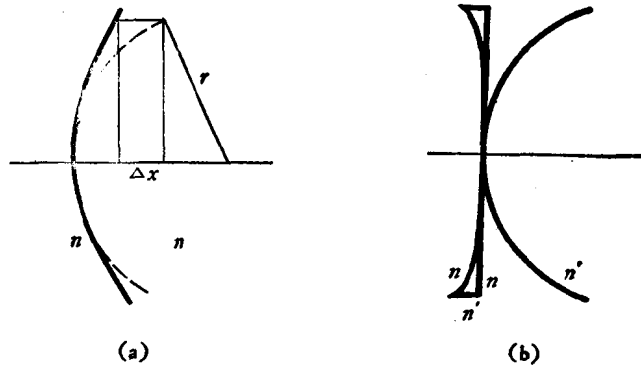


图 8.3

此时  $y, z$  上加一橫以与下面的規化坐标相区别, 这曲面显然可看作是近軸半徑相等的球面

$$\bar{x} = \frac{1}{2r} (\bar{y}^2 + \bar{z}^2) + \frac{1}{8r^3} (\bar{y}^2 + \bar{z}^2)^2 + \dots \quad (20a)$$

和校正板

$$\Delta \bar{x} = \left( \beta - \frac{1}{8r^3} \right) (\bar{y}^2 + \bar{z}^2)^2 + \dots \quad (20b)$$

的迭合. 光束经过这样的曲面后产生的波象差, 除了球面(20a)所产生的以外, 还須加上校正板(20b)替代原来的介质而生成的光程差:

$$(n'-n) \Delta x = (n'-n) \left( \beta - \frac{1}{8r^3} \right) (\bar{y}^2 + \bar{z}^2)^2 + \dots \quad (21)$$

如图 8.3 a 所示, 校正板的折射率为  $n'$  并以曲面和上述球面作为它与折射率为  $n$  和  $n'$  的媒质的分界面. 由于光程差(21)式在初级近似下并不因弯曲而变化, 因之图 8.3 a 的情况和图 8.3 b 的初级象差是完全等价的, 故当光栏处在非球面顶点时, 非球面与近轴半径相同的球面相比, 多产生的初级波象差为:

$$\begin{aligned} \Delta W &= (n'-n) \left( \beta - \frac{1}{8r^3} \right) (\bar{y}^2 + \bar{z}^2)^2, \\ &= (n-n') \frac{b+1}{8r^3} h^4 (y^2 + z^2)^2, \end{aligned} \quad (22)$$

式中  $h$  是近轴光线和校正板的交点高度;  $y, z$  是归化坐标  $\bar{y}/h, \bar{z}/h$ , 和第六章中的符号意义相同.

将它和初级波象差方程式比较即得象差系数较球面的增量  $\Delta S, \Delta C$ :

$$\left. \begin{aligned} \Delta S_I &= (n-n')(b+1) \frac{h^4}{r^3} = (n-n') \left( -8\beta + \frac{1}{r^3} \right) h^4, \\ \Delta S_{II} &= 0, \\ \Delta S_{III} &= 0, \\ \Delta S_{IV} &= 0, \\ \Delta S_V &= 0, \\ \Delta S_{I_p} &= 0, \\ \Delta C_I &= 0, \\ \Delta C_{II} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

当光栏移动后光栏不在校正板上时则有:

$$\left. \begin{aligned} \Delta S_I &= \Delta S_I = (n-n')(b+1) \frac{h^4}{r^3}, \\ \Delta S_{II} &= \Delta S_I \cdot \frac{h_p}{h}, \\ \Delta S_{III} &= \Delta S_I \left( \frac{h_p}{h} \right)^2, \\ \Delta S_{IV} &= 0, \\ \Delta S_V &= \Delta S_I \left( \frac{h_p}{h} \right)^3, \\ \Delta S_{I_p} &= \Delta S_I \left( \frac{h_p}{h} \right)^4, \\ \Delta C_I &= 0, \\ \Delta C_{II} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

由此可見,在初級象差範圍內单个非球面形成的自由度仅一个,只能用来校正一种初級象差.依此类推,两个非球面可以校正两种初級象差等等.在光学系統中寻找合适的校正板位置( $h_p$ 的大小)是很重要的,校正某一象差时伴生的其他象差的大小由  $h_p$  决定.

当光路中有多个非球面时,各单个面都产生一定的  $\Delta S_k$ ,总結果就是球面的  $\Sigma S_k$  和校正板的  $\Sigma \Delta S_k$  之和.

(a) 例 1. 球面反射面的校正板. 当物体处于无限远,光栏在球心时,此球面的象差系数为:

$$S_I = 2 \frac{h^4}{r^3}, \quad S_{II} = S_{III} = S_V = 0,$$

故只須校正板参数  $\Delta S_I = -2 \frac{h^4}{r^3}$  时,即有  $\Sigma S_I = 0$ . 若校正板在球心,  $h_p = 0$ , 則不伴生其他初級象差,这就是 Schmidt 板(考虑到最佳焦点上波象差减小,实际使用的校正板厚度方程式中包括二次方項,以使厚度差为最小,从而使色球差、軸外球差等高級象差为极小). 当校正板不在球心时必伴生其他初級象差,而使軸外点成像质量变坏,例如使板与此反射面重合时即得抛物面.

按上述初級象差理論可得抛物面子午彗差  $K_T$ , 相对孔徑  $1:A$ , 焦距  $f$ , 視場角  $u_p$  之間的关系为:

$$\frac{K_T}{f} = \frac{3}{16} \frac{u_p}{A^2}. \quad (25)$$

由此可得抛物面彗差張角小于  $1''$  或  $5''$  时的視場限制如下表:

1:A		1:15	1:10	1:5	1:3	1:2
$2 u_p$	容許 $1''$ 时	40'	17.8'	4.4'	1.6'	4.3''
	容許 $5''$ 时	3.3°	1.5°	22.2'	8.0'	3.5'

当非球面更靠近焦点时  $\frac{h_p}{h}$  更大,彗差更大.

(b) 例 2. 如前述,两个非球面一定可以校正两种初級象差,現以双反射面为例. 先由預定的外形要求确定两反射面焦距分配,于是就可以算出两面均为球面时的  $S_I, S_{II}$ . 然后就可以用解方程式的方法算出此两面应有的非球面校正状况. 例如图 8.4, 設

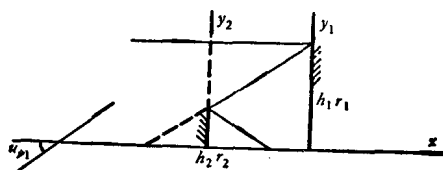


图 8.4

$$r_1 = -2, r_2 = \infty,$$

$$h_1 = 1, h_2 = \frac{1}{4}, u_{p1} = -1, h_{p1} = 2, h_{p2} = \frac{5}{4},$$

故得校正  $S_I, S_{II}$  的方程式为:

$$S_I = 2 \frac{h_1^4}{r^3} + 8a_1 + 8a_2 = 0,$$

$$= -\frac{2}{8} + 8(a_1 + a_2) = 0,$$

$$S_{II} = 8a_1 \left( \frac{h_{p1}}{h_1} \right) + 8a_2 \left( \frac{h_{p2}}{h_2} \right) = 0,$$

$$4a_1 + 10a_2 = 0.$$

式中

$$a = (n - n') \left( \beta - \frac{1}{8r^3} \right) h^4.$$

由上两式联立解得:

$$a_1 = \frac{5}{96},$$

$$a_2 = -\frac{2}{96}.$$

故第一面的方程式是:

$$x_1 = -\frac{y_1^2}{4} + \frac{y_1^4}{96};$$

第二面的方程式是:

$$x_2 = \frac{8}{3} y_2^4.$$

(c) 例 3. 用非球面也可以校正单透镜的轴外象差或轴上象差, 例如单薄透镜, 弯曲到使  $W=0$ , 再将其中一面非球面化以校正好此时余下的球差 ( $P_0$ ), 即得一个同时校正球差彗差的透镜.

$\varphi=1$  的单个透镜组的象差系数原为:

$$\left. \begin{aligned} S_I &= h^4 P, \\ S_{II} &= h^3 h_p P + h^3 j W, \\ S_{III} &= h^2 h_p^2 P + 2h h_p j W + j^2, \\ S_V &= h h_p^3 P + 3h_p^2 j W + \left( 3 + \frac{1}{n} \right) \frac{h_p}{h} j^2, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

将其中一面修为非球面时多产生象差是:

$$\left. \begin{aligned} S_I &= 8h^4a, \\ S_{II} &= 8h^3h_p a, \\ S_{III} &= 8h^2h_p^2 a, \\ S_V &= 8hh_p^3 a. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

故当适当选择  $h_p$  和  $a$  时,可能同时校正  $S_{II}$ ,  $S_{III}$  或  $S_{III}$ ,  $S_V$ .

总而言之,非球面化的作用在初級象差範圍內与  $P_0$  由胶合透鏡而引起的变化完全相同,但是高級象差則一般不会一样,非球面有可能同时消除某种高級象差.

#### § 4 非球面的高級象差和由象差要求确定非球面面形

按照前面的球面系統象差理論,似乎也应该导出非球面的高級象差与面形的关系以作为設計的依据,这种观点不完全正确. 因为非球面的面形可以由象差要求确定,而为完成这件事一般并不需要高級象差理論的帮助. 但是,前节初級理論的結論告訴我們:“单个非球面不可能完成所有任务,当面形适应于某一要求时一定就不再能适应其他要求”,也就是說一定会殘留下其他初級和高級象差. 一般來說初級的总是比較主要的,而初級量的大小可由前述理論完全确定,由象差要求即可解出非球面度  $\beta$  或  $b$ .

由象差要求确定面形的問題常可归結为解非綫性常微分方程的問題,但如在 § 6 中将再次提及的那樣,首先按初級象差理論来考虑一下初級的可能性是非常必要而有益的,这不单是由于可以简单地获得面形的粗略近似形式,更由于可預先排除掉一些不合理的要求. 如上所述,非球面一般就是球面和校正板之迭合. 非球面和无光焦度双薄透鏡相似,其初級作用在于并且只在于产生很大的  $P$  值. 假若对非球面所提出的要求非  $P$  值所能完成,則此要求就是不合理的. 不单是非球面的高次方校正項对高級象差发生影响,非球面的弯曲方向显然也是有影响的. 例如作一个望远物鏡,相对孔徑  $\frac{D}{f} = \frac{1}{1}$ ,  $f = 100$ , 确定透鏡是平凸的,折射率为 1.61, 用球面时其  $LA'_M = 27.132$ .

(a) 当第一面非球面化,用公式(23)校正初級球差,算出用  $y^2 = 2rx + bx^2$  表示曲面时的系数  $b$ ,光綫計算結果  $LA'_M = 1.72446$ ,  $LA'_z = 0.3576$ .

(b) 同样将第一面非球面化,但用  $x = \frac{1}{2r} y^2 + \beta y^4$  表示曲面. 由于曲面变平,因此球差变負,光綫計算結果  $LA'_M = -1.12$ ,  $LA'_z = -0.34$ .

(c) 将第二面非球面化,用  $x = \frac{1}{2r} y^2 + \beta y^4$  表示曲面. 当平面非球面化时,只能

用由  $y$  表示  $x$  的表示式表示曲面, 因此时  $r = \infty$ , 所以其曲面方程就可表示为  $x = \beta y^4$ , 光綫計算結果  $LA'_y = -4.57$ ,  $LA'_z = -1.18$ .

由上列三种情况可見, 非球面的弯曲方向以及所处的部位(如处在第一面或第二面)都对象差发生影响.

由象差要求来确定面形的問題也就是使物空間的某一定光束經非球面后轉变为象空間的某一預定光束的問題. 当这两預定的光束結構方程式已經給定后, 把光綫光路和非球面面形联系起来就可以得到一个微分方程式, 解出这种方程式就得出面形, 这是求面形的一种方法.

求面形的另一种方法是逐次接近法. 这就是先假設非球面的次数(或項数)是尽可能低的, 亦即由一、两个参数决定的, 变更这一、两个参数使一、两条光綫折射后到达預定位置. 这个問題一般归结为解代数方程式. 确定了参数的值亦即非球面满足这一、两个要求后的面形, 再由实际光綫計算来考察此曲面在其他方面的表現, 根据这“表現”来增加某一定参数后重复上述解法, 从而判断这个新增加参数的作用, 改变这个参数的大小和性质(幕次), 这样可使非球面满足更多要求.

下面各节就是按照这两种方式来解出面形的实例.

### §5 用单个非球面准确校正球差

用单个非球面准确校正象差即是使波面成为准确的球面或使光束准确地相交于一点. 单使軸上点达到这一点一般是不难的. 有时这种問題可由解方程式解决, 有时則尚須用逐次接近法解决.

(A) 单面使无限远物点成象:

如图 8.5a 所示, 設曲面的子午截綫上折射点坐标为  $x, y$ , 則远軸光綫光程为:

$$nx + n' \sqrt{(f' - x)^2 + y^2},$$

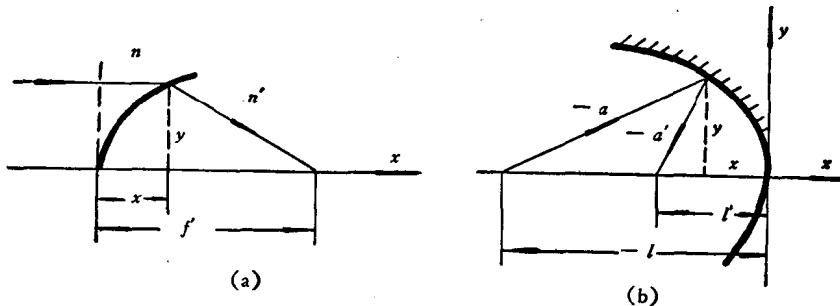


图 8.5



近轴光线光程则为  $n'f'$ , 故对任一  $x, y$  而言光程恒等的曲面是:

$$n'f' = nx + n' \sqrt{(f' - x)^2 + y^2},$$

即

$$\left(1 - \frac{n^2}{n'^2}\right)x^2 + y^2 - 2\left(1 - \frac{n}{n'}\right)f'x = 0. \quad (28)$$

这就是所求的面形方程, 当  $f' > 0, n' > n$  时为椭圆; 当  $n'/n = -1$  时为抛物面.

(B) 单反射面:

仍由光程相等来考虑. 单个反射面(图 8.5 b)对轴上物点成像理想的条件可表达为:

$$+a + a' = +l + l',$$

即

$$\sqrt{(l-x)^2 + y^2} + \sqrt{(l'-x)^2 + y^2} = l + l'.$$

将上式平方除去根号即得:

$$y^2 = \frac{4ll'}{l+l'}x - \frac{4l'l'}{(l+l')^2}x^2. \quad (29)$$

故消球差的曲面仍是二次的, 当  $l \rightarrow \infty$  时得抛物面  $y^2 = 4l'x$ ; 当  $l = -l'$  时得平面  $x^2 = 0$ ; 当  $l = l'$  时得球面  $y^2 = 2lx - x^2$ ;  $l$  和  $l'$  同号时为椭圆;  $l$  和  $l'$  异号时为双曲面.

(C) 一般的消球差单个非球面:

一般的消球差单个非球面仍可用上小节的方式得到应有的曲面方程式, 其截线是四次曲线.

(D) 用非球面校正原有球差:

由初级象差理论可以预见上面几个例子所得出的二次或四次曲面都具有定量的彗差, 无论是单反射面或单折射面都是如此. 前已提及, 先将球面透镜弯曲到球差极小位置 ( $W=0$ ), 而后再将一面非球面化, 则可在准确校正球差的同时校正彗差. 但是这种非球面本身不再是等光程了, 它须抵消另一面所产生的高级球差和初级球差, 由于球面产生的球差具高次项, 一般而言此时的非球面将是高次的. 再由于将球差表示为准确函数是很困难的, 用逐次接近法来校正球差更方便些. 下面叙述一种设计非球面单透镜(大相对孔径聚光镜)的方法, 大致步骤如下: (1) 确定入射于非球面的光线位置, 并规定由非球面射出的光线位置. (2) 先以二次曲面来满足校正边缘球差的要求, 满足这个要求的二次曲面可由解方程式得出(条件特殊时所需解的方程式是二次的). (3) 算出此时余下的中间带球差. 为校正带球差可再加上已定系数的三次方

項重复上述的解方程式过程算出其他系数(仍校正边缘带球差),再算出中间带球差。  
 (4) 用内插法求出校正中间带球差的三次方项系数,解出其他系数,算出其他带球差(若校正了0.7带则计算0.85带和0.5带),由此确定所加的高次项是否合适,当其他带的球差过大时则须根据符号变更方次(例如不用三次而用四次项来校正带球差)。下面举两个例子。

例一:作一聚光镜使平行光束聚焦,张角 $122^\circ$ ,且工作距为23.126。

首先确定用平凸透镜,折射率为1.6227。以球面接受平行光束,此时有较小的彗差(如图8.6)。

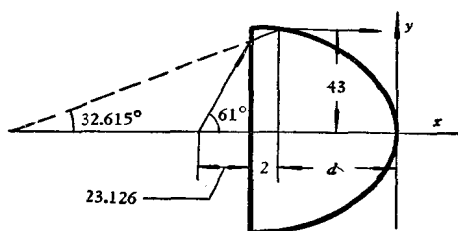


图 8.6

先将边缘光线经平面折射后的光路算出,规定它和非球面交点高度为43。设曲面方程式为:

$$y^2 = 2ax + bx^2, \quad (30)$$

则由此得条件(折射点在非球面上):

$$43^2 = 2ad + bd^2. \quad (31)$$

由于 $61^\circ$ 光线为平面折射后与轴交角为 $32.615^\circ$ ,故在非球面上折射时须满足 $I' = 67.24^\circ$ ,  $I = 34.63^\circ$ ,这就是说非球面上该点的法线与轴交角为 $67.24^\circ$ ,即

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=43, x=d} = \tan 67.24^\circ,$$

即

$$\frac{43}{a + bd} = 2.3831. \quad (32)$$

当 $a, b, d$ 间满足(31), (32)式时边缘光线射出后一定就是平行于光轴的。

为使近轴光线在折射后也成为平行于光轴的就须让非球面的近轴曲率半径满足下式:

$$\frac{1.6227}{(1.6227)(23.126) + 2 + d} = \frac{0.6227}{a}. \quad (33)$$

(31), (32), (33)三式就完全决定了校正边缘带球差的曲面形状。先由三式消去 $a, b$ 得 $d$ 的二次方程式,解出 $d$ ,最后得

$$d = 38.526, \quad a = 29.952, \quad b = 0.3092.$$

算出中间带球差过大。于是将方程式(30)式改为:

$$y^2 = 2ax + bx^2 + 0.01x^3. \quad (34)$$

用同样方法(近似解消去法)得 $d$ 的三次方程式即可求出校正边缘球差的曲面方程式 $y^2 = 65.56x - 1.01x^2 + 0.01x^3$ 和厚度 $d = 45.9$ 。再计算中间带球差,结果已过正,最

后内插得  $d=40.5$ ,  $y^2=61.4x-0.544x^2+0.038x^3$ , 算出的各带球差均小于 0.1 (无三次项时达 5)。

例二: 作一个倍率  $1\times$  的聚光镜, 两方的光束张角均  $38^\circ$ 。

确定透镜是双凸的, 第一球面已将光束偏折到接近平行, 而第二面作成非球面来校正第一面产生的球差, 所以这样做的原因也在于减小彗差。

令物距  $l_1=-1$ ,  $r_1=0.7$  算出边缘带光线光路, 首先令曲面方程式仍是二次的, 即(30)式, 于是在要求边缘带光线与光轴夹一定角时不难如上例那样得出类似(31), (32)的两个关系式。但近轴光线交于同一点的方程式要比(33)式复杂些。参看图 8.7, 近轴光线的  $l$  和  $l'$  都是  $d$  的函数, 因之消去法所得的  $d$  的方程不再是二次的。算出的球差曲线和变更  $x$  的高次项系数的结果如图 8.8 所列, 图 8.8 d 所示是最后结果。

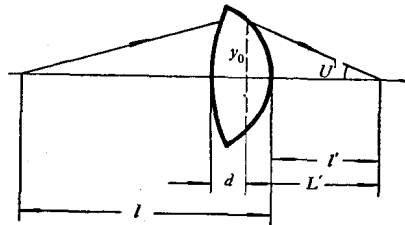


图 8.7

由这个结果可见, 由于折射面处在会聚光束中, 产生较大的高级球差, 而且不易校正。似乎可以认为: 用另外的方法可能更容易得到结果, 例如先计算出球面系统的初级象差, 而后非球面化以校正初级象差[由(23)式], 然后加上非球面的高次项来校正高级球差。这样做似乎易于逐步地由小孔径到大孔径将球差完全校正, 但是实际上这样并不能容易地得出结果。这是由于曲面的高次项和球差的高次项之间的关系

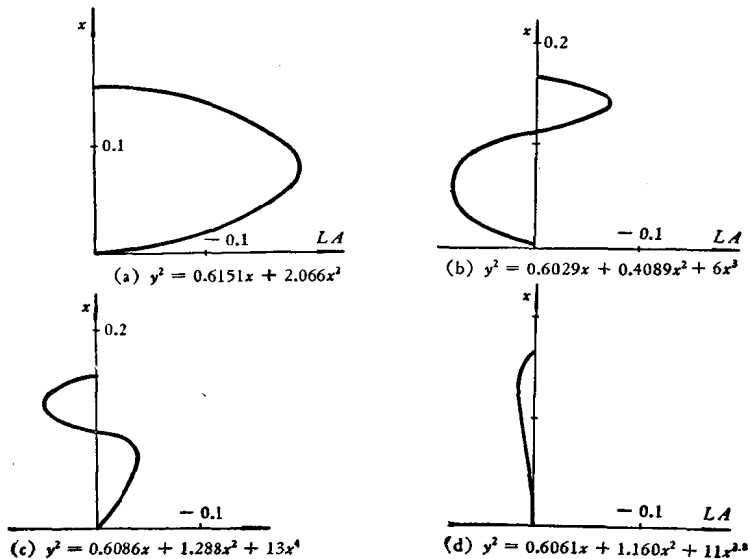


图 8.8

并不简单,而所残余的高次球差又至少須用两个不同幂次的項才能表示出来的原故。

### § 6 用单个非球面准确校正象散

由于象散与光瞳位置有关,因之所謂准确校正只能对某个一定光瞳位置而言,由此可见,光栏球差和光束原有象散均将引起面形改变。另外,校正象散后的象面仍然可能不平,这是由于非球面化并不影响  $S_{IV}$ , 故单个非球面根本不可能形成平的象面,但它有可能在保留象散时使某一象面(如子午象面)成为平面。

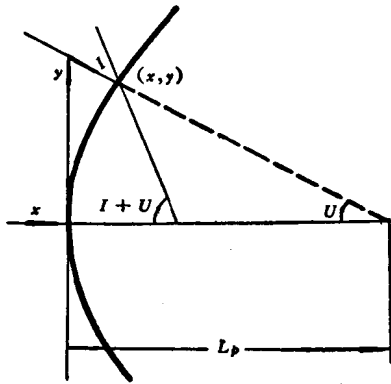


图 8.9

对細光束焦点有影响的是該折射面在主光綫折射点的曲率,对球面而言曲率到处相同,而軸对称非球面上任一点的两方向曲率半径  $r_t$  和  $r_s$  可以按微分几何的公式求出,如图 8.9, 設曲面的子午截綫方程式为:

$$y^2 = f(x), \quad (35)$$

则子午曲率半径即平面曲綫在該点的曲率半径为

$$r_t = -\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y}. \quad (36)$$

由于回轉曲面以  $x$  軸为对称軸, 故曲面法綫由折射点到法綫和光軸交点之长即为弧矢方向的曲率半径  $r_s$ :

$$r_s = \frac{y}{\sin(I+U)}. \quad (37)$$

由于

$$\tan(I+U) = \frac{1}{y}, \quad \sin(I+U) = \frac{1}{(1+y^2)^{1/2}},$$

故

$$r_s = y(1+y^2)^{1/2}, \quad (38)$$

$$r_t = \frac{r_s^3}{y^3 y}. \quad (39)$$

而焦綫位置則由 Young 氏公式决定:

$$\frac{n' \cos^2 I'}{t'} = \frac{n' \cos I' - n \cos I}{r_t} + \frac{n \cos^2 I}{t}, \quad (40)$$

$$\frac{n'}{s'} = \frac{n' \cos I' - n \cos I}{r_s} + \frac{n}{s}. \quad (41)$$

由此可见,使  $t'$  和  $s'$  经过非球面后形成一定形状的曲綫的問題可归结为解一个

二阶非綫性常微分方程。下面就对一些特殊情况导出曲面的方程式。

(A) 物体在无限远时要求校正象散。为此可由(38)——(41)式得：

$$\frac{n' \cos I' - n \cos I}{r_s n' \cos^2 I'} = \frac{1}{t'} = \frac{1}{s'} = \frac{n' \cos I' - n \cos I}{n' r_s},$$

故得条件

$$\cos^2 I' r_t = r_s,$$

将(39)式代入得：

$$-\cos^2 I' r_s^2 = y^3 \ddot{y},$$

或

$$(1 + y^2) \cos^2 I' + y \ddot{y} = 0. \quad (42)$$

于是只須将  $\cos^2 I'$  表示为  $y$  的函数即得出曲面微分方程，显然  $I$  是和光瞳位置有关的。

由于

$$\tan(I+U) = \frac{1}{y} = \frac{\tan I + \tan U}{1 - \tan I \tan U}, \quad (43)$$

故

$$\tan I = \frac{1 - y \tan U}{y + \tan U}. \quad (44)$$

因此

$$\cos^2 I' = 1 - \frac{n^2}{n'^2} \sin^2 I = 1 - \frac{n^2}{n'^2} \frac{(1 - y \tan U)^2}{1 + y^2 + \tan^2 U + y^2 \tan^2 U}, \quad (45)$$

其中  $\tan U$  是光栏位置和  $x, y$  的函数：

$$\tan U = \frac{y}{L_p - x}. \quad (46)$$

故(42)式可表示为：

$$1 + y^2 + y \ddot{y} - \frac{n}{n'^2} \frac{(1 - y \tan U)^2}{1 + \tan^2 U} = 0. \quad (47)$$

另外，将  $\cos I'$  表示为  $L'_p, \tan U'$  时则有：

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 I' &= \frac{1}{1 + \tan^2 I'} = \frac{(y + \tan U')^2}{(1 + y^2)(1 + \tan^2 U')}, \\ \tan U' &= \frac{y}{L'_p - x}, \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

$$y \ddot{y} + \frac{(y + \tan U')^2}{1 + \tan^2 U'} = 0. \quad (49)$$

(49)式又是一个与(47)式等效的曲面方程式，无论(47)式或(49)式在一般情况下都

难以解出。当  $L_p = x + f(y)$  时可归化为一个复杂的一阶微分方程。当  $L_p \rightarrow \infty$  时  $\tan U' \rightarrow 0$ , 此时(49)式成为:

$$y\ddot{y} + \dot{y}^2 = 0, \quad (50)$$

其通解为:

$$y^2 = ax + a_0 \quad (51)$$

即一抛物面。除了这个例子以外, 在已给定  $L_p$  的函数形式时方程式难以准确解出, 但是反过来对每一个曲面推求消象散的主光线位置倒是容易的。例如, 设:

$$y^2 = ax + bx^2, \quad (52)$$

则

$$y\dot{y} = \frac{a}{2} + bx, \quad (53)$$

$$y\ddot{y} + \dot{y}^2 = b. \quad (54)$$

故由(49)式得:

$$\tan^2 U' \left(1 - \frac{a^2}{4y^2}\right) + \frac{a+2bx}{y} \tan U' + b = 0, \quad (55)$$

从而

$$L_p = \frac{-a \pm a\sqrt{1+b}}{2b}, \quad (56)$$

即二次曲线的消象散光栏位置恰好与  $x, y$  无关。这个结果是 M. M. Русинов 首先得到的<sup>[1]</sup>。易于由计算证明, 一般的三次曲线的消象散光栏位置随  $y$  而变, 也就是不存在准确校正象散的三次曲面。

(B) 物体在无限远处, 要求子午象面是平面。要求子午象面是平面也就是要求:

$$t' \cos U' + x = \text{常数} = K. \quad (57)$$

故由(36), (38), (39)式得出满足要求的曲面方程:

$$\frac{n' \cos^2 I' \cos U'}{K-x} - \frac{(n' \cos I' - n \cos I) \ddot{y}}{(1+y^2)^2} = 0. \quad (58)$$

这个方程式显然比(47)式更复杂些, 因之更不易求出准确的解。

从这里, 我们看到单个非球面或能校正象散或能校正子午象面弯曲, 但一般是不可能同时达到这两个目的。一个要求已完全确定了面形, 因之, 显然不能同时再校正其他轴外象差。而由初级象差理论观点来看, 这些结论可以由公式(24)表达得更定量而清楚。

另一方面, 如欲校正高级象散, 对物距有限且已有象差(例如光栏球差)的光学系统来说, 上述精确解法也仍然是不现实的。实际上, 正如我们在校正球差节所已表示过的那样, 校正高级象散也宜于用逐次接近法来实现。

(C) 用非球面校正原有象散。用平面和二次曲面可以組成一个校正象散的单透鏡(目鏡)。图 8.10 中  $E$  为放置眼瞳处, 它的象在十倍焦距处, 平行光束的理想象在  $A$ 。由于平面不产生象散, 由前节(A)解出的二次曲面也不产生象散, 故此单透鏡对于特定的光瞳和物体是完全校正象散的。但是实际計算表明象面弯曲很大, 超过初級象差值很多(见图 8.11 中的曲綫  $a$ ), 因之須考虑用适当的非球面校正球面的象散, 以使象面弯曲稍小。

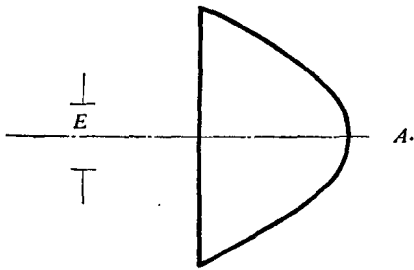


图 8.10

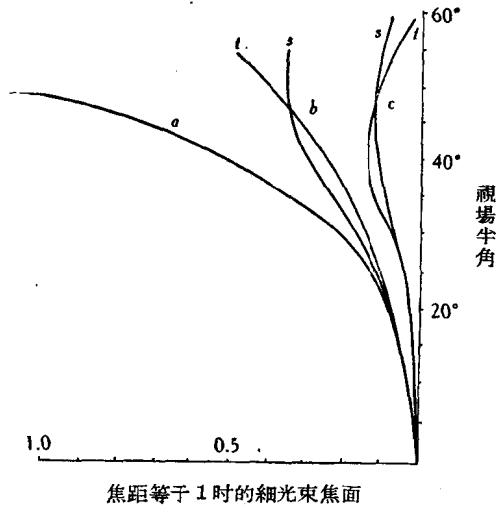


图 8.11

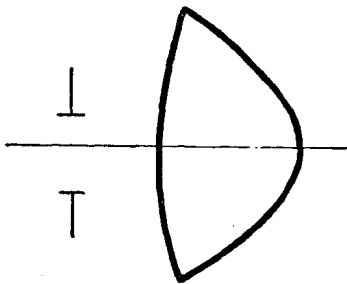


图 8.12

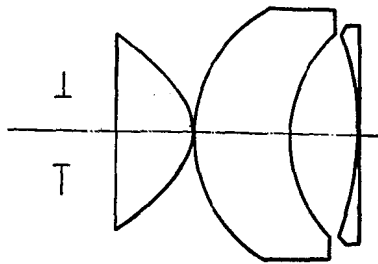


图 8.13

首先考虑平凸单透鏡在校正象散时象面弯曲超过初級值的原因。由計算象散焦点的 Young 氏公式可以看出, 将球面非球面化以校正象散时, 曲面对于大視場光束的曲率半徑是增大的; 对二次曲面而言, 由于有  $r_2 = \left(\frac{r_s}{r}\right)^2 r_s$  的关系 (其中  $r_2$  表示子午截面曲率半徑,  $r_s$  为相应的弧矢截面曲率半徑,  $r$  为近軸部分曲率半徑), 故  $r_2$  比  $r_s$  增大得更快; 本来似乎可以預期, 这将使象面弯曲比初級的 Petzval 和所定的值小, 亦即产生反号的高級象面弯曲。但实际与这个預計相反, 一个实际結果如图

8.11 的曲綫 *a* 所示, 結構如图 8.10. 这原因在於 Young 氏公式中以  $n' \cos I' - n \cos I$  代替了近軸焦点計算公式中的  $n' - n$ , 当折射角  $I$  很大时它远大于  $n' - n$ , 例如把  $n = 1$ ,  $n' = 1.6$  时  $n' \cos I' - n \cos I$  随  $I$  而变的情况表列如下:

$I$	0°	20°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$n' \cos I' - n \cos I$	0.6	0.62	0.70	0.76	0.84	0.95	1.09	1.25
$I' - I$	0°	8°	16°	21°	27°	34°	42°	51°

正是由於它較  $n' - n$  增大的比例超过  $r$ , 較  $r$  增大的比例, 就使弧矢焦点形成的象面弯向透鏡. 至於子午焦点和弧矢焦点重合以校正象散(虽然象散很大时会使焦点远移)是由於  $\cos^2 I$  很小的原故.

按照这种分析, 由於对主光綫而言, 总偏角  $U'_p - U_p$  就約等于半視場角, 故各折射面产生的偏角  $I' - I$  之总和是不可能变化的; 只有均匀分配偏角, 或在  $r$  較小(即产生大光焦度)的面上較少負担偏角才可能使高級象面弯曲减小, 实际計算表明这种判断是正确的. 图 8.11 的曲綫 *b* 就是单透鏡两面均为二次曲面时所得的一个結果. 結果的形式如图 8.12.

这个設計所須解决的另一個問題是高級象散的校正問題. 适当变更两面的半徑分配和非球面度校正量分配, 这是可以得到解决的. 关键在於使各面上的初級象散量剩余不大, 以及利用主光綫在面上的入射高度不同于近軸主光綫而形成的高级象散. 所得的象面弯曲在視場  $100^\circ$  时尙接近初級象差所定的值.

这个結果的光栏球差稍大, 在全視場  $110^\circ$  时約为焦距的一半, 致使出瞳距离較近軸光綫所决定的大. 平凸单透鏡的光栏球差更大. 在視場  $110^\circ$  时畸变为 20%, 与初級异号, 視場  $55^\circ$  时畸变为零, 高級畸变是由於主光綫在第一面上的入射高度因光栏球差而变大很多所引起的.

按照上面的分析, 在設計大視場目鏡时多使用几个折射面来分担所需偏角, 使各折射面上的折射角减小, 就可以使高級的象面弯曲减小以至与初級异号, 从而得到更平的象面. 另一方面, 在近焦点处产生負光焦度(例如以負透鏡为場鏡)可以校正初級 Petzval 和, 对光焦度則影响很小. 当然这种措施在使象面弯曲变小, 入瞳位置变远的同时也对主光綫产生反向偏角, 从而使得正光焦度部分所担负的偏角更为加大. 由此可見, 过于强烈的負場鏡会导致不利的結果.

由於透鏡負担的相对孔徑很大, 目鏡鏡片厚度可与其半徑相比; 因此, 企图用双凸透鏡来平均負担光焦度时, 除使 Petzval 和更增大外对光焦度是几乎不起作用的. 由此可見, 合理的目鏡結構应如图 8.13 所示, 由两平凸透鏡凸面相对地組成, 两凸面



間隙应近于零。图中近焦面的平凸透鏡已因分担負場鏡的負光焦度而变为弯月形，这样可使高級象散变小，并变更光栏球差。

变更光焦度分配以变更二次曲面上的主光綫入射角大小，易于在初級象散校正的条件下再使某一視場角的象散为零。計算表明，在全視場达  $120^\circ$  时象散除和視角平方成正比的初級部分外，至少須計及与視角四次、六次、八次方成正比的高級象散，在采用二次曲面时并不能使所有高級象散同时校正，但变更面形——半徑和非球面度——可以使它們尽量减小。

无論是視角較小或視角較大的情况，最好是使主要担負主光綫偏角的面上偏角分配得接近平均，所得象散曲綫如图 8.11 曲綫 *c*。在目鏡焦距不太短时全視場  $120^\circ$  的象面弯曲量可以全部处在人眼調焦范围之内，亦即接近完全理想。在这个結果中采用了两个二次曲面。

考虑到光栏球差对观察不利，因之是已校正的。上述設計結果的出瞳距約等于焦距，較一般目鏡长一倍。

此目鏡在相对孔徑 1:2 时球差彗差还不大，因之采用此类目鏡可使仪器体积减小。

## §7 用单个非球面校正子午光束象差

用逐次接近法来設計非球面以校正子午光束象差的問題和 §5 (D) 中叙述的問題并无差别，因此不需再加討論。下面只討論解微分方程的方法。

設物空間的光綫坐标方程式是：

$$L_1 = F_1(\tan U_1), \quad (59)$$

要求折射后的象空間光綫坐标方程式是：

$$L_2 = F_2(\tan U_2), \quad (60)$$

即  $L$  是  $U$  的已知函数，欲求的曲面方程式是：

$$y = f(x). \quad (61)$$

把物空間的入射角写作  $I_1$ ，折射后成为  $I_2$ ，則有

$$n_1 \sin I_1 = n_2 \sin I_2.$$

由(44)式将  $I$  写作  $U$  和  $y$  的函数：

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 I_1 &= \frac{(1 - y \tan U_1)^2}{(1 + y^2)(1 + \tan^2 U_1)}, \\ \sin^2 I_2 &= \frac{(1 - y \tan U_2)^2}{(1 + y^2)(1 + \tan^2 U_2)}, \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

于是得:

$$\frac{n_1^2(1-y \tan U_1)^2}{1+\tan^2 U_1} = \frac{n_2^2(1-y \tan U_2)^2}{1+\tan^2 U_2}. \quad (63)$$

将  $\tan U_1$  和  $\tan U_2$  都表示为  $x, y$  的函数则 (63) 式就是确定面形的一阶二次常微分方程. 将  $\tan U$  表示成  $x, y$ , 原则上不难做到, 由已知条件 (59), (60) 式及几何关系:

$$\left. \begin{aligned} \tan U_1 &= \frac{y}{L_1 - x}, \\ \tan U_2 &= \frac{y}{L_2 - x}, \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

消去  $L_1, L_2$  即得  $\tan U_1, \tan U_2$  和  $x, y$  的关系式.

最简单的情況是:  $L_1, L_2$  不是  $U$  的函数, 亦即物点象点都是光軸上的无球差的点, 此时 (64) 式就是  $\tan U$  和  $x, y$  的关系. 此时解方程式 (63) 仍然得到 §5 (A-C) 的结果.

另一个简单情况是光束相交于物象空间一定点, 此时 (64) 式成为:

$$(L-l) \tan U = \eta,$$

其中  $l, \eta$  均为常数. 于是消去  $L$  得到的  $\tan U$  和  $x, y$  的关系就是:

$$y = \eta + (l-x) \tan U,$$

或

$$\left. \begin{aligned} \tan U_1 &= \frac{y - \eta_1}{l_1 - x}, \\ \tan U_2 &= \frac{y - \eta_2}{l_2 - x}. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

将此时得到的微分方程作适当的坐标变换后显然就和上面对轴上点得到的方程完全

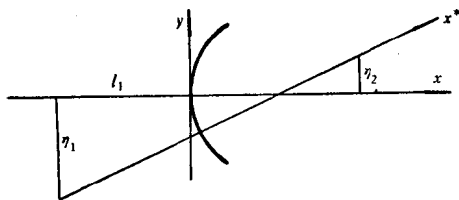


图 8.14

一致. 坐标变换的要点在于: 将现在的两点联綫作为新的轴  $x^*$ , 如图 8.14 所示, 则所得曲面相对于  $x^*$  轴对称, 而不是对称于  $x$  轴的面.

从这里就可看出, 为校正子午光束象差而解微分方程式 (63) 时所得的也许不是

轴对称的曲线, 将这条子午面内的曲线绕  $x$  轴回轉所得的曲面在  $x=0, y=0$  的点上就无导数, 且曲面有两叶, 这种解当然是没有实际意义的. 轴对称光学系统中某一定点的子午象差虽可由解得的非轴对称非球面完全校正, 但是这个非球面甚至对于象差与此定点完全相同的点 (即此点绕光轴旋轉而得到的圆上的点) 也不会起有利作用.

为使(63)式的解是轴对称的非球面,且在原点存在二阶导数,则预定的条件(59), (60)式不能是任意的. 例如,为使 $x=y=0$ 时 $y'=\infty$ ,由(63)式,在 $x=y=0$ 时应该满足:

$$\frac{n_1^2 \tan^2 U_1}{1 + \tan^2 U_1} = \frac{n_2^2 \tan^2 U_2}{1 + \tan^2 U_2},$$

即在顶点上有:

$$n_1 \sin U_1 = n_2 \sin U_2.$$

这结果实际上不用上面的推导就可以看出,即轴对称曲面的顶点处的光线光路是一定的,是不能对它提出要求的. 再由于轴对称非球面中当 $y$ 易号时, $y'$ 一定易号而等值,故对 $y$ 为正和 $y$ 为负的光线不能同时提出要求,等等.

由于这些原因,以初级象差理论为基础来逐次寻求高次项的方法,似乎是更可靠的设计方式.

### 参 考 文 献

- [1] M. M. 雷西诺夫,技术光学,科学出版社(1961),240页,(810)式.

# 第九章

## 非轴对称非球面

### § 1 对称性和象差的级数展开

如第六章所述,由对称性就可以推导出象差的一些特性,现在用同样的方法来考

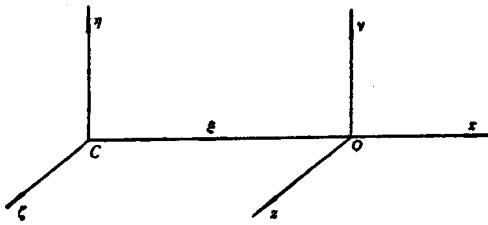


图 9.1

虑非轴对称时的問題. 为便于比較, 先将轴对称时的結果重复一次.

空间中一条光线的位置由四个坐标完全决定, 例如如图 9.1 的光瞳坐标  $y, z$  和物面坐标  $\eta, \zeta$ .

对某一定的光学系統來說, 当选定物面和光瞳位置后, 光程就是  $y, z; \eta, \zeta$  四个变数的函数. 我們首先討論这四个变数所定的函数的特性, 然后再考察物面和光瞳面位置及光学系統的构造对于这个函数的影响. 因此, 在第一步討論中物面位置、光瞳面位置及光学系統結構等参数可作为常数看待.

最简单的光学系統当然是轴对称系統, 此时距离光轴等距的物点其波差函数  $W$  相同, 因此只須取  $\eta$  为参数而不需再以  $\zeta$  为参数. 再由于

$$W(y, z, \eta) = W(-y, -z, -\eta),$$

$$W(y, z, \eta) = W(y, -z, \eta),$$

$$W(y, z, 0) = f(y^2 + z^2)$$

函数中只能含有三种单元:

$$y^2 + z^2, \eta^2, \eta y,$$

即三个繞轴旋轉的不变量. 一般的波差函数中含有  $y^2 + z^2$  項, 这說明只有高斯象面选得适当时方可除去波象差中的这一項;  $\eta y$  項表示此外还須对不同物高选取高度不同的参考点——选定理想倍率, 此时方能將  $\eta y$  項除去; 而与  $y, z$  无关的  $\eta^2$  項, 則只須所选参考波面通过光瞳中心 ( $y = z = 0$  时  $W = 0$ ) 即可除去. 因此波差函数  $W$  中的

二次方項表示光学系統的两个高斯光学特性——高斯象面位置和理想倍率大小。三个基本单元組成的四次方項就是大家熟知的五种初級象差 (Seidel 象差)：

$$W = \frac{1}{8} S_I (y^2 + z^2)^2 + \frac{1}{2} S_{II} \eta y (y^2 + z^2) + \frac{1}{2} S_{III} \eta^2 y^2 + \frac{1}{4} (S_{III} + S_{IV}) \eta^2 (y^2 + z^2) + \frac{1}{2} S_V \eta^3 y.$$

这就是說当光瞳和象面直徑扩大而仍欲使成象理想时，一般來說必須要求光学系統满足五个条件，即

$$S_I = S_{II} = S_{III} = S_{IV} = S_V = 0.$$

这五个象差系数称为 Seidel 系数，它們是光学系統結構以及物面、光栏面位置的函数。类似于高斯光学区域 (在这个区域内光程函数可由二次方項充分准确地描述)，由四次方以下的項即可准确描述的成象区域称为 Seidel 区域。当物面和光栏面直徑再扩大时，六次方項将起作用，易于看出軸对称系統的六次方項共有九个，將它們表列于下：

表 1

	象面位置	倍 率	球 差	彗 差	象散和象面弯曲	畸 变
零 級	$y^2 + z^2$	$y\eta$				
初 級			$(y^2 + z^2)^2$	$(y^2 + z^2) y\eta$	$y^2 \eta^2, (y^2 + z^2) \eta^2$	$y\eta^3$
二 級			$(y^2 + z^2)^3$ $(y^2 + z^2)^2 \eta^2$ $(y^2 + z^2) y^2 \eta^2$	$(y^2 + z^2)^2 y\eta$ $(y^2 + z^2) y\eta^3$ $y^3 \eta^3$	$y^2 \eta^4, (y^2 + z^2) \eta^4$	$y\eta^5$

二級象差有九个，这就意味着当光学系統在超出 Seidel 区域仍要保持成象理想时必须再滿足几个要求；这种光学系統至今仍未能实现。光学系統設計的困难程度当然是随着要求增加而增大的。

此外，因入射光束非单色和光学材料的色散致使不同波长有一套不同的波象差，高斯光学性质 (二次方項) 的色差称为初級色差，二級色差則为 Seidel 象差的色差。

再看非軸对称光学系統的特性，我們立即就可明白迄今所有通用的光学系統都是軸对称系統的原因。非軸对称系統需要滿足的要求太多了，这使設計大为困难。我們循着逐漸破坏对称的路綫，先考察具有两个相互正交的对称面的光学系統，取这两个对称面的交綫为光軸，并使二坐标平面  $yz, yz'$  仍在对称面內 (如图 9.1)，則由于对称性， $W$  必有下列性质：

$$\begin{cases} W(y, z, \eta, \zeta) = W(-y, -z, -\eta, -\zeta), \\ W(y, z, \eta, 0) = W(y, -z, \eta, 0), \\ W(y, z, 0, \zeta) = W(-y, z, 0, \zeta), \\ W(0, 0, \eta, \zeta) = W(0, 0, -\eta, \zeta). \end{cases}$$

由第一式,波差中只能有偶次項,由二、三、四式  $yz, z\eta, y\zeta, \eta\zeta$  項是不能出現在波差中的,因此波差中含有六种单元:

$$y^2, z^2, \eta^2, \zeta^2, y\eta, z\zeta,$$

它們相当于有两个象面位置和两个倍率. 由于非軸对称的曲面在近軸区就可以有两个曲率半徑,因而要使两个象面重合为一并不增加困难,但是六种基元組成的初級象差(四次方項)就有 16 种,列如表 2,表中各項之和就是初級象差  $W$ . 这就为設計双曲率面系統增加了不少困难. 变数因双曲率而倍增时,象差不单是倍增(表中的前二列)而且还多出了八种交叉項,以致在 Seidel 区域都难以理想成象. 超出 Seidel 区域时,二級象差有 44 种之多. 由此看来一般的变形系統(二方向具有不同倍率的光学系統)簡直是沒有希望設計成功的,但是有一种特殊的变形系統还有希望,这就是柱面系統. 柱面系統的特点是独立坐标不到四个,由于在母綫方向面形不变,因此就只有  $\eta-y$ (以  $\eta, y$  方向为母綫方向)才是独立的坐标,用符号  $\omega$  表示,此时可能单元成为

$$z^2, \omega^2, \zeta^2, z\zeta,$$

因而象差数减少为八个. 这些問題将在后面各节詳細討論.

表 2

	球 差	彗 差	象 散 和 場 曲	畸 变
初 級	$\frac{1}{4} S_{IVy} y^4$	$S_{IIIy} y^3 \eta$	$\frac{1}{2} (S_{IVy} + 3S_{IIIy}) y^2 \eta^2$	$S_{V_y} y \eta^3$
	$\frac{1}{4} S_{IVz} z^4$	$S_{IIIz} z^3 \zeta$	$\frac{1}{2} (S_{IVz} + 3S_{IIIz}) z^2 \zeta^2$	$S_{V_z} z \zeta^3$
	$\frac{1}{2} S_{IVyz} y^2 z^2$	$S_{IIIyz} y^2 z \zeta$	$\frac{1}{2} S_{IIIyz} y^2 \zeta^2$	$S_{V_{yz}} y \eta \zeta^2$
		$S_{IIIz\eta} z^2 y \eta$	$\frac{1}{2} S_{IIIz\eta} z^2 \eta^2$	$S_{V_{z\eta}} z \zeta \eta^2$
			$2S_{IIIyz} y z \eta \zeta$	

也有人企图設計只有一个对称面的光学系統,由于对称性破坏得很厉害,波差函数中将出現奇次項,可能单元将大量增加,需要滿足的要求太多,可以預料設計是难以成功的.

按照这种分析,非軸对称的系統中只有柱面系統稍有前途.

对于非轴对称系统的象差数，曾有过一些讨论<sup>[1]</sup>，但其中有错误，主要原因是对于对称性考虑不足。

### §1.1 双曲率系统的高斯光学

比轴对称系统复杂的各种系统中最简单的是双曲率系统，当曲面具有两个对称面且两面相垂直时，可以把这两个对称面的交线作为光轴，按第一章 §3，这两个方向的曲率也就是曲面在顶点处的主曲率，无论此曲面为这两个对称面（主截面）所截出的曲线（主截线）是圆或非圆，它的近轴部分总可以看作是圆，和轴对称面的差别仅是二主截线具有不同的曲率半径而已。

按第四章 §3，由轴上点发出的球面波为此双曲率面的近轴部分折射后，就形成一个具有两个主方向的波面，显然波面的主截面与此折射面的主截面相重合。因此，我们知道两个主截面内的近轴光线光路后，此双曲率面在近轴区域的表现也就完全确定了。和邻主光线细光束的情况相同，此时单个双曲率面的近轴区域具有两对焦点和两对主面，当它们已知后，它的近轴区域成像情况也就完全确定了。主截面相互重合的一些双曲率面即可组成双曲率系统。

可见双曲率系统就在近轴区域也不能成出理想的象，近轴点的象就有象散。象和物体也不相似，即两个方向的倍率不同。由于倍率不同，将使正方形的象成为长方形或菱形，圆成为椭圆。

光束两截面形成的象面位置可以由牛顿公式决定，即

$$\left. \begin{aligned} x_1 x'_1 &= f_1 f'_1, \\ x_2 x'_2 &= f_2 f'_2. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

下角标号表示不同的主截面内的量。\$f\_1 \neq f\_2\$，并且即使对光轴上一点，\$x\_1\$ 和 \$x\_2\$ 也不等，折射后 \$x'\_2\$ 和 \$x'\_1\$ 也不等。为使一点的象仍是一点可由图 9.2 和 (1) 式得出下列条件：

$$\left. \begin{aligned} x_1 x'_1 &= f_1 f'_1, \\ (x_1 - d)(x'_1 - d') &= f_2 f'_2, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

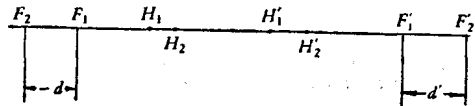


图 9.2

消去 \$x'\_1\$ 即得 \$x\_1\$ 的二次方程式，因此一般的双曲率系统存在两对共轭位置，在这位置上一点发出的近轴光线仍相交于一点。在实际问题中，我们只须变更双曲率面的两个曲率半径之一就能使一点发出的光线仍聚在一点。

当成出的象有象散时，由于象面位置是不确定的，故倍率并无确定的含义，有意

义的仅是由主截面内的光束所定的象面和倍率。当用上述方法找到无象散位置后，在此共轭位置上由二主截面的光路确定两方向具有的不同的倍率。光学系统作这种用途时常称为变形系统 (anamorphic system)，即成象清晰而形状变更的系统。

对于一般的双曲率系统，在上述近轴区域就已有四个独立参数，即两个象面位置和两个倍率，光束在两个主截面内的性质是相互独立的。但当我们已知两个主截面内的近轴光束性质后，光学系统在近轴区域的表现也就完全定了。就如第六章 §1 所述的确定光学系统的方法一样，此处可以将光学系统的两个主截面看作是两个不同的轴对称系统的子午截面，于是可用两个截面内的轴上光线和主光线来确定这个光学系统。当更普遍地考虑入射光束已有象散时，二物面位置和二入瞳位置就可以相互不同，并且两个物面位置 (入瞳位置) 可以作相互独立的移动。

### § 1.2 双曲率系统中象差之间的关系

取  $y = \eta = 0$  或  $z = \zeta = 0$  时，表 2 中所列的象差就只留下四项，即表中的前二列，它们就是主截面内光束的象差。轴对称系统子午截面内的象差可在 (VI.8) 式中令  $z = 0$  而得到。将二者相比较，我们就可以把双曲率系统的两个主截面想象成两个不同的轴对称系统的子午截面，关于这些系数的性质和算出这些系数的方法都可以运用第六、第七章的结果而得到。对于高级象差也同样可以作这种类比，而不须作更多讨论。

除了上述的性质已完全明确的八种象差以外，表 2 中还有八种新类型的象差。采用第六章中所用的方法不难得出各不同物面和光瞳位置的象差系数间关系。其中由于物面移动的规律很少运用，故此处不再推导，下面只导出光栏移动时的象差变化规则。

图 9.3 表示确定光学系统近轴区结构的四条近轴光线在某一折射面前的量。图中注出了各有关点的坐标值 (坐标原点是折射面顶点)，并画出了确定光线位置的四个坐标轴  $\eta, \zeta, y, z$  的位置。注意一对对坐标轴并不具有共同的原点，我们把两个主截面内的近轴光线和轴的交点作为相应坐标轴的原点。对量度光线位置的坐标轴作这种规定并不影响前面所作的所有推论。图 9.3 中还作出了新的  $y$  方向光栏坐标  $y^*$  和新的  $xy$  截面内的主光线。这表明光瞳位置之一作了一个位移。和轴对称系统不同，因光瞳位置有象散，故二主截面内的光栏移动项需作分别考虑，这也是将二坐标轴原点相互分离的原因。只有这样才能使结果简化。和第六章相同，我们理解表 2 中的坐标是规格化坐标，即



$$y = \frac{\bar{y}}{y_0}, \quad z = \frac{\bar{z}}{z_0}, \quad \eta = \frac{\bar{\eta}}{\eta_0}, \quad \zeta = \frac{\bar{\zeta}}{\zeta_0}.$$

式中带短横“—”的坐标是光线在坐标系中的实际坐标。

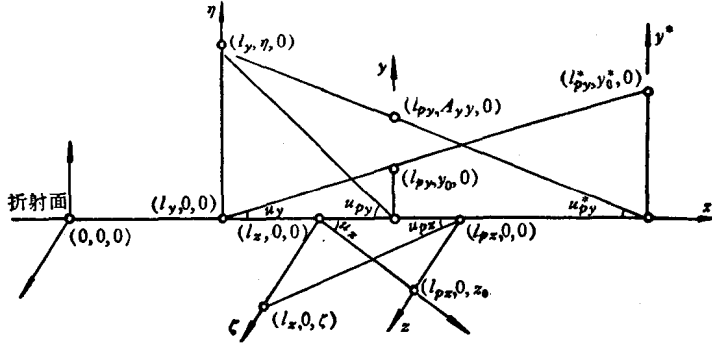


图 9.3

图 9.4 是和图 9.3 完全一样的坐标系,但图中未画出所有的近轴光线,而作出了一条任意光线,并注出了此光线在新旧坐标系内的坐标值。

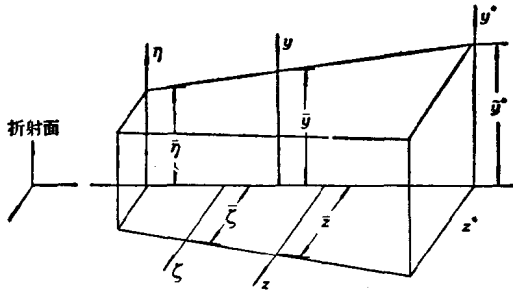


图 9.4

显然

$$\frac{\bar{y}^* - \bar{y}}{l_{py}^* - l_{py}} = \frac{\bar{y}^* - \bar{\eta}}{l_{py}^* - l_{py}},$$

即

$$\bar{y} = \frac{l_{py} - l_{py}}{l_{py}^* - l_{py}} \bar{y}^* + \frac{l_{py}^* - l_{py}}{l_{py}^* - l_{py}} \bar{\eta}.$$

将此式二方除以  $y_0$  (参见图 9.3) 即得:

$$\left. \begin{aligned} y &= y^* + A_y \eta, \\ A_y &= \frac{l_{py} - l_{py}}{l_{py}^* - l_{py}} \frac{\eta_0}{y_0} = \frac{(l_{py}^* - l_{py}) w_{py}^*}{y_0} = \frac{\Delta h_{py}}{h_y}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

同理,当光瞳在主截面  $xz$  内移动时,则有

$$\left. \begin{aligned} z &= z^* + A_z \zeta, \\ A_z &= \frac{\Delta l_{yz}}{h_z}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$A_y, A_z$  是表征光瞳位移的量, 和轴对称系统中的量  $A$  相当. 在作这种移动时, 二截面内的拉氏不变量  $j_y, j_z$  均不变.

按表 2, 双曲面原有波差是

$$\begin{aligned} \partial W_1 &= \frac{1}{4} S_{Iy} y^4 + S_{IIy} y^3 \eta + \frac{1}{2} (3S_{IIIy} + S_{IVy}) y^2 \eta^2 + S_{Vy} y \eta^3 \\ &+ \frac{1}{4} S_{Iz} z^4 + S_{IIz} z^3 \zeta + \frac{1}{2} (3S_{IIIz} + S_{IVz}) z^2 \zeta^2 + S_{Vz} z \zeta^3 \\ &+ S_{IIyz} y^2 z \zeta + \frac{1}{2} S_{IIIyz} y^2 \zeta^2 + S_{Vyz} y \eta \zeta^2 + S_{IIz\eta} z^2 y \eta \\ &+ \frac{1}{2} S_{IIIz\eta} z^2 \eta^2 + S_{Vz\eta} z \zeta \eta^2 + \frac{1}{2} S_{Iyz} y^2 z^2 + 2S_{IIIyz} y z \eta \zeta. \end{aligned} \quad (5)$$

式中系数的形式取得和轴对称系统相似, 同时也是为了使下面的公式简单化. 将(3), (4)式代入后按  $y^*, z^*$  重排列, 其相应系数为原系数之代数函数, 以  $S_{Iy}^*$  等符号表示, 则新系数和原系数间有下列关系:

$$\left. \begin{aligned} S_I^* &= S_I, \\ S_{II}^* &= S_{II} + A S_I, \\ \frac{1}{3} S_{IV}^* + S_{III}^* &= \frac{1}{3} S_{IV} + S_{III} + 2A S_{II} + A^2 S_I, \\ S_V^* &= S_V + A(3S_{III} + S_{IV}) + 3A^2 S_{II} + A^3 S_I, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

[(6)式中各量应一律附加下角标号  $y$  或一律附加下角标号  $z$ ] 及

$$\left. \begin{aligned} S_{Iyz}^* &= S_{Iyz}, \\ S_{IIyz}^* &= S_{IIyz} + A_z S_{Iyz}, \\ S_{IIz\eta}^* &= S_{IIz\eta} + A_y S_{Iyz}, \\ S_{IIIyz}^* &= S_{IIIyz} + 2A_z S_{IIyz} + A_z^2 S_{Iyz}, \\ S_{IIIz\eta}^* &= S_{IIIz\eta} + 2A_y S_{IIz\eta} + A_y^2 S_{Iyz}, \\ S_{Vyz}^* &= S_{Vyz} + A_y S_{IIIyz} + 2A_z S_{IIIyz} + 2A_y A_z S_{IIyz} \\ &\quad + A_z^2 S_{IIz\eta} + A_y A_z^2 S_{Iyz}, \\ S_{Vz\eta}^* &= S_{Vz\eta} + A_z S_{IIIz\eta} + 2A_y S_{IIIyz} + 2A_z A_y S_{IIz\eta} \\ &\quad + A_y^2 S_{IIyz} + A_z A_y^2 S_{Iyz}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中(6)式直接就和轴对称系统的子午象差相同, 而(7)式则为交叉项系数间的关系; (7)式的前五个式子仍是和轴对称系统相似的.

## § 1.3 象差的几何意义

在表 2 中我們已按象差的几何意义将象差作了分类, 那里的分类标准是很简单的, 即按光栏坐标的幂次分类.

前已提及, 表中前二列与轴对称系统的子午象差相当, 但  $(3S_{III} + S_{IV})$  项实为象面弯曲, 只是由于  $S_{IIIy} \neq 3S_{IIIz} + S_{IVz}$  及  $S_{IIIz} \neq S_{IVy} + 3S_{IIIy}$  才形成象散, 使光束的二截面具不同的焦点.

为讨论其他象差的几何表现, 运用公式 (I.72a), 在此为:

$$\begin{cases} nu_y T A_y = \frac{\partial W}{\partial y}, \\ nu_z T A_z = \frac{\partial W}{\partial z}, \end{cases}$$

由此可见“象散”  $S_{IIIyz}$  的表现是:

$$\begin{cases} nu_y T A_y = S_{IIIyz} \eta \zeta z, \\ nu_z T A_z = S_{IIIyz} \eta \zeta y. \end{cases}$$

假设两个高斯象面相重合, 则当光栏为圆形时, 通过光栏中一环的光线在高斯象面上相交为一圆环 ( $u_y = u_z$  时) 或椭圆环 ( $u_y \neq u_z$  时). 由于位相错开  $90^\circ$  之故, 没有光线能两两相交, 光线的光路可作如下的比拟: 将一圆锥上刻以一条条通过锥心的直线 (即锥面与通过锥中心的平面的交线) 如图 9.5a, 它也可看作是两个圆环上绕以纱线后的形状, 然后将环 1 相对环 2 转过  $90^\circ$ , 结果的纱线形式如图 9.5b.

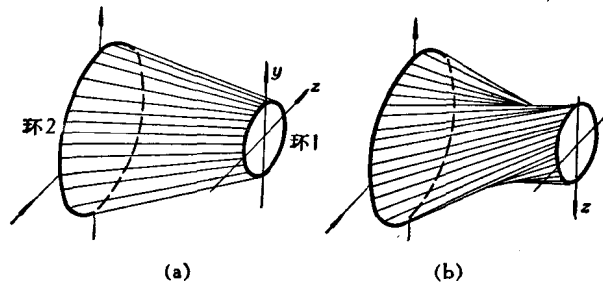


图 9.5

虽然我们把  $S_{vy}$  和  $S_{vz}$  仍然称作畸变, 但它们并不使平行于坐标轴的直线成象弯曲; 使这种直线的象弯曲者仅畸变  $S_{vy}$  和  $S_{vz}$ , 由于二者相似, 我们讨论二者之一就够了. 因

$$\begin{cases} nu_y T A_y = S_{vy} \eta \zeta^2, \\ nu_z T A_z = 0, \end{cases}$$

故它使正方形成出图 9.6a 所示的象, 图中点线是理想象.

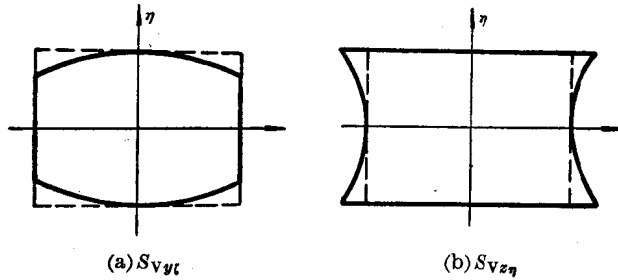


图 9.6

$S_{I_{1y}}$  和  $S_{I_{1z}}$  虽称作彗差, 但它们并不组成彗星状的点列图. 但  $S_{I_{1y}}$  与  $S_{I_{1z\eta}}$  之和 (或  $S_{I_{1z}}$  加  $S_{I_{1y\zeta}}$ ) 可形成彗星状点列图, 彗星的顶角由二象差之比和二截面倍率不等 ( $u_y$  和  $u_z$  不等) 等因素决定, 可作任意变化.

$S_{I_{1w}}$  与等量的  $S_{I_{1y}}$  及  $S_{I_{1z}}$  组合就形成轴对称的球差.

## § 2 同轴柱面系统的初级象差

同轴柱面系统是双曲率系统的特例, 它的曲率半径之一为无限大, 因此曲面仍然有两个对称面, 而且对称面之一可以作垂直于母线的位移而保持其对称性, 假若柱面为这个可移动的对称面所截出的截线是圆弧, 此柱面称为圆柱面; 同轴圆柱面系统也就是圆心线相互平行且处在同一平面内的系统.

由于同轴圆柱面系统的对称面之一可以平行移动, 因之它的象差特性就比一般的双曲率系统简单得多.

仍如图 9.1, 取  $\eta$  轴和  $y$  轴与柱面的母线平行, 坐标面  $Oxy$  和  $O\xi\eta$  与柱面系统的对称面之一重合; 坐标面  $Oxz$  和  $O\xi\zeta$  与另一对称面重合, 此坐标面作平移时柱面系统的性质毫不变化. 因此光程是  $\bar{y}-\bar{\eta}$ ,  $z$ ,  $\zeta$  三量的函数, 用符号  $\omega = \frac{\bar{y}-\bar{\eta}}{y_0} = y - \frac{\eta_0}{y_0}\eta$  则光程  $W(\omega, z, \zeta)$  具有下列对称性:

$$W(\omega, z, \zeta) = W(-\omega, -z, -\zeta),$$

$$W(-\omega, z, \zeta) = W(\omega, z, \zeta),$$

故  $W$  的展开式中只能含有下列四个单元:

$$\omega^2, z^2, \zeta^2, z\zeta.$$

$W$  的二次项表示光学系统的高斯光学特性, 四次项即为初级象差. 因此在 Seidel 区域内的象差表示式就是:

$$2W_1(\omega, z, \zeta) = b_1 z^4 + b_2 \zeta z^3 + b_3 \zeta^2 z^2 + b_4 \zeta^3 z + c_1 \left( \omega^4 - \frac{\eta_0^4}{y_0^4} \eta^4 \right) + c_2 \left( \omega^2 - \frac{\eta_0^2}{y_0^2} \eta^2 \right) \zeta^2 + c_3 \omega^2 z \zeta + c_4 \omega^2 z^2. \quad (8)$$

將(8)式中  $W$  展開為  $y$  和  $\eta$  的函數, 並與(5)式相比較, 即得到柱面系統中象差係數間存在的關係:

$$b_1 = \frac{1}{4} S_{Iz}, \quad b_2 = S_{IIz}, \quad b_3 = \frac{1}{2} (3S_{IIIz} + S_{IVz}), \quad b_4 = S_{Vz}; \quad (9)$$

$$4c_1 = S_{Iy} = -\frac{y_0}{\eta_0} S_{IIy} = -\frac{y_0^2}{\eta_0^2} \left( S_{IIIy} + \frac{1}{3} S_{IVy} \right) = -\frac{y_0^3}{\eta_0^3} S_{Vy}; \quad (10)$$

$$2c_2 = S_{III\zeta} = -\frac{y_0}{\eta_0} S_{V\zeta}; \quad (11)$$

$$c_3 = S_{IV\zeta} = -\frac{y_0}{\eta_0} S_{III\eta} = \frac{y_0^2}{\eta_0^2} S_{V\eta}; \quad (12)$$

$$2c_4 = S_{IVz} = -\frac{y_0}{\eta_0} S_{III\eta} = \frac{y_0^2}{\eta_0^2} S_{III\eta}. \quad (13)$$

即(8)式中帶符號  $c$  的象差都是多種象差按一定比例的混合, 現在來考慮幾種特殊情況。

首先考慮  $y$  截面內入瞳位於無限遠的情況, 此時  $\bar{y} \rightarrow \infty$ ,  $y_0 \rightarrow \infty$ ,  $\omega \rightarrow y$ , 因之(8)式簡化為:

$$2W_1 = \frac{1}{4} S_{Iz} z^4 + S_{IIz} z^3 \zeta + \frac{1}{2} (3S_{IIIz} + S_{IVz}) z^2 \zeta^2 + S_{Vz} z \zeta^3 + \frac{1}{4} S_{Iy}^{\infty} y^4 + \frac{1}{2} S_{IIy}^{\infty} y^2 z^2 + S_{IIIy}^{\infty} y^2 z \zeta + \frac{1}{2} S_{IVy}^{\infty} y^2 \zeta^2, \quad (14)$$

且(10)–(13)式中凡和  $y_0$  之積等於常數的係數此時均等於零, 並且此時的象差和  $\eta$  無關。這是合理的, 因入瞳處於無限遠, 亦即入射到柱面系統的主光綫和  $x$  軸平行, 故在光綫坐標  $\zeta$  相同時, 由  $\eta=0$  的點發出的光束平行於  $\eta$  軸作平移時即得出  $\eta \neq 0$  的點所發出的光束, 可見二光束折射情況完全一致, 亦即象差和  $\eta$  無關。

由(14)式, 當光柵處在特殊位置時( $y$  方向為無限遠處, 即  $l_{yy} = \infty$  時)的象差係數:  $S_{Iy}^{\infty}$ ,  $S_{IVz}^{\infty}$ ,  $S_{III\zeta}^{\infty}$ ,  $S_{III\eta}^{\infty}$  (其他係數等於零) 已知後, 即可按(6), (7)兩式求出任意位置的所有其他係數。在(6), (7)式中令

$$A_x = 0, \quad A_y = -\frac{\eta_0}{y_0}, \quad (15)$$

即得光瞳處在任意位置時的公式組(10)–(13)式。

## § 2.1 物体在无限远处时的象差

当物距无限大时  $\eta_0 \rightarrow \infty$ ,  $\bar{\eta} \rightarrow \infty$ , 此时宜将(10)–(13)式改写成:

$$4c_1 \frac{\eta_0^3}{y_0^3} = \frac{\eta_0^3}{y_0^3} S_{IV} = -\frac{\eta_0^2}{y_0^2} S_{IIV} = \frac{\eta_0}{y_0} \left( S_{IIIIV} + \frac{1}{3} S_{IVy} \right) = -S_{vy}, \quad (16)$$

$$2c_2 \frac{\eta_0}{y_0} = \frac{\eta_0}{y_0} S_{IIIvz} = -S_{vz}, \quad (17)$$

$$c_3 \frac{\eta_0^2}{y_0^2} = \frac{\eta_0^2}{y_0^2} S_{IIyz} = -\frac{\eta_0}{y_0} S_{IIIyz} = S_{vz\eta}, \quad (18)$$

$$2c_4 \frac{\eta_0^2}{y_0^2} = \frac{\eta_0^2}{y_0^2} S_{Iyz} = -\frac{\eta_0}{y_0} S_{IIIz\eta} = S_{IIIz\eta}, \quad (19)$$

此时  $c_1, c_2, c_3, c_4$ , 均应趋近于零, 以使上列四式在  $\eta_0 \rightarrow \infty$  时均有极限值. 由此可见, 除  $S_{vy}, S_{vz}, S_{vz\eta}, S_{IIIz\eta}$  有极限值外, 其他系数的极限值均等于零.

由上面对柱面系统的一般情况和特殊情况的讨论可以看出, 柱面系统象差中不同于轴对称系统子午象差的只有三种, 当我们用一些特殊方法(例如设光栏在无限远或物体在无限远)求出这三个系数后, 柱面系统的所有特点就完全清楚了, 下面就来找出这些特殊系数.

物体在无限远处时的波差就由(5)式得:

$$\begin{aligned} W_1 = & \frac{1}{4} S_{Iz} z^4 + S_{IIz} z^3 \zeta + \frac{1}{2} (3S_{III} + S_{IV}) z^2 \zeta^2 + S_{Vz} z \zeta^3 \\ & + \frac{1}{2} S_{IIIz\eta} z^2 \eta^2 + S_{Vzy} \eta^3 + S_{Vyz} y \eta \zeta^2 + S_{vz\eta} z \zeta \eta^2. \end{aligned} \quad (20)$$

除了两种由柱形而产生的畸变外, 还因柱形而产生象面弯曲, 可分别称为柱畸变和柱场曲.

下面几节的主要目的就在于求出(20)式中的所有象差系数.

## § 3 柱面望远镜的象差

## § 3.1 圆柱面折射光线光路计算

下面两节先讨论柱面系统的特殊情况, 即由圆柱面组成的光学系统.

图 9.7 表示任一空间光线  $S\vec{q}$  在一圆柱面上折射的情况,  $\vec{r}$  是法线. 以通过法线并垂直于母线的面作为坐标面  $xz$ , 以圆心线作为  $y$  轴. 光线  $S\vec{q}$  和坐标面  $xy$  交于  $A$  点,  $A$  点的矢径以  $\vec{a}$  表示. 由于通过  $\vec{r}$  和  $S\vec{q}$  的面是入射面, 也就是折射面, 故折

射后光线的矢径  $S'\vec{q}'$  必在此面内, 因此它和  $xy$  面交点的矢径  $\vec{a}'$  必与  $\vec{a}$  在一条线上, 即:

$$\vec{a}' = M\vec{a}. \quad (21)$$

由折射定律:

$$\vec{q}' = \vec{q} + \Phi\vec{r}, \quad (22)$$

其中矢量  $\vec{q}$  之长为  $n$ ,  $\vec{q}'$  之长为  $n'$ ,

$$\Phi = \frac{\vec{r} \cdot \vec{q}' - \vec{r} \cdot \vec{q}}{r^2}. \quad (23)$$

再由图 9.7:

$$S\vec{q} = \vec{a} + \vec{r}, \quad (24)$$

$$S\vec{q}' = \vec{a}' + \vec{r}. \quad (25)$$

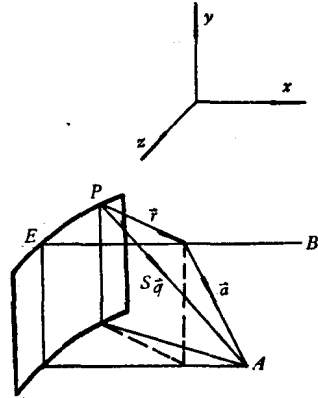


图 9.7

由(21), (22), (24), (25)四式消去  $\vec{a}$ ,  $\vec{a}'$  和  $\vec{q}'$ , 得:

$$(MS - S')\vec{q} = (S'\Phi - 1 + M)\vec{r}. \quad (26)$$

$\vec{q}$  和  $\vec{r}$  一般不共线, 故必有

$$MS = S', \quad (27)$$

$$S'\Phi = 1 - M. \quad (28)$$

这就是(21), (22), (23), (24), (25)式中所引入的一些常数间的关系, 将(24)式代入(22)式消去  $\vec{r}$ , 并利用关系式(27), (28)得:

$$\left. \begin{aligned} \vec{q}' &= -\Phi\vec{a} + \frac{1}{M}\vec{q}, \\ \vec{a}' &= M\vec{a}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

矢量  $\vec{a}$  和  $\vec{q}$  完全决定了光线位置, 故由(29)式, 折射后的光线位置也就全定了, 但尚须算出  $\Phi$  和  $M$ .

将(24), (25)式分别与  $\vec{q}$ ,  $\vec{q}'$  作矢积并利用折射定律得:

$$\vec{a} \times \vec{q} = -\vec{r} \times \vec{q} = -\vec{r} \times \vec{q}' = \vec{a} \times \vec{q}', \quad (30)$$

故

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \vec{q}' &= \pm \sqrt{\vec{r}^2 \vec{q}'^2 - (\vec{r} \times \vec{q}')^2} = \pm \sqrt{n'^2 r^2 - (\vec{a} \times \vec{q})^2} \\ &= \pm \sqrt{n'^2 r^2 - \vec{a}^2 \vec{q}^2 + (\vec{a} \cdot \vec{q})^2}, \end{aligned} \quad (31)$$

相似地

$$\vec{r} \cdot \vec{q} = \pm \sqrt{n^2 r^2 - \vec{a}^2 \vec{q}^2 + (\vec{a} \cdot \vec{q})^2}. \quad (32)$$

由(23), (31), (32)式即可求出  $\Phi$ ; (31), (32)式的正负是由  $r$  的正负而定的. 将(24)式与  $\vec{q}$  作标积, 得

$$n^2 S = \vec{a} \cdot \vec{q} + \vec{r} \cdot \vec{q}, \quad (33)$$

由此即可算出  $S$ , 再由 (27), (28) 式求出  $M$ , 这样一来, 光线为圆柱面折射后的坐标就完全决定了.

在上面公式推导过程中, 并未利用  $\vec{r}$  在坐标面内这个事实, 实际上, 当光线为球面折射时, 上列公式都仍然是对的, 这就是 (I.107) 式. 此时, 坐标系的原点即为球心.

采用矢量的分量表示:

$$\vec{q} = (\alpha, \beta, \gamma), \quad \vec{a} = (X, Y, 0), \quad (34)$$

则在柱面情况下, 上列公式可以简化, 由于  $\vec{r}$  在  $XZ$  面内, 故由 (24) 式得:

$$S\beta = Y. \quad (35)$$

由 (32), (33), (25) 三式消去  $\vec{r} \cdot \vec{q}$  及  $Y$  得出  $S$  的二次方程, 解方程即可求得:

$$S = \frac{X\alpha \pm \sqrt{(n^2 - \beta^2)r^2 - (n^2 - \beta^2)X^2 + X^2\alpha^2}}{n^2 - \beta^2}. \quad (36)$$

将此式代入 (33) 式, 得

$$\vec{r} \cdot \vec{q} = \pm \sqrt{(n^2 - \beta^2)r^2 - (n^2 - \beta^2)X^2 + X^2\alpha^2}, \quad (37)$$

类似地:

$$\vec{r} \cdot \vec{q}' = \pm \sqrt{(n'^2 - \beta'^2)r^2 - (n'^2 - \beta'^2)X^2 + X^2\alpha^2}. \quad (38)$$

由 (22) 式, 因  $\vec{r}$  在  $XZ$  面内, 故有

$$\beta' = \beta, \quad (39)$$

因此  $\beta$  是整个折射过程的不变量.

由公式组 (36), (37), (38), (39) 可见, 折射公式与具有下列初始数值的子午面内光线折射公式无异:

$$\left. \begin{aligned} \bar{n} &= \sqrt{n^2 - \beta^2}, \\ \bar{n}' &= \sqrt{n'^2 - \beta'^2} = \sqrt{n'^2 - \beta^2}, \\ \vec{q} &= (\alpha, 0, \gamma), \\ \vec{q}' &= \bar{n}^2, \\ \vec{a} &= (X, 0, 0). \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

亦即将折射率改变为  $\sqrt{n^2 - \beta^2}$  后, 即可将此光线在  $XZ$  面内的投影看作是真正的光线. 因此, 只须将折射率按  $\beta$  之值作相应改动后, 即可用普通的子午光线三角计算来计算圆柱面系统的空间光线.



## § 3.2 象差分布及校正方法

由球差分布的 Kerber 公式可知:

$$\bar{n}'_k \bar{u}'_k \sin \bar{U}'_k \bar{L} A'_k - \bar{n}_1 \bar{u}_1 \sin \bar{U}_1 \bar{L} A_1 = \sum_1^k (\bar{L}' \sin \bar{U}' - \bar{L} \sin \bar{U}) \bar{n} \bar{v},$$

符号上加一横表示是折射率按(40)式改换后的计算结果。由此式及  $\bar{L} A'_k \sin \bar{U}'_k = \Delta \bar{H}'_k \cos \bar{U}'_k$ , 可得象高差的公式:

$$\begin{aligned} & \bar{n}'_k \bar{u}'_k \cos \bar{U}'_k \Delta \bar{H}'_k - \bar{n}_1 \bar{u}_1 \cos \bar{U}_1 \Delta \bar{H}_1 \\ & = \sum_1^k (\bar{L}' \sin \bar{U}' - \bar{L} \sin \bar{U}) \bar{n} \bar{v} + \bar{j} \sum_1^k (\cos \bar{U}' - \cos \bar{U}), \end{aligned} \quad (41)$$

式中  $\Delta H$  是理想和实际象高之差, 而  $\bar{j}$  是 Lagrange 不变量。(41)式本是同轴球面系统的子午象差分布公式, 由(41)式右方作近似很容易求出 Seidel 象差的相应公式(第六章 § 7)。在这里, 我们由(41)式可以看出: 同轴圆柱系统的象差在  $z$  方向的分量一般可以分为两部分, 第一部分是把折射率改为  $\bar{n}$  后的相应同轴球面系统之子午象差, 其初级象差即(20)式中的  $S_{Iz}$ ,  $S_{IIIz}$ ,  $3S_{IIIz}$ ,  $S_{IVz}$ ,  $S_{Vz}$ ; 另一部分则为折射率作上述改动后使高斯象面不同于原有高斯象面(轴向“色”差), 并且高斯象高不同于原有高斯象高(垂轴“色”差, 或倍率“色”差)。

这两种象差的初级象差分别由(20)式中的  $S_{IIIz}$  和  $S_{Vz}$  表示。由此可知, 柱场曲原来就相当于轴向“色”差, 柱畸变原来就相当于倍率“色”差。

普通的色差可以用简易的  $(d-D)$  方法考虑, 消色差条件可以表示为:

$$\sum_1^k (D_1 - D_2) \delta n = 0, \quad (42)$$

$D_1, D_2$  为同一点发出的任意两条光线在透镜内的光路长,  $\delta n$  为此透镜对二色光线的折射率差。现在用这个观点来看柱弯曲和柱畸变校正的条件。

由(40)式, 空气的折射率变为  $n_a$ :

$$\bar{n}_a = \sqrt{1 - \beta^2}.$$

把空气折射率仍取为单位, 即把所有玻璃的折射率  $\bar{n}$  除以  $\bar{n}_a$ , 以  $\bar{n}$  表示, 则

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \sqrt{\frac{n^2 - \beta^2}{1 - \beta^2}} = \sqrt{n^2 \left[ 1 + \frac{(n^2 - 1)\beta^2}{n^2(1 - \beta^2)} \right]} \\ &= n \sqrt{1 + \frac{(n^2 - 1)\beta^2}{n^2(1 - \beta^2)}} \doteq n + \frac{(n^2 - 1)\beta^2}{2n(1 - \beta^2)}. \end{aligned} \quad (43)$$

故折射率差的近似值是

$$\bar{n} - n = \frac{n^2 - 1}{2n} \beta^2. \quad (44)$$

校正圓柱“色”差的條件是：

$$\sum_1^k (D_1 - D_2) (\bar{n} - n) = 0,$$

(44)式中 $\beta$ 的規化值即(20)式中的 $\eta$ 。將(44)式(此式已略去 $\beta^4$ 以上的項)代入即得：

$$\frac{1}{2} \beta^2 \sum_1^k (D_1 - D_2) \left( \frac{n^2 - 1}{n} \right) = 0. \quad (45)$$

因此，在校正普通色差的同時也校正柱“色”差的可能性就在於光學玻璃的折射率和色散間必須滿足一定的關係即必須同時滿足(42)及(45)式。在最簡單的双透鏡消色膠合組中，折射率和色散間必須滿足下列關係：

$$\delta n \propto \frac{n^2 - 1}{n} = n - \frac{1}{n}. \quad (46)$$

設 $n=1.5$ 時 $\delta n=0.01$ ，則校正柱象散和柱畸變的玻璃就是：

$n$	1.45	1.50	1.55	1.60	1.65	1.70
$\delta n$	0.0091	0.0100	0.0109	0.0117	0.0125	0.0133

假如光學玻璃的折射率和色散滿足條件(46)式，再對無限遠物體校正好子午象差，那麼柱面系統對無限遠物體就將完善成象。但由上表可見，這是不現實的。

### § 3.3 一般的同軸柱面系統

對一般的同軸柱面系統，§ 2中關於象差的討論仍然正確，而且§ 3中的主要論斷：“改變折射率後可以把空間光束看作子午面內的光束”也仍然正確。實際上，§ 3中的法綫矢量 $\vec{r}$ 並不必須是“半徑矢量”而可以是一般的非圓柱面的法綫，其長度 $r$ 為由折射點 $P$ 沿此法綫到它和光軸的交點 $O$ 的距離 $PO$ ，非圓柱面和圓柱面的唯一差別只在於前者的 $r$ 是折射點高度的函數而已。因此，除了子午象差隨球面變為非球面而發生變化外，一般柱面系統的其餘象差是和圓柱系統一樣的。

### § 3.4 柱面望遠鏡的象差估值

既然由柱面折射產生的象差——柱畸變和柱象散幾乎不能被校正，則它們的數量是否會影響到象的質量是個需加討論的問題，假若雖是不能校正但是影響很小，那麼仍然是可以不加考慮的。

設柱面伽利略望远镜的角倍率为  $k$  (如图 9.8 所示), 望远镜由二薄透镜组成, 其焦距倒数为  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$ ,  $-\varphi_2 = \frac{1}{k} \varphi_1$ . 設平行光綫在二透镜上的入射高度各为  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_2 = kh_1$ ; 光綫入射到此系統时,  $z$  方向的方向余弦为  $\zeta$ ,  $y$  方向的方向余弦为  $\eta$ , 它們也就是規格化后的物高. 并設主光綫通过第二透镜的中心, 則此光綫的入射高度  $h_{p2} = 0$ , 而在第一面上的入射高度  $h_{p1}$  則为

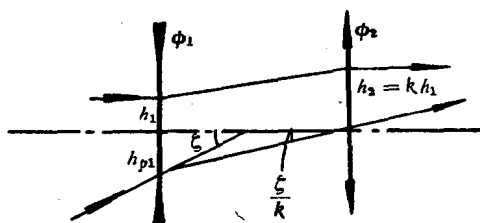


图 9.8

$$h_{p1} = d\zeta_0 = \zeta_0 \left( \frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2} \right) = (1-k) \frac{\zeta_0}{\varphi_1}.$$

按規格化条件,  $\zeta_0 = \frac{1}{k}$ , 于是可用球面薄透镜的色差表示式算出軸向“色”差(柱象散)和垂軸“色”差(柱畸变), 即

$$\eta^2 S_{III\eta} = C_I = \sum \frac{h^2 \varphi}{\nu},$$

$$\eta^2 S_{V\eta} = C_{II} = \sum \frac{h h_p \varphi}{\nu}.$$

此处入射柱面的斜光綫折射率差  $\delta n$  由(44)式算出, 因此等价的色散系数  $\nu$  是:

$$\nu = \frac{n-1}{\delta n} = \frac{(n-1)2n}{(n^2-1)\eta^2} = \frac{2n}{(n+1)\eta^2}.$$

由于  $\frac{n}{n+1}$  几乎是不变的, 如下表:

$n$	1.5	1.6	1.7
$\frac{n}{n+1}$	0.60	0.615	0.63

故胶合透镜对柱“色”差而言也可以当作单透镜看待, 令  $\nu = \frac{1.2}{\eta^2}$ , 則由此算出柱面弯曲是:

$$S_{III\eta} = (h_1^2 \varphi_1 + h_2^2 \varphi_2) \frac{1}{\eta^2 \nu} = \frac{(1-k)}{1.2} h_1^2 \varphi_1.$$

因此, 当  $y$  方向的象高  $\eta$  已定时, 象面弯曲由压缩比  $k$  和  $\varphi_1$  决定.  $\varphi_1$  愈小(焦距愈长, 长度和体积愈大), 則弯曲愈小, 例如  $y$  方向的象高为 9,  $k=2$  时, 如  $\varphi_1 = -0.01$  (长度为 100), 則由  $S_{III\eta}$  引起的弯曲为 0.17; 如  $\varphi_1 = 0.02$  (长度为 50), 則为 0.34. 而柱畸变則为

$$S_{Vz\eta} = (h_1 h_{\eta} \rho_1 + h_2 h_{\eta} \rho_2) \frac{1}{\eta^2 \nu} = \frac{h_1 (1-k)}{1.2k}.$$

故  $y$  方向象高  $\eta$  和  $z$  方向象高  $-\zeta$  已定时, 畸变就确定了. 视场角愈大则畸变愈大, 例如  $\eta=0.22$ ,  $\zeta=0.6$ ,  $k=2$  时畸变为 1.6%, 这就是说, 象差的影响都不太严重.

### § 3.5 柱面望远镜的畸变

上面已导出了除  $S_{V\eta}$  和  $S_{V\zeta}$  外的所有象差系数表示式. 由于  $S_{V\eta}$  就等于平行平板的畸变, 当物象空间的媒质相同时,  $S_{V\eta}=0$ , 因此唯一需要再加考虑的就是另一柱畸变  $S_{V\zeta}$ .

图 9.9 中  $AA$  是物空间一条直线 (两端处在无限远, 并与  $z$  轴平行), 直线上一点  $A$  发出方向余弦为  $\xi, \eta, \zeta$  的入射光束, 经过柱面系统后成为  $\xi', \eta', \zeta'$ , 其中  $\eta'=\eta$ ,  $\zeta'=\zeta/k$ ,  $k$  由伽利略望远镜的倍率和子午面内的畸变及柱畸变决定, 约等于此望远镜原定的压缩比.

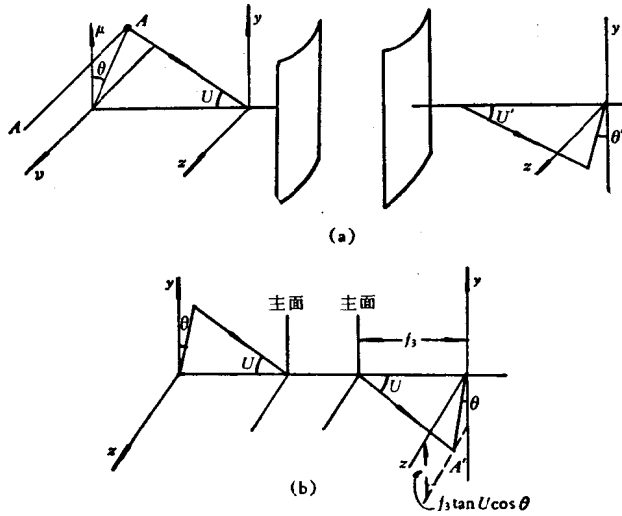


图 9.9

设方向余弦为  $\xi, \eta, \zeta$  的光线 (与光轴 ( $\xi=0$  的方向) 夹角  $U$ , 通过光轴和光线的平面与  $y$  轴夹角  $\theta$ , 则

$$\begin{cases} \tan \theta = \frac{\zeta}{\eta}, \\ \sin U = \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}. \end{cases}$$

若此光束为普通物镜成理想象, 则象高和  $\tan U$  成正比, 且幅角  $\theta$  不变, 故当

$$f_s \tan U \cos \theta = \text{常数}$$

时,为一直线,亦即当  $\eta$  和  $\zeta$  满足

$$\frac{\sqrt{\eta+\zeta^2}}{\sqrt{1-(\eta^2+\zeta^2)}} \cdot \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+\zeta^2}} = \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2-\zeta^2}} = \text{常数}$$

时,为一直线. 由此可见,

$$\frac{\eta'}{\sqrt{1-\eta'^2-\zeta'^2}}$$

若为常数,则象为直线,否则线条是弯曲的. 因此它与  $\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2-\zeta^2}}$  之差异即可作为畸变的量度,故畸变  $D_1$  可写作:

$$\begin{aligned} D_1 &= \eta \left( \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2-\zeta^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2-\zeta^2/k^2}} \right) \\ &= \frac{k^2-1}{2k^2} \eta \zeta^2 \left( \frac{2}{\sqrt{1-\eta^2-\zeta^2} \sqrt{1-\eta^2-\zeta^2/k^2} (\sqrt{1-\eta^2-\zeta^2} + \sqrt{1-\eta^2-\zeta^2/k^2})} \right) \\ &\doteq \frac{k^2-1}{2k^2} \eta \zeta^2, \end{aligned}$$

即

$$S_{v\zeta} = \frac{k^2-1}{2k^2}.$$

可见,当伽利略系统具有倍率  $k$  时,一条直线所成出的象不再是直线而具有弯度  $D_1$ , 例如压缩比  $2\times$  的伽利略望远镜  $k$  约等于 2,  $\eta=0.22$ ,  $\zeta=0.6$ , 畸变百分数  $D_1/\eta$  就为 13%.

总括上列数小节中对柱面系统组成的望远镜象差的讨论可知,柱面系统所特有的象差性质是很简单的. 其中之一 ( $S_{III\eta}$ ,  $S_{v\eta}$ ) 是由于斜光束的“等价折射率”差异所引起,数量不大. 其中之一 ( $S_{v\zeta}$ ) 则是由于二方向具有不同倍率所必然引起的,它的数值较大,使象的形状显著弯曲变形.

### 参 考 文 献

- [1] 1. Smith, T., *Trans. Opt. Soc.*, **29** (1927), 71.  
 2. Burfoot, T. O., Third Order Aberrations of Doubly Symmetric Systems, *Proc. Phys. Soc.*, **B67** (1954), 523.  
 3. Wynne, C. G., The Primary Aberrations of Anamorphic Lens Systems, *Proc. Phys. Soc.*, **B67** (1954), 529.

## 第 十 章

# 光学零件的制造和装配公差

### §1 引 言

用初級象差理論可以考察光学系統中各零件参数的名义值(半徑、厚度、折射率、色散、同軸度等)所能容許的誤差以及局部誤差(球面度、平度等)。光学系統所以要求各零件参数的名义值正确,不外乎是为使高斯光学特性(焦距、倍率等)和成象质量保持光学設計时的原状。高斯光学特性一般并无严格要求,在稍为复杂的系統中更易于由調整而达到(如調整共軛距即可使显微鏡物鏡倍率精确),对此我們不加考虑。另外,高級象差既然属高次小量,其随結構微小变动而变动的量常可忽略不計(它至少比初級象差变动量小些),因此可以认为公差一般可根据初級象差变动情况而定。但是对于以大象差相互补偿而設計出来的高质量系統,象差产生量与残余量相比是很大的,此时某些因素的小量变动足以使結果显著变坏,因此公差須很严。此时由初級象差微分理論作出的估計是不够准的,应先由初級象差理論确定出哪些因素的影响最重要,然后对于这几个重要因素进行实际光綫計算而确定公差。

計算得出的半徑公差常常是很大的,但为保持面形規矩,且考虑到加工时所用的样板牛頓圈檢查方法,相差圈数仍不宜大。而当計算所得公差很小时(例如广角物鏡的透鏡厚度),我們應該考虑到在装配时用其他因素来調整补偿的可能性而将公差适当放大,以便加工方便。由此可見公差的決定实非單純的象差变动計算,它与所选取的加工、檢驗和装配調整方案密切相关。應該說,加工、檢驗和調整方案之选取應該建立在分析的基础上,而初級象差的微分理論則应是它的基础之一,除此之外还有高斯光学的微分理論和反射鏡的正象特性等。

象差随結構变化而变化的量常可分为两部分:其一为直接的,其二为由于此因素变更而使后組所接受光束的高斯光学特性变化,从而衍生的間接影响。称前者为本征的,它易于由微分直接得出;称后者为衍生的,宜用象差理論計算出来。

为使光学系统的质量保持原设计的水平,可以计算而决定各个参量的容许误差,这是本章的主题。但是单单算出公差是不够的,设计者应使光学系统容许较宽的公差,应使设计在工艺上易于实现,从而导致较低的成本。国外的一些计算机程序可以算出其成本以便相互比较,为此就要对公差和成本的关系作出定量的表达。对于我国的工厂生产成本,还未见到有关的统计研究。下面列出一个美国的统计结果 [Plummer, *Proc. SPIE*, v. 81, (1976)p. 82] 作为参考。这是针对直径 25—50 毫米的透镜的代价比较,以 100 为基数。由于工艺水平不同,工人工资在成本中所占比重不同,以及原材料价格不同等等,它不一定符合我国的实际。此外,表中引用的公差表示也有些和国内现行者不同。

直径公差 (毫米)	±0.1	±0.05	±0.025	±0.0125	±0.0075		
	100	100	103	115	150		
厚度公差 (毫米)	±0.2	±0.1	±0.05	±0.025	±0.0125		
	100	105	115	150	300		
玻璃疵病级别	0	1	2	3	4	5	5+
	100	100	103	110	150	250	500
每盘透镜数	25	18	11	6	3	1	
	100	105	115	130	175	300	
同轴度 (以角度表示)	6'	3'	2'	1'	30"	15"	
	100	103	108	115	140	200	
光圈数/局部光圈	10/5	5/2	3/1	2/1/2	1/1/2	1/1/3	
	100	105	120	140	175	300	
直径厚度比	9:1	15:1	20:1	30:1	40:1	50:1	
	100	120	150	200	300	500	
表面光洁度 (美 Mil-C-13830A 标准)	80—50	60—40	40—30	20—10	10—5		
	100	110	125	175	350		
玻璃价格	\$3.0	\$5.0	\$8.0	\$15.0	\$25	\$50	\$100
	100	108	115	125	135	200	350
镀膜规范	不镀	M <sub>g</sub> F <sub>2</sub> 单层		3—4 层		4 层以上	
	100	115		150		200—500	

## § 2 单个因素变更时的直接影响

### (a) 厚度

厚度增大  $\Delta d$  时,后组的  $l$  变为  $l - \Delta d$ ,  $l_p$  变为  $l_p - \Delta d$ , 即物体和光栏均有移动,它对象差的影响纯是间接的,本征变化为零。

### (b) 半径

以轴上光线为例,各量变动如下:

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta i &= -\frac{h}{r^2} \Delta r = h \Delta c, \\
 \Delta i' &= \frac{n \Delta i}{n'}, \\
 \Delta u' &= \Delta i - \Delta i' = n \Delta i \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right), \\
 \Delta l' &= -\left( \frac{l' \Delta u'}{u'} \right) \\
 &= -\left( 1 - \frac{n}{n'} \right) \frac{l'^2}{r^2} \Delta r \\
 &= -\left( 1 - \frac{n}{n'} \right) l'^2 \Delta c,
 \end{aligned} \right\} \quad (1a)$$

或

$$n' u'^2 \Delta l' = (n - n') h^2 \Delta c, \quad (1b)$$

其中  $c = \frac{1}{r}$ . 由此即可求出此面产生的各象差增量, 用对数微分即得,

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\Delta S_I}{S_I} &= 2 \frac{\Delta i}{i} + \frac{\Delta i'}{i' - u}, \\
 \frac{\Delta S_{II}}{S_{II}} &= \frac{\Delta i}{i} + \frac{\Delta i'}{i' - u} + \frac{\Delta i_p}{i_p}, \\
 \frac{\Delta S_{III}}{S_{III}} &= \frac{\Delta i'}{i' - u} + 2 \frac{\Delta i_p}{i_p}, \\
 \frac{\Delta S_{IV}}{S_{IV}} &= \Delta c, \\
 \frac{\Delta S_V}{S_V} &= \frac{\Delta S_{III} + \Delta S_{IV}}{S_{III} + S_{IV}} + \frac{\Delta i_p}{i_p} \frac{\Delta i}{i}, \\
 \frac{\Delta C_I}{C_I} &= \frac{\Delta i}{i}, \\
 \frac{\Delta C_{II}}{C_{II}} &= \frac{\Delta i_p}{i_p}.
 \end{aligned} \right\} \quad (2a)$$

其中

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta i &= h \Delta c, \\
 \Delta i_p &= h_p \Delta c, \\
 \Delta c &= -\frac{\Delta r}{r^2}.
 \end{aligned} \right\} \quad (2b)$$



显然按(2)式计算此面的象差变化量是不困难的。

(c) 折射率

折射率的变更直接影响到组成透镜的两个面上象差变化。以下角标号“1”，“2”分别表示第一面和第二面，则各变化量如下： $(n_1, n_2'$  不变,  $n_1' = n_2$  变化  $\Delta n$ ):

$$\left. \begin{aligned} \Delta i_1' &= -\frac{i_1'}{n_1'} \Delta n, \\ \Delta u_2 &= \Delta u_1' = -\Delta i_1' = \frac{i_1'}{n_1'} \Delta n, \\ \Delta h_2 &= -d_{12} \Delta u_1' = -\frac{i_1' d_{12}}{n_1'} \Delta n, \\ \Delta i_2 &= -\left(1 + \frac{d_{12}}{r_2}\right) \frac{i_1'}{n_1'} \Delta n, \\ n_2' \Delta i_2' &= \left[ i_2 - \left(1 + \frac{d_{12}}{r_2}\right) i_1' \right] \Delta n, \\ \Delta u_2' &= \left\{ i_2 - \left[ 1 + \frac{d_{12}}{r_2} \left(1 - \frac{n_2'}{n_2}\right) \right] i_1' \right\} \left(-\frac{\Delta n}{n_2'}\right); \\ n_2' u_2'^2 \Delta l_2' &= (h_2 i_2 - h_1 i_1') \Delta n. \end{aligned} \right\} \quad (3a)$$

$$(3b)$$

由此, 象差改变的量是:

$$\left. \begin{aligned} \Delta S_{I,1} &= S_{I,1} \frac{(u_1' - i_1') \Delta i_1'}{(i_1' - u_1)(i_1 - i_1')} \\ &+ S_{I,2} \left( \frac{\Delta h_2}{h_2} + \frac{\Delta n_2}{n_2} + \frac{\Delta i_2}{i_2} - \frac{\Delta i_2' - \Delta u_2}{i_2' - u_2} - \frac{\Delta i_2 - \Delta i_2'}{i_2 - i_2'} \right) = \Delta S_{I,1} + \Delta S_{I,2}, \\ \Delta S_{II} &= \frac{i_{p1}}{i_1} \Delta S_{I,1} + \frac{i_{p2}}{i_2} \Delta S_{I,2} + S_{I,2} \frac{i_2 \Delta i_{p2} - i_{p2} \Delta i_2}{i_2^2}, \\ \Delta S_{III} &= \left(\frac{i_{p1}}{i_1}\right)^2 \Delta S_{I,1} + \left(\frac{i_{p2}}{i_2}\right)^2 \Delta S_{I,2} + 2S_{I,2} \frac{i_2 \Delta i_{p2} - i_{p2} \Delta i_2}{i_2^2}, \\ \Delta S_{IV} &= \frac{\Delta n}{n^2} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \\ \Delta S_V &= (\Delta S_{III,1} + \Delta S_{IV,1}) \frac{i_{p1}}{i_1} + (\Delta S_{III,2} + \Delta S_{IV,2}) \frac{i_{p2}}{i_2} \\ &+ (S_{III,2} + S_{IV,2}) \frac{i_2 \Delta i_{p2} - i_{p2} \Delta i_2}{i_2^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 \Delta C_{\text{I}} &= (h_2 n_2 i_2 - h_1 n_1 i_1) \frac{(\delta n)_2}{n_2^2} \Delta n_2 \\
 &\quad + h_2 n_2 i_2 \left[ \frac{(\delta n)'_2}{n_2} - \frac{(\delta n)_2}{n_2} \right] \left( \frac{\Delta h_2}{h_2} + \frac{\Delta n_2}{n_2} + \frac{\Delta i_2}{i_2} \right), \\
 \Delta C_{\text{II}} &= (h_2 n_2 i_{p2} - h_1 n_1 i_{p1}) \frac{(\delta n)_2}{n_2^2} \Delta n_2 \\
 &\quad + h_2 n_2 i_{p2} \left[ \frac{(\delta n)'_2}{n_2} - \frac{(\delta n)_2}{n_2} \right] \left( \frac{\Delta h_2}{h_2} + \frac{\Delta n_2}{n_2} + \frac{\Delta i_{p2}}{i_{p2}} \right).
 \end{aligned} \tag{5}$$

由公式可见：第一面的变化量  $\Delta S_{\text{I},1}$ ,  $\Delta S_{\text{II},1}$ ... 形式都很简单，而第二面的变化量则由于入射光束与原始位置不同之故，形式相当复杂。按 (4), (5) 式计算变化量看来并不比直接重算两面的初级象差方便。实际上我们不应拘泥于“只用初级象差理论”，当它不方便时就应另找出路。对于折射率变化的本征影响而言，显然用  $d-D$  法计算光程变化更方便些，尤其是当光学系统色差已用此法计算时更如此，此时折射率变化如何影响波面变化是立即可以看出的。但上列公式却是本征色象差的准确表示（第六章 § 4）。对衍生变化则如下节所见，用初级象差理论较方便。

#### (d) 色散

前面三个是影响单色象差的因素，光学材料的色散  $(\delta n)$  则只影响色差而与单色象差无关，当色散发生变化由  $\delta n$  改为  $\delta n + \Delta \delta n$  时，单透镜色差的变化显然是：

$$\begin{aligned}
 \Delta C_{\text{I}} &= (h_1 i'_1 + h_2 i_2) \Delta \delta n, \\
 \Delta C_{\text{II}} &= (h_1 i'_{p1} - h_2 i_{p2}) \Delta \delta n.
 \end{aligned} \tag{6}$$

当略去高级小量时（在初级象差理论范围内）这样的色散变更对后组毫无影响。

### § 3 衍生变化

后组接受的改变过的光束总可看作是下列四种变动的结果：物体移动、光阑移动、光阑直径变更、物高变更。由于 Lagrange 不变量  $j$  不因  $r, d, n$  的变更而改变，因此我们若在保持  $j$  不变的条件下作物体移动、光阑移动后再使物高变更到真实大小（所谓“真实大小”是指  $r, d, n$  变更后实际上生成的象的大小），则光阑孔径一定自行达到真实大小，因此，上述四种变动实可由三次变动而达到。

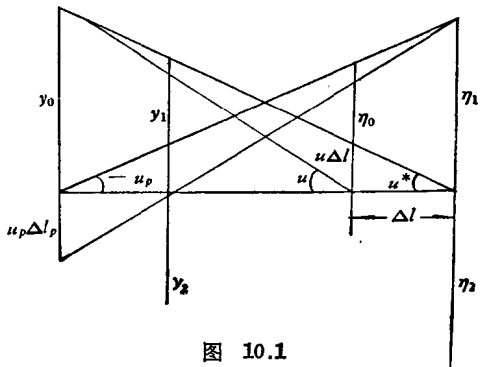


图 10.1

如图 10.1 所示,  $y_0, \eta_0$  是后组接受原光栏位置和物面位置的孔径和物高;  $y_2, \eta_2$  则为  $r, d, n$  变更后的相应位置和高度。我们采取下列步骤使在  $j$  不变的条件下实现光栏、物体移动和孔径变化: 首先令物体移到位置  $\eta_1$ , 移动距离  $\Delta l$ , 则:

$$B = \frac{u\Delta l}{\eta_0} = \frac{nu^2\Delta l}{j} \quad (7a)$$

此时孔径角由  $u$  变为  $u^* = u + Bu_p$ , 而后令光栏移到位置  $y_1$ , 则

$$A = \frac{u_p\Delta l_p}{y_0} = -\frac{nu_p^2\Delta l_p}{j} \quad (7b)$$

此时孔径角仍为  $u^*$ 。为将  $u^*$  变为实际由前组的变化而形成的孔径角  $u + \Delta u$  而  $j$  不变, 则  $u_p$  须作相应的变更, 由此引起的象差变化是:

$$\left. \begin{aligned} \Delta S_I &= 4\left(\frac{\Delta u - Bu_p}{u}\right)S_I, \\ \Delta S_{II} &= 2\left(\frac{\Delta u - Bu_p}{u}\right)S_{II}, \\ \Delta S_{III} &= \Delta S_{IV} = 0, \\ \Delta S_V &= -2\left(\frac{\Delta u - Bu_p}{u}\right)S_V, \\ \Delta C_I &= 2\left(\frac{\Delta u - Bu_p}{u}\right)C_I, \\ \Delta C_{II} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

由此可见后组(第  $i$  面到第  $k$  面)的象差总变化量是:

$$\left. \begin{aligned} \Delta S_I &= B[4S_{II} + j(u_k^2 - u_i^2)] + 4\left(\frac{\Delta u - Bu_p}{u}\right)S_I, \\ \Delta S_{II} &= B[3S_{III} + S_{IV} + j(u'_k u'_{pk} - u_i u_{pi})] \\ &\quad + 2\left(\frac{\Delta u - Bu_p}{u}\right)S_{II} + \Delta S_I, \\ \Delta S_{III} &= B[S_V + j(u_{pk}^2 - u_{pi}^2)] + 2\Delta S_{II}, \\ \Delta S_{IV} &= 0, \\ \Delta S_V &= BS_{I_p} - 2\left(\frac{\Delta u - Bu_p}{u}\right)S_V + A(3S_{III} + S_{IV}), \\ \Delta C_I &= B\left[2C_{II} - j\left(\frac{\delta n'_k}{n'_k} - \frac{\delta n_i}{n_i}\right)\right] + 2\left(\frac{\Delta u - Bu_p}{u}\right)C_I, \\ \Delta C_{II} &= BC_{I_p} + \Delta C_I. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中的  $S_1-S_{1p}$  均指第  $(i)-(k)$  面的象差系数之和。将上节算出的  $r, d, n$  三种变化引起的  $nu^2\Delta l$  和  $\Delta u$  列在下面:

(a)  $\Delta d$

$$\left. \begin{aligned} nu^2\Delta l &= -nu^2\Delta d, \\ nu_p^2\Delta l_p &= -nu_p^2\Delta d, \\ \Delta u &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(b)  $\Delta r$

$$\left. \begin{aligned} nu^2\Delta l &= (n-n')h^3\Delta c, \\ nu_p^2\Delta l_p &= (n-n')h_p^2\Delta c, \\ \Delta u &= \left(1 - \frac{n}{n'}\right)h\Delta c. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

(c)  $\Delta n$

$$\left. \begin{aligned} n_2' u_2'^2 \Delta l_2' &= (h_2 i_2 - h_1 i_1) \Delta n, \\ n_2' u_{p2}'^2 \Delta l_{p2}' &= (h_{p2} i_{p2} - h_{p1} i_{p1}) \Delta n, \\ n_2' \Delta u_2' &= \left\{ -i_2 + \left[ 1 + \frac{d_{12}}{r_2} \left( 1 - \frac{n_2'}{n_2} \right) \right] i_1' \right\} \Delta n. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

显然由此不难算出后组由  $\Delta d, \Delta r, \Delta n$  而引起的象差变化量。(9)式与上节本征变化量的结果合起来就得出象差的总变化量。

#### § 4 偏心系统的象差, 固定透镜的原则

当光学系统不再保持同轴时, 一般已不能运用同轴系统的初级象差理论了。但是用我们下面的方法实际上可以对同轴的单元所组成的非同轴系统作出完满的讨论, 因此我们下面的理论是不含非球面的非同轴球面系统的一般理论, 这种结果对讨论光谱仪之类的系统是有用的, 我们在此处则用以讨论同轴度公差。

如图 10.2 所示,  $A$  和  $B$  本身都是同轴球面系统, 二者之光轴错开一距离  $\delta$ , 我们

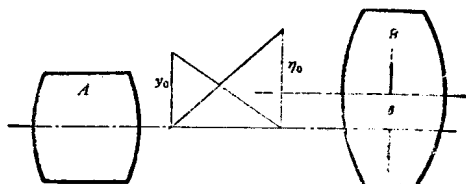


图 10.2

取含此二轴的平面为子午面. 设  $A$  组的出瞳半径为  $y_0$ , 象高为  $\eta_0$ , 其位置如图 10.2 所示. 由图可见, 射出  $A$  组时坐标为  $\eta, \zeta, y, z$  的光线, 射入  $B$  组时的坐标原来也应该就是这些, 现在由于二轴错开  $\delta$ , 故坐标变为:  $\eta + \delta, \zeta, y + \delta, z$ .  $B$  组对此光线的原波差  $W$  为:

$$2W = \frac{1}{4} S_I (y^2 + z^2)^2 + S_{II} (\eta y + \zeta z) (y^2 + z^2) + S_{III} (\eta y + \zeta z)^2 + \frac{1}{2} (S_{III} + S_{IV}) (\eta^2 + \zeta^2) (y^2 + z^2) + S_V (\eta^2 + \zeta^2) (\eta y + \zeta z), \quad (13)$$

其中  $S_I - S_V$  为  $B$  组的象差系数. 坐标变更后波差增量可由 (13) 式对  $\eta, y$  微分而得:

$$2\Delta W = S_2 y (y^2 + z^2) + S_3 \eta y^2 + S_3 \zeta y z + \frac{1}{2} (S_3 + S_4) (y^2 + z^2) \eta + S_{5,1} (\eta y + \zeta z) \eta + S_{5,2} (\eta^2 + \zeta^2) y + S_0 (\eta^2 + \zeta^2) \eta, \quad (14a)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} S_2 &= S_I \Delta y + S_{II} \Delta \eta, \\ S_3 &= 2(S_{II} \Delta y + S_{III} \Delta \eta), \\ S_4 &= 2S_{IV} \Delta \eta, \\ S_{5,1} &= 2(S_{III} \Delta y + S_V \Delta \eta), \\ S_{5,2} &= (S_{III} + S_{IV}) \Delta y + S_V \Delta \eta, \\ S_0 &= S_V \Delta y. \end{aligned} \right\} \quad (14b)$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= \frac{\delta}{y_0}, \\ \Delta \eta &= \frac{\delta}{\eta_0}. \end{aligned} \quad (14c)$$

由 (14) 式可以看出这些象差的表现 (对光束的影响) 是和 (13) 式不同的: 彗差  $S_2$  和  $S_{II}$  相似, 但又与  $S_{II}$  有区别, 即与  $\eta$  无关而不与  $\eta$  成正比, 故当  $\eta = 0$  时也有彗差. 正因为如此, 它常被称为中心彗差.  $S_3$  和  $S_4$  表现之一与  $S_{III}, S_{IV}$  相似, 但是它与  $\zeta$  无关而与  $\eta$  成正比, 因此它形成的两个象散焦面是两个与高斯象面夹定角的平面. 另外, 对于  $\zeta$  不等于零的点还多出一项新象差  $S_3 \zeta y z$ , 它使光束均匀分布在一圆盘内, 与象散不同, 焦面前后移动不能使之聚焦. 可以看出, 它类似于柱面系统的象差  $S_{III y z}$ .  $S_{5,1}, S_{5,2}$  均为畸变, 但均与  $S_V$  不大相同, 这两种畸变使圆形物体变形的情况示如图 10.3. (14) 式的最后一项系数  $S_0$  与光束结构无关 (和光栏坐标无关的项) 即

并非象差。

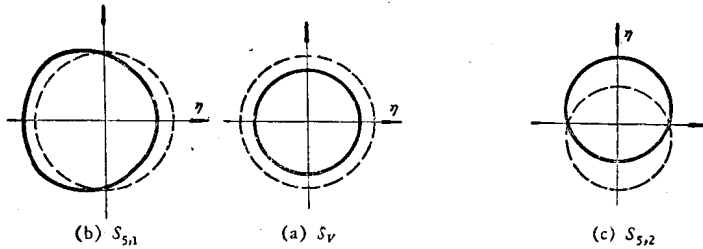


图 10.3

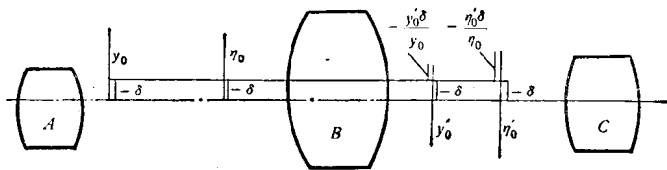


图 10.4

公式(14)只考虑了A, B两组,若在B组之后还有一个C组,则C组的象差一般也将因B组的不同轴而发生变化. 设C组与A组同轴,而考虑B组位移 $\delta$ 后的总效应. 为此观察图10.4,由于对C组而言, $\Delta y$ 和 $\Delta \eta$ 是:

$$\left. \begin{aligned} \Delta y &= \frac{1}{y'_0} \left( \delta - \frac{\delta y'_0}{y_0} \right) = \delta \left( \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y'_0} \right), \\ \Delta \eta &= \delta \left( \frac{1}{\eta_0} - \frac{1}{\eta'_0} \right). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

其中 $y'_0, \eta'_0$ 为 $y_0, \eta_0$ 经B组后所成的象. 故C组的象差变化量仍由(14a), (14b)表示,只是式中 $\Delta y, \Delta \eta$ 应代以(15)式之值,而 $S_I - S_V$ 则由B组之系数改为C组的系数而已. 由此可见,组合效应对光束结构影响的性质不变.

对色差而言,采用上述方式可由

$$\delta W = \frac{1}{2} C_I (y^2 + z^2) + C_{II} (y\eta + z\zeta)$$

得:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \delta W &= C_2 y + C_0 \eta, \\ C_2 &= C_I \Delta y + C_{II} \Delta \eta, \\ C_0 &= C_{II} \Delta y. \end{aligned} \right\} \quad (14d)$$

$C_0$  与  $S_0$  一样, 与光束结构无关, 并非象差。由 (14d) 可知, 视场中心可因中心不正而观察到倍率色差。

有时可以在光学系统的中心 ( $\eta=0$ ) 位置观察到象散, 这标志着中心位移  $\delta$  非常大, 以致二次小量都足够大 (大于  $\lambda/4$ )。 (14) 式是略去  $\Delta y, \Delta \eta$  的二次项的结果, 此时 (14) 式只存在一种与象面坐标无关的单色象差——彗差。而当取到二次项时才能再得到一种与象面坐标无关的象差——中心象散。另外, 曲面的加工不良和变形也可引起中心象散。是不是没有中心彗差就标志光学系统中没有中心不正 (不同轴) 的单元呢? 由 (14) 式来看这是不一定的。有时可能由于几个单元都有小量不同轴而相互补偿了中心彗差, 但此时还会余下与  $\eta$  成正比的象散和与  $\eta^2$  成正比的畸变。广角物镜要求畸变严格时 (如航摄物镜), 这一点还可能显得非常突出, 即无中心彗差时仍有不对称的畸变。

我们上面只考虑了两组份之间相对于光轴平行移动而未考虑两组份相对倾斜的情形, 这样的考虑对球面组成的光学系统已是足够了。因为对于球面来说, 唯一有影响的是球心移离光轴而无所谓倾斜。可以看到, 透镜在金属框内稍作平移还较次要, 严重的是在框内的位置不正, 如图 10.5(c)。一般半径  $R$  比透镜边厚  $D$  大得多, 由图 10.5(c) 可见中心位移可能由于装配不好而大增。因之须将透镜压牢在框架上以保证同轴度, 如图 10.5(b)。此时  $R_1$  的球心位移就等于加工配合所达到的直径误差  $\delta$ ,  $R_2$  可能的球心位移则为  $\delta \left( \frac{R_2}{R_1} + 1 \right)$ , 因之将大半径面压牢在框架上较为合理。

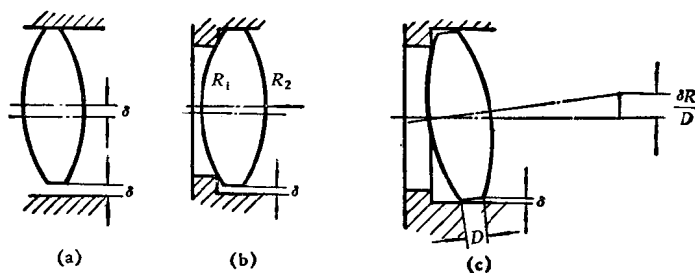


图 10.5

对于平面而言, 就不能用球心位移的观点来考虑光轴不重合问题, 此时仅有光轴相对倾斜而无所谓平移。由于

$$\begin{cases} \bar{y} = \frac{\bar{y}}{y_0} = \frac{\bar{u}_y}{u_0}, & \bar{z} = \frac{\bar{z}}{y_0} = \frac{\bar{u}_z}{u_0}, \\ \bar{\eta} = \frac{\bar{\eta}}{\eta_0} = \frac{\bar{u}_{p,y}}{u_{p,0}}, & \bar{\zeta} = \frac{\bar{\zeta}}{\eta_0} = \frac{\bar{u}_{p,z}}{u_{p,0}}. \end{cases}$$

故当平面倾斜角  $\delta u$  后, 光线入射此面的坐标变化为:

$$\left. \begin{aligned} \Delta y &= \frac{\delta u}{u_0}, \\ \Delta \eta &= \frac{\delta u}{u_{p,0}}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

因此仍由(13)式微分而得(14)式, 只是式中的  $\Delta y$ ,  $\Delta \eta$  要按(16)式来理解而已。

对倾斜的平行板, 上述考虑仍然正确。

光谱仪中的色散棱镜, 因两折射面的  $\delta u$  符号不同, 故  $S_3$  相消,  $S_2$  相加(球差符号也不同)。

## §5 透镜系统公差的确定

由于公差计算只是要得到一个数量级的概念, 只须有一位有效数字的结果就够了, 因此根据设计结果中已有数据用计算尺作大致估算就可以了。由此可见进行这种计算并不是很麻烦的, 也就是说有可能对每个光学系统都在设计之后算出各个面的加工要求。但因同类型的光学系统中象差的数量级都是相同的, 因此公差也有相同的数量级, 故可将某些计算结果作为标准类推其他, 实际上并不需要对每个系统都进行计算。

为确定公差, 最可靠的方法当然是把各个因素改动一小量后一一重作光线计算以确定象差的真正变更状况, 而后决定此小量的几倍是公差。这样的计算虽然很繁, 但在电子计算机却是不难做到。上述初级象差微分公式虽稍简便, 但为把一个系统的各个因素对初级象差的微分系数都一一求出来还是比较繁琐的事。然而用上述理论来确定一些数量级却是不难的。对于光学系统偏心公差, 用初级象差理论计算所得结果与实际很相符<sup>[2]</sup>。现在就对各种系统进行这种公差估计, 并将估计的结果加以比较和评论如下:

### (A) 两片透镜相胶合的望远镜物镜

将一个相对孔径 1:6, 焦距 260 的望远镜物镜的初级象差及有关数据列于下表:



	1	2	3		1	2	3
$lu$	22.5	22.2	22.2	$l_p u_p$	0	-0.20	-2.92
$u$	0			$u_p$	0.050		
$i$	0.124	-0.248	-0.095	$i_p$	-0.050	-0.031	-0.029
$i'$	0.081	-0.227	-0.159	$i'_p$	-0.032	-0.028	-0.048
$u'$	0.043	0.022	0.085	$u'_p$	0.032	0.030	0.050
$S_I$	0.0097	-0.0481	0.0408	$-j=1.12$ $\eta'_3=13.2$			
$S_{II}$	-0.0039	-0.0060	0.0125				

設无高級球差，則  $S_I$  的公差是  $\pm 0.004$ ；若初級二級相平衡時帶球差恰為六倍焦深，則  $S_I = \pm 0.024$ （見第十一章）。故可認為上述系統中令  $S_I$  的公差為  $\pm 0.002$  是合適的。對於  $S_{II}$ ，由於視場不可能為 26，而上列數字在  $\eta'_3=3$  時恰能滿足小於公差 0.0005 的要求。實際上由於視場邊緣並非觀察的重點而僅為陪襯，加上目鏡質量離理想的要求也遠得多，因之上述要求一般是不必要的，象差再大一倍也沒有關係。由此看來象差變動的容許量將等於各面產生象差的 1/20，因之“B”，“A”等容許的數量級至少是 0.01 左右。因  $j=1$  左右，故  $nu^2 \Delta d$ ， $(n'-n)h^2 \Delta c$ ， $(h_1 i'_1 - h_2 i_2) \Delta n$  可容許的數量級為 0.01；於是  $|\Delta d| < 4$ ， $|\Delta c| < 0.00005$ ， $|\Delta n| < 0.0014$  可認為是保險的。仔細計算表明，上述估值確是安全的，某些公差實可超出上述數字數倍（注意： $\Delta c = 0.00005$  是很寬的公差，如  $r=100$  時  $\Delta r/r = 0.5\%$ ； $r=300$  時  $\Delta r/r = 1.5\%$ ）。按中心彗差小於  $\lambda/4$  的要求， $S_2 < 0.0005$ ，故由 (14) 式得同軸度要求  $\delta < 0.2$ ，這個要求也不高。

由此可見這類光學系統容許零件有很大的公差。其根本原因是各折射面上產生的象差都很小，而象差小的原因則是相對孔徑小。例如焦距不變而孔徑增大一倍則  $S_I$  將增大 16 倍，此時如仍按上述作粗略估計，就會導致一些過於嚴格的要求，我們應找出主要的因素加以粗略計算，如下例。

(B) 兩片透鏡分離的望遠鏡物鏡

將一個相對孔徑 1:3.3，焦距 130 的物鏡象差列於下：

	1	2	3	4		1	2	3	4
$lu$	20	19	18	18	$l_p u_p$	0	-0.3	-0.4	-0.5
$u$	0				$u_p$	0.05			
$i$	0.32	-0.41	-0.62	-0.14	$i_p$	-0.05	-0.03	-0.04	0.03
$i'$	0.21	-0.61	-0.37	-0.23	$i'_p$	-0.03	-0.04	-0.02	0.05
$u'$	0.11	0.31	0.06	0.15	$u'_p$	0.03	0.05	0.03	0.05
$S_I$	0.14	1.75	-2.00	0.11	$-j=1$ $\eta'_4=6.5$				
$S_{II}$	-0.02	0.12	-0.12	0.22					
$S_{III}$	0.003	0.008	-0.008	0.005					
$S_{IV}$	0.005	0.005	-0.007	0.002					

最大象差为前例的 40 倍, 公差变小是无疑的. 例如同轴度公差就是如此, 应小于 0.005. 其他公差亦须作计算, 以确定有无各项相互抵偿而使公差加大之情况. 对  $d'_1$  和  $d'_3$  而言, 由于后面象差仍不大; 因此  $B$  仍可有 0.005, 故  $\Delta d < 0.3$  是保险的. 对于  $d'_2$ ,  $B=0.001$ , 故两片分离物镜的中间空气间隔应精确, 用它可调整球差 ( $\Delta S_1/\Delta d'_2=0.1$ ), 调整空气间隔大小时除球差外其他象差变动不大. 在  $r=50$  时,  $\Delta r/r=0.03\%$ , 相当于  $\Delta c=6 \times 10^{-6}$ , 故  $h\Delta c=1.2 \times 10^{-4}$ . 在  $S_1=2$  的面上产生的本征变化  $\Delta S_1$  即为 0.0018, 可见 A 级的样板在此时勉强可用. 当  $r$  变更时

$$\frac{\Delta u - Bu_p}{u} = -\frac{h_p}{h} B,$$

$v_p$  很小时后组由此产生的变动很小, 故这项衍生变化可略去不计 (折射率变更后略去“ $d$ ”的影响时  $\frac{\Delta u - Bu_p}{u}$  也等于  $-\frac{h_p}{h} B$ ).  $r_1, r_4$  仍有较大的公差, 如果  $\Delta C_1$  不大, 则  $\Delta c=3 \times 10^{-5}$  即可. 上述  $\Delta c$  相当于  $B=0.001$  和 0.005. 由  $B=0.001$  算出  $\Delta n$  的公差是 0.0001 到 0.0002, 这是十分严格的要求. 按此要求, 物镜只能用已有的 A 级玻璃按准确测定的折射率进行设计方能制造, 更换玻璃应重新设计. 初级象差微分的实际计算表明本征变化和衍生变化反号而互相消去 2/3, 故按公差  $\Delta S_1=0.002$  可得  $\Delta n'_1=0.0008$ . 这种与工业上可能达到的最好玻璃 (1 类) 如此接近的公差应认为是不保险的, 尤其是象差公差 0.002 也并不可靠 (由于高级象差变更). 对于这种情况应由实际光线追迹算出折射率变动后的波象差 (包括了高级象差变化), 而后考察  $d'_2$  变更是否能得到圆满调整, 这样才能真正定出折射率公差, 这是按正负大象差相互平衡校正的方案而设计的高质量系统中会遇到的典型情况. 对于这种情况来说, 上述初级象差理论之作用在于挑出最敏感的因素, 从而避免过多的光线计算.

### (C) 大孔径显微镜物镜

以 NA 0.95 的干镜头为例.  $|S_1| < 0.2$ , 而  $u$  的最大值则达 0.95, 因之容许  $\Delta S_1 = \pm 0.001$  (考虑到伴生的高级象差有超出初级数值之可能) 时,  $B=0.001$ . 因之在前部的厚度公差很严, 应为 0.001; 后组则因角度变小,  $\Delta d$  仍可有 0.1 以上. 相应的半径公差约为 0.1%; 折射率公差也如上例是严格的, 因之须作仔细的光线计算来确定. 也有可能放宽厚度公差而以空气隙来调整. 有些公差本可取得大一些, 但一般还是给以同样的较严的公差以避免误差累加. 由于  $S_1=0.2$  是在  $h=2$  时达到的, 因之同轴度公差也较严 ( $\delta < 0.005$ ).

### (D) 目镜

上面几个例子都只考虑近轴区的质量, 下面举几种考虑轴外象差的结果. 众所

周知，目鏡的軸外象差並不是校正得很好的，舉焦距  $f'=9$ ，相對孔徑 1:3，視場  $45^\circ$  的一個典型數據如下：

$lu$	0.7	0.7	0.7	0.7	0.5	0.4	$l_p u_p$	3	3	4	4	4	4
$u$	0						$u_p$	0.4					
$i$	0.03	0.08	-0.09	0.01	-0.01	0.05	$i_p$	-0.5	-0.6	0.2	-0.5	0.5	0
$i'$	0.02	0.09	-0.13	0.01	-0.01	0.09	$i'_p$	-0.3	-0.6	0.3	-0.4	0.4	0
$u'$	0.01	0.005	0.05	0.05	0.05	0.08	$u'_p$	0.2	0.3	0.2	0	0	0.01
$10^3 \times S_I$	0	-0.04	0.6	0	0.1	0.2	$-j=0.3$  $\eta'_6=4$						
$10^3 \times S_{II}$	0	0.3	-1.4	0	0.4	-0.1							
$10^2 \times S_{III}$	0	-0.2	0.3	-0.3	-0.2	0							
$10^2 \times S_{IV}$	0.1	0	0.4	0.3	0	0							
$10^2 \times S_V$	-5	2	-2	-2	1	0							
$10^2 \times S_{I_p}$	0	-5	22	0	-10	22							

由表可以看出剩餘象差量與各面產生的象差量屬同一數量級，故各數值均可具有很大的公差。若  $\Delta d=1$ ，則  $|B| < 0.01$ ， $|A| < 0.3$  是可以容許的。實際上當然並不需要這樣大的公差。同軸度公差也很大， $\delta=1$  還不致發生顯著的中心彗差。

(E) 普通照象物鏡

以相對孔徑 1:2，焦距  $f'=100$ ，視場  $40^\circ$  的物鏡為例。 $|S_I| < 1$ ， $|S_{II}| < 0.5$ ， $|S_{III}| < 0.25$ ， $|S_{IV}| < 1$ ， $|S_V| < 1$ ， $|C_I| < 0.1$ ， $|C_{II}| < 0.1$ ， $u < 0.3$ ， $u_p < 0.5$ ， $14 < h < 25$ ， $4 < |h_p| < 14$ ， $j=8.5$ 。剩餘象差的典型數字是： $S_I=0.06$ ， $S_{II}=0.00$ ， $S_{III}=-0.07$ ， $S_{IV}=0.13$ ， $S_V=-0.11$ ， $C_I=0.03$ ， $C_{II}=-0.005$ ，它們相當於初級球差 0.5，弧矢場曲 0.5，畸變 0.2 或 0.6% ( $\eta'=32$ )。故可給定象差公差為  $\Delta S_I=0.02$ ， $\Delta S_{II}=0.02$ ， $\Delta S_{III}=0.01$ ， $\Delta S_{IV}=0.01$ ， $\Delta S_V=0.1$ ， $\Delta C_I=0.01$ ， $\Delta C_{II}=0.01$ 。由此可見， $jB=0.02$ ， $jA=0.02$  都不致有害。因而  $\Delta d$  可為 0.2， $\Delta c$  可為 0.0001； $\Delta n$  可為 0.001。實際微分計算表明上述公差還可再放大，但由於這種要求已很容易實現，故無放大的必要。同軸度公差可由中心彗差不顯著的要求而得出  $\delta=0.01$ 。由此可見，一般照相物鏡由於剩餘象差大，也屬要求不高的系統。

(F) 攝影測量用照相物鏡

以一個視場  $100^\circ$ ，相對孔徑 1:6，焦距  $f'=100$  的物鏡為例。 $S_I < 0.2$ ， $S_{II} < 0.1$ ， $S_{III} < 0.2$ ， $S_{IV} < 2.0$ ， $S_V < 5.0$ ， $S_{I_p} < 15$ ，其剩餘象差除  $S_{I_p}$  外順次為：0.02；0.01；0.03；0.00；0.01。物鏡的特点是：對於畸變和 Petzval 和而言是高质量系統（校正精度為 1/500），這是廣角無畸變物鏡的特色。由於這個原因，預計會導出很嚴的公差。由  $\Delta S_V=0.005$  得出  $\Delta d$  的數量級是 0.01，其累積效果靠調整空氣間隔來

消除。相应的  $\Delta c$  为 0.00005,  $\Delta n$  为 0.002 到 0.004, 由  $S_{5,1} + S_{5,2} - (3S_{III} + S_{IV})\Delta y + 3S_V\Delta\eta < 0.005$  得出同軸度  $\delta < 0.005$ 。

## § 6 棱 鏡

光学系统中的棱鏡按其作用来分有两类,一类是作为色散元件使用的;另一类则是代替反射鏡的全反射棱鏡,用以完成預定的光路轉折或正象要求。

在大棱鏡中由于光路較长,故对光学材料的均匀性要求比一般高(例如光路长 100 比长 10 者要求高十倍)。在全反射棱鏡中更因光路方向在媒质內作多次变动,故应在各个方向进行条紋和均匀性的檢查。

棱鏡的名义尺寸只有角度一項,当一棱鏡上同时具有三个光学平面时,三面法綫的相对位置不正确称为塔差(和光学系统的不同軸度相似)。显然,光谱色散棱鏡的角誤差对质量几乎没有什么影响。而无论是角度誤差或塔差均可使全反射棱鏡不再等价于平行平板。光学系统中平面傾斜的影响已在 § 4 中述及,这里只須設法将角度誤差所产生的二平面間楔角算出即可。一般情况下楔角的主要影响是产生中心倍率色差,因之很容易按光程观点估計容許的楔角大小,但是这种簡化考虑并不是对一切系统都适用的。用 § 4 及上节的方法可以更可靠地估計楔角对象差的影响。

由矢量折射定律作微分可得(考虑到我們用于反射面):

$$\Delta\vec{q}' = -2(\vec{q} \cdot \vec{r})\Delta\vec{r} - 2(\vec{q}, \Delta\vec{r})\vec{r}. \quad (17)$$

若  $\vec{q}'$  原和出射面垂直,則因法綫方向变更  $\Delta\vec{r}$  就使  $\vec{q}'$  和出射面法綫夹角变化  $\Delta\vec{q}'$ , 即相当于具有等效楔角  $\Delta\vec{q}'$ 。依次可計算各面法綫偏差的影响。在一般情况下这种計算的必要性不大,可认为楔角就和  $\Delta\vec{r}$  相等从而决定角度誤差和塔差的公差。

对于屋脊棱鏡的  $90^\circ$  角,光綫在两个面上反射次序不同时,出射方向亦将因之而变,故当屋脊棱处在通光孔內时,  $90^\circ$  角度誤差将使一象分裂为二,角度差和塔差形成的光束分裂夹角大致估計为  $4n\delta$ , 現以此为例作准确計算如下。設  $90^\circ$  誤差为  $\delta$  弧度,塔差为  $\varepsilon$  弧度,則二反射面的方向余弦各为  $\vec{r}_1 = (1, \delta, \varepsilon)$ ,  $\vec{r}_2 = (0, 1, 0)$ ; 入

射光綫  $\vec{q}$  和棱綫成  $45^\circ$  角,方向余弦为  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ , 因之

$$\vec{q}'_1 = \left( -\frac{1}{2} - \delta - \sqrt{2}\varepsilon, \frac{1}{2} - \delta, \frac{\sqrt{2}}{2} - \varepsilon \right),$$

$$\vec{q}'_{12} = \left( -\frac{1}{2} - \delta - \sqrt{2}\varepsilon, -\frac{1}{2} + \delta, \frac{\sqrt{2}}{2} - \varepsilon \right);$$

对另一反射次序有:

$$\vec{q}'_2 = \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

$$\vec{q}'_{21} = \left( -\frac{1}{2} + \delta - \sqrt{2}\varepsilon, -\frac{1}{2} - \delta, \frac{\sqrt{2}}{2} - \varepsilon \right),$$

故方向差为

$$\vec{q}'_{21} - \vec{q}'_{12} = (2\delta - 2\sqrt{2}\varepsilon, -2\delta, 0).$$

上面的各次反射计算和方向余弦表示式中均已略去二次小量. 故纯塔差和纯角度差产生同一效应, 即方向差为误差的  $2\sqrt{2}$  倍, 经折射后成为  $2\sqrt{2}n$  倍, 即约为  $3n$  倍, 和粗略估计差别不大.

若棱镜象面折合总距离为  $l(l = \sum n_i l_i)$ , 则二象错开距离  $2\sqrt{2}nl\delta$  或  $2\sqrt{2}nl\varepsilon$ , 从成象清晰度要求即可决定  $\varepsilon, \delta$  之值. 由此所定的角度公差一般仅数秒.

当屋脊棱不在通光孔内时, 对屋脊棱角并无特殊要求,  $90^\circ$  角误差可达数分. 用类似方法也可以计算干涉仪的零件公差<sup>[1]</sup>.

假若对成象的高斯光学性质提出要求, 就要对棱镜角的正确度提出一定要求. 例如双目仪器中要求二光束方向平行, 二象相对位置正确(无相互转动). 这种公差的决定涉及整个装校方案, 也涉及棱镜角度误差. 由第二章 § 7 可以看出, 棱镜角度误差的这种影响一般可由调整而除去.

对棱镜折射面的平度要求, 与透镜系统相比并无区别. 反射面则不然, 这是由于平面反射原无象差而球面反射则有象差之故. 如图 10.6, 我们考察斜入射于反射球面的平行光束之象差. 由于球差为:

$$S_I = 2 \frac{h^4}{r^3}, \quad (18)$$

故入射角为  $u_p$  时,  $S_{II}, S_{III}$  分别为:

$$\left. \begin{aligned} S_{II} &= 2 \frac{h^3}{r^2} i_p, \\ S_{III} &= 2 \frac{h^2}{r} i_p^2. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

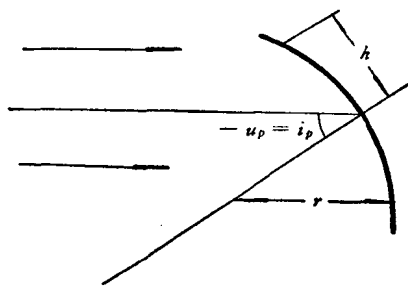


图 10.6

由此即可算出平度公差, 例如倾角  $45^\circ$  的反射面  $i_p = 0.7$ , 则由于要求 ( $\omega_{02} < 0.35\lambda$ , 第十一章表 4;  $\omega_{02} = \frac{1}{2} S_{III}$ ):

$$S_{III} = \frac{h^2}{r} < 0.70\lambda. \quad (20)$$

因之平面平度在整个通光孔径内不能超过 0.7 个圈。

### §7 局部误差和光洁度

局部误差是指整体中有一个部分不均匀而与其余部分有差别，包括面形不规矩（球面度或平面度）和折射率色散不均匀。

最简单的考察方法当是按 Rayleigh 判断来判断。由图 10.7 得：

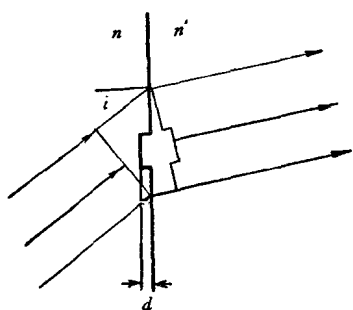


图 10.7

$$\frac{d}{\cos i} \Delta n < \frac{\lambda}{4}, \quad (21)$$

$d$  是不均匀部分的厚度， $\Delta n$  是折射率差。于是对折射界面， $\Delta n=0.5$ ，表面缺陷要求为  $d < \frac{\lambda}{2} \cos i$ ；对反射界面， $\Delta n=2$ ，缺陷要求是  $d < \frac{\lambda}{8} \cos i$ ；对折射率不均匀而言，若条纹粗为  $d$ ，则  $\Delta n$  应小于  $\frac{\lambda}{4d}$ ；若由退火不均匀引起的双折射光程差为每厘米 50  $m\mu$ （即  $\frac{\lambda}{10}$ ， $\lambda=500 m\mu$ ），则这种玻璃的使用厚度不得

超过 2 厘米。但是这种判断有明显的缺点，例如通光直径 200 的表面上有粗 0.1，深 0.1 的刻痕或者一个直径 0.3 的气泡或条纹都将引起远大于  $\frac{\lambda}{4}$  的波差，而按照能量的观点它们对成象只会有很小的影响，玻璃中的细条纹也是如此。对于这些缺陷，可以能量总损失小于 5% 或更少作为判断准则。这些缺陷和光洁度不够所引起的能量损失是累加的，对于减少杂光要求较高的系统，对玻璃缺陷和光洁度的要求也随之提高。

### 参 考 文 献

- [1] 顾去吾、王之江等，光学沼气检定仪的试制，仪器与实验技术，1959，第 1 期，第 1 页；第 2 期，第 14 页。
- [2] 林六键，光学系统偏心公差计算方法，光学学报，2(1982)，18。

# 第十一章

## 光学系統的质量评价

在进行光学系統的设计时，象差的校正結果一般不会达到绝对理想絕无象差的地步，因此要求对它們的质量作相互比較，确定那种校正状况好些，校正到怎样的程度才能滿足使用要求，怎样的状况已充分滿足使用要求等等。这些問題的結果对設計将起指导作用。容易想見评价质量的根据是物空間一点所发出的光能量在象空間的分布状况。按几何光学来看，設計到理想情况时能量将在象空間中焦集于一点，而象差則使能量分散。因此由几何光学来看設計得理想的光学系統将能分辨无限細致的物体結構，但是实践的結果与此不符。这就是說，一般不能用几何光学方法来考察能量分布問題，这也就是說，质量评价問題不能单纯依靠几何光学来解决。因为这个原故，我們就有必要先对光能傳播問題作一根本性的考察。

### §1 几何光学和光能傳播的基本定律

在前面所有的章节中，我們运用几何光学的基本定律——折射定律和反射定律，或 Fermat 原理，或 Malus 定律，討論了光能量为光学系統傳遞时所可能出現的問題及处理这些問題所用的方法。运用几何光学方法我們已有可能使傳遞光能的机构——光学系統——設計到滿足預定的傳遞要求，也就是使光学系統按預定的方式成象。折射定律和反射定律是古老的实验定律 [由 Snell, W. (1591—1626) 建立]，它的正确性是由长期的实践所証实的，但是它并非绝对正确而只是在某一定的条件下才正确。

1801 年，T. Young (1773—1829) 完成的干涉实验发展和証实了 Huygens 的光是波动的学說。按照 Huygens 原理的现代陈述，光能量傳播时遵守几何光学定律的程度与波长有关；它认为：“光綫”通过小孔后其方向的不确定度与此小孔綫度之乘积等于此“光綫”的波长。这个小孔可以是反射界面或折射界面的面元。由此可见几何光学定律并不是精确定律而只是个光能傳播的粗略定律。

Huygens 原理所預見的干涉和衍射現象都为实验所証实,原有的缺陷也为 Fresnel, A. (1788—1827) 的陈述方式所基本克服. Huygens-Fresnel 原理在光学系統中与实验結果极为符合,至今还未发现有显著缺陷. 鉴于 J. C. Maxwell (1831—1879) 的光的电磁理論, Fresnel 方程式获得了更为牢固的基础. 按照 Maxwell 的电磁理論,光是电磁波,光能是电磁能的一种存在形式. Maxwell 方程式已成为电磁学和光学的牢固基础.

当人类的实践不单限于光能的傳播而企图理解光和物质的相互作用,如黑体輻射、固体发光、光电效应等等时,电磁理論还不足以理解这些問題. 由于理論和实践的矛盾就发展了量子理論. 光的量子理論对于光現象的預見是令人满意地与实验符合的. 由于光学仪器理論的对象只是光能的傳播問題(当然也需要知道光源和光能接收器的可能性),故本书不涉及光学的这个方面.

光学的发展过程很能說明人类的思維如何認識客观世界.

我們下面将由 Maxwell 方程导出几何光学的基本定律,由推导过程我們可以看出光能傳播的各种粗略定律(Huygens 原理和折射定律)的有效范围,从而得到計算光能傳播、分布情况的有效方法.

### § 1.1 由 Maxwell 方程导出程函方程

按照 Maxwell 方程,电磁場的任一个态  $\psi$ , 例如电場强度或磁場强度的任一分量,都滿足波动方程:

$$\Delta\psi = \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, \quad (1)$$

式中  $c$  是真空中光速,数值是 299,793 公里/秒,  $n$  是媒质的折射率,它是坐标  $x, y, z$  的函数,  $v = \frac{c}{n}$  就是光在媒质中的速度. 为求得波动方程 (1) 的一般解, Sommerfeld 和 Runge<sup>[1]</sup> 用变数分离法将方程式中的時間  $t$  消去,从而得到了几何光学的基本定律程函方程式. 設方程 (1) 的解  $\psi$  的形式是:

$$\psi = a \sin kc \left( \frac{E}{c} - t \right), \quad (2)$$

式中  $a$  是  $\psi$  态脉动的振幅,  $E$  称为程函,  $a, E$  均为坐标的函数而非時間的函数.  $kc = 2\pi\nu$ ,  $\nu$  是脉动的頻率,作为常数. 須要解釋的是程函  $E$  的物理意义. 由 (2) 式,等位相面的方程式是:

$$E = ct. \quad (3)$$



因此对任一時間  $t$  而言,  $E$  等于常数的面就是等位相面. 我們把所有時間內, 在空間中等位相的面称为波面, 由(3)式可知等  $E$  面就是波面. 波面按真空光速  $c$  在媒质內傳播. 因在  $E$  上加減一定常数值就如時間起算点变更一样, 对問題的实质不发生任何影响, 故可在空間內任意选择一个等  $E$  面作为  $E$  等于零的面, 认为脉动是由此处开始发出的. 但电磁脉动的傳播速度并不是  $c$ , 而是  $v = \frac{c}{n}$ , 因之等  $E$  面并不是离开  $E=0$  的面等距离的面. 定义光程为折射率与光路长度的乘积, 則波面就是离  $E=0$  的面等光程的面. 这就是函数  $E$  的意义. 我們的目的則在求出滿足波动方程(1)的波面方程式——波面形式, 和振幅.

将(2)式代入(1)式, 并用符号  $\varepsilon$  表示  $kc\left(\frac{E}{c} - t\right)$ , 則因:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -akc \cos \varepsilon, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -ak^2 c^2 \sin \varepsilon,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial x} \sin \varepsilon + ak \cos \varepsilon \frac{\partial E}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} k \sin \varepsilon + k \left[ 2 \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial E}{\partial x} + a \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \right] \cos \varepsilon - ak^2 c^2 \left( \frac{\partial E}{\partial x} \right)^2 \sin \varepsilon.$$

故比較波动方程式中  $\sin \varepsilon$  和  $\cos \varepsilon$  的系数即可得出:

$$\Delta a - ak^2 [(\nabla E)^2 - n^2] = 0, \quad (4)$$

$$k [2\nabla E \cdot \nabla a + a \Delta E] = 0. \quad (5)$$

当  $\frac{\Delta a}{a} \ll k^2$  亦即  $\frac{\Delta a}{a} \ll \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$  时(4)式成为:

$$(\nabla E)^2 = n^2, \quad (6)$$

这就是波动方程的近似解, 称为程函方程, 它表示程函的梯度的绝对值与媒质的折射率  $n$  相等. 我們將証明, 程函方程(6)与几何光学的基本定律是完全等价的.

由此可見波面按几何光学定律傳播的条件是振幅  $a$  的二次导数相对值与  $\frac{1}{\lambda^2}$  相比为小量,  $\lambda$  是电磁脉动在真空中的波长. 因之当  $a$  发生急剧变化时, 几何光学定律就不再保持正确, 波长越长則越不正确. 这种情况的发生有两个可能: 一是在光束的边緣上, 此时  $a$  可能由有限值剧变为接近等于零的值; 另一則为能量集中的区域, 如在焦点上, 按几何光学看来  $a$  由无限大剧变为等于零, 实际上是由很大值剧降为小值.

原則上由(6)式求出  $E$  的近似值后, 代入(5)即可求出振幅  $a$  的近似分布, 而后再将  $a$  代入(4)重求  $E$  的更准确近似值, 如此逐次接近即可得到  $E$  和  $a$  的准确結

果。但这显然很繁，我们这样去求得振幅分布（能量分布）状况太费事了。实际上用 Huygens 原理求  $a$  要方便得多，在 § 1.3 中我们将再来讨论 Huygens 原理的可靠性。

程函方程实质上与 Malus 原理相当。

### § 1.2 程函方程、Fermat 原理及折射定律

上述的分离变数法已将原来解二阶偏微分方程 (1) 的问题变为解一阶二次偏微分方程 (6)。现在的目的是将它再变换为线性常微分方程，所用的方法称为特征线法<sup>[2]</sup>，即不解波面方程 (6) 而将 (6) 变为光线方程。

首先定义光线为波面的法线，设光线的方程是：

$$\left. \begin{aligned} x &= x(s), \\ y &= y(s), \\ z &= z(s), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中  $s$  是参数，为光线之长度，则按上述定义有：

$$\left. \begin{aligned} n \frac{dx}{ds} &= E_x, \\ n \frac{dy}{ds} &= E_y, \\ n \frac{dz}{ds} &= E_z. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

将 (8) 式的第一式对  $s$  微分，即得：

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} \left( n \frac{dx}{ds} \right) \\ &= E_{xx} \frac{dx}{ds} + E_{xy} \frac{dy}{ds} + E_{xz} \frac{dz}{ds} \\ &= \frac{1}{n} (E_{xx} E_x + E_{yx} E_y + E_{zx} E_z) \\ &= \frac{1}{2n} \frac{\partial}{\partial x} (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) \\ &= \frac{1}{2n} \frac{\partial}{\partial x} (n^2). \end{aligned}$$

最后一个等式是由 (6) 式得到的，因此光线满足的方程式就是：

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( n \frac{dx}{ds} \right) &= \frac{\partial n}{\partial x}, \\ \frac{d}{ds} \left( n \frac{dy}{ds} \right) &= \frac{\partial n}{\partial y}, \\ \frac{d}{ds} \left( n \frac{dz}{ds} \right) &= \frac{\partial n}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

方程式(9)就是熟知的不均匀媒质中的折射定律. 由它可以导出二界面上的通常形式的折射定律. 实际上  $\frac{dx}{ds}$ ,  $\frac{dy}{ds}$ ,  $\frac{dz}{ds}$  就是光线方向的方向余弦. 以  $\vec{q}$  表示光线方向单位矢量时, (9)式也就是:

$$\frac{d}{ds} (n\vec{q}) = \nabla n. \quad (10)$$

将(10)式与  $\nabla n$  作矢积得:

$$\nabla n \times \frac{d}{ds} (n\vec{q}) = 0. \quad (11)$$

矢量  $\nabla n$  的方向也就是等折射率面的法线方向, 此法线方向的单位矢量以  $\vec{r}$  表示, 分别用  $n\vec{q}$  和  $n'\vec{q}'$  表示此等折射面前后的光线矢量, 则由(11)式得:

$$n\vec{r} \times \vec{q} = n'\vec{r} \times \vec{q}', \quad (12)$$

这就是第一章所引用的矢量形式折射定律公式(I.35).

另一方面, 按变分学基本定理, 公式(9)就是下列积分一级变分等于零的充分条件:

$$V = \int_{r_0}^{r_1} n \, ds. \quad (13)$$

这也就是说, 光线光路满足 Fermat 原理.

### § 1.3 由 Maxwell 方程导出 Huygens-Fresnel 原理

前两部分所讨论的仅是几何光学的可用范围, 同时也已判定理想几何焦点附近的能量分布是不能按几何光学方法得出的, 我们的目的是要找到一个比较方便的计算能量分布状况的方法. 现有的较方便的方法就是古老的 Huygens 原理, 我们首先导出 Kirchhoff 方程式, 然后作近似, 求出 Huygens-Fresnel 原理.

仍与 § 1.1 相同设电磁波可以用单个标函数  $\psi$  表示,  $\psi$  满足波动方程:

$$\Delta\psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

仍将变数分离, 设  $\psi$  由(2)式表示, 则因:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\psi k^2,$$

故(1)式成为:

$$\Delta \psi = -k^2 \psi. \quad (14)$$

按 Green 定理, 若  $\psi_1, \psi_2$  是两个在积分域内具有连续导数的函数, 则函数的体积分和面积分有下列关系:

$$\iiint_V (\psi_2 \Delta \psi_1 - \psi_1 \Delta \psi_2) dv = \iint_S \left( \psi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial n} - \frac{\partial \psi_2}{\partial n} \psi_1 \right) ds.$$

设  $\psi_1, \psi_2$  均满足方程式(14) 则可见体积分等于零, 再设  $\psi_2$  是满足(14) 的一个特殊函数:

$$\psi_2 = \frac{e^{ik(ct-r)}}{r},$$

而积分范围  $V$  则如图 11.1 所示, 由二闭曲面  $S_1, S_2$  所包围, 其中  $S_2$  是以原点  $P$  为中心的球面, 则:

$$\begin{aligned} & \iint_{S_2} \left( \psi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial n} - \psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial n} \right) ds \\ &= \iint_{S_2} \left\{ \frac{e^{ik(ct-r)}}{r} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \psi \left[ -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{ik(ct-r)}}{r} \right) \right] \right\} ds \\ &= \iint_{S_2} \left\{ \frac{e^{ik(ct-r)}}{r} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \psi \left( \frac{e^{ik(ct-r)}}{r^2} - \frac{ik e^{ik(ct-r)}}{r} \right) \right\} ds \\ &= \int_{\Omega} r e^{ik(ct-r)} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \psi e^{ik(ct-r)} - r ik \psi e^{ik(ct-r)} d\omega, \end{aligned}$$

式中  $d\omega = \frac{ds}{r^2}$ ,  $\Omega$  是  $S_2$  面对  $P$  点所张总立体角.

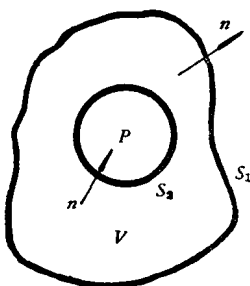


图 11.1

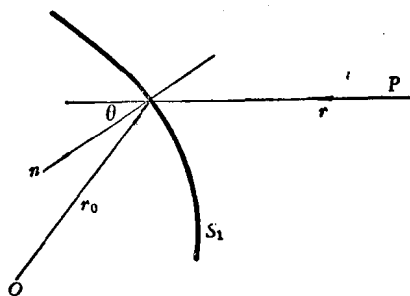


图 11.2

当  $r \rightarrow 0$  时,  $e^{-ikr} \rightarrow 1$ ,  $\psi \rightarrow \psi_p$  (即  $P$  点的脉动), 故:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \iint_{S_1} \left( \psi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial n} - \psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial n} \right) ds = -\psi_p e^{ikt} \int d\omega = -4\pi \psi_p e^{ikt}. \quad (15)$$

由于  $\iint_{S_1+S_2} = 0$ , 故有:

$$\begin{aligned} 4\pi \psi_p e^{ikt} &= \iint_{S_1} \left\{ \frac{e^{ik(ct-r)}}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ik(ct-r)}}{r} \right) \right\} ds \\ &= \iint_{S_1} \left\{ \frac{e^{ik(ct-r)}}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi e^{ik(ct-r)} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{ik\psi e^{ik(ct-r)}}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \right\} ds, \quad (16) \end{aligned}$$

这就是 Kirchhoff 方程式 (1876 年)。

Kirchhoff 方程式使我们在已知周围空间的脉动  $\psi$  后, 就可算出任意一点  $P$  的脉动  $\psi_p$ 。对于点光源而言, 距离光源  $r_0$  处的脉动  $\psi$  可写作

$$\psi = \frac{a}{r_0} e^{ikr_0}. \quad (17)$$

为算出(16)式中被积函数, 首先注意:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r_0}{\partial n} &= \cos \theta_0, \\ \frac{\partial r}{\partial n} &= \cos \theta, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

(18)式中  $\theta$  和  $\theta_0$  是  $r$  和  $r_0$  与任意假设的封闭面  $S_1$  的夹角, 如图 11.2, 图中  $O$  点是发光点。因此(16)式中的几项分别是:

$$\begin{aligned} \frac{e^{ik(ct-r)}}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} &= -\cos \theta_0 \frac{a}{rr_0} ik e^{ik(ct-r_0-r)} - \cos \theta_0 \frac{a}{rr_0^2} e^{ik(ct-r-r_0)}, \\ -\psi e^{ik(ct-r)} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) &= \cos \theta \frac{a}{r^2 r_0} e^{ik(ct-r-r_0)}, \\ ik\psi \frac{e^{ik(ct-r)}}{r} \frac{\partial r}{\partial n} &= \cos \theta \frac{ika}{rr_0} e^{ik(ct-r_0-r)}. \end{aligned}$$

故(16)式成为

$$4\pi \psi_p e^{ikt} = \iint_{S_1} \frac{ika}{rr_0} \left[ \left( 1 + \frac{1}{ikr} \right) \cos \theta - \left( 1 + \frac{1}{ikr_0} \right) \cos \theta_0 \right] e^{ik(ct-r-r_0)} ds, \quad (16a)$$

一般而言,  $\frac{1}{ikr_0}$  和  $\frac{1}{ikr} \ll 1$ , 再令曲面  $S_1$  是波面, 亦即光线和法线夹角  $\theta_0 = 180^\circ$ ,  $\cos \theta_0 = -1$ , 故上式成为:

$$\psi_p e^{ikt} = \iint_{S_1} \frac{ia}{rr_0 \lambda} \cdot \frac{1 + \cos \theta}{2} \cdot e^{ik(ct-r_0-r)} ds_1,$$

或

$$\psi_p = \frac{ia}{r_0\lambda} e^{-ikr_0} \iint_{S_1} \frac{1+\cos\theta}{2} \frac{e^{-ikr}}{r} ds. \quad (16b)$$

Fresnel 表达的 Huygens 原理几乎和上列 Kirchoff 方程式 (16b) 一致, 其差别仅在于沒有常数  $i$ , 因之积分所得結果位相差  $\frac{\pi}{2}$ ; 无衰减常数  $\frac{1+\cos\theta}{2}$ , 故不能区分傳播方向的前进和后退. 当只为算出各点强度时, 这种差别对結果几乎没有影响.

为利用 (16b) 进行計算, 还需要作一个假定, 这个假定常称为 St. Venant 定律, 即除通光孔外, 設其他区域的  $\psi$  和  $\frac{\partial\psi}{\partial n}$  均等于零. 因之积分域  $S_1$  可仅限于通光孔內, 这样計算成为可能. 虽然这个假定与物理概念違背 (它使  $\psi$  和  $\frac{\partial\psi}{\partial n}$  在光孔边缘不連續), 也与运用 Green 定律的前提相冲突, 但是由此得出的計算結果与实际观察相符. 看来, 这是由于通过光孔內部的能量对成象起主要作用, 而边缘和封闭屏的其余部分則只起很小作用之故.

当光孔不太大时,  $\cos\theta \doteq 1$ , 再設想波面  $S_1$  就是光能量的出发处, 以其强度作为单位, 即令

$$\frac{a}{r_0} e^{-ikr_0} = 1. \quad (19)$$

此时 (16b) 式即成为:

$$\psi_p = \frac{i}{\lambda} \iint_{\text{光孔面积}} \frac{e^{-ikr}}{r} ds. \quad (20)$$

§ 1.1—§ 1.3 是研究光学仪器中光能量傳播問題的理論基础, 其本质就是用近似方法求波动方程式 (1) 的解 (对此尚可参看 M. Born 的书<sup>[3]</sup>). 为由 (20) 式求得正确能量分布, 要求波长和通光孔綫度相比是很小的, 以至在通光孔內的場基本滿足程函方程 (6), 从而可以由几何光学方法算出点光源所形成的波面形状. 由于同一原因, St. Venant 定律所引起的誤差不大, 于是 (20) 式就可以用来算出电磁場的一个分量之值. 但为使  $\psi_p^2$  代表能量的相对大小, 还必须要求場可以看作是标量場, 亦即要求波面对  $P$  点的張角不大. 因之, Huygens 原理不宜用来研究大光束聚焦点的能量分布, 也不宜用来考虑光孔和波长之比不十分大的場合. 为了研究无綫电波傳播問題, 近代衍射理論有很大的发展<sup>[3, 4]</sup>, 其原因是上述近似解法对波长較长的无綫电波來說已有过大誤差, 为此須将波动方程在某些边界条件下求解. 由于边界的形状和物理性质的复杂性, 这种問題尚待作更多研究. 这方面問題和光学仪器的关系不大.

## § 2 光学系统形成的能量分布和质量判断

前一节已在原则上解决了光束经过光学系统后的能量分布的计算问题。但在实际上要想用上面所得的近似方法来积分求得真实光学系统中的能量分布，遇到的数学困难还是很大的。这就是说 Huygens-Fresnel 积分一般不能表示为已知函数，为得到能量分布状况，须作大量数值积分。这就使能量分布与象差之间难以建立关系，因而即使对能量分布状况定出质量指标后也不能决定象差应如何平衡。这一节的目的在于阐明积分困难的性质，并列出一一些已往作出的积分结果以供作判断质量问题时之参考。最后叙述一种小象差近似方法并由之导出象差不大时的象差影响及公差。

### § 2.1 理想波面的衍射图形

如图 11.3，设出瞳坐标为  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ ，象面坐标为  $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}$ 。  $\bar{\xi}$  轴和  $\bar{x}$  轴重合。设光学系统对  $O$  点成理想象，出射波面是以  $O$  点为中心的球面，此球面通过出瞳中心  $C$ ，球面半径为  $f$ ，则波面上  $Q$  点坐标  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  满足方程式：

$$(f - \bar{x})^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = f^2, \quad (21)$$

或

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = 2f\bar{x},$$

或

$$\begin{aligned} \bar{x} &= f - \sqrt{f^2 - (\bar{y}^2 + \bar{z}^2)} \\ &= \frac{\bar{y}^2 + \bar{z}^2}{2f} + \frac{(\bar{y}^2 + \bar{z}^2)^2}{8f^3} + \dots \end{aligned} \quad (22)$$

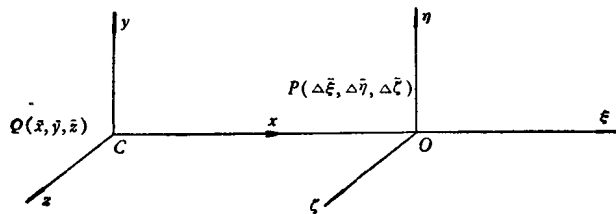


图 11.3

由 Huygens 原理，象空间任一点  $P$  由波长  $\lambda$  的波面形成的振动的振幅  $\psi_p$  为：

$$\psi_p = \psi(\Delta \bar{\xi}, \Delta \bar{\eta}, \Delta \bar{\zeta}) = \frac{i}{\lambda} e^{ikf} \iint_{\text{光孔}} \frac{e^{-ikl}}{l} d\bar{y} d\bar{z}, \quad (23)$$

式中  $l$  是  $Q, P$  间光路长度，由于

$$l^2 = (f - \bar{x} + \Delta\bar{\xi})^2 + (\bar{y} - \Delta\bar{\eta})^2 + (z - \Delta\bar{\zeta})^2,$$

即

$$\begin{aligned} l^2 &= f^2 + \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + z^2 + \Delta\bar{\xi}^2 + \Delta\bar{\eta}^2 + \Delta\bar{\zeta}^2 - 2(\bar{x}\Delta\bar{\xi} + \bar{y}\Delta\bar{\eta} + z\Delta\bar{\zeta}) + f\bar{x}\Delta\bar{\xi} \\ &= f^2 + \Delta\bar{\xi}^2 + \Delta\bar{\eta}^2 + \Delta\bar{\zeta}^2 + 2f\Delta\bar{\xi} - 2(\bar{x}\Delta\bar{\xi} + \bar{y}\Delta\bar{\eta} + z\Delta\bar{\zeta}) \\ &= l_0^2 - 2(\bar{x}\Delta\bar{\xi} + \bar{y}\Delta\bar{\eta} + z\Delta\bar{\zeta}), \end{aligned} \quad (24)$$

其中

$$l_0 = f^2 + \Delta\bar{\xi}^2 + \Delta\bar{\eta}^2 + \Delta\bar{\zeta}^2 + 2f\Delta\bar{\xi}.$$

$l_0$  是波面顶点  $C$  到  $P$  点的距离, 即长度  $l$  在  $\bar{x} = \bar{y} = z = 0$  时的值. 当光阑半径  $a$  与  $f$  相比为小量, 即  $\bar{y}, z$  与  $l_0$  相比为小量, 并设  $\Delta\bar{\xi}, \Delta\bar{\eta}, \Delta\bar{\zeta}$  是更高次小量时, 由(24)式可作二项式展开而得:

$$l = l_0 - \frac{\bar{x}\Delta\bar{\xi} + \bar{y}\Delta\bar{\eta} + z\Delta\bar{\zeta}}{l_0}. \quad (25)$$

再将(22)式第二项以后的所有高次项略去后代入上式即有:

$$l = l_0 - \frac{\bar{y}\Delta\bar{\eta} + z\Delta\bar{\zeta}}{l_0} - \frac{(\bar{y}^2 + z^2)\Delta\bar{\xi}}{2fl_0}. \quad (26)$$

将(26)式代入(23)式并由于  $\Delta\bar{\xi}, \Delta\bar{\eta}, \Delta\bar{\zeta}$  是小量,  $l$  和  $l_0$  (或  $f$ ) 相差极微, 对(23)式中分母来说可相互代换, 故积分可写作:

$$\psi(\Delta\bar{\xi}, \Delta\bar{\eta}, \Delta\bar{\zeta}) = \frac{i}{\lambda f} e^{ik(f-l_0)} \iint_{\text{光孔}} e^{ik\left[\frac{\bar{y}\Delta\bar{\eta} + z\Delta\bar{\zeta}}{l_0} + \frac{(\bar{y}^2 + z^2)\Delta\bar{\xi}}{2l_0 f}\right]} d\bar{y} d\bar{z}. \quad (27)$$

当光孔为方孔或长方孔如图 11.4 时, (27)式一般可表示为 Fresnel 积分的乘积. 对于理想象面,  $\Delta\bar{\xi} = 0$ , 积分就简化为三角函数. 用符号  $p_1, p_2; q_1, q_2$  表示规化的象点坐标:

$$p_1 = \frac{ky_0^2 \Delta\bar{\xi}}{fl_0}, \quad p_2 = \frac{kz_0^2 \Delta\bar{\xi}}{fl_0}; \quad (28)$$

$$q_1 = \frac{ky_0 \Delta\bar{\eta}}{l_0}, \quad q_2 = \frac{kz_0 \Delta\bar{\zeta}}{l_0}, \quad (29)$$

并将  $\frac{\bar{y}}{y_0}$  写作“ $y$ ”,  $\frac{\bar{z}}{z_0}$  写作“ $z$ ”, 则(27)式成为:

$$\psi_p = \frac{iy_0 z_0}{\lambda f} e^{ik(f-l_0)} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e^{i\left(\frac{1}{2}p_1 y^2 + \frac{1}{2}p_2 z^2 + q_1 y + q_2 z\right)} dy dz, \quad (30)$$

$$= \frac{i\pi y_0 z_0}{\sqrt{p_1 p_2} f \lambda} e^{ik(f-l_0) - i\left(\frac{q_1^2}{2p_1} + \frac{q_2^2}{2p_2}\right)} E(p_1 q_1) \cdot E(p_2 q_2). \quad (31)$$

其中

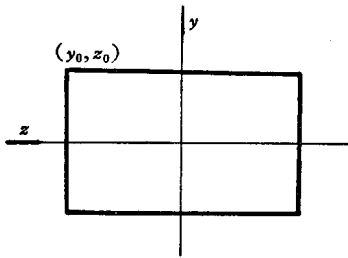


图 11.4



$$\left. \begin{aligned} E(p, q) &= C(p, q) + iS(p, q), \\ C(p, q) &= \int_{(-1+\frac{q}{p})\sqrt{\frac{p}{x}}}^{(1+\frac{q}{p})\sqrt{\frac{p}{x}}} \cos \frac{\pi}{2} x^2 dx, \\ S(p, q) &= \int_{(-1+\frac{q}{p})\sqrt{\frac{p}{x}}}^{(1+\frac{q}{p})\sqrt{\frac{p}{x}}} \sin \frac{\pi}{2} x^2 dx. \end{aligned} \right\} \quad (31a)$$

故

$$I(\Delta\bar{\xi}, \Delta\bar{\eta}, \Delta\bar{\zeta}) = \psi_p^2 = \frac{\pi^2 y_0^2 z_0^2}{\lambda^2 f^2} \cdot \frac{1}{p_1 p_2} [C^2(p_1, q_1) + S^2(p_1, q_1)][C^2(p_2, q_2) + S^2(p_2, q_2)]. \quad (32)$$

在高斯象面上,  $p=0$  由(30)式即得简化为三角函数的结果:

$$I(0, \Delta\bar{\eta}, \Delta\bar{\zeta}) = 16 \frac{y_0^2 z_0^2}{\lambda^2 f^2} \frac{\sin^2 q_1}{q_1^2} \frac{\sin^2 q_2}{q_2^2}. \quad (33)$$

用 Fresnel 积分表就可以作出此时的衍射图案.  $p=p_1=p_2, (y_0=z_0), q_2=0$  时(32)式成为:

$$\begin{aligned} I(\Delta\bar{\xi}, \Delta\bar{\eta}, \Delta\bar{\zeta}) &= \frac{\pi^2 y_0^2 z_0^2}{\lambda^2 f^2} \frac{1}{p^2} [C^2(p_1, q_1) + S^2(p_1, q_1)][C^2(p, 0) \\ &\quad + S^2(p, 0)]; \end{aligned} \quad (34)$$

$p=p_1=p_2, q=q_1=q_2$  时(32)式成为:

$$I(\Delta\bar{\xi}, \Delta\bar{\eta}, \Delta\bar{\zeta}) = \frac{\pi^2 y_0^2 z_0^2}{\lambda^2 f^2} \frac{1}{p^2} [C^2(p, q) + S^2(p, q)]^2. \quad (34a)$$

当光孔为半径  $y_0$  的圆孔时, 变量以直角坐标表示是不方便的, 将出瞳坐标和象面坐标均改为极坐标:

$$\left. \begin{aligned} \bar{y} &= y_0 r \sin \varphi, & \bar{z} &= y_0 r \cos \varphi; \\ \Delta\bar{\eta} &= \Delta\bar{\rho} \sin \theta, & \Delta\bar{\zeta} &= \Delta\bar{\rho} \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

再将象面坐标规范化为:

$$p = \frac{ky_0^2 \Delta\bar{\xi}}{lf}, \quad q = \frac{ky_0 \Delta\bar{\rho}}{l}. \quad (36)$$

式中  $l$  和  $f$  大致相等, 而  $y_0$  和  $f$  之比即通光孔对象点的张角之半, 以  $u = \frac{y_0}{f}$  表示, 则(36)式的规范化坐标即:

$$p = ku^2 \Delta\bar{\xi}, \quad q = ku \Delta\bar{\rho}, \quad (36a)$$

此时(27)式成为:

$$\begin{aligned}\psi(\Delta\xi, \Delta\rho) &= \frac{iy_0^2}{\lambda f} e^{ik(f-l_0)} \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{i[\frac{1}{2}pr^2 + qr\cos(\theta-\varphi)]} r dr d\varphi \\ &= \frac{2\pi iy_0^2}{\lambda f} e^{ik(f-l_0)} \int_0^1 r e^{\frac{1}{2}i pr^2} J_0(qr) dr,\end{aligned}\quad (37)$$

式中  $J_0$  是零级 Bessel 函数。

Lommel 为求出积分 (37) 式引入了所谓 Lommel 函数并作出了这函数的函数表。引用

$$\left. \begin{aligned}U_n(p, q) &= \sum_0^\infty (-1)^m \left(\frac{p}{q}\right)^{n+2m} J_{n+2m}(q), \\ V_n(p, q) &= \sum_0^\infty (-1)^m \left(\frac{q}{p}\right)^{n+2m} J_{n+2m}(q); \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

则此时积分 (37) 式成为:

$$2 \int_0^1 J_0(q, r) e^{\frac{1}{2}i pr^2} r dr = C(p, q) + iS(p, q), \quad (39)$$

$$\left. \begin{aligned}C(p, q) &= \frac{\cos \frac{1}{2}p}{\frac{1}{2}p} U_1(p, q) + \frac{\sin \frac{1}{2}p}{\frac{1}{2}p} U_2(p, q), \\ S(p, q) &= \frac{\sin \frac{1}{2}p}{\frac{1}{2}p} U_1(p, q) - \frac{\cos \frac{1}{2}p}{\frac{1}{2}p} U_2(p, q), \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

故强度分布  $I(\Delta\xi, \Delta\rho)$  是:

$$\begin{aligned}I(\Delta\xi, \Delta\rho) &= |\psi(\Delta\xi, \Delta\rho)|^2 \\ &= \frac{\pi^2 y_0^4}{\lambda^2 f^2} (C^2 + S^2) \\ &= \frac{4\pi^2 y_0^4}{\lambda^2 f^2} \frac{1}{p^2} [U_1^2(p, q) + U_2^2(p, q)].\end{aligned}\quad (41)$$

当  $|p/q| < 1$  时用 (41) 式计算是方便的, 当  $|p/q| > 1$  时则不行, Lommel 将这时的  $I(\Delta\xi, \Delta\rho)$  用函数  $V$  表示, 此时有:

$$\begin{aligned}I(\Delta\xi, \Delta\rho) &= \frac{4\pi^2 y_0^4}{\lambda^2 f^2 p^2} \left[ 1 + V_0^2(p, q) + V_1^2(p, q) - 2V_0(p, q) \cos \frac{1}{2}(p + q^2/p) \right. \\ &\quad \left. - 2V_1(p, q) \sin \frac{1}{2}(p + \frac{q^2}{p}) \right].\end{aligned}\quad (42)$$

按 Lommel 函数表就可以算出象面强度分布。

普遍公式 (41) 在特殊情况下可表示为 Bessel 函数或三角函数。当  $|p| = |q|$  时,

$$I(\Delta\xi, \Delta\rho) = \frac{\pi^2 y_0^4}{\lambda^2 f^2 p^2} [J_0^2(p) - 2J_0(p) \cos p + 1], \quad (43)$$

令  $p=0$  就得出理想象面上的亮度分布, 它就是熟知的 Airy 的结果:

$$I(0, \Delta\rho) = \frac{4\pi^2 y_0^4}{\lambda^2 f^2} \left( \frac{2J_1(q)}{q} \right)^2. \quad (44)$$

对光轴上的点  $q=0$

$$I(\Delta\xi, 0) = \frac{4\pi^2 y_0^4}{\lambda^2 f^2} \left( \frac{\sin \frac{1}{4} p}{\frac{1}{4} p} \right)^2. \quad (45)$$

将由此得到的等亮度线表示如图 11.5<sup>[6]</sup>. 用同样的方法可以计算光孔中心有遮挡时的能量分布, 结果如图 11.6.

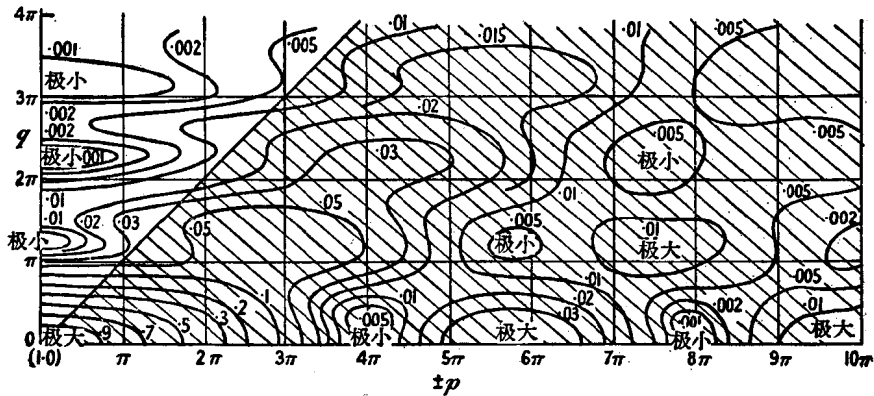


图 11.5 理想光学系统衍射形成的光度分布, 阴影为几何光学决定的光束范围

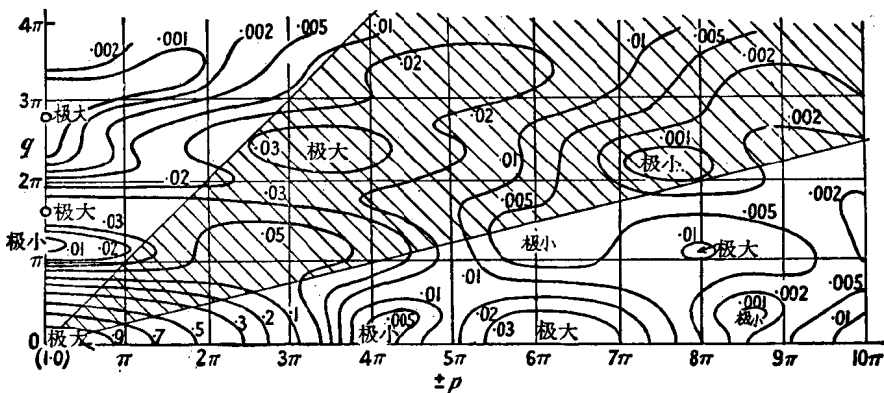


图 11.6 透光孔中心遮挡时的理想衍射图形

## § 2.2 有象差时的衍射图形

光学系统总不可能将象差完全校正, 研究有象差时的衍射图形并与理想图形相比较, 从而确定象差是否可容忍, 过大时影响又如何, 这是我们这一章的基本目的。

由第六章的结果, 象差总可作级数展开后加以分别讨论。象差使一点发出的球面波经光学系统后不再是球面, 或者说 § 2.1 中所用的衍射球面界面不再是等位相的, 象差的影响就通过这种位相变化而反映为衍射图形变化。由第六章, 初级象差引起的光程变化量  $W_1$  是:

$$2W_1 = \frac{1}{4} S_I (y^2 + z^2)^2 + S_{II} \eta y (y^2 + z^2) + S_{III} \eta^2 y^2 + \frac{1}{2} (S_{III} + S_{IV}) \eta^2 (y^2 + z^2) + S_V \eta^3 y. \quad (46)$$

若通光孔为半径  $y_0$  的圆孔或正方孔, 则上节所取的光栏坐标  $y, z$  的规范化方式和第六章相同, 而 (46) 式中的  $\eta$  对于一定象点而言是常数。故除去  $S_V$  项后的 (46) 式可以写作:

$$W_1 = w_{40} (y^2 + z^2)^2 + w_{21} y (y^2 + z^2) + w_{02} y^2 + w_{20} (y^2 + z^2), \quad (47)$$

其中系数  $w_{nm}$  的下角标号  $m$  是  $y$  的幂次,  $n$  是  $\sqrt{y^2 + z^2}$  的幂次。由第一章、第六章, 焦点作轴向移动产生的波象差和  $y^2 + z^2$  成正比, 它也可包括在 (47) 式的系数  $w_{20}$  项中, 亦即光程近似式 (26) 式中的最后一项 [注意 (26) 式中的坐标  $\Delta \bar{\xi}, \Delta \bar{\eta}, \Delta \bar{\zeta}$  为相对于理想象点的位移量]。光程 (26) 式中的第二项是由垂轴位移 ( $\Delta \bar{\eta}, \Delta \bar{\zeta}$ ) 引起的波象差, 可将 (46) 式中  $S_V$  形成的项并入其中。

作了这些考虑后, 由 Huygens 原理 (20) 式即可得有象差时的象点振动分布 (正方孔):

$$\psi(p) = \frac{iy_0^2}{\lambda} \cdot \frac{e^{ikt}}{l} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e^{-i(a y + b z)} e^{-ikW} dy dz, \quad (48)$$

式中

$$a = \frac{2\pi}{\lambda} \left( u_0 \Delta \bar{\eta} + \frac{S_V}{2} \right), \quad b = \frac{2\pi}{\lambda} u_0 \Delta \bar{\zeta}, \quad u_0 = \frac{y_0}{l};$$

$W$  则由 (47) 式表示。

当光学系统的通光孔是圆孔时, 如上节所见, 光栏坐标表示为极坐标较方便, 此时有

$$W = w_{40} r^4 + w_{21} r^3 \cos \varphi + w_{02} r^2 \cos^2 \varphi + w_{20} r^2, \quad (47a)$$

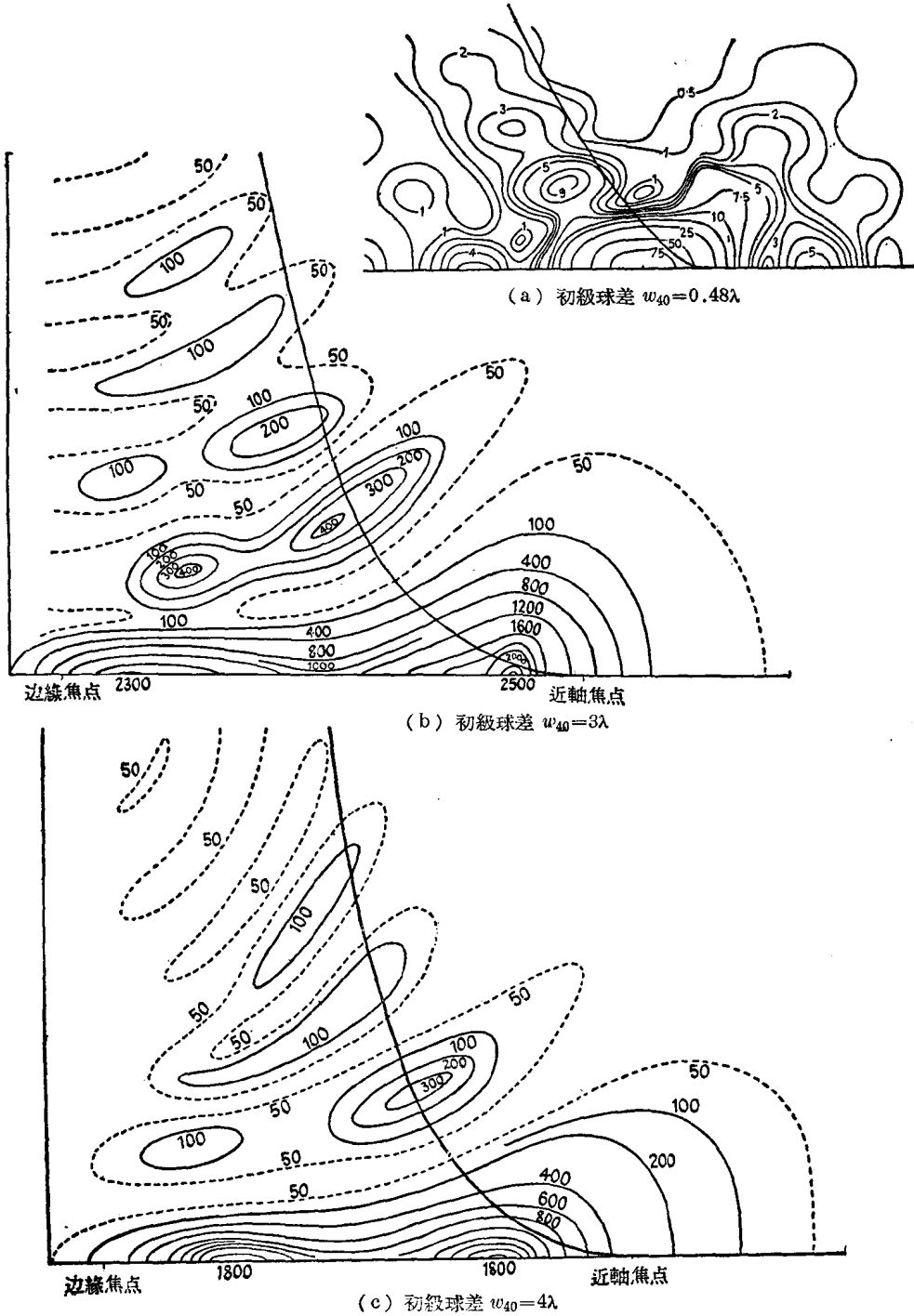
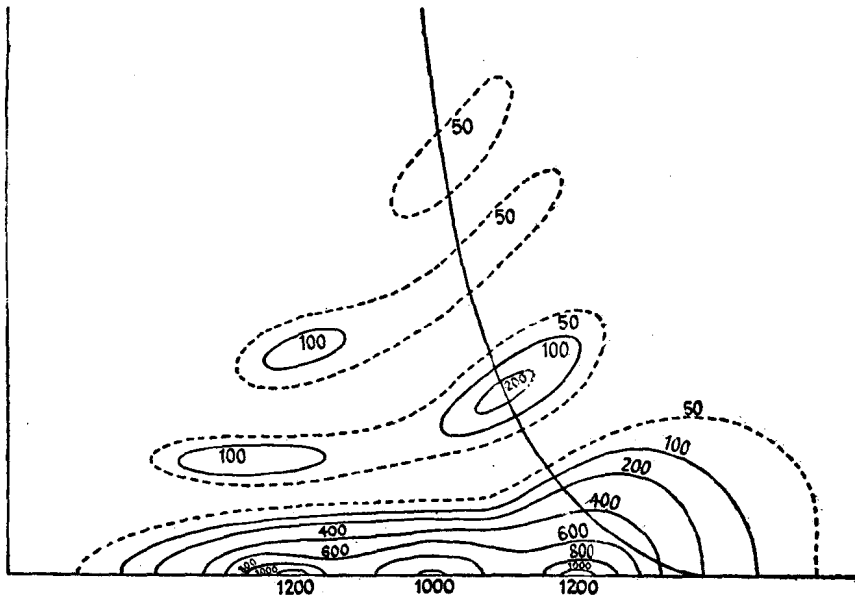
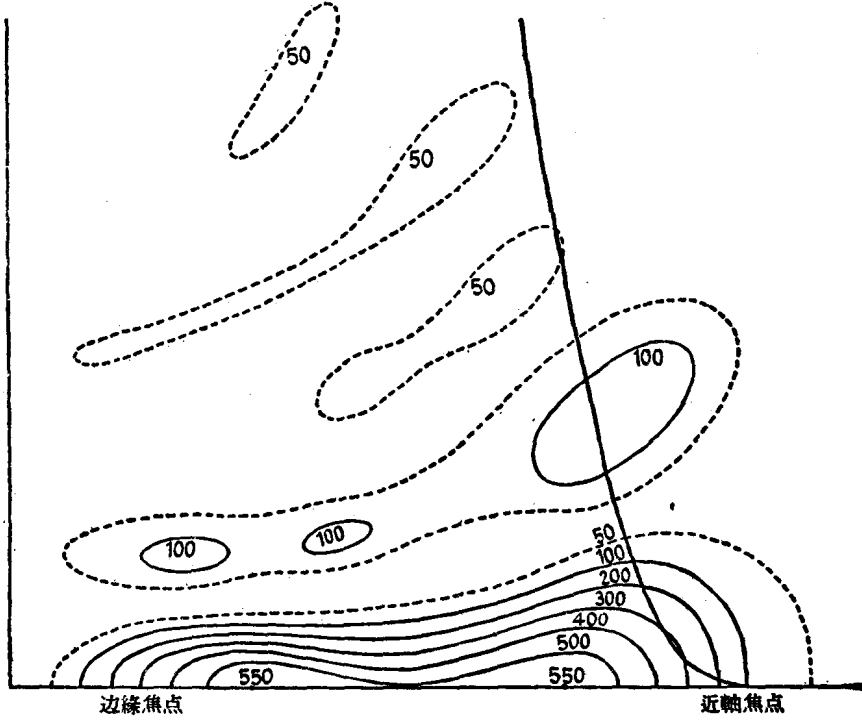


图 11.7

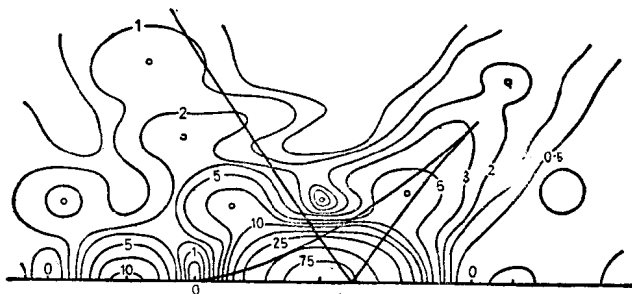


(d) 初级球差  $w_{40}=6\lambda$

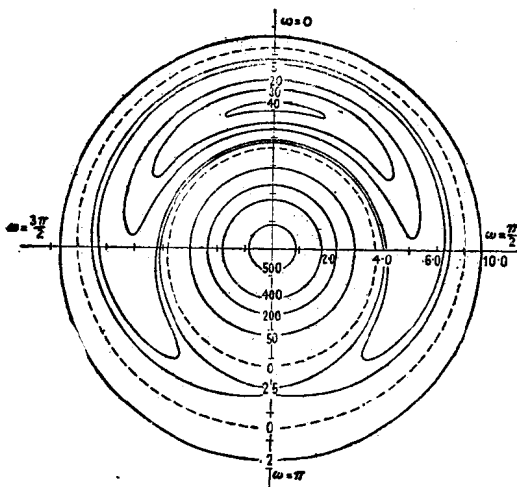


(e) 初级球差  $w_{40}=10\lambda$

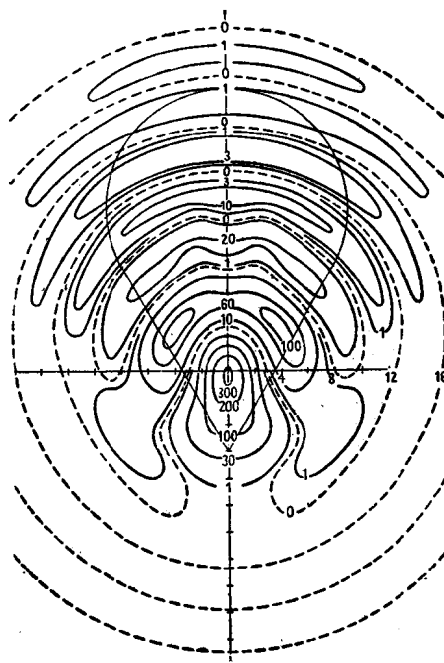
图 11.7



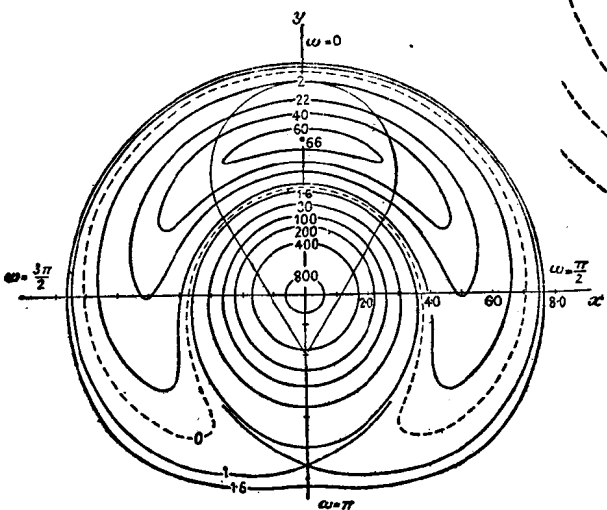
(f) 初级二级球差相平衡  $w_{40} = -2.4\lambda$ ,  $w_{40} = 1.6\lambda$



(g) 初级球差  $w_{21} = 0.24\lambda$



(i) 初级球差  $w_{21} = 1.4\lambda$



(h) 初级球差  $w_{21} = 0.48\lambda$

图 11.7

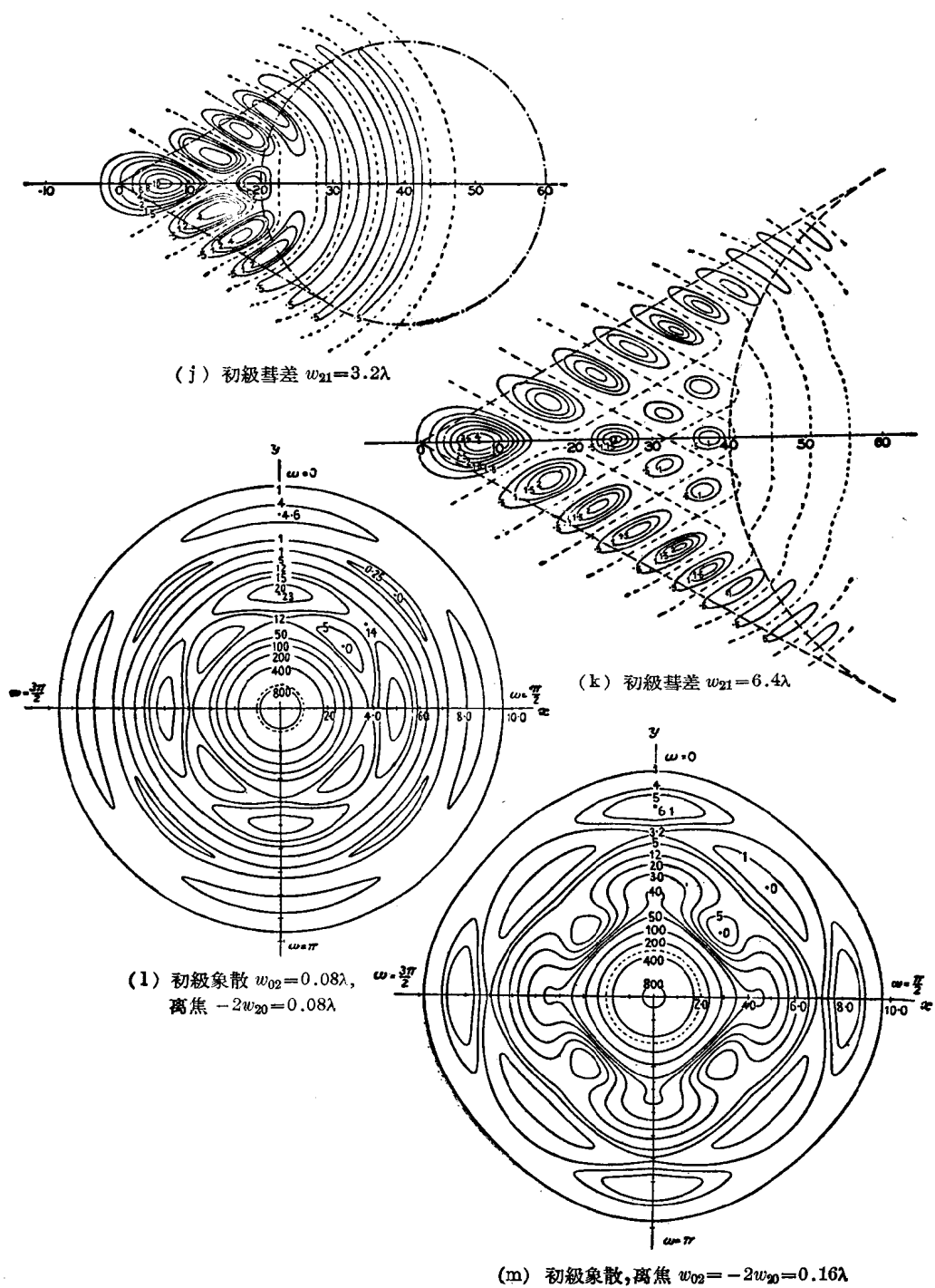


图 11.7



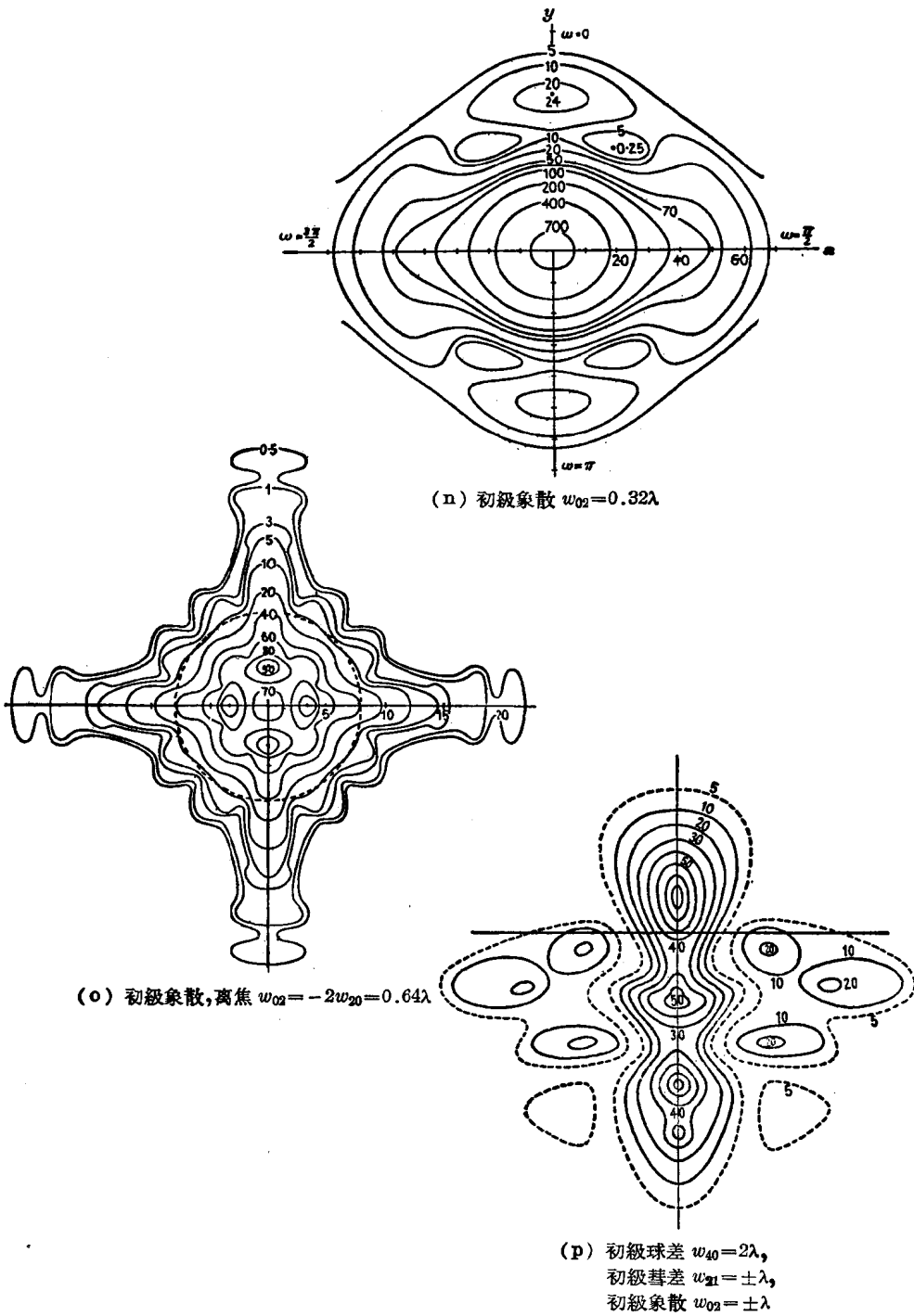
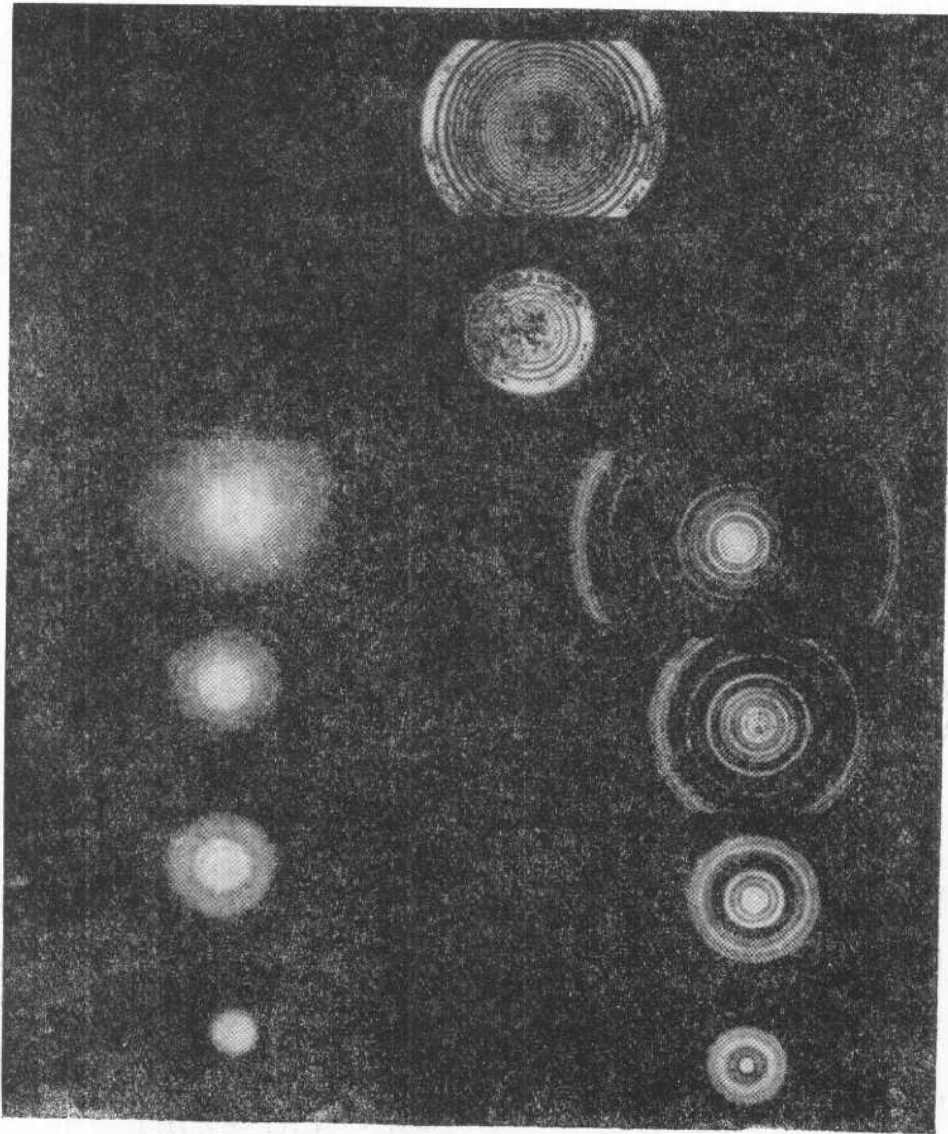
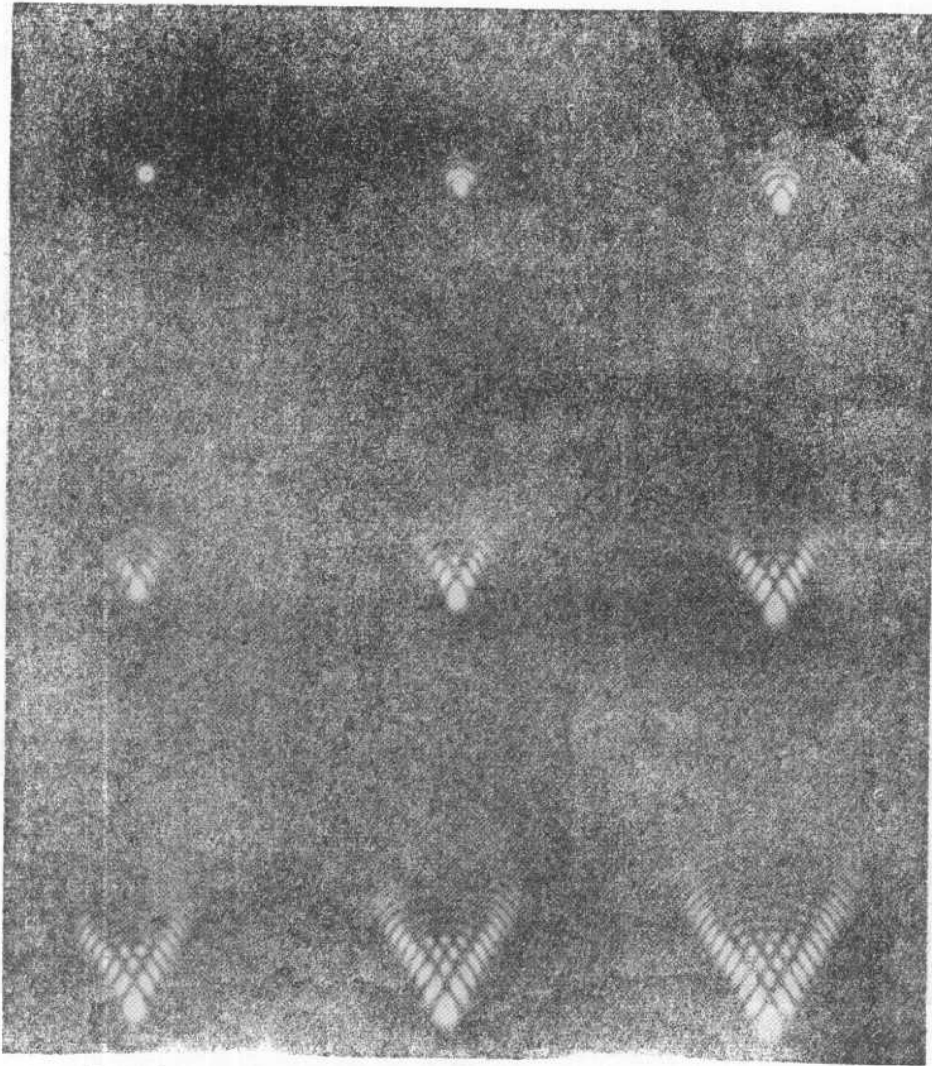


图 11.7



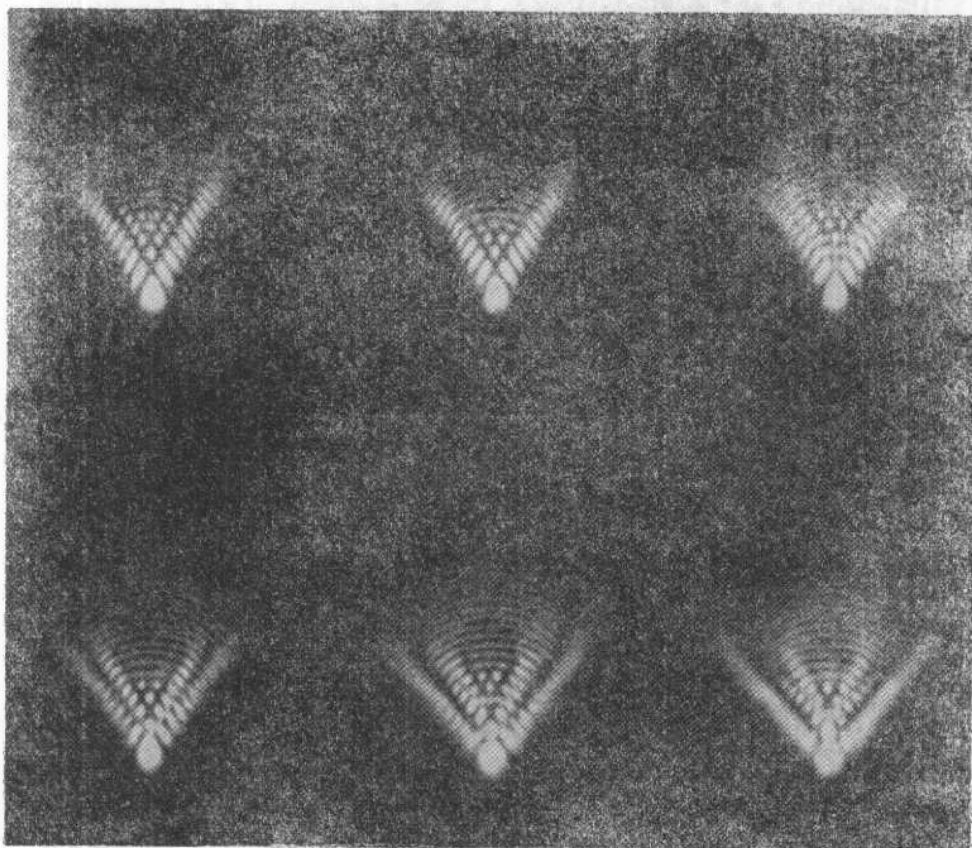
(a) 頂部是初級球差  $16\lambda$  時的邊緣焦點上和最小彌散圓位置的圖形。  
左下四圖是初級球差  $17.5\lambda$ ,  $8.4\lambda$ ,  $3.72\lambda$ ,  $1.4\lambda$  時的近軸焦點，  
右下四圖是與左圖同一球差情況下的最小彌散圓位置

圖 11.8



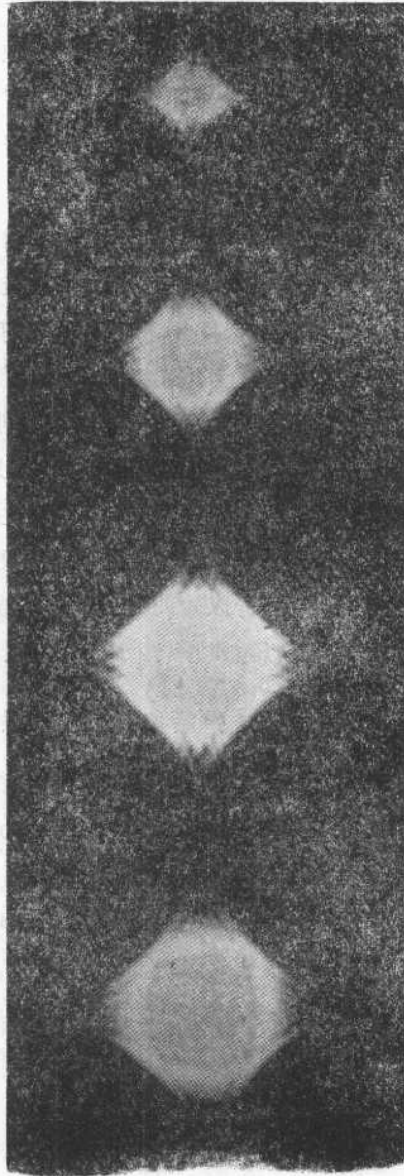
(b) 初级慧差  $w_{21}=0, 0.64\lambda, 1.4\lambda, 2.3\lambda, 3.2\lambda, 4.3\lambda, 5.3\lambda, 6.4\lambda, 7.7\lambda$  时的图形

图 11.8



(c) 当初级基差  $w_{21}=2\lambda$  时, 作离焦  $w_{20}=0, 1.6\lambda, 3.2\lambda, 4.8\lambda, 6.4\lambda, 8\lambda$  时的图形

图 11.8



(d) 初級象散, 离焦,  $w_{02} = -2w_{20} = \pm 1.4\lambda, \pm 2.7\lambda, \pm 3.5\lambda, \pm 6.5\lambda$  时的图形

图 11.8

$$\psi(p) = \frac{iy_0^2}{\lambda} \frac{e^{ikl}}{b} \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{-iar \cos(\theta - \varphi)} e^{-ikW} r dr d\varphi. \quad (48a)$$

积分(48)式中位相受象差影响而变化就使象空间各点振幅或亮度发生改变。其中象差 $S_V$ 和 $\frac{1}{2}(S_{III} + S_{IV})$ 对位相的影响就如原点不在高斯象点而有二方向离焦所发生的影响一样,它们对衍射图形的影响只是使图形的原点发生位移。其他象差的引入均使积分比上节中计算理想波面离焦后的积分更困难,例如就在通光孔是方孔时初级彗差形成的能量分布已不能用有限个已知函数表示。直接作数值积分时,由于象差引起位相突变,亦即积分核的正负突变,须作大量分段才能得到正确的结果。也可以将积分表示为级数和,希望级数迅速收敛以期用很少几项即可近似表示出要求的结果,但当象差越大则展开所需的项也越多。为作出形如图11.7的等亮度图,至少需要求出600个点的亮度,每个点的亮度又须作大量计算才能得到。A. Marechal 设计并制造了一个计算这种重积分的数值积分器,用它算出一个点只须8—10分钟,他用这积分器作出了很多等亮度图<sup>[7]</sup>。采用下节将讨论的圆多项式展开方法,Zernike和Nijboer也作出了很多等亮度图<sup>[9, 11]</sup>。图11.7就是一批他们算得的这种图,其中大部分表示单种象差对能量分布的影响,所以如此是因为多种象差同时存在时计算将比单种更费事。另外还有一些衍射图形的照片(图11.8)可作为比较。

### § 2.3 Strehl 判断和小象差近似

假若我们企图用上节的方法把象差的作用全面反映出来,就须对各种象差各种数量的各种组合都作出积分,这显然是难以做到的。另一方面,由于图形本身的复杂性,即使我们得到大量的图形后,也未必就能肯定那个部分合用。当然,典型的衍射图形使我们可以根据实际观察到的小孔象的衍射图形判断此光学系统的象差情况。

K. Strehl 在1894年提出一个判断质量的标准,即:有象差时的衍射图形中最大亮度与无象差时的最大亮度之比,这个比值可简称为中心点亮度。在象差不大时,中心点亮度和象差有较简单的关系,利用这种关系和上述判断就可以决定象差的最佳校正方案及象差公差。其中王大珩对各级球差的影响作过全面的讨论<sup>[10]</sup>; B. R. A. Nijboer 则对各种象差作出了全面的讨论<sup>[9]</sup>,其主要之点是象差表示为正交多项式(这多项式是 F. Zernike 提出的<sup>[8]</sup>,称为圆多项式)。采用正交多项式能使各项象差对亮度的影响变为相互独立的。

以 $S$ 表示有象差时的亮度和理想值之比,则由(48)式即得:

$$S = \frac{|\psi(p)_{W \neq 0}|^2}{|\psi(p)_{W=0}|^2} = \frac{1}{\pi^2} \left| \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{ikW} r dr d\varphi \right|^2, \quad (49)$$

在上式中已设通光孔为圆孔,且其半径等于1.当 $W$ 很小时,积分中指数函数可展开为级数并略去其高次项,若

$$|W| < \frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi}, \quad (50)$$

则取三项即可,此时得:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\pi^2} \left| \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left( 1 + ikW - \frac{k^2}{2} W^2 \right) r dr d\varphi \right|^2, \\ &\doteq \left| 1 + ik\bar{W} - \frac{k^2}{2} \bar{W}^2 \right|^2, \\ &\doteq 1 - k^2 (\bar{W}^2 - \bar{W}^2). \end{aligned} \quad (51)$$

其中 $\bar{W}$ 和 $\bar{W}^2$ 分别是波象差的平均值和平方平均值:

$$\bar{W} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} W r dr d\varphi, \quad (52)$$

$$\bar{W}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} W^2 r dr d\varphi. \quad (53)$$

由于参考球面的半径是可任意选择的,因之 $W$ 中有任意的常数项.适当选择常数总可以使 $\bar{W} = 0$ ,作了这种选择后, $S$ 就只与波象差的平方平均值有关.

将 $W$ 表示为积分域中的正交多项式后,积分(53)式中各交叉项的积分为零,从而使波象差的平方平均值成为各正交多项式的系数平方和.

按第六章§1,波象差中可能有的项如下表所列,表中光栏坐标已采用极坐标 $r, \varphi$ .

表 1

$m \backslash m+n$	0	1	2	3	4	5	6
0	1		$r^2$ $\eta^2 r^2$ $\eta^4 r^2$		$r^4$ $\eta^2 r^4$		$r^6$
1		$\eta r \cos \varphi$ $\eta^3 r \cos \varphi$ $\eta^5 r \cos \varphi$		$\eta r^3 \cos \varphi$ $\eta^3 r^3 \cos \varphi$		$\eta r^5 \cos \varphi$	
2			$\eta^2 r^2 \cos^2 \varphi$ $\eta^4 r^2 \cos^2 \varphi$		$\eta^2 r^4 \cos^2 \varphi$		
3				$\eta^3 r^3 \cos^3 \varphi$			

表中依  $r$  和  $\varphi$  分类,这是由于坐标  $\eta$  对于衍射图的形式毫无影响之故. 因之,在考虑衍射积分时表中每格内的各种象差可看作是同一的,引入符号  $w_{nm}$ , 其中  $m$  是  $\cos \varphi$  的幂次 ( $y$  的幂次)  $n$  是  $r$  的幂次和  $\cos \varphi$  的幂次之差 (即  $\sqrt{y^2+z^2}$  的幂次), 将所有的系数  $\eta$  包含在  $w_{nm}$  之内,故  $w_{nm}$  实是象差系数和  $\eta$  的多项式.

为将表中所列的象差项表示为正交多项式,可将  $r$  和  $\varphi$  分别考虑. 对于  $\varphi$ , 变换较简单, 因为  $\cos m\varphi$  在区间  $[0-2\pi]$  正交, 故只须将  $\cos^m \varphi$  表示为  $\cos m\varphi$  之和即可. 由于

$$\left. \begin{aligned} 1 &= 1, \\ \cos \varphi &= \cos \varphi, \\ \cos 2\varphi &= 2 \cos^2 \varphi - 1, \\ \cos 3\varphi &= 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi, \\ \cos 4\varphi &= 8 \cos^4 \varphi - 8 \cos^2 \varphi + 1, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

因此这种表示是很容易得到的,结果如下表:

表 2

$m \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6
0	$w_{00}$		$w_{20}r^2$		$w_{40}r^4$		$w_{60}r^6$
1		$w_{01}r \cos \varphi$		$w_{21}r^3 \cos \varphi$		$w_{41}r^5 \cos \varphi$	
2			$\frac{w_{02}}{2} r^2 (\cos 2\varphi + 1)$		$\frac{w_{22}}{2} r^4 (\cos 2\varphi + 1)$		
3				$\frac{w_{03}}{4} r^3 (\cos 3\varphi + 3 \cos \varphi)$			

为了得到在区间  $[0, 1]$  中正交的  $r$  的多项式, 须注意到象差仅有表中所列的项, 即对于  $f_m(r) \cos m\varphi$  的项而言, 函数  $f_m(r)$  中  $r$  的最低次幂为  $r^m$ , 即  $f_m(r)$  应为形如  $r^{m+2n}$  的项之和, 其中  $m, n$  均为正整数.

对于每个  $m$ , 找出规范化正交多项式组  $R_n^m$ :

$$R_n^m = \sum_{n=0}^n a_n^m r^{m+2n} \quad (55)$$

这个问题可以归结为解一组线性代数方程. 这是由于假若  $R_{2n}^m$  满足



$$\left. \begin{aligned} 2 \int_0^1 R_n^m r^{m+2j} r dr &= 0, \quad (\text{对 } j=0, 1, \dots, n-1), \\ 2 \int_0^1 a_n R_n^m r^{m+2n} r dr &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

则它显然是在区间 [0—1] 规范化正交的。而 (56) 式就是  $n$  元一次代数方程组。以  $m=0, n=4$  为例, 由 (56), (55) 式得到:

$$\left. \begin{aligned} a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4} + \frac{a_4}{5} &= 0, \\ \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{5} + \frac{a_4}{6} &= 0, \\ \frac{a_0}{3} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{5} + \frac{a_3}{6} + \frac{a_4}{7} &= 0, \\ \frac{a_0}{4} + \frac{a_1}{5} + \frac{a_2}{6} + \frac{a_3}{7} + \frac{a_4}{8} &= 0, \\ \frac{a_0}{5} + \frac{a_1}{6} + \frac{a_2}{7} + \frac{a_3}{8} + \frac{a_4}{9} &= \frac{1}{a_4}. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

顺序把各式乘以 1, 2, 3, 4, 5 后依次相减消去  $a_0$ ; 以同样方式消去  $a_1, a_2, a_3$  后可得:

$$a_4 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \sqrt{9} = 70 \sqrt{9}.$$

代回消去  $a_0, a_1, a_2$  的方程式以求  $a_3$ , 依次求出  $a_2, a_1, a_0$  即得  $R_4^0$  是:

$$R_4^0 = \sqrt{9} - 20\sqrt{9} r^2 + 90\sqrt{9} r^4 - 140\sqrt{9} r^6 + 70\sqrt{9} r^8. \quad (58)$$

用这种方法可以构成象差理论中所需的各组正交函数族, 如表 3。

函数族  $R_n^m \cos m\varphi$  称为圆多项式, 由 (56) 式可知它在单位圆内规范化正交:

$$\left. \begin{aligned} m \neq 0, \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 R_n^m \cos m\varphi R_{n'}^m \cos m'\varphi r dr d\varphi &= \delta_{mm'} \delta_{nn'}, \\ m = 0, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 R_n^0 R_{n'}^0 r dr d\varphi &= \delta_{nn'}. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

由表 3 不难将各象差项表示为圆多项式, 最后结果如下:

$$W(\eta, r, \varphi) = \sum_{n=0}^{n \neq 0} g_{n,0}(\eta) R_n^0(r) + \sqrt{2} \sum_{m,n}^{m \neq 0} g_{n,m}(\eta) R_n^m(r) \cos m\varphi. \quad (60)$$

将 (60) 式代入 (52) 式, (53) 式, 由 (59) 式可知, 此时波象差的平均值和平方平均值为:

$$\left. \begin{aligned} \bar{W} &= 0, \\ \overline{W^2} &= \sum g_{n,m}^2, \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

表 3

(a) $m=0$						
	$r^1$	$r^2$	$r^4$	$r^6$	$r^8$	$r^{10}$
$R_0^0$	$\sqrt{1}$					
$R_1^0$	$-\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$				
$R_2^0$	$\sqrt{5}$	$-6\sqrt{5}$	$6\sqrt{5}$			
$R_3^0$	$-\sqrt{7}$	$12\sqrt{7}$	$-30\sqrt{7}$	$20\sqrt{7}$		
$R_4^0$	$\sqrt{9}$	$-20\sqrt{9}$	$90\sqrt{9}$	$-140\sqrt{9}$	$70\sqrt{9}$	
$R_5^0$	$-\sqrt{11}$	$30\sqrt{11}$	$-210\sqrt{11}$	$560\sqrt{11}$	$-630\sqrt{11}$	$252\sqrt{11}$

(b) $m=1$					
	$r$	$r^3$	$r^5$	$r^7$	$r^9$
$R_0^1$	$\sqrt{2}$				
$R_1^1$	$-2\sqrt{4}$	$3\sqrt{4}$			
$R_2^1$	$3\sqrt{6}$	$-12\sqrt{6}$	$10\sqrt{6}$		
$R_3^1$	$-4\sqrt{8}$	$30\sqrt{8}$	$-60\sqrt{8}$	$35\sqrt{8}$	
$R_4^1$	$5\sqrt{10}$	$-60\sqrt{10}$	$210\sqrt{10}$	$-280\sqrt{10}$	$126\sqrt{10}$

(c) $m=2$				
	$r^2$	$r^4$	$r^6$	$r^8$
$R_0^2$	$\sqrt{3}$			
$R_1^2$	$-3\sqrt{5}$	$4\sqrt{5}$		
$R_2^2$	$6\sqrt{7}$	$-20\sqrt{7}$	$15\sqrt{7}$	
$R_3^2$	$-10\sqrt{9}$	$60\sqrt{9}$	$-150\sqrt{9}$	$56\sqrt{9}$

(d) $m=3$			
	$r^3$	$r^5$	$r^7$
$R_0^3$	$\sqrt{4}$		
$R_1^3$	$-4\sqrt{6}$	$5\sqrt{6}$	
$R_2^3$	$10\sqrt{8}$	$-30\sqrt{8}$	$21\sqrt{8}$

(e) $m=4$		
	$r^4$	$r^6$
$R_0^4$	$\sqrt{5}$	
$R_1^4$	$-5\sqrt{7}$	$6\sqrt{7}$

因此(51)式成为:

$$S = 1 - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \sum g_{n,m}^2 \quad (62)$$

这个结果就是用正交多项式表示象差的基本目的。这样一来,波差的平方平均值就成为正交多项式的系数平方和。各项对于中心点亮度  $S$  的影响是相互独立的,任意增加一项均使  $S$  降低。由于各个多项式均为多种象差(其中也包括轴向和垂轴离焦在内)的组合,故象差按圆多项式那样的分配平衡就是最佳校正状况(包括最佳焦点位置)。这样配置之后多出的项,不论其系数正负必将使  $S$  值降低。

例如当有初级球差  $ar^4$  时,由  $m=0$  的表可知它表示为圆多项式时为:

$$ar^4 = \frac{a}{6\sqrt{5}} R_2^0 + \frac{a}{2\sqrt{3}} R_1^0 + \text{常数项}, \quad (63)$$

形成的

$$\sum g^2 = a^2 \left[ \left( \frac{1}{6\sqrt{5}} \right)^2 + \left( \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)^2 \right] = 0.0888a^2,$$

故当  $a=0.24\lambda$  时,  $S=0.8$ , 亦即初级球差最大值为  $0.24\lambda$  时中心点亮度已降为理想情况的 80%。但当我们配以适当的离焦以产生出适当的  $r^2$  的项,从而使波差成为  $\frac{a}{6\sqrt{5}} R_2^0$  (即按表 1, 离焦产生波差  $-ar^2$ , 再选最佳波面半径以产生常数项  $\frac{5}{6}$ ), 则

$$\sum g^2 = a^2 \left( \frac{1}{6\sqrt{5}} \right)^2 = 0.0055a^2,$$

故当  $a=0.95\lambda$  时,  $S=0.8$ 。这就是说,当考虑到最佳焦点选择时,初级球差实可大四倍,即约一个波长时方便中心点亮度降低 20%。

当有高级象差存在时,单依靠离焦不能使象差成为圆多项式,这时须有适当的低级象差与之同时产生才好。这就是说,当我们不能校正高级象差时,产生低级象差与之相平衡而组成圆多项式是非常重要的,由表即可看出平衡与未平衡时之显著差别。

当  $S=0.8$  时,观察者一般尚不能感到成象的不完善,故象差的公差可取为:

$$\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \sum g^2 < 0.20,$$

即

$$\sum g^2 < \frac{\lambda^2}{200}. \quad (64)$$

当考虑到离焦和用低级象差平衡高级象差时,可得各种象差的最佳校正状况和最佳校正时的公差如下表,表中将表 1 的同一格内的象差规定了一个统一的名称。

表 4

象 差	最 佳 校 正 状 况	$S > 0.8$ 所定公差
轴 向 离 焦 $w_{20}r^2$	$w_{20}\left(r^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{w_{20}}{2\sqrt{3}} E_1^2$	$w_{20} < 0.24\lambda$
初 级 球 差 $w_{40}r^4$	$w_{40}\left(r^4 - r^2 + \frac{1}{6}\right) = \frac{w_{40}}{6\sqrt{5}} E_2^2$	$w_{40} < 0.95\lambda$
二 级 球 差 $w_{60}r^6$	$w_{60}\left(r^6 - \frac{3}{2}r^4 + \frac{3}{5}r^2 - \frac{1}{20}\right) = \frac{w_{60}}{20\sqrt{7}} E_3^2$	$w_{60} < 3.8\lambda$
三 级 球 差 $w_{80}r^8$	$w_{80}\left(r^8 - 2r^6 + \frac{9}{7}r^4 - \frac{2}{7}r^2 + \frac{1}{70}\right) = \frac{1}{70\sqrt{9}} E_4^2$	$w_{80} < 14.6\lambda$
垂 轴 离 焦 $w_{01}r \cos \varphi$	$w_{01}r \cos \varphi = \frac{w_{01}}{\sqrt{2}} E_0^1 \cos \varphi$	$w_{01} < 0.14\lambda$
初 级 彗 差 $w_{21}r^3 \cos \varphi$	$w_{21}\left(r^3 - \frac{2}{3}r\right) \cos \varphi = \frac{w_{21}}{3\sqrt{4}} E_1^1 \cos \varphi$	$w_{21} < 0.61\lambda$
二 级 彗 差 $w_{41}r^5 \cos \varphi$	$w_{41}\left(r^5 - \frac{6}{5}r^3 + \frac{3}{10}r\right) \cos \varphi = \frac{w_{41}}{10\sqrt{6}} E_2^1 \cos \varphi$	$w_{41} < 2.4\lambda$
三 级 彗 差 $w_{61}r^7 \cos \varphi$	$w_{61}\left(r^7 - \frac{12}{7}r^5 + \frac{6}{7}r^3 - \frac{4}{35}r\right) \cos \varphi = \frac{w_{61}}{35\sqrt{8}} E_3^1 \cos \varphi$	$w_{61} < 9.8\lambda$
象 散 $w_{02}r^2 \cos^2 \varphi$	$w_{02}r^2 \left(\cos^2 \varphi - \frac{1}{2}\right) = \frac{w_{02}}{2\sqrt{3}} E_0^2 \cos 2\varphi$	$w_{02} < 0.35\lambda$
初 级 二 次 球 差 $w_{22}r^4 \cos^2 \varphi$	$w_{22}\left(r^4 - \frac{3}{4}r^2\right) \left(\cos^2 \varphi - \frac{1}{2}\right) = \frac{w_{22}}{8\sqrt{5}} E_1^2 \cos 2\varphi$	$w_{22} < 1.8\lambda$
二 级 二 次 球 差 $w_{42}r^6 \cos^2 \varphi$	$w_{42}\left(r^6 - \frac{4}{3}r^4 + \frac{2}{5}r^2\right) \left(\cos^2 \varphi - \frac{1}{2}\right) = \frac{w_{42}}{30\sqrt{7}} E_2^2 \cos 2\varphi$	$w_{42} < 7.9\lambda$
初 级 三 次 彗 差 $w_{03}r^3 \cos^3 \varphi$	$w_{03}r^3 \left(\cos^3 \varphi - \frac{3}{4} \cos \varphi\right) = \frac{w_{03}}{4\sqrt{4}} E_0^3 \cos 3\varphi$	$w_{03} < 0.8\lambda$
二 级 三 次 彗 差 $w_{23}r^5 \cos^3 \varphi$	$w_{23}\left(r^5 - \frac{4}{5}r^3\right) \left(\cos^3 \varphi - \frac{3}{4} \cos \varphi\right) = \frac{w_{23}}{20\sqrt{6}} E_1^3 \cos 3\varphi$	$w_{23} < 4.9\lambda$
初 级 四 次 球 差 $w_{04}r^4 \cos^4 \varphi$	$w_{04}r^4 \left(\cos^4 \varphi - \cos^2 \varphi + \frac{1}{8}\right) = \frac{w_{04}}{8\sqrt{5}} E_0^4 \cos 4\varphi$	$w_{04} < 1.8\lambda$

表中越往下象差越为高级,它须要所有的上面的象差与之相平衡,但奇次与偶次的象差永远相互无关。例如初级四次球差就须等量反号的初级二次球差及 $\frac{1}{8}$ 的初级球差与之平衡,再例如三级球差须要二级球差初级球差和离焦与之相平衡。

当光学系统同时存在各种象差(象差未校正到最佳校正状况时也可以看作是各种象差同时存在)而仍欲 $S > 0.8$ ,则仍可由(64)式作判断,利用表4可使计算简化。

表 5

象 差	最 佳 校 正 状 况	(Strehl 判 断)	公 差 ( $S > 0.8$ )
轴 向 离 焦 $w_{20}(y^2 + z^2)$	方 $w_{20} \left\{ (y^2 + z^2) - \frac{2}{3} \right\} = \frac{2}{3} w_{20} \{ P_{2y} + P_{2z} \}$ 圆 $w_{20} \left[ (y^2 + z^2) - \frac{1}{2} \right]$		$w_{20} < 0.17\lambda$ [0.24]
初 级 球 差 $w_{40}(y^2 + z^2)$	方 $w_{40} \left\{ (y^2 + z^2)^2 - \frac{32}{21} (y^2 + z^2) - 0.594 \right\} = \left\{ \frac{8}{35} (P_{4y} + P_{4z}) + \frac{8}{9} P_{2y} P_{2z} \right\} w_{40}$ 圆 $w_{40} \left[ (y^2 + z^2)^2 - (y^2 + z^2) + \frac{1}{6} \right]$		$w_{40} < 0.34\lambda$ [0.95]
二 级 球 差 $w_{60}(y^2 + z^2)$	方 $w_{60} \{ (y^2 + z^2)^3 - 2.55 (y^2 + z^2)^2 + 1.7 (y^2 + z^2) - 0.16 \} = \left\{ \frac{16}{231} (P_{6y} + P_{6z}) + \frac{16}{35} (P_{4y} P_{2z} + P_{2y} P_{4z}) - 0.04 (P_{4y} + P_{4z}) + 0.01 P_{2y} P_{2z} \right\} w_{60}$ 圆 $w_{60} \left[ (y^2 + z^2)^3 - 1.5 (y^2 + z^2)^2 + 0.6 (y^2 + z^2) - 0.05 \right]$		$w_{60} < 0.69\lambda$ [3.8]
象 散 $w_{02}y^2$	方 $w_{02} \left\{ y^2 - \frac{1}{2} (y^2 + z^2) \right\} = \frac{w_{02}}{3} (P_{2y} - P_{2z})$ 圆 $w_{02} \left[ y^2 - \frac{1}{2} (y^2 + z^2) \right]$		$w_{02} < 0.34\lambda$ [0.35]
初 级 二 次 球 差 $w_{22}y^2 (y^2 + z^2)$	方 $w_{22} \left\{ y^2 (y^2 + z^2) - \frac{1}{2} (y^2 + z^2)^2 - \frac{6}{7} y^2 + \frac{2}{7} (y^2 + z^2) \right\} = \frac{4}{35} (P_{4y} - P_{4z}) w_{22}$ 圆 $w_{22} \left[ y^2 (y^2 + z^2) - \frac{1}{2} (y^2 + z^2)^2 - \frac{6}{8} y^2 + \frac{3}{8} (y^2 + z^2) \right]$		$w_{22} < 1.31\lambda$ [1.8]
初 级 慧 差 $w_{21}y (y^2 + z^2)$	方 $w_{21} \left\{ y (y^2 + z^2) - \frac{14}{15} y \right\} = w_{21} \left\{ \frac{2}{5} P_{3y} + \frac{2}{3} P_{1y} P_{2z} \right\}$ 圆 $w_{21} \left[ y (y^2 + z^2) - \frac{2}{3} y \right]$		$w_{21} < 0.3\lambda$ [0.61]
二 级 慧 差 $w_{41}y (y^2 + z^2)^2$	方 $w_{41} \{ y (y^2 + z^2)^2 - 1.93y (y^2 + z^2) + 0.8y \} = w_{41} \left\{ \frac{8}{63} P_{5y} + \frac{8}{15} P_{3y} P_{2z} + \frac{8}{35} P_{1y} P_{4z} + (-0.06 P_{3y} + 0.9 P_{1y} P_{2z}) \right\}$ 圆 $w_{41} \{ y (y^2 + z^2)^2 - 1.2y (y^2 + z^2) + 0.3y \}$		$w_{41} < 0.63\lambda$ [2.4]
初 级 三 次 慧 差 $w_{03}y^3$	方 $w_{03} \{ y^3 - 0.45y (y^2 + z^2) - 0.18y \} = \{ 0.22 P_{3y} - 0.3 P_{1y} P_{2z} \} w_{03}$ 圆 $w_{03} \{ y^3 - 0.75y (y^2 + z^2) \}$		$w_{03} < 0.63\lambda$ [0.8]

为看出孔形的影响,再研究一下方孔的情况,对于方孔的情况(49)式改为:

$$S = \frac{1}{16} \left| \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e^{ikW} dz dy \right|^2, \quad (49a)$$

而近似式(51)不变,但其中波差平均的范围改为方孔,即:

$$\left. \begin{aligned} \bar{W} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 W dz dy, \\ \bar{W}^2 &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 W^2 dz dy. \end{aligned} \right\} \quad (52a)$$

$W$  是  $z, y$  的函数,将它表示为 Legendre 多项式(在 § 5.4 中有其表示式)并除去常数项,即令下式中的下角标号  $p, q$  不都等于零:

$$W = \sum_p \sum_q g_{p,q} P_p(y) P_q(z),$$

则  $\bar{W} = 0$

$$\bar{W}^2 = \sum_{p,q} \frac{g_{p,q}^2}{(2p+1)(2q+1)}, \quad (61a)$$

$$S = 1 - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \sum_{p,q} \frac{g_{p,q}^2}{(2p+1)(2q+1)}. \quad (62a)$$

由此可得方孔情况下的最佳校正状况以及各种象差的公差,如表 5 所列.表中是由  $S > 0.8$  所决定的象差处于最佳校正情况下的公差,为比较起见将圆孔的结果也列在一起(即方括号内的表示式和数字).由表 5 可见它们不但公差数量不同,而且校正状况也不同.这种不同显然是方孔比圆孔多出的积分域(四个角部分)对波差均方数发生影响所致.由于方孔中  $y^2 + z^2$  的最大值是 2,方孔的最大容许波差比圆孔情况一般要大些,也有个别较小的,例如  $w_{03}$ .

## § 2.4 Rayleigh 判断,图解法

公差和质量判断是在光学设计的过程中须要经常考虑和经常进行的,但要象上节那样判断却是很麻烦的事,它要求将计算结果解析表示为代数多项式,然后将它们分解为正交多项式之和,然后才能用表 4 来作判断.早在 1879 年, Rayleigh 在观察研究光谱仪成象质量时就提出了一个简单的判断:波面和参考球面之最大差别不超过  $\frac{\lambda}{4}$  时,此波面可看作是无缺陷的.这个判断提出了两个标准:首先,在 Rayleigh 看来,有特征意义的是波差的最大值,参考球面选择的标准是使波差的最大值为极小.这样看来,我们的象差平衡方案也应以此为标准.其次是提出了波差最大值的容许量.由能量观点看来, Rayleigh 提出的判断是不能接受的,因为它不管波面上

缺陷部分的面积在整个面积中所占的比重(散失的能量是总能量的几分之几),而只管缺陷的深度。例如缺陷偏离球面  $1000\lambda$ ,但面积只占总面积的万分之一时(玻璃表面的划痕和玻璃内部的气泡都可能引起这种现象),严格地按 Rayleigh 判断就是不容许的,事实上当然没有人用它来作这种判断。另一方面,按 Strehl 判断的近似表示(63)式,也仍会得出这种不合情理的结论,因此时波差平方平均值可以很大而使  $S$  值变得很小。但是这并不说明 Strehl 判断与物理概念不符,而只说明近似式(63)式——由(62)式,假设波差很小时导出的公式——本来就不能用来考虑大波差问题。由(63)式引出的概念:“波差的平方平均值最小”是不适用于大波差的情况的。

也许认为 Rayleigh 判断已先认定波差是小于  $\frac{\lambda}{4}$  的,亦即它适用于小波差的情况。这种看法也不完全正确,例如设光学系统是一个位相光栅,它使波面由平面转变为阶梯形,如图 11.9,波面和参考面之差恰为  $\frac{\lambda}{4}$ 。按近似积分(51)式求出此时中心点亮度  $S$  为 0.38,比我们定的标准 0.8 低得多。散出的能量分布方式可由光栅的刻线间距控制,可使它起最不利的影响[由判断(64)式,考虑到最不利的波面形式——阶梯形时,可提出保险的判断是波差最大值小于  $\frac{\lambda}{7}$ ]。由此可见,运用 Rayleigh 判断来考察小波差问题时所得的结果仍然可能有毛病。但因光学上遇到的波面多半如表 4 所列,我们将表明,此时由  $\frac{\lambda}{4}$  判断一般能导致可靠的結果。

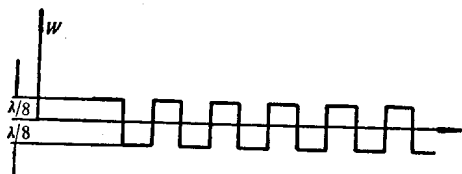


图 11.9

Rayleigh 判断的优越处是便于使用。在第三章 §10 和第六章 §3 已提及由光线光路计算结果作图形积分就可得出波象差曲线,从这种波象差曲线我们就可以按 Rayleigh 判断来确定光学系统的质量如何。在作这种判断时不须得到波差的解析表示,更不需要将它分解为一个正交多项式。它可对混合存在的象差以及象差并未处在最佳校正状况时作判断;而且判断的手续并不比象差处在最佳校正状况时麻烦。下面还将表明,运用一些简单概念即足以判断象差平衡是否处在最佳校正状况以及应有的变更方向,依靠几何直观就能方便地判断质量。

Rayleigh 判断的另一优点是它对通光孔形状不作什么假定。在研究  $S$  值时我们依凭的工具是圆多项式,由于正交性由积分域形式而定,当通光孔不是圆形时用圆多项式导出的结果就全部失效,此时我们必须重新结构一套正交多项式,而实际问题中轴外点的通光孔一定不是圆形。由此看来,虽然 Rayleigh 判断和 Strehl 判断相比

是不如后者健全,但它普遍适用而且方便,这就使它能被广泛采用和传播。

下面首先将表 4 所列最佳校正状况下的公差用 Rayleigh 判断  $\frac{\lambda}{4}$  来考察,亦即将波差作出曲线看它是否处在  $\frac{\lambda}{4}$  的范围内。然后再运用 Rayleigh 观点,使波差最大值变小,导出象差的最佳平衡状况;将这结果和表 4 所列相比较。这两种比较就可以作为 Rayleigh 判断可靠性的证据。

先从球差开始,将 Strehl 判断所确定的波差曲线作图如图 11.10—11.13。图中纵坐标为归化光栏半径的平方  $r^2$ ;横坐标为波差  $W$ ,以波长为单位;图下都已注明了各条曲线的方程式。由此可见,波差最大值确与  $\frac{\lambda}{4}$  很相近,但也并不全同。对轴向离焦和初级球差而言波差小于  $\frac{\lambda}{4}$ ,对高级球差而言波差部分地超出  $\frac{\lambda}{4}$ 。按 Rayleigh 判断,图 11.12 和 11.13 所示的校正状况不能算最好,亦即采取另一些平衡方案还可以使波差最大值变小。后面将按这种观点平衡象差并来考察两种观点的差异。

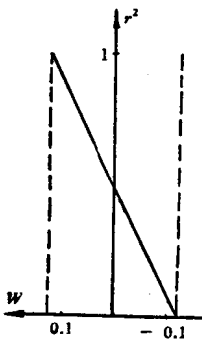


图 11.10 轴向离焦  
 $W = 0.24 \left( r^2 - \frac{1}{2} \right)$

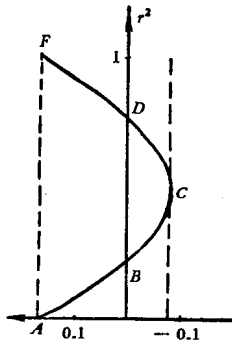


图 11.11 初级球差  
 $W = 0.95 \left( r^4 - r^2 + \frac{1}{6} \right)$

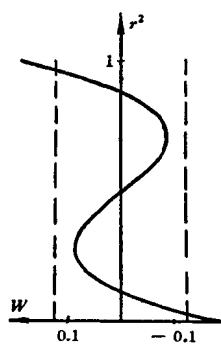


图 11.12 二级球差  
 $W = 3.8 \left( r^6 - \frac{3}{2} r^4 + \frac{3}{5} r^2 - \frac{1}{20} \right)$

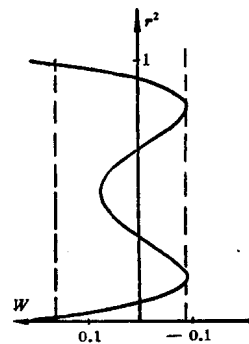


图 11.13 三级球差  
 $W = 14.6 \left( r^8 - 2r^6 + \frac{9}{7} r^4 - \frac{2}{7} r^2 + \frac{1}{70} \right)$

由上列图形已经可以看出两种判断是接近一致的,可以用图 11.11 来解释这种一致性。我们已知,图 11.11 中  $W$  的平方平均值是  $\frac{\lambda^2}{200}$ ,因之无论曲线的  $AB$  部分,  $BCD$  部分或者  $DF$  部分,  $W$  的均方值都约是  $\frac{\lambda^2}{200}$ 。实际上,当函数  $y$  随  $x$  的变化规律如图 11.14,即在区间两端等于零而中间有极大值  $\frac{\lambda}{12}$  时,其平方平均值为  $\frac{\lambda^2}{290}$ ;而当  $y$  和  $x$  的关系如图 11.15,即在区间一端等于零而在另一端具最大值  $\frac{\lambda}{6}$  时,其平方平均值为  $\frac{\lambda^2}{140}$ 。图 11.11 中要求曲线是二次的,当曲线非二次时则具体数量会略有变动。按这种观点来看图 11.11—11.13 时,它们不过是按图 11.14



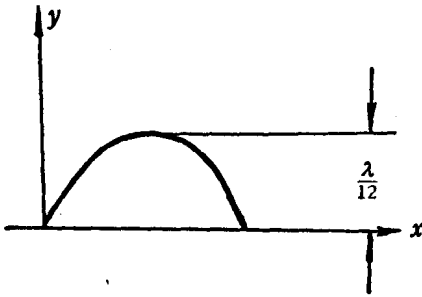


图 11.14

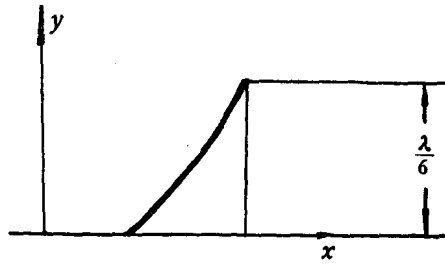


图 11.15

及 11.15 的曲线一段段接起来而已,故两种结果相符合是不足怪的。

但是当考虑其他非轴对称象差时,情况就发生变化。由表 4 可以看出波象差的最大值会超过上面确定的  $\frac{\lambda}{12}$  和  $\frac{\lambda}{6}$ , 而且都超出约 1.4 倍。原因就是 (59) 式中有两个不同的正交表示式,即  $\cos^2 m\varphi$  的平均值是  $\frac{1}{2}$  之故,这个不同在 (60) 式中已反映出来。注意到这一点之后,象差子午截面的特征就和轴对称象差相同。将表 4 的彗差波面的子午截面作出,如图 11.16—11.19。

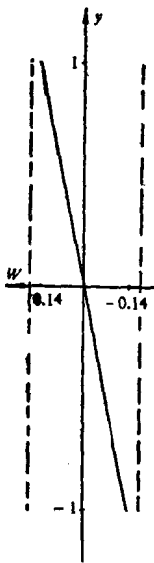


图 11.16 垂轴离焦

$$W = 0.14y$$

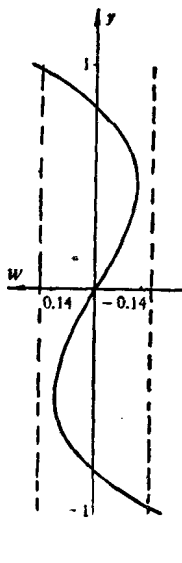


图 11.17 初级彗差

$$W = 0.61\left(y^3 - \frac{2}{3}y\right)$$

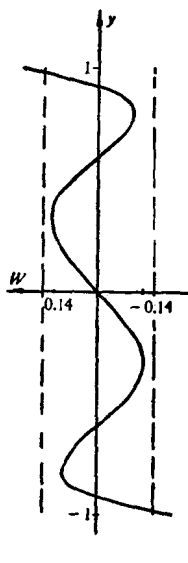


图 11.18 二级彗差

$$W = 2.4\left(y^5 - \frac{6}{5}y^3 + \frac{3}{10}y\right)$$

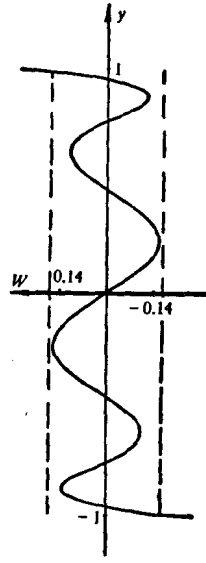


图 11.19 三级彗差

$$W = 9.8\left(y^7 - \frac{12}{7}y^5 + \frac{6}{7}y^3 - \frac{4}{35}y\right)$$

象差对光栏坐标  $r$  的平衡方式已如上述,而随  $\varphi$  的平衡方式已由 (54) 式表现出来。 $\cos^m \varphi$  的极大值本为 1, 但当与低次项平衡后就可降为  $1/2, 1/4, 1/8 \dots$  显然这

种平衡方式不单对于平方平均值(正交性)是最佳状况,而且对极大值也是最佳状况,系数的变化将使最大值也变大.

上面的结果说明:当波差不大时,“使波差的最大值为最小(Rayleigh)”和“使波差的平方平均值为最小(Strehl)”,这两种判断是差不多一致的.同时,还建立了两种判断的大致数量上的联系.轴对称波差最大值为  $\frac{\lambda}{4}$  时,其均方值约为  $\frac{\lambda^2}{200}$ ,  $S$  约为 0.8;非轴对称时波差最大值容许  $\frac{\lambda}{3}$ .但是这两种判断毕竟是不同的.既然  $S$  具有准确的物理意义,因此当二者之间有不可忽视的差异时,我们就应舍弃使波差最大值最小的方式,即放弃 Rayleigh 判断.下面就来按 Rayleigh 判断确定校正方案并将结果与表 4 相比较,由这些讨论就会更加明确两种判断的优缺点.

仍然从最简单的初级球差开始.图 11.20a 是初级球差曲线,11.20b 为其积分,即三角形阴影部分的面积,故波差曲线为二次曲线.(由于面积之半即为波差,下面的陈述中常将“面积”和“波差”二辞混用.)为使波差为最小,可将象面选在边缘焦点和近轴焦点的中间(图 11.20c),此时新球差曲线(以新选参考点为原点时的球差曲线)形成的波差曲线如图 11.20d,即有两个零点.可以看出,参考点不这样选择时波差一定会增大;球差曲线和  $w^2$  轴间所夹的面积不是上部大就是下部大,而面积的最大值也就是波差的最大值,因此图 11.20d 就是焦点处在最佳焦点时的波差曲线.此时最大波差就是图 11.20c 中的一个三角形的面积,它恰是图 11.20a 中三角形面积的  $\frac{1}{4}$ ,故在公差为  $\frac{\lambda}{4}$  时,初级球差的波差值可为  $1\lambda$ .为使由  $S$  所得结果与此一致,只须令  $S > 0.78$ ,即  $\sum g^2 < \frac{\lambda^2}{180}$  即可,此时表 4 中的容许量都将变大 1.06 倍.

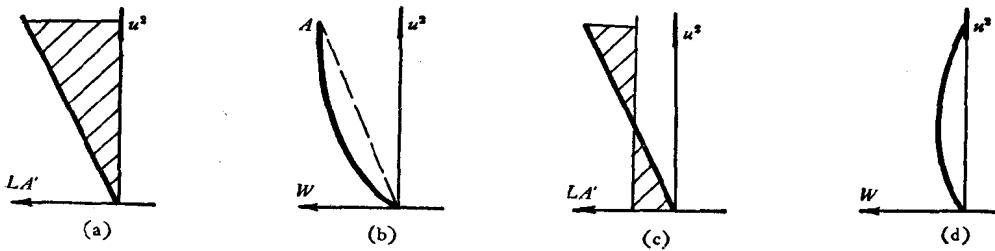


图 11.20

当有二级球差时,球差曲线是抛物线,如图 11.21a.若初级球差可加控制,则此球差曲线和通过原点的直线之差就是二级球差不变时的另外可能的球差曲线形式.为使球差曲线所围限的面积减小,宜变更初级球差使边缘带的球差等于零,如图 11.21b.此时的最佳焦点位置就是使面积  $OAB = BCD = DEF$  的直线位置  $AE$ ;图

形积分的波差曲线如图 11.21c, 其最大波差即上述面积之半. 因为曲线是二次的, 可以由几何关系将上述最佳焦点位置找出来. 图 11.21d  $ONM$  是抛物线, 其方程式为  $y = ax^2$ , 积分得面积  $Ox_0MNO = \frac{1}{3} ax_0^3$ . 因面积  $Ox_0My_0O = ax_0^3$  故相减得面积  $ONMy_0O = \frac{2}{3} ax_0^3$ . 类似地, 面积  $ONy_1O$  就是  $\frac{2}{3} ax_1^3$ . 因之, 若需面积  $ONy_1N'O$  和  $NPMN$  相等就得方程式:

$$2 \frac{2}{3} ax_1^3 = \frac{1}{3} ax_0^3 + \frac{2}{3} ax_1^3 - ax_1^2 x_0,$$

即

$$2 \left( \frac{x_1}{x_0} \right)^3 = 1 - 3 \left( \frac{x_1}{x_0} \right)^2,$$

解之得:

$$\frac{x_1}{x_0} = \frac{1}{2}.$$

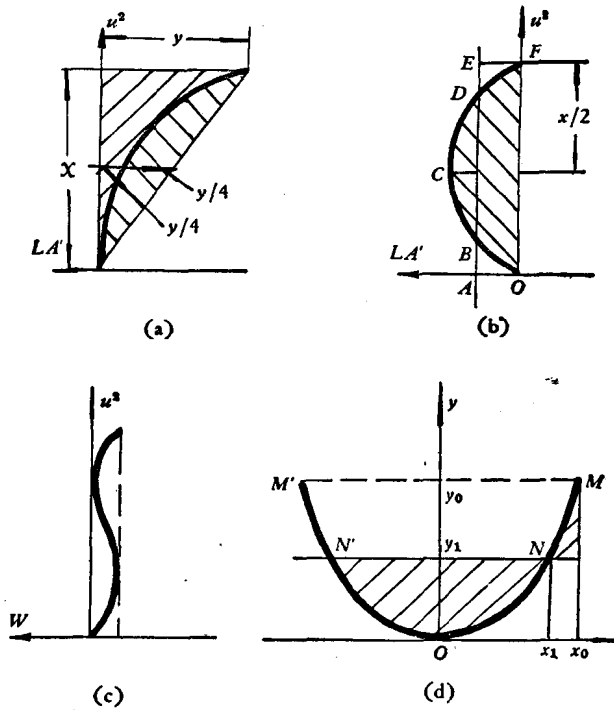


图 11.21

因之可见面积  $ONN'O$  是大面积  $OMM'O$  的  $\frac{1}{8}$ , 亦即在球差曲线 11.21b 中经过焦点选择后, 最大面积仅为面积  $OBCDFO$  的  $\frac{1}{8}$ . 再由图 11.21a 和 11.21b, 当只有纯二级

球差时,面积为  $\frac{1}{3}xy$ ,而以适量的初級球差与二級球差平衡后,面积则为  $\frac{4}{3}\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{y}{4}\right) = \frac{1}{6}xy$ ,即为原来的  $\frac{1}{2}$ . 由此可见,經初級球差平衡校正并适当离焦后,結果可使残余波差为原有的  $\frac{1}{16}$ ,即可容許二級球差波差为  $4\lambda$ . 这也和  $S=0.78$  所得者一致. 但是可以发觉两种判断的最佳焦面位置是不一致的.

有了波差曲线图 11.21c 以后就更容易明白图 11.21d 是最佳校正状况. 增减初級球差就相当于在波差曲线的横坐标上加减一段抛物线(图 11.21d),它在使上部波差减小的同时必使下部加大. 换句话说,再加上初級球差就使球差曲线图 11.21b 失对称,虽可重选焦点位置使面积中之二块相等且比图 11.21c 更小,但是另一面积必加大.

选择最佳焦点和最佳校正状况的原则可表述为:(1) 象差曲线应被坐标轴切出尽可能多的分段,从而将面积分为正负相间的小块,亦即象差曲线和坐标轴有尽可能多的交点;(2) 截出的小面积两两相等;(3) 为使面积相等,曲线应对称于中点,对称或镜对称按曲线为奇次或偶次而定.

按照这个判断我们求三級球差的最佳校正状况. 当有三級球差时球差是  $r^2$  的三次函数,故球差曲线和  $r^2$  轴可有三个交点如图 11.22a. 如截出的四块面积相等可令曲线对  $r^2 = \frac{1}{2}$  的点对称,再令下部二面积相等即可. 设球差  $LA$  是  $x=r^2$  的函数:

$$LA(x) = k(a + bx + cx^2 + x^3), \quad (65a)$$

则波差为:

$$W(x) = \frac{k}{2}\left(ax + \frac{b}{2}x^2 + \frac{c}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\right). \quad (65b)$$

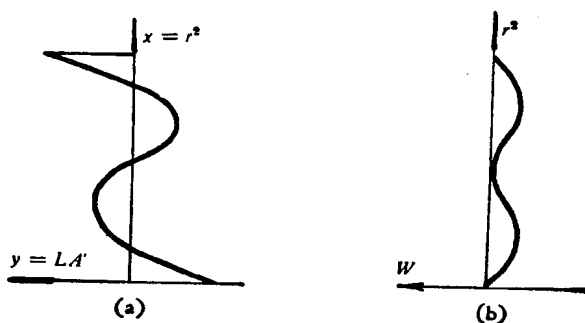


图 11.22

此时,使面积最小的条件就表示为:

$$\begin{cases} LA(x) = -LA(1-x), \\ W\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

将(65)式代入得下列方程组:

$$\begin{cases} a+b+c+1 = -a, \\ c+3 = -c, \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{8} + \frac{c}{24} + \frac{1}{64} = 0. \end{cases}$$

其解是

$$a = -\frac{1}{16}, \quad b = \frac{5}{8}, \quad c = -\frac{3}{2}.$$

于是:

$$W = K\left(x^4 - 2x^3 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\right), \quad (66)$$

它在  $x=0.1466$  时为极大,  $W$  的极值是  $W_M = \frac{K}{64}$ . 故当  $W < \frac{\lambda}{4}$  时,  $K < 16\lambda$ , 即三级波差最大值为  $16\lambda$ . 这个值还是和  $S=0.78$  的结果  $15.6\lambda$  一致的, 但是将(66)式和表4比较就可看出, 平衡三级球差所用的离焦量和初级球差都不同, 将二者都写在下面:

$$\text{由 Rayleigh: } W = K\left(x^4 - 2x^3 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\right),$$

$$\text{由 Strehl: } W = K\left(x^4 - 2x^3 + \frac{9}{7}x^2 - \frac{2}{7}x\right).$$

二者之差就是:

$$\Delta W = \left(\frac{1}{28}x^2 - \frac{1}{28}x\right)K.$$

当  $K=14.6\lambda$  时

$$\Delta W = (0.52x^2 - 0.52x)\lambda.$$

由表4可见, 它使中心点亮度降低  $0.2\left(\frac{0.52}{0.95}\right)^2 = 0.06$ , 即此时中心点亮度由 0.8 变为 0.74, 若公差给予  $16\lambda$  则降低更多, 为 0.7.

这就是说, 两种判断的结果虽不完全一致但差别也不很大.

上节的结果对  $\cos\varphi$  的作用已作了说明, 故对于其他轴对称象差就不须再作讨论了. 同样地, 对垂轴象差而言只须讨论子午彗差即可. 当象差是纯初级彗差时, 子午

彗差  $TA_y$  和坐标  $y$  的关系为抛物线, 如图 11.23a.

由于  $TA_y$  和  $y$  轴间的面积就是波差, 类似于二级球差已有的结果, 此时宜将参考点由  $O$  移到  $O^*$ , 以使新的  $y^*$  轴和曲线相交于  $y = \frac{1}{2}$  处, 此时的波差曲线如图 11.23b. 按前述二级球差的结果, 参考点移动后的波差最大值就是原来的曲线一枝所围的面积之半 (原来的上半部面积是  $\frac{1}{3}x^2$ , 现为  $2 \times \frac{2}{3} \times (\frac{1}{2}) \times (\frac{x}{2})^2 = \frac{x^2}{6}$ ). 故容许的初级彗差之波差最大值是  $0.5\lambda$ , 比表 4 的结果略小些, 原因已在前提及.

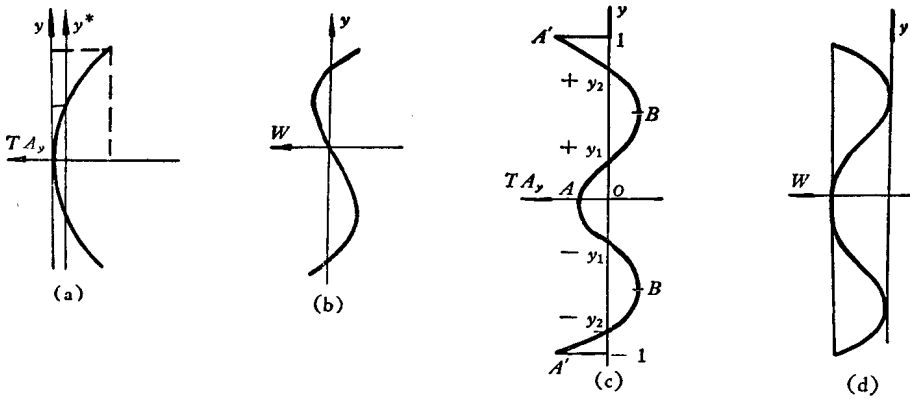


图 11.23

对二级彗差作面积极小的处理要复杂得多, 由面积相等将引出一个高次代数方程式. 设几何象差曲线如图 11.23c, 即曲线在  $\pm y_1, \pm y_2$  处与轴相交, 且面积

$$|OAy_1| = |y_1By_2| = |y_2A'1|,$$

故设二级彗差方程式为:

$$TA_y = y^4 - 2by^2 + c,$$

则

$$W = \frac{y^5}{5} - \frac{2b}{3}y^3 + cy,$$

因之由零点位置和面积相等得下列方程组:

$$\left. \begin{aligned} y_1^4 - 2by_1^2 + c &= 0, & (a) \\ y_2^4 - 2by_2^2 + c &= 0, & (b) \\ \frac{1}{5}y_1^5 - \frac{2b}{3}y_1^3 + cy_1 &= \frac{1}{5} - \frac{2b}{3} + c, & (c) \\ \frac{1}{5}y_2^5 - \frac{2b}{3}y_2^3 - cy_2 &= 0. & (d) \end{aligned} \right\} (67)$$

由 (a), (d) 二式消去  $c$ , 即得:

$$y_2^2 = \frac{5}{3} b. \quad (67e)$$

但由 (67a), (67b) 二式得

$$\left. \begin{aligned} y_1^2 &= b - \sqrt{b^2 - c}, \\ y_2^2 &= b + \sqrt{b^2 - c}. \end{aligned} \right\} \quad (67f)$$

故由 (67c), (67f) 得:

$$\left. \begin{aligned} y_1^2 &= \frac{b}{3}, \\ c &= \frac{5}{9} b^2 = 5y_1^4. \end{aligned} \right\} \quad (67g)$$

由 (67g) 将 (67c) 中的  $b, c$  都表示成  $y_1$ , 即得到  $y_1$  的五次方程式:

$$3.2y_1^5 - 5y_1^4 + 2y_1^2 - 0.2 = 0. \quad (67h)$$

$y < 1$  的解就是:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 0.367030, \\ y_1^2 &= 0.134711, \\ y_2^2 &= 0.673555, \\ b &= 0.404133, \\ c &= 0.0907353. \end{aligned} \right\} \quad (67i)$$

此时波差的最大值就是:

$$\frac{1}{5} y_1^5 - \frac{2b}{3} y_1^3 + c y_1 = \frac{1}{5} - \frac{2b}{3} + c = 0.21313.$$

由此得到的波差最佳平衡方案就是:

$$W = w_{41} (y^5 - 1.347110y^3 + 0.453676y) \quad (68)$$

当要求  $|W| < 0.25\lambda$  时,  $w_{41} < 2.35\lambda$ , 与表 4 所列的  $S = 0.8$  得到的公差  $2.4\lambda$  一致.

(68) 式与 Strehl 判断的差别是:

由 Rayleigh 判断:

$$W = 2.4\lambda (y^5 - 1.347y^3 + 0.453y),$$

由 Strehl 判断:

$$W = 2.4\lambda (y^5 - 1.2y^3 + 0.3y),$$

$$\Delta W = 0.36\lambda (y^3 - y).$$

约使中心点亮度由 0.8 降到 0.72.

对于更高级的象差作出类似上述方法的判断, 显然并不困难.

这就是由 Rayleigh 判断决定最佳校正方案的概况和结果。由这些结果可以看出,两种判断并不完全相同,当象差越高级时其差别越大。但是二者间的差别也不能认为是很显著的,一般说来,波差最大值小于  $\frac{\lambda}{4}$  时,  $S$  值在 0.8 到 0.7 之间。

前已说过,用  $S$  值作混合象差判断是不方便的,而用  $\frac{\lambda}{4}$  判断是很容易的,因为

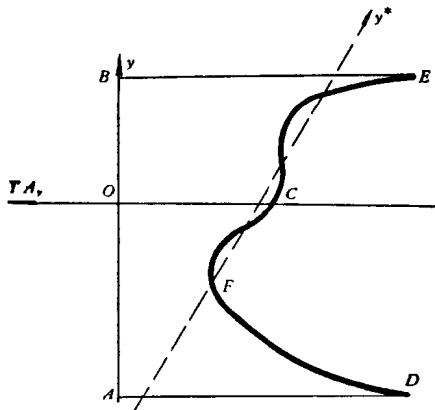


图 11.24

它只需由算出的象差曲线作直观判定即可。其原则可归结为:使象差曲线和轴有尽可能多的交点,并使截出的各块面积两两相等。对于象差曲线已定而选择最佳离焦的问题按此原则可以解决如下。图 11.24 是一个算出的象差曲线,假若直接积分时波差就是面积  $AOBECD$ 。但我们知道,垂轴离焦就相当于  $y$  轴平移,例如可以  $C$  点为原点;而轴向离焦则相当于  $Oy$  轴倾斜。因之作两种离焦后就可将任一直线作为  $y$  轴。如此选出  $y^*$

(图 11.24 中的虚线)轴使大部分面积最小,它所代表的轴向和垂轴离焦量就是最佳焦点。此时的波面绝大部分波差不大,只  $FD$  段还有很大的波象差。因之可判断说:若欲使象差校正得更好就应该设法找到一个适当的因素,使  $D$  光线附近的光束发生大变动,使之与  $y^*$  轴相接近。凡是能导向这种变化的象差均可使校正状况改善。当然这种考察仅限于波面的子午截线,当考虑波面整体时,单有  $T.A.$  曲线是不够的。此外当考虑到象面不单是包含一个视场角时,尚须考虑到这种轴向离焦是否使其他视场的象差曲线同时变好。

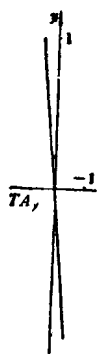
## § 2.5 象差最佳校正方案的几何特征和公差的几何值

由表 4 所列的最佳校正方案作微分就可以得出几何象差的函数形式,将它们都用图形表示出来就可得出形象化的概念来,这种结果表示如图 11.25。

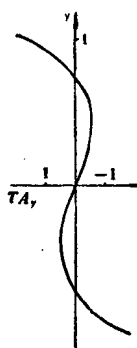
当多种象差相组合时,上节已提出一个基本原则:象差曲线应和坐标轴有尽可能多的交点,而且截出各小块面积相等,这种概念对单种象差的情形都已得到了证实,这就是考虑象差校正方案时重要的、充分而又必要的几何特征。

图中的轴向和垂轴几何象差是分别用所谓焦深和焦宽作单位的,这是两个重要的概念。它们分别是理想波面的参考点作轴向离焦以致产生波差  $\frac{\lambda}{2}$  所需的离焦量

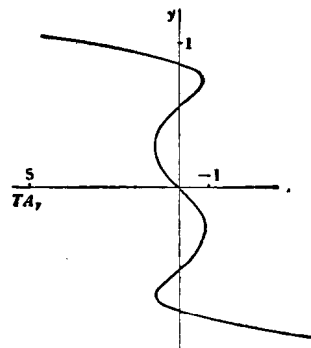




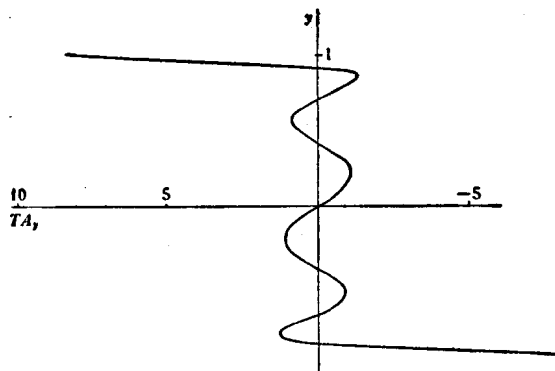
轴向球差  $TA_y = 0.48y$



初级球差  $TA_y = 1.9(2y^3 - y)$

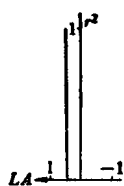


二级球差  $TA_y = 7.6(3y^5 - 3y^3 + \frac{3}{5}y)$

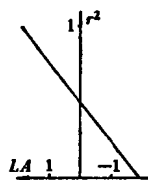


三级球差  $TA_y = 27.2(4y^7 - 6y^5 + \frac{18}{7}y^3 - \frac{2}{7}y)$

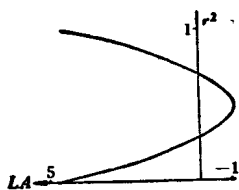
图 11.25(a)



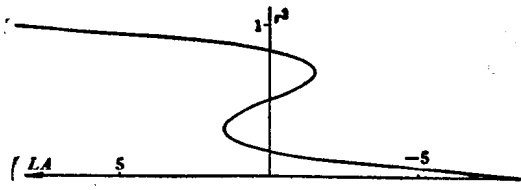
离焦  $LA = 0.48$



初级球差  $LA = 1.9(2r^2 - 1)$



二级球差  $LA = 7.6(3r^4 - 3r^2 + \frac{3}{5})$



三级球差  $LA = 29.2(4r^6 - 6r^4 + \frac{18}{7}r^2 - \frac{2}{7})$

图 11.25(b)

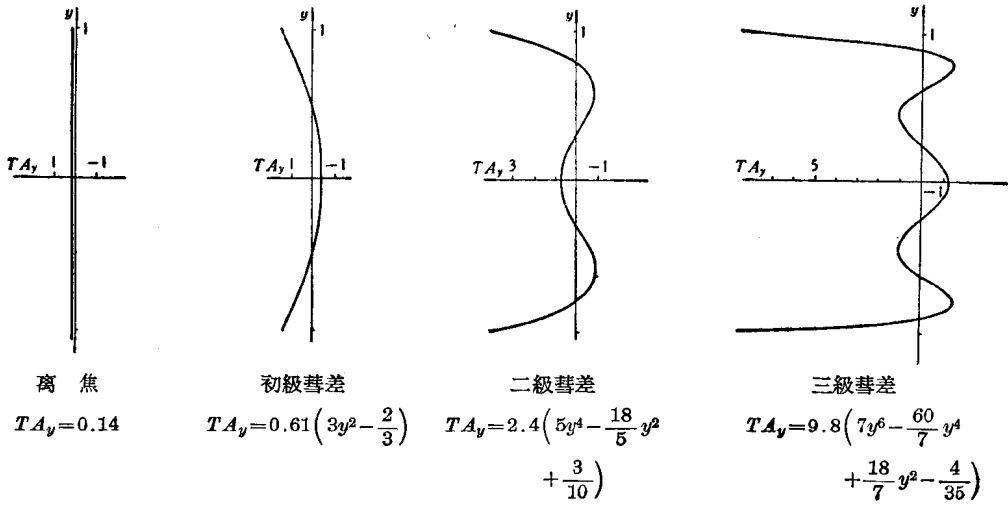


图 11.25 (c)

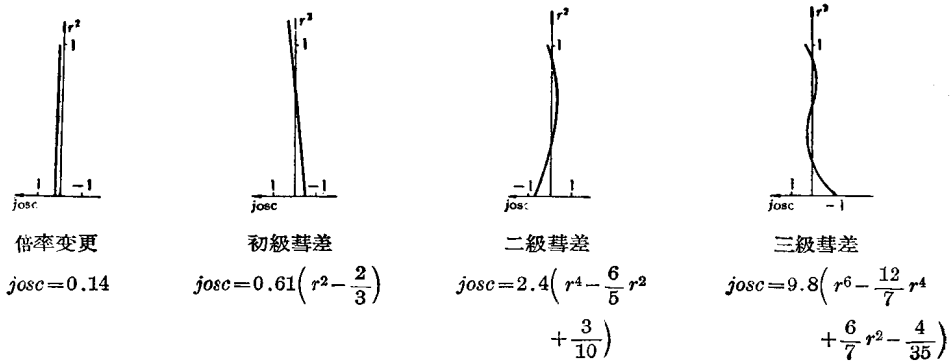


图 11.25 (d)

(由  $\frac{\lambda}{4}$  至  $-\frac{\lambda}{4}$ ) 和垂轴离焦产生  $2\lambda$  的离焦量:

$$\left. \begin{aligned} \text{焦深 } FR &= \frac{\lambda}{n'u'^2}, \\ \text{焦宽 } FS &= \frac{\lambda}{n'u'}, \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

式中  $u'$  是象空间的孔径角。

图中除垂轴彗差外还有“轴向彗差”即正弦差的曲线(与轴向和垂轴球差比较)。可以注意,一般设计的校正结果常不满足这里所提出的最佳校正要求,这似乎是由于不了解应有的最佳校正状况之故。

了解了几何象差的曲线形式及其数量(以焦深和焦宽为单位),我们作出光线光路计算并画出象差曲线后,再估算一下此时的焦深和焦宽的大小就可以对结果的优劣——是否超过公差,象差平衡情况的缺点,应在那方面改进等得出结论。

### § 2.6 衍射图形的特征及质量判断;分辨能力

在上面两小节中我们用很多篇幅仔细讨论了衍射图形的一个特征:中心点亮度,并由此导出对小象差的公差和象差影响的判断。但是衍射图形显然不能由中心点亮度完全确定。而衍射图形形式又总是很复杂的,究竟应该用些什么特征来标定图形呢?应该在衍射图形中找出一、二特征,它们最好一方面和设计制造光学系统的参数,例如象差,有密切关联;另一方面和使用光学系统时对光学系统提出的要求又有密切关联。只有有了这种可靠的特征后才能对复杂的衍射图案作相互比较,对光学系统的质量评定优劣。中心点亮度  $S$  可作为特征之一,它大致确定了能量分散的程度,并且在象差不大时又和象差有密切关联。它的缺点是不容易作实际测定,因此为对实际制出的光学系统作判断:“ $S$  不低于若干”就有困难。

在实用上常对光学系统提出所谓分辨能力的要求,即要求光学系统帮助我们观察细微结构或记录下更多情节,于是就要求光学系统能够区分物面或象面上距离很近的两点。由于衍射的结果,一点所成出的理想象也不是一点,而是 § 2.1 所计算过的复杂结构,在高斯象面上形成熟知的 Airy 盘。由此即可肯定分辨能力的数量级和 Airy 盘半径相同。Rayleigh 就直截了当地规定:能分辨的两点间距等于 Airy 盘半径。如一般所知,这个规定的含义与规定光能接收器(如眼或照相底板)能分辨的高度差别为 1:0.75 相当。如图 11.26 所示,按已知的 Airy 盘亮度分布函数作出两个盘的中心和边缘相迭时的亮度分布,此时中心凹下处的亮度为最亮处的 75%。

既然实际的光能接收器区分亮度差别的能力有好有坏(例如眼在照度良好且边界线清楚时可达 1:0.95),而且它们常随照明情况而有很大的变化,实际得出的分辨能力不会和 Rayleigh 的规定完全相符。另一方面,图 11.26 中假定两点是亮度相同的“点”,而实际的对象不会是“点”,而且两点也很少会具有相同的亮度,由于“点”内部的结构形式不同就可使衍射图 Airy 盘有微细的千变万化的差别。再者,图 11.26 中假定除两点外是没有背景亮度的,实际情况不会如此。当背景有某一定亮度时,分

辨能力也将随之而变。总之,实际作分辨能力测定时,对同样一个光学系统会得出不同的结果,分辨能力是一个不很确定的量。

在作出图 11.26 时还作了一个假定,这就是假定两点的衍射图形作亮度迭加即得两点同时存在时的衍射图形。这也就是假定两发光点的位相互不相关,亦即是相互独立的。当两发光点具有等位相时,为了得出衍射图形应将振幅迭加,此时得到的结果如图 11.27;当两点间隔增大为图 11.26 的 1.5 倍时,结果如图 11.28;当两点位相差  $\pi$  时振幅相减,结果如图 11.29。由此可见分辨能力还因照明的物理性质相干或不相干而有很大的变动,而实际遇到的是照明并不完全相干也非完全相互独立的情况,即所谓部分相干。这个问题在显微镜成象理论中是重要的<sup>[3]</sup>。

虽然实际的分辨能力具有如此不确定的性质,但是光学系统本身在这个问题上所起的作用还是一定的。我们可用 Rayleigh 对分辨能力的规定作为判断的依据。

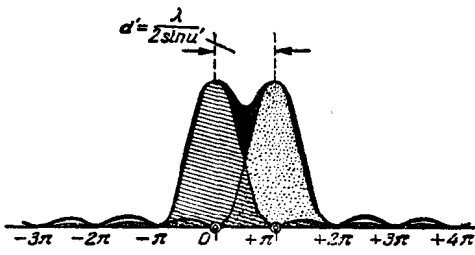


图 11.26

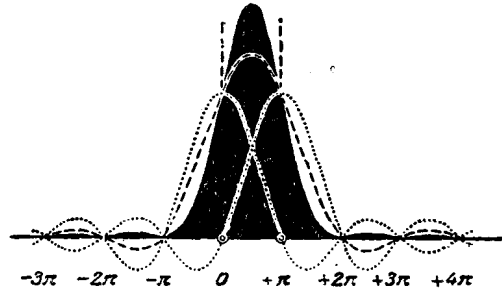


图 11.27



图 11.28

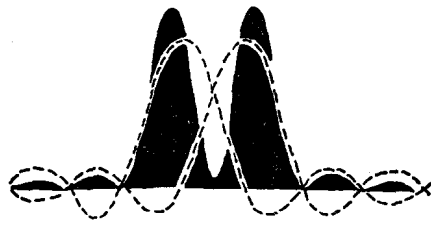


图 11.29

为使用方便,将 Airy 盘半径和光学系统特征的关联列在下面:由公式 (36a) 和公式 (69),当  $p=2\pi$  时,轴向离焦量  $4\bar{\xi}$  恰等于焦深,而  $q=2\pi$  时,垂轴移动量  $4\bar{\rho}$  恰等于焦宽。故由图 11.5 可见 Airy 盘半径(即分辨能力)等于焦宽的 0.6 倍,即:

$$\delta' = 0.6\lambda/u'. \quad (70)$$

由衍射积分(27)式的条件,波面对象点的张角之半  $u'$  是小量。为得出大孔径角时的分辨能力,可设  $u' = \sin U'$  是象空间的量,此光学系统满足正弦条件(这是为成清晰

象所必须的), 则由

$$\delta n \sin U = \delta' n' \sin U', \quad n' = 1, \quad (70a)$$

即得大孔径角的物空间分辨能力:

$$\delta = \frac{0.6\lambda}{n \sin U}. \quad (70b)$$

因  $\sin U < 1$ , 故光学系统能分辨的细节线度大于  $\frac{1}{2}$  波长. 此处波长是指物体所在媒质内的波长, 故物体处在高折射率媒质中或采用短波作为成象光线时能得到高分辨能力. 采用可见光时  $\lambda = 0.5\mu$  在  $n = 1.5$  的媒质里,  $\delta > 0.2\mu$ .

当光学系统不属大孔径系统时, 可按 Lagrange 不变量将 (70) 式中的量作变换, 即如图 11.30, 有

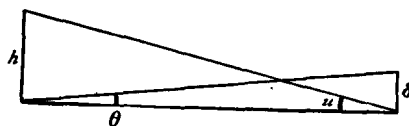


图 11.30

$$0.6\lambda_0 = n'u'\delta' = nu\delta = nh\theta = n'h'\theta'. \quad (71)$$

式中  $\theta$  为能分辨的物体对光瞳中心的张角,  $h$  为光瞳半径.

将角用秒表示而  $h$  用毫米表示, 且  $n = 1$ , 波长为 0.000555 毫米, 则由 (71) 式得:

$$\theta = \frac{140}{2h}, \quad (71a)$$

即光瞳直径为 140 毫米时能分辨的角值约为 1 秒.

虽然分辨能力和使用要求间常有较密切的联系, 但是它和象差的关联却并不密切. 从图 11.7 就可以看出这点. 当离焦产生波差  $\frac{\lambda}{4}$  ( $p = \pi$  相当于  $\frac{1}{2}$  焦深) 时, 以轮廓线 0.05 为准, 焦斑直径并无显著变化 (虽然  $S$  已降为 0.9); 当离焦  $\frac{1}{2}\lambda$  时,  $S$  降为 0.4, 焦斑直径以 0.05 线为准时增大一些; 但以 0.1 线为准时, 虽然  $S$  大降但中心斑直径反稍缩小, 亦即分辨能力略高. 由于实测分辨能力的复杂性, 这种变化并不能显著觉察.

当有其他象差时, 情况也类似. 另外, 当通光孔为环形时, 中心斑直径也略为缩小.

由此可见, 象差的主要影响在于能量分散 ( $S$  缩小) 而不是分辨能力. 光学系统的分辨能力只可看作是通光孔直径  $2h$  或孔径角  $u$  的标志, 而不能用它来作为成象质量的指标.

关于分辨能力 (亦即衍射盘第一暗环直径) 主要由通光孔径决定这一事实, 可以用下述简单考虑想见. 设射出光学系统的波面是接近以  $O$  为中心的球面  $AA_1$ , 如图

11.31a 所示. 由波面两端到  $O$  点的光程  $OA_1$  和  $OA$  相等, 而与  $O$  相近的  $O_1$  点到此波面二端的光程则一定不相等. 当光程之差接近  $\lambda$  时, 按 Huygens 原理, 波面上各带的效应恰可一一相消 ( $O_1C$  和  $O_1A$  差  $\frac{\lambda}{2}$ ), 此时  $O$  点变为黑的, 故移离  $O$  点以致产生程差  $\lambda$  时之离焦值即衍射盘的暗环半径. 离焦产生的程差近似值就是  $2h \sin \theta$ , 光栏对象点所张的孔径角  $2u'$  越小则此式越准确, 当物体在无限远时它就是完全准确的了, 如图 11.31b 所示.  $\theta$  一般很小, 因之就得到分辨角  $\theta$  和  $h$  的关系:

$$2h\theta = \lambda \quad \text{或} \quad h\theta = 0.5\lambda, \quad (72)$$

和(71)式的差别仅 0.5 和 0.6 之差.

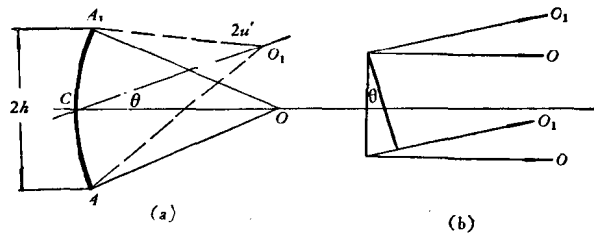


图 11.31

由此可见, Rayleigh 规定的分辨能力不能很好地反映光学系统的质量.

### § 3 光学传递函数方法

为描述光学系统的质量特征, 上节使用的工具是一发光点在象空间的能量分布函数. 但是用这种方法来研究某些问题是很不方便的. 例如为研究象差对分辨能力的影响, 除了可以作定性的直观判断外为求出各种象差的影响时须作麻烦的积分 (§ 2.2). 再例如为得出物空间一定形状的物体成出的象的形状, 就须作更麻烦的计算. 后一问题实是质量评价的中心问题, 光学系统对于各种对象是否合用就决定于此, 假使这点解决了, 那么对光学系统是否满足使用要求的问题就可以作出肯定的答复. 上节的处理方法之本质就在于将复杂物体分解为一个个点, 由每个点的表现再作积分就可以求出物体被光学系统成出的象. 由于单个点所形成的能量分布已经够复杂的了, 不要说用显函数表示出来是不现实的, 就是用图来表示都很困难. 因之很难再用积分以求物体形成的象的形状.

但是将物体结构分解为点只是分解方法的一种, 另一种常用的分解方法是将物体结构分解为各种频率的谱, 也就是将亮度分布函数变换为富利叶积分. 于是光学系统的特性就表现为它对各种物体结构频率(亮度相对于空间坐标的起伏频率)的反

应——透过特性,即对比变化和位相推移.仿效电讯系统,称这种透过特性为反应函数.1961年国际光学会为统一这方面所用过的名词,决定称之为光学传递函数(Optical transfer function),我们将与反应函数(response function)这名词同用.

用反应函数方法来讨论光学系统的特性有几种不同的起源,可认为起源之一是以分辨能力的观念检验光学系统.由于象差很大时,分辨能力降低,于是企图以分辨能力作为质量指标.为了这种目的使用了间隔逐渐变化的各种检验卡,例如如图 11.32 所示.按照我们上面所用的术语它们就是各种单一频率结构的物体,而检验工作就是观察光学系统对它们的反应.这种工作虽然开始得很早但走得不远,通常所检验的不过是光学系统的截止频率(当然,由 § 2.6 截止频率是随接收器的对比分辨情况而变的),而不考虑透过各种频率的透过特征——对比变化.虽也用对比较差的检验卡(低对比检验卡),但并不推究它的截止频率变化之内在含义.

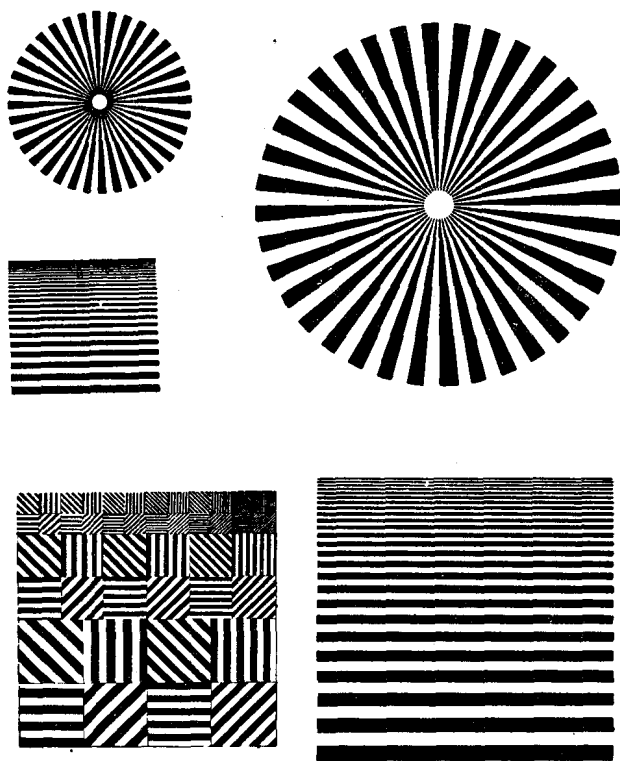


图 11.32

早在 1939 年左右就在检验照相物镜时发现了所谓“超分辨”现象,即光学系统对某个频率不能分辨但对频率更高的检验卡又能分辨,一个实际摄出的照片如图 11.33. 这种现象实际上并不少见,只是以前不注意罢了.例如当我们观看图 11.32

时,故意使眼睛不对焦在书面上,就会感到形如图 11.33 的超分辨现象。超分辨现象使分辨能力即截止频率失去其确定性。这种情况就推动了对“分辨”这个概念作更深入的研究。

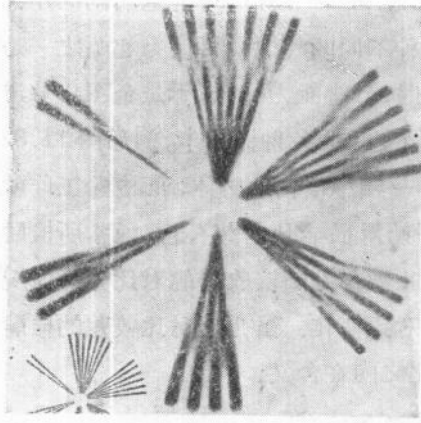


图 11.33

由于我們研究的是一点邻近的小区域内的分辨能力,故即使光学系統有很大的畸变,在此小范围内的倍率也不会有显著变化,因之观察到的檢驗卡的象和原物的差别将只是对比变化。考虑到不对称的象差将使亮点的象移离原有位置(由表 4,垂軸象差須以定量的垂軸离焦平衡才有最大亮度,亦即焦点作了定值移动才是最佳焦点),而这种定值移动的量对于各种频率的檢驗卡是不同的,这就意味着作不同的位相变化,因之在考虑一組檢驗卡时,光学系統的作用就可概括为:形状不变(严格地说形状不变的只是亮度作正弦起伏的檢驗卡,这点将在以后証明),对比变更,位相推移。

当我们测出了光学系統对各种频率的檢驗卡的对比变化和位相推移后,按照富利叶分析的观点,就可以清晰地了解它对任意物体的成象情况——各种频率的结构作怎样的传递。为研究电视过程的成象, O. H. Schade 在这方面作了很多工作<sup>[16]</sup>。

由于与电信系統中频谱分析方法的类比,尤其由于信息論的发展和在电讯系統中获得的巨大成果的推动,光学系統成象理論和质量评价的方法有了不小的进步,澄清了不少以往不够清楚的問題。

按照信息論的观点,传递信息的通道的特性,除了要以能量观点加以考虑外,还須从另一个更重要的方面,即信息量的观点加以考虑。C. E. Shannon 对信息量建立了数量量度的概念和方法,并統一地用信息量传递能力来考察信息传递系統的所有环节,即发射系統、发射方法、通道、接收系統和儲存系統等<sup>[13]</sup>。Shannon 的一般数学理論虽是针对电讯系統作出的,但对所有信息传递系統都具有普遍意义。它很快就为各方面所接受并运用于很多科学領域<sup>[14]</sup>。

按照信息論的观点来看,光学仪器的各个环节中很多是和电讯仪器完全相当的。仪器中光学系統的作用就和电讯传递通道相当,它的作用就在于将物空間的信息傳送到象空間。因此,光学系統的优劣决定于它能传递的信息量的多少,当然光学信息传递問題和一般电讯系統有所区别,例如电讯系統中很重要的編碼譯碼問題在光学

按照信息論的观点来看,光学仪器的各个环节中很多是和电讯仪器完全相当的。仪器中光学系統的作用就和电讯传递通道相当,它的作用就在于将物空間的信息傳送到象空間。因此,光学系統的优劣决定于它能传递的信息量的多少,当然光学信息传递問題和一般电讯系統有所区别,例如电讯系統中很重要的編碼譯碼問題在光学



系统中的作用至今还很小，这是由于光学观察的对象常是客观的物体而不是人为的信号系列之故。

早在 1946 年，P. M. Duffieux 已将富利叶积分运用于解决光学问题<sup>[15]</sup>，经过十多年来的发展，富利叶方法已成为考虑光学问题的重要方法之一。

电讯系统处理的信号是随时间而作强弱变更的信号。为描述传送系统的性能常采用脉冲信号经传送后的形状(能量随时间而变的函数形式)来表征，也采用所谓频率透过特性或反应函数，亦即上述函数的富利叶变换。类似地，光学系统传送空间信号时，它的传送特性不单可用点光源形成的能量空间分布函数描述，也可以用这个函数的富利叶变换来描述。这种考虑可看作是反应函数方法的更重要的起源。信息论描写信号传送情况的方法已在光学中起了很大作用，信息论的另一重要方面——统计理论则尚未起重要影响，再由于篇幅关系，有关统计理论的部分本书不加详述，仅在 § 3.3 中介绍一个重要结果。这个结果对实际判断是重要的，例如对下一章的讨论就是如此。

### § 3.1 反应函数和分辨能力

下面所用到的富利叶积分的一般性质可参看专著(例如 Sneddon, I. N., 富利叶变换, 科学出版社, 1958)。我们将用同一个字母的大写和小写分别表示函数及其富利叶变换, 即

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{-i\xi x} d\xi, \\ F(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx, \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

点光源形成的亮度分布函数  $I$  的富利叶变换即反应函数, 以  $R$  表示。

在本节中, 为公式表示的方便, 将象面坐标  $(\bar{\eta}, \bar{\zeta})$  作下列规化 [即 (28) 式或 (36a) 式, 但将  $q_1$  和  $q_2$  写作  $\eta, \zeta$ ]

$$\left. \begin{aligned} \eta &= knu_1 \bar{\eta}, & y &= \frac{\bar{y}}{y_0}, \\ \zeta &= knu_2 \bar{\zeta}, & z &= \frac{\bar{z}}{z_0}. \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

式中  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $\lambda$  是真空中波长,  $n$  是折射率,  $u$  是由物点发出的近轴光线孔径角, 故 (74) 式中  $\eta, \zeta$  在物空间或任一象空间均具同一数值。设物面坐标为  $(\eta_0, \zeta_0)$  面积  $d\eta_0 d\zeta_0$  且总能量为  $2\pi$  的光源在象面上形成的能量分布是  $I(\eta - \eta_0, \zeta - \zeta_0)$ 。设物面

上能量分布函数为  $B(\eta_0, \zeta_0)$ , 并且各点所发的光是不相干的, 則象面上能量分布  $B'(\eta, \zeta)$  与  $I, B$  有下列关系:

$$B'(\eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\eta_0, \zeta_0) I(\eta - \eta_0, \zeta - \zeta_0) d\eta_0 d\zeta_0. \quad (75)$$

由 (75) 式及由 Parseval 定理, 函数的富利叶变换間有下列关系:

$$b'(s, t) = R(s, t) b(s, t). \quad (76)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} R(s, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(\eta, \zeta) e^{-i(\eta s + \zeta t)} d\eta d\zeta, \\ b(s, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(\eta, \zeta) e^{-i(\eta s + \zeta t)} d\eta d\zeta, \\ b'(s, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B'(\eta, \zeta) e^{-i(\eta s + \zeta t)} d\eta d\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (76a)$$

称  $b(s, t)$  是分布函数  $B(\eta, \zeta)$  中頻率  $(s, t)$  的譜. (76) 式表示物面的頻譜和象面的頻譜間存在的关系, 亦即光学系統对頻率  $(s, t)$  的譜具有的傳送能力是  $R(s, t)$ . (例如  $R(s, t) = 0$  則此頻率的譜完全不能通过此系統.)  $R(s, t)$  常称为光学傳遞函数, 或反应函数.

反应函数与分辨能力之間有非常密切的关系, 現在就来导出这个关系. 为方便起見, 設物面亮度分布只和坐标  $\eta$  有关, 即  $B$  只是  $\eta$  的函数 (平行于  $\zeta$  軸的綫状结构) 此时上列所有二重积分都簡化为单重积分. 再令  $B$  是一个单周期結構, 即

$$B(\eta) = a + b e^{i\eta s_0}, \quad (77)$$

其中  $s_0$  为常数,  $B(\eta)$  分布如图 11.34a. 則其頻譜  $b(s)$  和象面頻譜  $b'(s)$  就分別是:

$$\left. \begin{aligned} b(s) &= 2\pi a \delta(s) + 2\pi b \delta(s - s_0), \\ b'(s) &= 2\pi a R(s) \delta(s) + 2\pi b R(s) \delta(s - s_0), \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

其中  $\delta(s)$  是 Dirac  $\delta$  函数. 因此, 它在象面上形成的能量分布就是:

$$B'(\eta) = a R(0) + b R(s_0) e^{i\eta s_0}, \quad (79)$$

$B'(\eta)$  分布如图 11.34b. 由 (76a) 式,  $R(0, 0)$  也就是总能量, 当光学系統无吸收时,  $R(0, 0) = 1$  (物点发出的总能量为  $2\pi$ ). 当有吸收时我們亦規化  $R(s, t)$  使  $R(0, 0)$  仍等于 1, 再将  $R(s_0)$  写作  $|R(s_0)| e^{i\varphi_0}$  則 (79) 式可写作:

$$B'(\eta) = a + b |R(s_0)| e^{i(\eta s_0 + \varphi_0)}. \quad (79a)$$

(79a) 式表明, 若物体的能量分布是正弦式单周期分布, 則象仍然是正弦式单周期分布, 但其黑白对比由

$$c = \frac{a-b}{a+b}, \quad (80)$$

变为  $c'$ ,

$$c' = \frac{a-b}{a+b} \frac{|R(s_0)|}{|R(s_0)|}, \quad (81)$$

且位相发生推移, 如图 11.34b 所示.

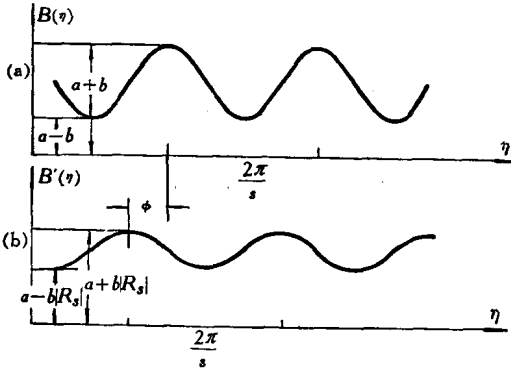


图 11.34

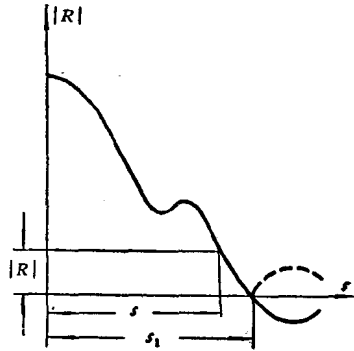


图 11.35

$s_0$  是单周期结构的频率, 光学系统对此频率结构的反应  $R(s_0)$  决定了它的对比变化和位相推移. 由于  $|e^{i(ns+ct)}| \leq 1$ , 故

$$|R(s, t)| \leq R(0, 0) = 1, \quad (82)$$

亦即 (81) 式中的  $c'$  恒大于  $c$ . 因此, 光学系统总使象的黑白对比比原物差,  $R(s, t)$  愈小则对比越差. 若接收器能够分辨的对比为  $c'$  则由 (81) 式就可以确定光学系统应具有传递能力  $|R(s_0)|$

$$|R(s_0)| = \frac{a-ac'}{bc'+b} = \frac{a}{b} \frac{1-c'}{1+c'} = \frac{1+c}{1-c} \frac{1-c'}{1+c'} \quad (83)$$

假使光学系统的反应函数  $R$  是已知的, 则可由 (83) 所确定的  $|R|$  值确定截止频率  $s_0$ . 图 11.35 表示已知  $|R| \sim s$  的曲线形式后由  $|R|$  确定  $s$  的情况. 由此可见对于一定的物体对比  $c$  和接收器能感受的对比  $c'$  而言, 反应函数确定后截止频率 (极限分辨能力) 也就确定了. 不但如此, (83) 式还确定了物体对比变化或接收器分辨对比的能力变化时, 对于分辨能力的影响.

由此可见, 可以用几种方法测定光学系统的反应函数绝对值: 1. 对于具有确定对比  $c$  的各种频率  $s$  的物体测定其象的对比  $c'$ , 由 (83) 即可算出此频率的  $|R(s)|$ ; 2. 在象的对比 (接收器能分辨的最大  $c'$  值) 已定的条件下, 对于一种物体对比测定极限频率  $s$ ; 变更对比, 测定极限频率  $s$  的变化; 此极限频率的  $|R(s)|$  仍可用 (83) 式算

出<sup>[17]</sup>.

从这些结果我们可以看出,反应函数比分辨能力具有更为广泛的意义.由反应函数可以完全确定分辨能力,而且确定观察条件变化后的分辨能力.另一方面,用变对比检验卡测量出分辨能力和对比的关系后就完整地确定了反应函数绝对值.

一般的能量分布函数是形如(77)式的函数之级数和( $\eta$ 只在有限范围内不等于零,此时可将函数展开为富利叶级数)或积分,而其各项所经受的变化则仍由(79)式描述.

反应函数的位相 $\varphi$ 确定了复杂物体的象与物体的相似性.位相推移将使物象不相似,例如 $\varphi = \pi$ 时 $R$ 即为负实数,由(79)式可见,此时恰使象的黑白倒置,如图11.35中 $s > s_1$ 的那一部分曲线.当 $s = s_1$ 时因 $R = 0$ ,故 $c' = 1$ ,即接收器不能分辨这个频率.但当 $s > s_1$ 时 $R \neq 0$ , $c' < 1$ ,此时又将能分辨,但是此时黑白是倒置的.这就是图11.33中看到的所谓超分辨的特征,由于这种“分辨”一般不反映原物,故称之为伪分辨更恰当些.

### § 3.2 反应函数和中心点亮度<sup>[18]</sup>

设物体是点光源,亦即物面的能量分布函数为 $\delta$ 函数:

$$B(\eta_0, \zeta_0) = \delta(\eta_0, \zeta_0), \quad (84)$$

则其谱为:

$$b(s, t) = \frac{1}{2\pi} e^{-i(\eta_0 s + \zeta_0 t)},$$

因之

$$b'(s, t) = \frac{1}{2\pi} R(s, t) e^{-i(\eta_0 s + \zeta_0 t)},$$

$$B'(\eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(s, t) e^{i[s(\eta - \eta_0) + t(\zeta - \zeta_0)]} ds dt, \quad (84a)$$

故

$$S = B'(\eta_0, \zeta_0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(s, t) ds dt, \quad (85)$$

亦即点光源所成的象的中心点亮度 $S$ 值等于反应函数的积分;亦即图11.35中实曲线所围限的面积.前面我们已对中心点亮度作过仔细的讨论,(85)式则表示它和反应函数的联系.

### § 3.3 反应函数和能量集中度

若点光源(84)式的能量完全传递到象面上,则

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I'(\eta, \zeta) d\eta d\zeta = 1, \quad (86)$$

但象面亮度的平方积分则由能量分布状况而定。若能量越集中则平方积分越大。如图 11.36 所示, (a), (b) 表示两种能量分布状况, (a) 较集中 (b) 较分散, 但二者之总面积 (总能量) 相等。图 (c) 为 (a) 的平方, 图 (d) 为 (b) 的平方, 图中圈限的面积即为平方积分的大小, 这就说明了  $I'(\eta, \zeta)$  平方积分的大小可作为能量集中程度的量度, 当然能量越集中则光学系统的质量越高, 此平方积分以  $E$  表示, 则

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I'(\eta, \zeta) I''(\eta, \zeta) d\eta d\zeta, \quad (87)$$

由 Parseval 定理  $E$  可表示为:

$$E = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(s, t) R^*(s, t) ds dt. \quad (88)$$

与 (85) 式比较就可以看出二者的关系是密切的, (88) 式表示  $|R|^2$  曲线所圈限的面积也就是能量集中度。

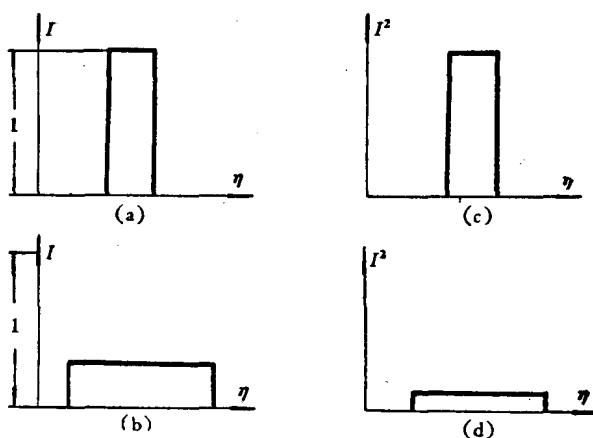


图 11.36

运用 Shannon 的信息量规定, P. B. Fellgett 和 E. H. Linfoot 证明: 光学通道所传送的信息量随此通道的能量集中度增大而增大<sup>[19]</sup>, 证明的要点如下: 在一定条件下 Shannon 的信息量在具噪音的信息通道中可表示为<sup>[13]</sup>:

$$\log \sqrt{1 + \frac{S^2}{N^2}}, \quad (89)$$

其中  $S^2$  是信号的方差, 即信号的统计平方平均值和信号的统计平均值平方之差,  $N^2$  是噪音的方差, 因其平均值为零, 故即噪音强度。利用这个表示以及前述反应函数的表示方法 (参看格涅坚科: 概率论教程, 高等教育出版社) 可知信号的方差即能量集中度。

光学系统中的噪音可由种种因素引起,如光源的亮度起伏,媒质的运动(如大气气流),接收器的灵敏度起伏和电噪音,以及光子流本身的量子起伏等。

#### §4 光学系统的反应函数

前面几节我们已对能量分布函数的富利叶变换即光学传递函数的意义作了多方面的阐述。由这些讨论可以看出,光学传递函数比能量分布函数更密切联系使用要求而且易于测定。在§2中我们看到能量分布函数与光学系统的象差间有很复杂的关系,我们希望光学传递函数和象差有比较简单的联系,实际上这一点是真实的。下面就来研究光学系统的反应函数与光学系统的哪些特性有关。

既然反应函数是能量分布函数的富利叶变换,而能量分布函数则又是振幅分布函数(23)式或(47)式的平方。我们就可以首先求出振幅分布函数的富利叶变换,然后由 Parseval 定理即得反应函数。

将积分(48)式的常数因子略去即得:

$$\psi(\eta, \zeta) = \iint_{\text{光孔}} T(y, z) e^{-ik\pi} e^{i(\eta y + \zeta z)} dy dz, \quad (90)$$

其中  $T(y, z)$  为透过率。因此当我们定义光栏函数  $f(y, z)$  为:

$$\left. \begin{aligned} f(y, z) &= T(y, z) e^{-ik\pi}, & \text{当 } (y, z) \text{ 点在光孔内;} \\ f(y, z) &= 0, & \text{当 } (y, z) \text{ 点不在光孔内.} \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

则(90)式就表示振幅分布  $\psi(\eta, \zeta)$  的富利叶变换即为光栏函数  $f(y, z)$ 。按(48)式,  $\eta, \zeta$  是象面坐标乘以  $\frac{2\pi}{\lambda} u_0$  后的规化值;而  $y, z$  是光栏坐标除以  $y_0$  后的规化值。因此,由 Parseval 定理,  $I(\eta, \zeta) = |\psi(\eta, \zeta)|^2$  的富利叶变换  $R(s, t)$  即为:

$$R(s, t) = \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y, z) \cdot f^*(y-s, z-t) dy dz, \quad (92)$$

$$= \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(y + \frac{s}{2}, z + \frac{t}{2}\right) f^*\left(y - \frac{s}{2}, z - \frac{t}{2}\right) dy dz. \quad (93)$$

在表示式(90)–(93)中我们未考虑规化条件,即波面总能量等于  $2\pi$ ,但为此目的只须确定(92)式中常数  $A$  以使  $R(0, 0)$  等于1即可。由(91), (92)式可知,为使  $R(0, 0)$  等于1,则  $A$  应为通光孔的有效面积。注意坐标  $y, z$  是已按(74)式规化的,故如通光孔为圆形时,则  $A = \pi$ 。

当点  $\left(y + \frac{s}{2}, z + \frac{t}{2}\right)$  或  $\left(y - \frac{s}{2}, z - \frac{t}{2}\right)$  不在通光孔内时积分核就等于零[由(91)式],以  $A_{st}$  表示  $s, t$  为某一定值时的积分域,此域内的坐标点均不超出通光孔,显然

面积  $A_{st} < A$ , 用了积分域  $A_{st}$  后可将 (93) 式写作:

$$R(s, t) = \frac{1}{A} \iint_{A_{st}} e^{-ik[W(y+\frac{s}{2}, z+\frac{t}{2}) - W(y-\frac{s}{2}, z-\frac{t}{2})]} dy dz, \quad (94)$$

故  $R(s, t)$  之最大值是  $W=0$  时的值, 此时

$$R(s, t) = \frac{A_{st}}{A} < 1. \quad (95)$$

$A_{st}$  实是通光孔作  $\pm \frac{s}{2}$ ,  $\pm \frac{t}{2}$  的位移后的重迭部分. 当  $s, t$  不大或者  $W$  的高次导数很小(高级象差不大)时, 可将 (94) 式中积分核的幂在  $(y, z)$  点邻近作 Taylor 展开并略去所有高于三次的项, 此时即得:

$$R(s, t) = \frac{1}{A} \iint_{A_{st}} e^{-ik(s\frac{\partial w}{\partial y} + t\frac{\partial w}{\partial z})} dy dz, \quad (96)$$

这个近似结果是 H. H. Hopkins 首先得到的<sup>[20, 21]</sup>.

由这个展开我们得到了一个很有意义的概念, 即函数

$$W_{st}(y, z) = W\left(y + \frac{s}{2}, z + \frac{t}{2}\right) - W\left(y - \frac{s}{2}, z - \frac{t}{2}\right) \quad (97)$$

之值不但因象差变小而变小, 也因  $s, t$  变小而变小. 其近似值是频率矢量  $(s, t)$  和几何象差矢量  $\left(\frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}\right)$  之标积, 二矢量中的任一个减小均可使幂  $W_{st}(y, z)$  变小, 当在积分域内有

$$|W_{st}(y, z)| < \frac{1}{k} \quad (98)$$

时, 可将 (94) 式展开, 就如我们在 § 2.3 中作 Strehl 判断而将衍射积分展开一样. 为此首先定义  $W_{st}$  (即  $W_{st}(y, z)$  的简写) 的平均值  $\bar{W}_{st}$  及平方平均值  $\bar{W}_{st}^2$ :

$$\left. \begin{aligned} \bar{W}_{st} &= \frac{1}{A_{st}} \iint_{A_{st}} W_{st}(y, z) dy dz, \\ \bar{W}_{st}^2 &= \frac{1}{A_{st}} \iint_{A_{st}} W_{st}^2(y, z) dy dz, \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

则 (94) 式可写作:

$$R(s, t) = \frac{e^{-ik\bar{W}_{st}}}{A} \iint_{A_{st}} e^{ik(\bar{W}_{st} - W_{st})} dy dz. \quad (100)$$

此时只须

$$|W_{st}(y, z) - \bar{W}_{st}| < \frac{1}{k} \quad (101)$$

就可将幂函数展开并略去高于二次的项, 于是得:

$$R(s, t) = \frac{A_{st}}{A} e^{ik\bar{w}_{st}} \left[ 1 - \frac{k^2}{2} D(s, t) \right], \quad (102)$$

式中  $D(s, t)$  为波象差  $W_{st}(y, z)$  的方差, 即

$$\begin{aligned} D(st) &= \frac{1}{A_{st}} \iint_{A_{st}} (W_{st} - \bar{W}_{st})^2 dy dz, \\ &= \overline{W_{st}^2} - \bar{W}_{st}^2. \end{aligned} \quad (103)$$

(102)式表示, 当  $(s, t)$  或  $(W_y, W_z)$  较小时,  $R(s, t)$  和理想情况的差别可表现为两个方面, 即由  $W_{st}$  之平均值  $\bar{W}_{st}$  使位相推移, 再由  $W_{st}$  的方差  $D(s, t)$  而使绝对值变小.

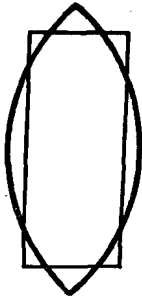


图 11.37

$W_{st}$  的平均值及方差当然是随积分域  $A_{st}$  而变化的, 而积分域的形状一般又很为复杂, 这就使求平均值及方差变得困难. 由于  $W_{st}$  常表示为  $y, z$  的幂级数, 故当积分域是平行于  $y, z$  轴的长方形时, 积分就很容易作出. 为计算方便, 将形式复杂的积分域  $A_{st}$  代换为相近的长方域或多角形 (使平均值和方差不致有多大变化), 这就可以使计算大为简化, 如图 11.37 所示.

类似于表 1, 二级以下的象差以  $y, z$  为变数时可写作表 6, 以  $w_{nm}$  表示其各项系数,  $m$  是  $y$  的幂次,  $n$  是  $r$  的幂次减去  $m$  之值. 这种象差系数和表 2 中的全同. 表中各项形成的  $W_{st}(y, z)$  按 (97) 式就是下列各式之和:

$$\begin{aligned} &0; \\ &w_{01}s; \\ &2w_{20}(sy + tz); \\ &2w_{02}sy; \\ &2w_{21}(sy + tz)y + \frac{w_{21}}{2}s \left[ 2(y^2 + z^2) + \frac{1}{2}(s^2 + t^2) \right]; \\ &w_{03}s \left( 3y^2 + \frac{s^2}{4} \right); \\ &2w_{40}(sy + tz) \left[ 2(y^2 + z^2) + \frac{1}{2}(s^2 + t^2) \right]; \\ &2w_{22}(sy + tz) \left( y^2 + \frac{s^2}{4} \right) + w_{22}sy \left[ 2(y^2 + z^2) + \frac{1}{2}(s^2 + t^2) \right]; \\ &w_{41}y(sy + tz) \left[ 2(y^2 + z^2) + \frac{1}{2}(s^2 + t^2) \right] \\ &\quad + \frac{w_{41}}{2}s \left[ 2(y^2 + z^2)^2 + (s^2 + t^2)(y^2 + z^2) + 2(yz + st)^2 + \frac{1}{8}(s^2 + t^2)^2 \right]; \\ &2w_{60}(sy + tz) \left[ 3(y^2 + z^2)^2 + \frac{3}{2}(s^2 + t^2)(y^2 + z^2) + (sy + tz)^2 + \frac{3}{16}(s^2 + t^2)^2 \right]. \end{aligned} \quad (104)$$



表 6

$m+n$ $m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1		$y^2+z^2$		$(y^2+z^2)^2$		$(y^2+z^2)^3$		$(y^2+z^2)^4$
1		$y$		$y(y^2+z^2)$		$y(y^2+z^2)^2$		$y(y^2+z^2)^3$	
2			$y^2$		$y^2(y^2+z^2)$		$y^2(y^2+z^2)^2$		
3				$y^3$		$y^3(y^2+z^2)$			
4					$y^4$				

§ 4.1 理想光学系统的反应函数;通光孔形状的影响

对于理想光学系统而言,  $W=0$ , 故光栏函数  $f$  或等于 1 或等于 0, 视点在光栏内外而定. 由 (92) 式可知, 此时的反应函数  $R$  即为光孔和中心坐标位错  $(s, t)$  后的光孔共同部分的面积, 因之, 用一个面积计算就可算出任意形状光孔的理想情况的反应函数. 为此, 只须在两透明方格纸上画出同样的光孔并测量位错后的公共面积即可.

由此可见, 方孔或长方孔的反应函数最为简单. 如图 11.38a 位错  $(s, t)$  后的面积即为  $(2-s)(2-t)$ , 故

$$\left. \begin{aligned} R(s, t) &= \frac{(2-s)(2-t)}{4} = \left(1 - \frac{s}{2}\right)\left(1 - \frac{t}{2}\right) \quad \text{当 } s \leq 2 \text{ 且 } t \leq 2; \\ R(s, t) &= 0 \quad (s > 2 \text{ 或 } t > 2). \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

将  $R(s, 0)$  图示于图 11.38b, 即  $R$  是  $s$  的线性的单调下降函数. 当  $s=t$  时,  $R$  是  $s$  的二次函数, 也画在图 11.38b 中.

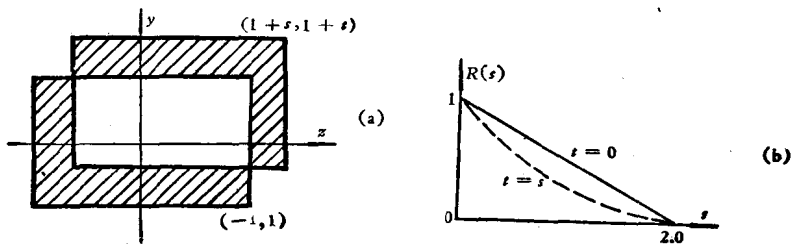


图 11.38

由于仅当  $s < 2$ ,  $t < 2$  时  $R$  才不等于零, 故无论接收器如何灵敏, 物体对比如何高 [如 (80) 式中  $c=0$ ], 不相干照明下的截止频率就是  $s=2$ ,  $t=2$ . 由图 11.34 可见, 此时最密的周期结构间距

$$\left. \begin{aligned} \Delta\eta &\geq \pi, \\ \Delta\xi &\geq \pi. \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

再由规范化条件 (74) 式将它们转换为实际长度:

$$\left. \begin{aligned} nu_y \Delta\bar{\eta} &\geq \frac{\lambda}{2}, \\ nu_x \Delta\bar{\xi} &\geq \frac{\lambda}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

这和 (71) 式的结果是一致的.

当光孔是圆孔时, 反应函数由  $\sqrt{(s^2+t^2)}$  决定, 此时仅考虑  $t=0$  的情况就够了. 由于孔是圆的, 面积随  $s$  增加而减少是非线性的如图 11.39a 所示, 但其基本趋势与方孔全同, 图 11.39b 中作出了此时的反应函数, 为与方孔比较图中用虚线画出方孔的反应函数, 可见二者差别不大. 因  $s < 2$ ,  $t < 2$  故截止频率仍可由 (107) 式表示, 但此时  $u_y = u_x$ .

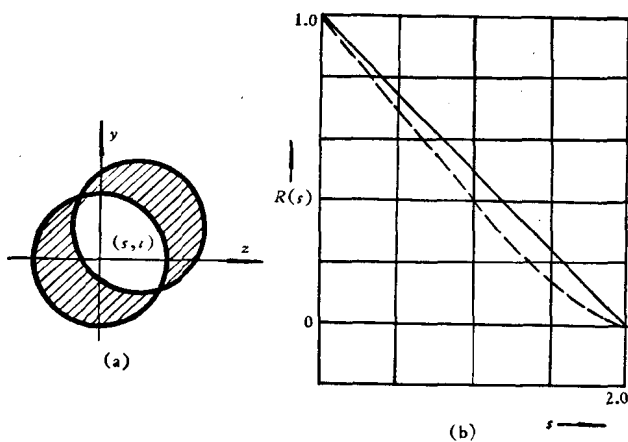


图 11.39

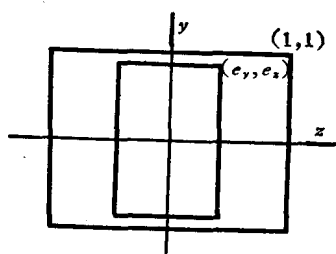


图 11.40

若通光孔是中心有长方形遮拦的长方孔, 如图 11.40, 此时一般的反应函数  $R(s, t)$  的表示式虽可纯由几何面积概念得出, 但已过于繁复, 下面只写出  $t=0$  时的反应函数  $R(s, 0)$ :

$$e_y > \frac{1}{3} \left\{ \begin{aligned} R(s, 0) &= \frac{(1-e_x)(2-s) + 2(1-e_y-s)e_x}{2(1-e_y e_x)}; & s < 1-e_y \\ &= 1 - \frac{1+e_x}{2(1-e_y e_x)} s \\ R(s, 0) &= \frac{(1-e_x)(2-s)}{2(1-e_y e_x)}; & 1-e_y \leq s < 2e_y \\ R(s, 0) &= \frac{(1-e_x)(2-s) + (s-2e_y)e_x}{2(1-e_y e_x)}; & 2e_y \leq s < 1+e_y \\ R(s, 0) &= 0; & 2 \leq s \end{aligned} \right.$$

式中符号  $e_x, e_y$  是中心遮光部分顶角处坐标, 如图 11.40, 也就是遮拦部分和原尺寸大小之比。

$$e_y \leq \frac{1}{3} \left\{ \begin{aligned} R(s, 0) &= \frac{(1-e_x)(2-s) + 2(1-e_y-s)e_x}{2(1-e_y e_x)}; & s < 2e_y \\ R(s, 0) &= \frac{(1-e_x)(2-s) + \{2(1-e_y-s) + (s-2e_y)\}e_x}{2(1-e_y e_x)}; & 2e_y \leq s < 1-e_y \\ &= \frac{(1-e_x)(2-s) + (2-4e_y-s)e_x}{2(1-e_y e_x)} \\ &= \frac{2-4e_y e_x - s}{2(1-e_y e_x)} \\ R(s, 0) &= \frac{(1-e_x)(2-s) + (s-2e_y)e_x}{2(1-e_y e_x)}; & 1-e_y \leq s < e_y \\ R(s, 0) &= 0; & 2 \leq s \end{aligned} \right.$$

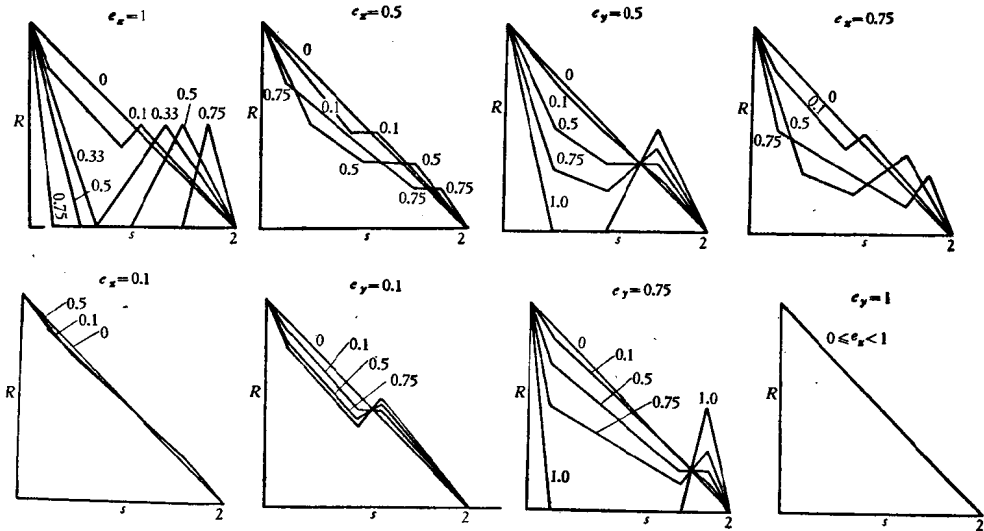


图 11.41 当  $y$  方向(或  $z$  方向)遮拦比为定值时, 变更另一方向的遮拦比时的传递函数变化。

由于此时的  $R$  是遮拦比  $e_y, e_z$  的函数, 故取适当的遮拦比即可使对某一定  $s$  的  $R$  为极大. 将各种  $e_y, e_z$  值的光学传递函数表示于图 11.41 中. 可见中心打孔时可使高频部分的传递函数略为增大, 低频部分则减小. 在  $s < 1$  的部分  $R$  减小的同时,  $s > 1$

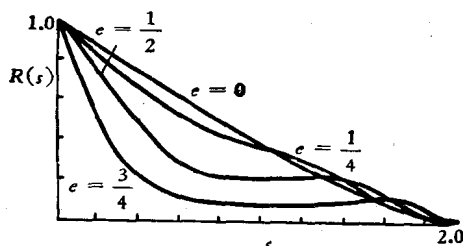


图 11.42

的部分  $R$  加大, 但最大的反应小于 0.5.

对圆孔而言, 中心打孔的效应是类似的, 由面积计算得出的结果如图 11.42.

从这些计算结果可以清楚地看出孔的形状对使用要求的影响, 我们可以根据被观察对象的频率范围和对比范围来确定应该用怎样形状的通光孔.

在下面几小节中将列出光学系统有单一象差时的反应函数. 就象我们对衍射图案所作的评论一样, 由于实际光学系统中总是多种象差按各种比例混合在一起的, 因之由这些单一的结果作质量判断总是不充分的, 将它们看作一本不完整的字典倒是恰当的. 但是现在的结果和衍射图案相比还有优越之处, 首先是由曲线可对质量优劣作出明确的判断, 其次因运用电子计算机的结果以及此时积分比亮度分布积分易作的原故, 所列的某些结果比亮度分布图案更全面些.

#### § 4.2 轴向离焦和象散的影响

按表 6 及 (104) 式, 轴向离焦和象散形成的波象差是

$$\left. \begin{aligned} W &= w_{20}(y^2 + z^2) + w_{02}y^2, \\ W_{st}(y, z) &= 2(w_{20} + w_{02})sy + 2w_{20}tz. \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

当孔是图 11.38a 所示的长方形时, 积分 (94) 式可表示为显函数, 即

$$R(s, t) = \frac{\sin \left[ 2k(w_{20} + w_{02})s \left( 1 - \frac{s}{2} \right) \right] \sin \left[ 2kw_{20}t \left( 1 - \frac{t}{2} \right) \right]}{4k^2 w_{20}(w_{20} + w_{02})st}, \quad (109)$$

当  $t=0$  或  $w_{20}=0$  时即为

$$[R(s, t)]_{w_{20}=0} = R(s, 0) = \frac{\sin 2k(w_{20} + w_{02})s \left( 1 - \frac{s}{2} \right)}{2k(w_{20} + w_{02})s} \cdot \left( 1 - \frac{t}{2} \right). \quad (109a)$$

$t=0, w_{20} + w_{02} = \frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{2}, \lambda, 2\lambda$  时的反应函数曲线如图 11.43a;  $s=t$  时由 (109) 式算出  $w_{20} + w_{02} = -w_{20} = \frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{2}, \lambda, 2\lambda$  的曲线如图 11.43b, 此曲线实际上和反应函数

(109a)的平方曲线全同[注意(109a)中  $t$  等于零].

当孔为圆孔时的结果如图 11.44<sup>[22]</sup>. 曲线上的数字代表  $w_{02}$ , 是用  $\frac{\lambda}{\pi}$  表示的波差数.

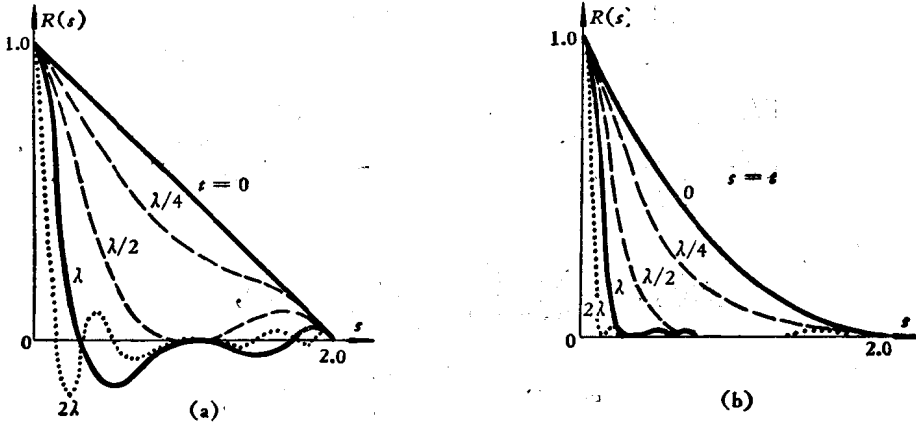


图 11.43

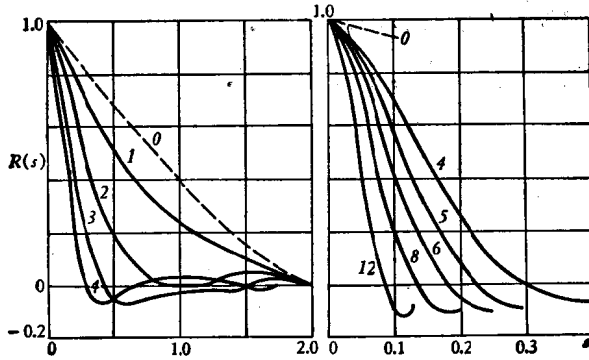


图 11.44

### § 4.3 初级彗差

当只有初级彗差时由(104)式有:

$$W_{st}(y, z) = 3w_{21}sy^2 + w_{21}sz^2 + 2w_{21}tzy + \frac{w_{21}}{4}(s^2 + t^2). \quad (110)$$

其中常数项只影响反应函数的位相, 亦即使  $R$  中有因子  $e^{\frac{1}{4}ikw_{21}(s^2+t^2)}$ , 以  $e^{i\phi}$  表示则(94)式成为:

$$R(s, t) = \frac{e^{i\phi}}{A} \iint_{\Delta_{st}} e^{-ikw_{21}(3sy^2 + sz^2 + 2tys)} dy dz. \quad (111)$$

当通光孔为方孔时,  $s=0$  或  $t=0$  的积分可表示为正弦积分和 Fresnel 积分:

$$\begin{aligned}
 |R(s, 0)| &= \frac{1}{4} \left( \int_{-1}^1 e^{-ikw_{21}s^2} dz \right) \left( \int_{-1+\frac{s}{2}}^{1-\frac{s}{2}} e^{-3ikw_{21}s^2 y^2} dy \right), \\
 &= \frac{\pi}{8\sqrt{3kw_{21}s}} \left[ \left( \int_{-\sqrt{\frac{2kw_{21}s}{\pi}}}{\sqrt{\frac{2kw_{21}s}{\pi}}} \cos \frac{\pi}{2} x^2 dx \right)^2 + \left( \int_{-\sqrt{\frac{2kw_{21}s}{\pi}}}{\sqrt{\frac{2kw_{21}s}{\pi}}} \sin \frac{\pi}{2} x^2 dx \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad \times \left[ \left( \int_{-\sqrt{\frac{6kw_{21}s}{\pi}(1-\frac{s}{2})}}^{\sqrt{\frac{6kw_{21}s}{\pi}(1-\frac{s}{2})}} \cos \frac{\pi}{2} x^2 dx \right)^2 + \left( \int_{-\sqrt{\frac{6kw_{21}s}{\pi}(1-\frac{s}{2})}}^{\sqrt{\frac{6kw_{21}s}{\pi}(1-\frac{s}{2})}} \sin \frac{\pi}{2} x^2 dx \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (112)
 \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}
 |R(0, t)| &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-(1-\frac{t}{2})}^{1-\frac{t}{2}} e^{-2ikw_{21}t^2 y^2} dz dy, \\
 &= \frac{1}{4kw_{21}t} \int_{-2kw_{21}(1-\frac{t}{2})^t}{2kw_{21}(1-\frac{t}{2})^t} \frac{\sin x}{x} dx. \quad (112a)
 \end{aligned}$$

$w_{21} = 0, \frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{2}, \lambda$  及  $2\lambda$  的结果表示于图 11.45.

对圆孔的情况亦有计算结果<sup>[23]</sup>, 但不够完整.

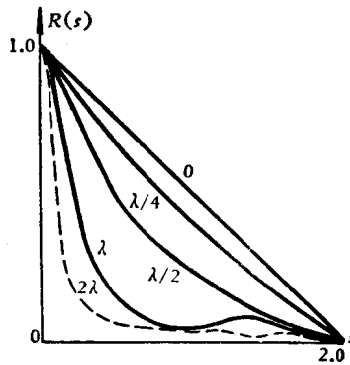


图 11.45

#### § 4.4 球 差

用电子计算机或近似计算方法对圆孔情形计算过一些结果, 表明以离焦和初级球差平衡高级球差时的情况<sup>[24, 25]</sup>. 图 11.46 表示初级球差用各种离焦量平衡的结果, 图中用符号  $A$  表示初级球差,  $B$  表示轴向离焦, 亦即波象差方程式为

$$W = A(r^4 + Br^2)\lambda.$$

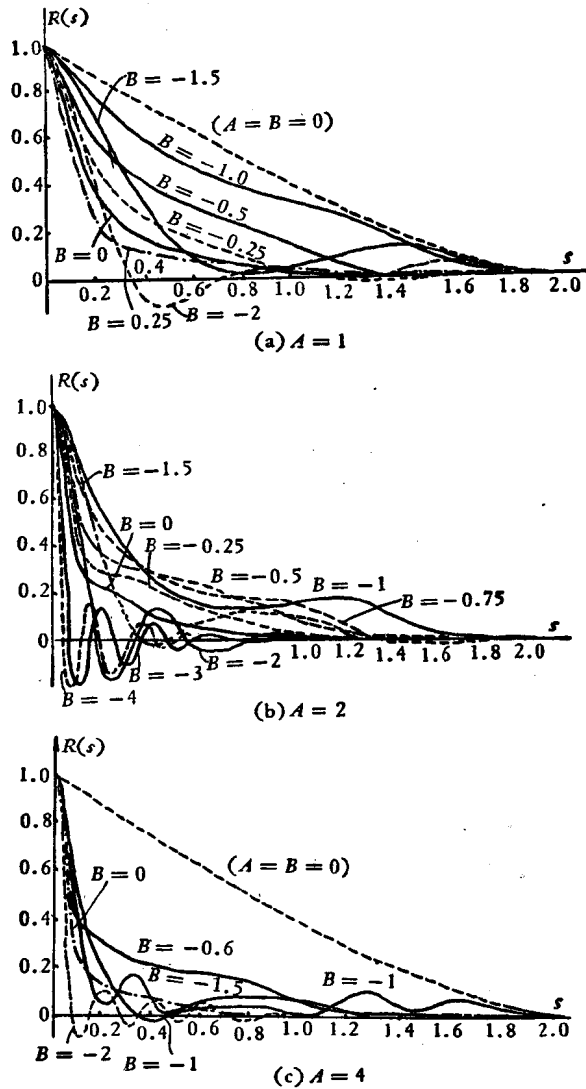


图 11.46

## § 5 质量评价的标准和光学系统象差的公差

### § 5.1 质量指标问题

既然从信息传递的观点看来能量集中度和信息量有关，再加直观看来它标志着象的尖锐程度，因此用能量集中度作为质量标准是很恰当的。曾有人建议用黑白边界被光学系统所形成的象的亮度梯度均方值 (acutance)，作为此系统的质量指标，并

用实验证明它与生理感觉的“清晰”、“鲜明”感相一致<sup>[26, 27]</sup>。看来这个标准不过是能量集中度的一种不太完善的表达形式。因为能量越集中,其边缘的亮度梯度也越大,而梯度大一般也标志着能量集中。但我们也可想象梯度大而能量分散的分布(实际上这种分布很少可能出现),此时亮度梯度判断就不再和清晰感相对应了。

Strehl 判断和能量集中度也有密切的关联,我们已经看到,前者为反应函数的积分,后者为反应函数的平方积分。由前面的计算可见,在一般的反应函数形式中,正负起伏量很小,积分值大小和平方积分值之大小是对应的,在这种条件下,这两种判断就会一致,也就是说中心点亮度可作为能量集中的标志。

由前面的讨论已可看到,分辨能力不是好的质量指标,实际上,这是由于一般所指的是物体对比为 1:0 时的分辨能力。由图 11.43—11.46 的反应函数可以看出,反应函数的小量起伏即足以使截止频率变化并出现伪分辨。而且还可以看到,即使相差很大时高对比物体的分辨能力并无显著变化;但当物体对比很差,如 1:0.8 时,则截止频率是  $|R|$  很大的频率。此时,反应函数的小量起伏对截止频率毫无影响,以之作为质量指标就是恰当的。支持这种看法的另一个理由是:某一定  $R_0$  值所定的频率  $s_0$  确定了反应函数曲线规定的一块长方形面积  $R_0 s_0$ , 由图 11.47a 可知,当所选的  $R$  适当时,此面积就和总面积的大小相对应<sup>[17]</sup>,亦即与  $S$  或  $E$  相对应。由此可见,低对比分辨能力可以作为通道的方便而可靠的质量标志。一般来说与  $R_0=0.5$  相应的频率  $s_0$ ,即物体对比 0.81,接收器能感受对比为 0.9 时的分辨能力[由(83)式]可作为此通道的质量指标。为适应更复杂的反应函数形式和使用要求,也可以取两个对比下的分辨能力,此时取  $R=0.5$  及  $R=0.3$  为恰当,如图 11.47b 所示。取这两个值的原因是  $R$  的起伏不可能超过 0.5,很少会达到 0.2,由实际计算结果就可看出这点。

在以上的考虑中我们未计及反应函数的位相,这是由于强度和位相的作用是完

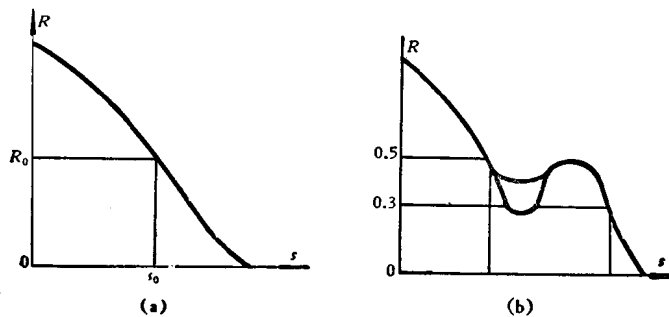


图 11.47



全互相独立的原故。既然反应函数的位相使原物的象发生位相推移,那么,它的作用就在于使复杂物体的象变形——不同频率的结构发生相对位移。光学系统的象差所引起的反应函数位相变更并不会使象在大范围内变形,而仅使细节变形。显然高频物体的反应函数很小也要使象变形,两种情况的区别仅峰值位置而已,前者使峰的位置发生微小变化。这一论断可由将物体看作点的组合而得出,由这种观点看来,象变形的基本原因是由于各点衍射图形迭加时,中心斑外圈的能量相加会超过中心斑本身亮度,这样就会形成假的亮度中心,由此可见它所影响的只会在衍射斑直径数量级范围。当然,由于象差之故,这个衍射斑的程度也会比理想情况大得多。

$S$ ,  $B$  和低对比分辨能力就是一般可作为光学系统或接收器质量标准的三个可能的量,但是应注意到这种一般标准并不会在任何情况下都适用。严格说来,质量指标应考虑到被观察的对象或被接收的信号之特征后才能确定。例如我们只要求观察到某一定频率一定对比的信号,那么我们的光学系统和接收器除了对这一频率的反应函数大小外,其他频率的反应函数大小对我们的目的都是毫无意义的。在这种条件下,反应函数的小量起伏也许刚好就是所需要的,为此象差校正状况就须不同,如图 11.46 所表示的不同的球差平衡状况那样。

光学系统通常不只是对一点的邻近成象而是将一块大面积成象,此时因为象面上各点的象差不同,故反应函数也各个不同。此时仍宜按实际使用要求来确定此光学系统的质量平均值,即按实际使用时的重要性作为质量指标平均时的权重。例如象面上各点同等重要(航摄影所得到的地形照片,摄谱仪所得到的谱线照片),则各点的权重相等。当各点并非同等重要时,宜在作平均时对各点取不同的权。例如,目镜的轴外点常只是观察轴上点的陪衬,当轴上权取为 1 时,轴外的权可小于 0.2。

## § 5.2 象差公差问题

订定质量指标的目的在于控制各个有关过程,使最后得到的仪器合乎使用要求。对于成品检查或生产过程质量控制的目的来说,上述的反应函数形式的三个质量指标都是同样可用的。但是质量指标的另一个同等重要的作用在于控制设计过程,使在加工之前就能预知设计的质量如何。这就要由质量指标订定象差的公差,并由此确定零件的制造和装配公差,订定象差的最佳校正方案以使象差不能完全校正时达到可能的最高质量。这个问题的重要性是很明显的,象差理论的优劣只不过是方法问题,而质量指标则是目的问题,没有明确可行的质量指标将使设计的目标不明确。

对于高质量小象差系统,这个问题已经解决,基于  $S$  值和反应函数的关系,  $S$  和象差的关系, Strehl 判断和 Rayleigh 公差的关系, 以及在 § 2 中对圆形和正方形通光孔作出的公差和最佳校正方案, 已经使高质量小象差系统有了可靠而方便的指标.

但是光学系统的目的是多种多样的, 由实际经验知道, 在很多场合下光学系统不在 Rayleigh 公差内就可充分满足使用要求(第十二章 § 5). 这种大象差系统的质量指标和质量判断的方法是长时期来未获解决的问题.

光学工作者由长时期的经验确定, 大象差系统的质量判断可以以几何光学的观点为基础, 亦即可将光线计算得到的光线分布密度看作是能量分布, 因此由光线计算结果作直观的判断就可确定此系统的质量. 这个观点的可靠性可由现有的光学系统基本合用这一事实来证明, 但在理论上来确定它的可靠程度和可靠的性质却是长期以来未解决的问题. 利用反应函数方法作者<sup>[17]</sup> 和国外<sup>[29]</sup> 约在同时得到了这个问题的证明, 从而使这个方法得到了可靠的理论基础, § 5.3 的目的即在于此.

由几何光学方法求反应函数并不比物理光学方法简捷多少, 由几何光学求能量集中度  $E$  倒很方便, 但由于结果可能是发散的, 这种结果的可靠性就须要证明. 由于这些原因, 几何光学方法并未使大象差系统的公差计算简单化.

在 § 5.4 中, 我们将以低对比分辨能力作为评价标准得出低对比分辨能力与象差的关联, 从而表明, 由这个方法可以确定各种光学系统的公差和最佳校正方案, 希望实践证明它是方便而且可靠的.

### § 5.3 几何光学的反应函数和能量集中度

由几何光学来考察能量分布也就是将几何光线看作是带有一定能量的, 将光线分布的密度就看作能量分布密度. 当波象差已知后光线在象面上形成的分布密度也就知道了. 设物面坐标为  $\eta_0, \zeta_0$  的点具有波差  $W(y, z)$ , 则此点发出的光线在象面上的坐标  $\eta, \zeta$  可由下列关系求得:

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial y} = nuT A_y = nu(\bar{\eta}_1 - \bar{\eta}) = \frac{1}{k} (\eta_0 - \eta), \\ \frac{\partial W}{\partial z} = nuT A_z = nu(\bar{\zeta}_1 - \bar{\zeta}) = \frac{1}{k} (\zeta_0 - \zeta), \end{cases}$$

上式最后一个等号利用了坐标规范化条件(74). 上式可写成:

$$\left. \begin{aligned} \eta_0 - \eta &= k \frac{\partial W}{\partial y} = kW'_y(y, z), \\ \zeta_0 - \zeta &= k \frac{\partial W}{\partial z} = kW'_z(y, z), \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

此式就是光栏坐标  $y, z$  和象面坐标  $\eta, \zeta$  的关系。设光栏面元  $dy dz$  内的光线射到象面元  $d\eta d\zeta$  内，并设光线在光栏上均匀分布（在 § 3.5 中求光学系统反应函数时也假设波面上各点是等振幅的，但两处都不作均匀的限制时仍然可得同样结果），则光线数和  $dy dz$  成正比。故象面上的亮度  $I(\eta, \zeta)$  就是

$$I(\eta, \zeta) = \frac{dy dz}{d\eta d\zeta}. \quad (114)$$

因  $y, z; \eta, \zeta$  间具有函数关系 (113) 式，由一般所知的重积分变数变换的关系，上式可用 Jacobi 行列式表示出来：

$$\begin{aligned} I(\eta, \zeta) &= \frac{1}{\left| \frac{D(\eta, \zeta)}{D(y, z)} \right|}, \\ &= \frac{1}{k^2 |W''_{yy} W''_{zz} - W''_{yz}|}. \end{aligned} \quad (115)$$

现先设函数关系 (113) 式是一一对应的，亦即 Jacobi 行列式恒不为零，此时  $I(\eta, \zeta)$  在任一点均有定值。于是几何观点的反应函数即可由 (115) 式作富利叶变换而得到：

$$R(s, t) = \iint_{\text{象面}} \frac{1}{\left| \frac{D(\eta, \zeta)}{D(y, z)} \right|} e^{i(s\eta + t\zeta)} d\eta d\zeta.$$

将  $\eta, \zeta$  按 (113) 式变为  $y, z$  即得

$$R(s, t) = \frac{1}{A} \iint_{\text{光孔 } A} e^{-ik(sWy + tWz)} dy dz. \quad (116)$$

式中为满足规范化条件  $R(0, 0) = 1$ ，将常数取为面积  $A$  的倒数，积分域是整个通光孔  $A$ 。将此式和 § 3.6 中 (96) 式比较即可看出几何观点得出的反应函数的正确程度。可以看出二者之主要差别在于积分域不同，几何观点得出的 (116) 式由于积分域不因  $s, t$  而变，故  $s, t$  很大时反应函数也不等于零。因之按几何观点所得到的反应能力在高频部分是完全不对的。在低频部分  $A_{st}$  和  $A$  相差不远（光瞳错开很少），几何观点所得结果就接近真实的低频结果 (96) 式，而大象差系统中高频部分的反应几乎等于零，只须知道例如  $s < 0.2$  的低频部分反应函数就够了，此时用几何观点得到的反应函数或能量分布结果就足够正确。

可能在光栏面内某一条曲线上 Jacobi 行列式等于零：

$$J = \frac{D(\eta, \zeta)}{D(y, z)} = k^2 (W''_{yy} W''_{zz} - W''_{yz}) = 0,$$

此时可按此曲线将光栏分为几个区域，在各区域内  $J \neq 0$  且保持符号不变，此时仍如前面一样可得到 (116) 式。

因此不管象差大小如何,由几何光学方法导出的反应函数在低频区域是完全正确的,由几何光学方法可以完全确定象的粗略结构,同时也只能确定象的粗略结构。这就是几何方法判断能量分布的原则上的可能和局限。

既然(96)式和(116)式在低频部分并无差别,按几何方法作反应函数积分就并不方便,但当假定几何方法的能量分布(115)式正确,亦即假定(116)式对高频也正确,则由此计算能量集中度  $E$  倒是方便的。由于(87)式

$$\begin{aligned} E &= \iint_{\text{象面}} \frac{1}{\left| \frac{D(\eta, \zeta)}{D(y, z)} \right|^2} d\eta d\zeta, \\ &= \iint_{\text{光孔}} \frac{1}{\left| \frac{D(\eta, \zeta)}{D(y, z)} \right|^2} dy dz, \end{aligned}$$

即

$$E = \iint_{\text{光孔}} \frac{1}{|W''_{yy} W''_{zz} - W''_{yz}|} dy dz. \quad (117)$$

此式虽然简单,但可能是发散的,因之不能用它作一般的评价标准。

将光线分布看作能量分布时就可以由大量的光线光路计算来确定能量分布。不少光学工作者曾以此法确定质量状况,这种方法常称为点列图法<sup>[28]</sup>。其要点是以均匀分布于光阑面上的光线束在象面上交点的点列密度作为能量密度。由光线计算决定象差系数后,易于得出点列图,而由点列图作富利叶变换即得几何光学的反应函数。

#### § 5.4 低对比分辨能力判断

前已提及几种可以作为质量标准的量,为了使这些判断具有实用价值,必须使它们和象差建立简单的联系。由于光学传递函数本身就已很复杂,其积分显然更为复杂,因之用传递函数上的一点来表征整个曲线是合适的,也就是说,用低对比分辨能力有可能得到简单可用的结果。若采用近似式(102)来计算传递函数,就使复杂的指数积分变为代数函数。我们知道,对小象差情况或大象差时的低频部分,这种近似是准确的。下面我们将表明,对这种判断而言(102)式是可用的。H. H. Hopkins 曾利用(102)式讨论过公差问题<sup>[21]</sup>,但由于评价标准不很恰当,以致结果不尽合理,同时也未能作出一般性的讨论。

要将(102)式表示为象差和频率  $s, t$  的显函数,对圆孔来说是困难的,但对方孔则是可行的。下面对方孔作讨论。

由于采用方孔, (102) 式中

$$\frac{A_{st}}{A} = \left(1 - \frac{s}{2}\right) \left(1 - \frac{t}{2}\right). \quad (118)$$

故按我们的判断, 要求  $R(s, t) \geq 0.5$ , (102) 式就成为:

$$\frac{1}{2} \leq \left(1 - \frac{s}{2}\right) \left(1 - \frac{t}{2}\right) \left(1 - \frac{k^2}{2} D(s, t)\right). \quad (119)$$

由 (119) 式得出的  $(s, t)$  越大则表示光学系统质量越好. 理想光学系统, 方差  $D(s, t) = 0$ ,  $(s, t)$  的最大值就是  $(1, 0)$  或  $(0, 1)$ , 或  $(0.59, 0.59)$ . 因此, 由 (119) 式得出的  $(s, 0)$  或  $(0, t)$  或  $(s, s)$  中,  $s$  或  $t$  之值就是光学系统的质量指标. 由 § 4 可知, Rayleigh 公差对应于低对比分辨能力降低 30—40%, 例如取分辨极限要求为  $(0.6, 0)$  或  $(0, 0.6)$  或  $(0.35, 0.35)$ . 照相物镜之类的分辨极限可定为  $(0, 0.10)$  或  $(0.10, 0)$  或  $(0.06, 0.06)$ .

对于高质量系统,  $t=0, s>0.6$  或  $s=0, t>0.6$  或  $s-t>0.35$ , 按 (119) 式, 要求

$$D(0.6, 0) < \frac{\lambda^2}{70},$$

或

$$D(0, 0.6) < \frac{\lambda^2}{70}, \quad (120)$$

或

$$D(0.35, 0.35) < \frac{\lambda^2}{70}.$$

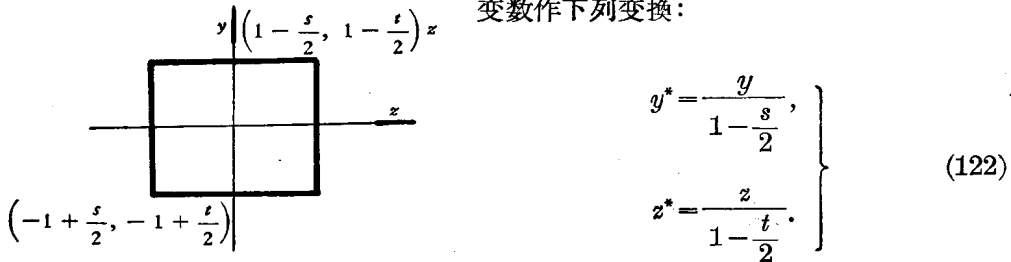
对低质量系统要求  $s>0.06, t>0.06$ , 就要求:

$$\left. \begin{aligned} D(0.06, 0.06) &< \frac{\lambda^2}{40}, \\ D(0.1, 0) &< \frac{\lambda^2}{40}. \end{aligned} \right\} \quad (121)$$

由此可见, 只须把各种象差的方差  $D$  算出来, 无论是高质量系统或是低质量系统还是二者之间的系统的公差就可以完全确定了. 由 (120)、(121) 相比可见, 高质量系统在  $s<0.6$  时的方差和低质量系统在  $s<0.06$  时的方差的公差大小相似. 这就表明低质量系统中象差的公差虽已很大, 但是近似展开式 (102) 仍然保持正确.

不但如此, 我们还可以根据 (121) 式确定象差的最佳平衡方案. 为此目的, 我们将把  $W_{st}(y, z) - \bar{W}_{st}$  表示成在  $A_{st}$  内正交的正交多项式. 于是  $D(s, t)$  就成为多项式各项的系数的平方和. 按照我们预定的前提,  $A_{st}$  就是图 11.48 所示的正方形, 在

这种积分域内的正交多项式是 Legendre 多项式,它在区间  $(-1, +1)$  正交,故将积分变数作下列变换:



$$\left. \begin{aligned} y^* &= \frac{y}{1 - \frac{s}{2}}, \\ z^* &= \frac{z}{1 - \frac{t}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

图 11.48

则方差可写作:

$$D(s, t) = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ W_{st} \left[ \left(1 - \frac{s}{2}\right) y^*, \left(1 - \frac{t}{2}\right) z^* \right] - \overline{W}_{st} \right\}^2 dy^* dz^*. \quad (123)$$

再将  $W_{st} - \overline{W}_{st}$  表示为  $y^*, z^*$  的 Legendre 多项式:

$$W_{st} - \overline{W}_{st} = \sum_p \sum_q h_{pq}(s, t) P_p(y^*) P_q(z^*), \quad (124)$$

则

$$D(s, t) = \sum_p \sum_q h_{pq}^2(s, t) / (2p+1)(2q+1). \quad (125)$$

Legendre 多项式的系数也可以用以前求圆多项式系数的方法求出,现将七次以下的系数列于表 7:

表 7

	$x^0$	$x^1$	$x^2$	$x^3$	$x^4$	$x^5$	$x^6$	$x^7$
$P_0(x)$	1							
$P_1(x)$		1						
$2P_2(x)$	-1		3					
$2P_3(x)$		-3		5				
$8P_4(x)$	3		-30		35			
$8P_5(x)$		15		-70		63		
$16P_6(x)$	-5		105		-315		231	
$16P_7(x)$		-35		315		-693		429

$W_{st}$  的平均值  $\overline{W}_{st}$  不须积分即可求出:考虑到 Legendre 多项式的正交性,将各项表示为正交多项式时所须加入的常数项即为此象差的平均值.故将  $W_{st}$  表示为正交多项式之和而除去常数项时自然就成为  $W_{st} - \overline{W}_{st}$ .现将(104)式组成正交多项式.由于  $w_{00}$  和  $w_{01}$  对  $D$  值毫无影响,故下面不作计算.

首先因为:

$$\left. \begin{aligned}
 1 &= P_0, \\
 x &= P_1, \\
 x^2 &= \frac{2}{3} P_2 + \frac{1}{3} P_0, \\
 x^3 &= \frac{2}{5} P_3 + \frac{3}{5} P_1, \\
 x^4 &= \frac{8}{35} P_4 + \frac{4}{7} P_2 + \frac{1}{5} P_0, \\
 x^5 &= \frac{8}{63} P_5 + \frac{4}{9} P_3 + \frac{3}{7} P_1, \\
 x^6 &= \frac{16}{231} P_6 + \frac{24}{77} P_4 + \frac{1}{7} P_0.
 \end{aligned} \right\} \quad (126)$$

再将(104)式改写为:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{W^{20}}{w_{20}} &= 2sy + 2tz, \\
 \frac{W^{02}}{w_{02}} &= 2sy, \\
 \frac{W^{21}}{w_{21}} &= 3sy^2 + sz^2 + 2tzy + k, \\
 \frac{W^{03}}{w_{03}} &= 3sy^2 + k, \\
 \frac{W^{40}}{w_{40}} &= 4sy^3 + 4tz^3 + 4szy^2 + 4tzy^2 + (s^2 + t^2)(sy + tz), \\
 \frac{W^{22}}{w_{22}} &= 4sy^3 + 2szy^2 + 2tzy^2 + \left(s^3 + \frac{1}{2}st^2\right)y + \frac{1}{2}s^2tz, \\
 \frac{W^{41}}{w_{41}} &= 5sy^4 + sz^4 + 4tzy^3 + 4tyz^3 + 6sy^2z^2 \\
 &\quad + \left(\frac{5}{2}s^3 + \frac{3}{2}st^2\right)y^3 + \left(\frac{1}{2}s^3 + \frac{3}{2}st^2\right)z^3 + (3s^2t + t^3)yz, \\
 \frac{W^{60}}{w_{60}} &= 6sy^5 + 6tz^5 + 12syz^3 + 6szy^4 + 12tz^3y^2 + 6tzy^4 + (5s^3 + 3st^2)y^3 \\
 &\quad + (3s^2t + 5t^3)z^3 + (3s^3 + 9st^2)yz^2 + (9s^2t + 3t^3)y^2z \\
 &\quad + \frac{3}{8}(s^2 + t^2)^2(sy + tz).
 \end{aligned} \right\} \quad (127)$$

其中  $W^{nm}$  表示  $W_{st}(y, z)$  中各种形式的象差单独的贡献(上角标号  $nm$  的意义和  $w_{nm}$  的下角标号相同). 将(122)式代入上式得:

$$\begin{aligned}
W_{st}(y, z) = & w_{20}(2ss'y + 2tt'z) + w_{02}(2ss'y) + w_{21}[3ss'^2y^2 \\
& + s'^2z^2 + 2ts't'yz] + w_{03}(3ss'^2y^2) \\
& + w_{40}[4ss'^3y^3 + 4tt'^3z^3 + 4ss't'^2yz^2 + 4tt's'^2y^2z + (s^2 + t^2)(ss'y + tt'z)] \\
& + w_{22}\left[4ss'^3y^3 + 2ss't'^2yz^2 + 2tt's'^2y^2z + \left(s^3s' + \frac{1}{2}st^2s'\right)y + \frac{1}{2}s^2tt'z\right] \\
& + w_{41}[5ss'^4y^4 + 4ts'^3t'y^3z + 6ss'^2t'^2y^2z^2 + 4ts't'^3yz^3 + tt'^4z^4 \\
& + \frac{5}{2}(5s^2 + 3t^2)s'^2y^2 + t(3s^2 + t^2)s't'yz + \frac{5}{2}(s^2 + 3t^2)t'^2z^2] \\
& + w_{60}[6ss'^5y^5 + 6ts'^4t'y^4z + 12ss'^3t'^2y^3z^2 + 12ts'^2t'^3y^2z^3 + 6ss't'^4yz^4 \\
& + 6tt'^3z^5 + s(5s^2 + 3t^2)s'^3y^3 + 3t(3s^2 + t^2)s'^2t'y^2z \\
& + 3s(s^2 + 3t^2)s't'^2yz^2 + (3s^2 + 5t^2)tt'^3z^3 + \frac{3}{8}(s^2 + t^2)^2(ss'y + tt'z)].
\end{aligned}$$

将上式中的  $y, z$  按(126)式代为  $P(y), P(z)$ , 并去掉常数项就得到  $h_{pq}$  之值. 结果如下式所列. 式中将  $P_m(y)$  简写为  $P_{my}$ , 并按  $m+n$  为奇或偶分开排列, 并依  $n$  和  $m$  的大小为序.

$$\begin{aligned}
W_{st} - \bar{W}_{st} = & w_{20}(2ss'P_{1y} + 2tt'P_{1z}); \\
w_{40} \left[ \frac{8}{5}(ss'^3P_{3y} + tt'^3P_{3z}) + \frac{8}{3}s't'(s't'P_{1y}P_{2z} + ts'P_{1z}P_{2y}) \right. \\
& \left. + ss'\left(\frac{12}{5}s'^2 + \frac{4}{3}t'^2 + s^2 + t^2\right)P_{1y} + tt'\left(\frac{12}{5}t'^2 + \frac{4}{3}s'^2 + s^2 + t^2\right)P_{1z} \right]; \\
w_{60} \left[ \frac{16}{21}(ss'^5P_{5y} + tt'^5P_{5z}) + \frac{48}{35}s't'(ts'^3P_{4y}P_{1z} + st'^3P_{4z}P_{1y}) \right. \\
& + \frac{16}{5}s'^2t'^2(ss'P_{3y}P_{2z} + tt'P_{3z}P_{2y}) + 2s'^2t't\left(\frac{12}{7}s'^2 + \frac{12}{5}t'^2 + 3s^2 + t^2\right)P_{2y}P_{1z} \\
& + 2t'^2s's\left(\frac{12}{7}t'^2 + \frac{12}{5}s'^2 + 3t^2 + s^2\right)P_{2z}P_{1y} \\
& + 2ss'^3\left(\frac{4}{3}s'^2 + \frac{4}{5}t'^2 + s^2 + \frac{3}{5}t^2\right)P_{3y} + 2tt'^3\left(\frac{4}{3}t'^2 + \frac{4}{5}s'^2 + t^2 + \frac{3}{5}s^2\right)P_{3z} \\
& + ss'\left\{\frac{18}{7}s'^4 + \frac{6}{5}t'^4 + \frac{12}{5}s'^2t'^2 + \frac{3}{5}(5s^2 + 3t^2)s'^2 + (3t^2 + s^2)t'^2 + \frac{3}{8}(s^2 + t^2)\right\}P_{1y} \\
& \left. + tt'\left\{\frac{18}{7}t'^4 + \frac{6}{5}s'^4 + \frac{12}{5}t'^2s'^2 + \frac{3}{5}(5t^2 + 3s^2)t'^2 + (3s^2 + t^2)s'^2 + \frac{3}{8}(s^2 + t^2)\right\}P_{1z} \right];
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
w_{22} & \left[ \frac{8}{5} ss'^3 P_{3y} + \frac{4}{3} s't' (st'P_{1y}P_{2z} + ts'P_{1z}P_{2y}) \right. \\
& \quad \left. + ss' \left( \frac{12}{5} s'^2 + \frac{2}{3} t'^2 + s^2 + \frac{1}{2} t^2 \right) P_{1y} + tt' \left( \frac{2}{3} s'^2 + \frac{1}{2} s^2 \right) P_{1z} \right]; \\
w_{21} & \left( 2ss'^2 P_{2y} + \frac{2}{3} st'^2 P_{2z} + 2ts't' P_{1y} P_{1z} \right); \\
w_{41} & \left[ \frac{8}{35} (5ss'^4 P_{4y} + tt'^4 P_{4z}) + \frac{8}{5} ts't' (s'^2 P_{3y} P_{1z} + t'^2 P_{3z} P_{1y}) + \frac{8}{3} s'^2 st'^2 P_{2y} P_{2z} \right. \\
& \quad \left. + ss'^2 \left( \frac{20}{7} s'^2 + \frac{4}{3} t'^2 + \frac{5}{3} s^2 + t^2 \right) P_{2y} + st'^2 \left( \frac{4}{3} s'^2 + \frac{4}{7} t'^2 + \frac{s^2}{3} + t^2 \right) P_{2z} \right. \\
& \quad \left. + ts't' \left( \frac{12}{5} s'^2 + \frac{12}{5} t'^2 + 3s^2 + t^2 \right) P_{1y} P_{1z} \right]; \\
w_{03} & (2ss'^2 P_{2y}). \tag{128}
\end{aligned}$$

利用上面的結果我們就不難得到象差的最佳校正方案及公差(表8)。和§2.3类似,最佳的象差校正方案就是使多項式項数尽量少,系数平方和尽量小的方案。用来平衡高級象差的低級項是  $m+n$  較小或相等,  $m$  較小,且  $m+n$  同为奇次或偶次的項;由§2.3看来,这些要求是明显的。

从分辨能力要求导出的象差校正状况随  $s=t$  或  $s \neq t$  而有很大不同。以象散为例,  $w_{02}$  无论多大,在  $s=0$  时,  $h_{pq}=0$ , 亦即毫不影响分辨能力,由象散的已知特性,这一点在未作此种演算之前就是明显的。反之对  $t=0$  的情况,校正  $w_{02}$  的最佳方案就是利用等值反号的离焦項  $y^2+z^2$ , 波象差总結果  $w_{02}\{y^2-(y^2+z^2)\}$  对于  $t$  方向分辨能力毫无影响。正是由于这个原因,我們下面只考虑  $s=t$  的情况下的校正方案和公差。由于我們的通光孔是方孔,原为軸对称的象差  $w_{n0}(y^2+z^2)n/2$  的影响现在也是非軸对称的了,  $s=t$  和  $s=0$  等情况的校正方案也并不相同。

原可期望高級象差中的低次多項式可因低級象差的加入而完全除去,实际上这一点在方孔情况下并不能完全办到,但剩余量对公差的影响已很小。由于这个原因,表8中  $w_{00}$ ,  $w_{41}$ ,  $w_{03}$  的校正方案实际上只是一个离最佳状态不远的方案。由于最佳状况是极值位置,稍許偏离这种状况而造成的影响是很小的。

原則上說来,无论在什么方向偏离最佳状况都会引起不利影响。不仅如此,按小象差低頻近似(102)式,偏离量正負不同而数量相同时,影响相同。由离焦来平衡初級球差而得到的各条反应函数曲綫(图11.46)是很有特征的(不同校正量的曲綫具有交点),注意到这一点之后就可以少作很多計算而更快得到最佳結果。

表 8 由低对比分辨本领决定的最佳校正状况和公差

象 差	最佳校正状况 $(s=t) W \sim W_{it}$	公 差 (λ)	
		$s=0.435$	$s=0.35$
轴向散焦 $w_{20}(y^2+z^2)$	$w_{20}(y^2+z^2) \sim 2w_{20}ss'(P_{1y}+P_{1z})$	$0.17$	$0.25$
初级球差 $w_{40}(y^2+z^2)^2$	$w_{40}[(y^2+z^2)^2 - (s^2+1.87s^2)(y^2+z^2)] \sim w_{40}ss'^3 \left[ \frac{8}{5}(P_{3y}+P_{3z}) + \frac{8}{3}(P_{1y}P_{2x}+P_{1z}P_{2y}) \right]$	$0.34$	$0.47$
二级球差 $w_{60}(y^2+z^2)^3$	$w_{60}[(y^2+z^2)^3 - (2.5s^2+2.9s^2)(y^2+z^2)^2 + (1.1s^4+3.5s^2s^2+1.6s^4)(y^2+z^2)] \sim w_{60}ss'^5 \left[ \frac{16}{21}(P_{6y}+P_{6z}) + \frac{48}{35}(P_{4y}P_{1z}+P_{4z}P_{1y}) + \frac{16}{5}(P_{3y}P_{2x}+P_{2y}P_{3z}) \right] + w_{60}ss'^6 [(0.4+1.33s^2/s^2)(P_{2y}P_{1z}+P_{1y}P_{2z}) - (0.38+0.38s^2/s^2)(P_{3y}+P_{3z})]$	$0.78$	$0.96$
象 散 $w_{02}y^2$	$w_{02} \left[ y^2 - \frac{1}{2}(y^2+z^2) \right] \sim w_{02}ss'(P_{1y}-P_{1z})$	$0.34$	$0.51$
初级二次球差 $w_{22}y^2(y^2+z^2)$	$w_{22} \left[ \left\{ y^2(y^2+z^2) - \frac{1}{2}(y^2+z^2)^2 \right\} - \left( \frac{6}{5}s^2 + \frac{1}{2}s^2 \right) \left\{ y^2 - \frac{1}{2}(y^2+z^2) \right\} \right] \sim \frac{4}{5}w_{22}ss^3(P_{3y}-P_{3z})$	$1.05$	$1.43$
初级彗差 $w_{31}y(y^2+z^2)$	$w_{31}y(y^2+z^2) \sim w_{31}ss'^2 \left( 2P_{2y} + \frac{3}{2}P_{2z} + 2P_{1y}P_{1z} \right)$	$0.31$	$0.43$
二级彗差 $w_{41}y(y^2+z^2)^2$	$w_{41}y[(y^2+z^2)^2 - (2.2s^2+1.6s^2)y(y^2+z^2)] \sim w_{41}ss'^4 \left[ \frac{8}{7}P_{4y} + \frac{8}{35}P_{4z} + \frac{8}{5}(P_{3y}P_{1z}+P_{1y}P_{3z}) + \frac{8}{3}P_{2y}P_{2z} \right] + w_{41}ss'^4 [(0.4+0.8s^2/s^2)P_{1y}P_{1z} - (0.2+0.54s^2/s^2)P_{2y} + (0.44+0.26s^2/s^2)P_{2z}]$	$0.66$	$0.85$
初级三次球差 $w_{03}y^3$	$w_{03} \left[ y^3 - \frac{3}{5}y(y^2+z^2) \right] \sim w_{03}ss'^2(0.8P_{2y} - 0.4P_{2z} - 1.2P_{1y}P_{1z})$	$0.62$	$0.88$

表 8 中列出的公差分别相当于分辨能力降低 26%, 40%, 90%。所以列出降低 26% 的公差的原因在于它所得的公差大致和中心点亮度降低 20% 相当, 和 § 2.3 的表比较就可以看出这点。表中  $s=0.35$  亦即分辨能力降低 40% 的公差与中心点亮度降低 40% 者相当。从这里我们就可以看到: 象差开始加大(但仍小于  $\frac{\lambda}{4}$ ) 时高频部分的传递函数降低不多(高频高对比分辨能力不变), 而低对比分辨能力则降低很多, 这使得低对比分辨能力降低的百分数大于整个面积(中心点亮度)减少的百分数。当象差达  $\frac{1}{3}\lambda$  以上时, 高频传递函数也降低, 于是低对比分辨能力降低的百分数与总面积相当。当象差再加大时 Strehl 判断不再能用, 按此判断得到的面积变小程度远远大于实际情况, 将 § 2.3 表 5 的公差乘以  $\sqrt{\frac{9}{2}}$  即得  $s=0.1$  时的公差, 将它与表 8 中  $s=t=0.06$  者比较即可看出这一点。

按照 Strehl 判断, 不管是什么象差, 对质量的影响都是和残余量的平方成正比的。这一点在小象差情况下是正确的, 而象差很大时这个概念不正确。按照低对比分辨能力判断, 大象差时我们只注意(而且也只能分辨)粗结构, 随着我们所考虑的粗结构频率极限与理想情况的差别增大, 就使象差的影响随之变小, 变动几乎是正比的, 即传递函数值几乎由  $s^2 w_{nm}^2$  决定(在  $s$  较大时还将因  $s'$  之值而产生非线性的修正)。当象差很大时中心点亮度实际上并不随  $w_{nm}^2$  而降低, 而主要随  $s_{0.5}$  而变动。 $s_{0.5}$  和象差的关系是复杂的, 由表列的  $s$  和  $w$  的值就可看出这点: 在  $s$  很小( $s'$  约等于 1, 象差很大) 时中心点亮度约随象差残余量一次方而降低。

除了象差容许量之外, 我们讨论的另一主要目标是象差的校正方案。将 Strehl 判断所得的方案和上表比较可知, 低级象差差别很少, 高级象差差别则较显著。这种情况就如同 Rayleigh 判断不同于 Strehl 判断一样, 差别并不很大, 相差百分数约 20%。因之随着使用要求和判断标准的不同, 校正情况也应稍为不同。

另一方面, 在象差加大、 $s$  降低时, 按低对比分辨能力判断, 与高级象差相平衡的初级象差约须增大 1.2—1.4 倍。由上述的两种判断相互关系的讨论可以想见, 按中心点亮度要求的校正情况一定也将是这样, 这就是大象差情况的基本特点。将两种判断和两种孔型的结果都列于表 9 以资比较, 表中以圆孔 Strehl 判断的结果作为基本结果。列于最佳校正方案一栏的头一行, § 2 中已详细研究过它的几何表现。紧接着的一行数字是方孔的 Strehl 判断要求, 以下三行则是各不同频率的分辨能力要求的相应项系数。表中还列出方孔情况下两种判断得出的相应公差量, 其中第三行数字括以括号, 表示由于这时象差大, Strehl 判断实际是不能用的。

表9 几种校正方案比较

象差	最佳校正方案	Strehl 判断公差	分辨能力判断公差
$w_{20}$	$w_{20}(y^2+z^2)$	$s=0.8$ 0.6 0.1 (0.36)	$s=0.43$ 0.35 0.06 1.67
$w_{40}$	$w_{40}[(y^2+z^2)^2 - (y^2+z^2)]$ , $w_{40}[(y^2+z^2)^2 - 1.52(y^2+z^2)]$ , $w_{40}[(y^2+z^2)^2 - 1.33(y^2+z^2)]$ , $s=0.43$ $w_{40}[(y^2+z^2)^2 - 1.37(y^2+z^2)]$ , $s=0.35$ $w_{40}[(y^2+z^2)^2 - 1.77(y^2+z^2)]$ , $s=0.06$	0.34 0.48 (0.72)	0.34 0.47 2.12
$w_{60}$	$w_{60}[(y^2+z^2)^3 - 1.5(y^2+z^2)^2 + 0.6(y^2+z^2)]$ , $w_{60}[(y^2+z^2)^3 - 2.55(y^2+z^2)^2 + 1.71(y^2+z^2)]$ , $w_{60}[(y^2+z^2)^3 - 2.08(y^2+z^2)^2 + 1.04(y^2+z^2)]$ , $s=0.43$ $w_{60}[(y^2+z^2)^3 - 2.07(y^2+z^2)^2 + 1.05(y^2+z^2)]$ , $s=0.35$ $w_{60}[(y^2+z^2)^3 - 2.47(y^2+z^2)^2 + 1.43(y^2+z^2)]$ , $s=0.06$	0.69 0.98 (1.47)	0.78 0.96 3.3
$w_{02}$	$w_{02}[y^2 - 0.5(y^2+z^2)]$	0.34 0.48 (0.72)	0.34 0.51 3.3
$w_{22}$	$w_{22}[(y^2+z^2)^2 - 0.5(y^2+z^2)^2] - 0.75[y^2 - 0.5(y^2+z^2)]$ , $w_{22}[(y^2+z^2)^2 - 0.5(y^2+z^2)^2] - 0.86[y^2 - 0.5(y^2+z^2)]$ , $w_{22}[(y^2+z^2)^2 - 0.5(y^2+z^2)^2] - 0.88[y^2 - 0.5(y^2+z^2)]$ , $s=0.43$ $w_{22}[(y^2+z^2)^2 - 0.5(y^2+z^2)^2] - 0.88[y^2 - 0.5(y^2+z^2)]$ , $s=0.35$ $w_{22}[(y^2+z^2)^2 - 0.5(y^2+z^2)^2] - 1.14[y^2 - 0.5(y^2+z^2)]$ , $s=0.06$	1.31 1.85 (2.78)	1.05 1.43 6.8
$w_{21}$	$w_{21}y(y^2+z^2)$	0.31 0.44 (0.66)	0.31 0.43 2.4
$w_{41}$	$w_{41}[y(y^2+z^2)^2 - 1.2(y^2+z^2)]$ , $w_{41}[y(y^2+z^2)^2 - 1.93(y^2+z^2)]$ , $w_{41}[y(y^2+z^2)^2 - 1.65(y^2+z^2)]$ , $s=0.43$ $w_{41}[y(y^2+z^2)^2 - 1.70(y^2+z^2)]$ , $s=0.35$ $w_{41}[y(y^2+z^2)^2 - 2.08(y^2+z^2)]$ , $s=0.06$	0.63 0.89 (1.33)	0.66 0.85 3.5
$w_{03}$	$w_{03}[y^3 - 0.75y(y^2+z^2)]$ , $w_{03}[y^3 - 0.45y(y^2+z^2)]$ , $w_{03}[y^3 - 0.6y(y^2+z^2)]$ , $s=0.43$ ; $0.35$ ; $0.06$ .	0.63 0.89 (1.33)	0.62 0.88 3.1

★

## § 6 部分相干照明时的成象质量评价

光学仪器的成象质量不仅决定于系统的结构参数,而且与照明的方式有很密切的关系。

本章 § 1—§ 5 已经系统地阐述了评价光学系统成象质量的各种方法和指标。对于稀疏的点状物体(the dilute object)可以点分辨率和中心点亮度作为评判指标(见 § 2)。对于广延物体,采用光学传递函数(OTF)更为合适(见 § 4)。在讨论点分辨率时,曾假设点与点之间是不相干的。OTF 是一种线性系统理论,也仅在非相干照明的前提下才适用。

从一个空间不相干的光源发出的光,经过传布以后,具有一定的相干性(见 § 6.1)。因此,被一个光源(直接或由聚光镜)照明的物体,本质上都是部分相干的。部分相干的成象理论(见 § 6.2)表明,象强度与物函数(振幅的、位相的,或是复的)之间是一个非线性关系。因此,OTF 已不复适用。如何评价部分相干成象的质量,至今尚没有满意的解决。

在激光器出现之后,相干成象、全息术和相干光学信息处理等获得了惊人的发展。在这些系统中,象质评价的研究还刚刚开始。

最近的研究证明,“热”光源本身也有一定程度的相干性<sup>[30]</sup>。所以,自己发光的物体也是部分相干的。这在部分相干成象的理论中至今尚未计及。此外,光场的相干度并非仅由二级相干系数所能描述<sup>[61]</sup>。高次相干系数对相干光成象的影响还未见研究。下面我们将不考虑这些问题,仅限于以二级相干度叙述照明对象质的影响。

### § 6.1 von Cittert-Zernike 定理

关于光场的相干性,已经有了许多系统的论述<sup>[31]</sup>。这里仅介绍后面需要用到的几个概念和结论。

光场相干性(二级)的最基本的物理量是互相干函数  $\Gamma_{12}(\tau)$ , 定义为

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle V(\mathbf{x}_1, t + \tau) \cdot V^*(\mathbf{x}_2, t) \rangle \quad (129)$$

其中  $V(\mathbf{x}, t)$  为时刻  $t$  和空间坐标  $\mathbf{x}$  的电矢量的某一分量有关的复解析信号<sup>[32]</sup>,  $\tau$  为  $\mathbf{x}_1$  和  $\mathbf{x}_2$  位置的扰动之间的相对延迟时间,尖括弧表示系综平均或时间平均,“\*”代表复数共轭。互相干函数的归一化形成  $\gamma_{12}(\tau)$  称为复相干度:

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)} \quad (130)$$

$\Gamma_{11}(0)$ ,  $\Gamma_{22}(0)$  分别为  $\boldsymbol{x}_1$  和  $\boldsymbol{x}_2$  处的平均光强:

$$I_i = \Gamma_{ii}(0) = \langle V_i(t) V_i^*(t) \rangle, \quad (i=1, 2).$$

可以证明,  $\gamma_{12}(\tau)$  满足下列不等式:

$$0 \leq |\gamma_{12}(\tau)| \leq 1. \quad (131)$$

$|\gamma_{12}(\tau)| = 0, 1$  分别表示完全(二级)不相干和完全(二级)相干. 当  $\boldsymbol{x}_1$  和  $\boldsymbol{x}_2$  重合时,  $\gamma$  仅与  $\tau$  有关, 称为时间相干; 如果  $\tau$  固定(通常取  $\tau=0$ ),  $\gamma$  仅与两点的位置有关, 则称为空间相干.

在光学仪器理论中, 不同频率的光的作用已用色差别来表示. 因此, 为了着重讨论空间相干性对成象的影响, 常限于讨论准单色光源, 它满足

$$\Delta\nu \ll \bar{\nu}, \quad (132)$$

$\bar{\nu}$  为平均光频率. 在几乎所有的成象系统中, 还满足另一不等式:

$$|\tau| \ll \frac{1}{\Delta\nu}. \quad (133)$$

在满足式(132)和(133)的条件下, 互相干函数和复相干度可简化为:

$$\Gamma_{12}(\tau) = J_{12} e^{-2\pi i \bar{\nu} \tau}, \quad (134a)$$

$$\gamma_{12}(\tau) = \mu_{12} e^{-2\pi i \bar{\nu} \tau}, \quad (134b)$$

其中  $J_{12} = \Gamma_{12}(0)$ , 称为互强度,  $\mu_{12} = \gamma_{12}(0)$ , 称为复相干因子(有时也称为复相干度).

被一个准单色面光源照明的屏上(图 11.49), 任意两点  $P_1, P_2$  的互强度可以通过下式求得:

$$J(P_1, P_2) = \int_{\sigma} I(S) \frac{e^{ik(R_1 - R_2)}}{R_1 R_2} dS, \quad (135a)$$

其中  $I(S)$  为光源上面元  $dS$  的辐射强度;  $R_1, R_2$  分别为  $dS$  到  $P_1$  和  $P_2$  的距离;

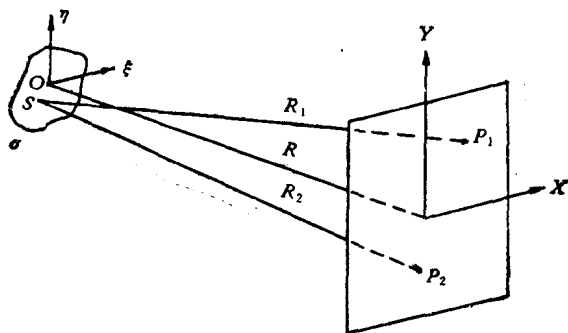


图 11.49

$k=2\pi/\lambda$ ; 积分是对整个光源进行的。同样,复相干度由下式求得:

$$\mu(P_1, P_2) = \frac{1}{\sqrt{I(P_1)}\sqrt{I(P_2)}} \int_{\sigma} I(S) \frac{e^{ik(R_1-R_2)}}{R_1 R_2} dS, \quad (135b)$$

其中  $I(P_1)$ ,  $I(P_2)$  为  $P_1$ ,  $P_2$  位置的光强, 分别为

$$I(P_i) = J(P_i, P_i) = \int_{\sigma} \frac{I(S)}{R_i^2} dS, \quad (i=1, 2). \quad (136)$$

(135)式称为 von Cittert-Zernike 定理<sup>[33], [34]</sup>, 它在形式上与 Huygens-Fresnel 衍射公式相似。设观察屏上  $P_2$  为定点,  $P_1$  为动点, 则复相干度等于从  $P_2$  发出的球面波, 经过一个有效孔径衍射之后, 在  $P_1$  位置的归一化复振幅, 这个有效孔径的大小和形状与光源一致, 有效孔径上的振幅分布与光源上的光强分布成正比。

当光源的大小以及  $\overline{P_1 P_2}$  远小于观察屏到光源的距离  $R$  时(类似于费涅尔近似), 式(135b)成为

$$\mu(P_1, P_2) = \frac{e^{i\psi} \iint_{\sigma} I(\xi, \eta) e^{-ik(p\xi + q\eta)} d\xi d\eta}{\iint_{\sigma} I(\xi, \eta) d\xi d\eta}, \quad (137)$$

其中  $\xi, \eta$  为光源上一代表点的坐标;  $p, q$  为

$$p = \frac{x_1 - x_2}{R}, \quad q = \frac{y_1 - y_2}{R},$$

$(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  分别是  $P_1, P_2$  点的坐标。  $\psi$  为  $P_1, P_2$  点相对于光源中心点的光程差引起的相移。式(137)表明, 在“费涅尔近似”下,  $|\mu_{12}|$  等于光源强度函数的傅里叶变换(归一化)的模, 空间频率的归化坐标为  $(p/\lambda, q/\lambda)$ 。如果光源为一半径等于  $\rho$  的均匀圆盘, 则互相干度为

$$\mu_{12} = \left( \frac{2J_1(v)}{v} \right) e^{i\psi}, \quad (138)$$

这里  $J_1$  为第一类第一阶贝塞尔函数,  $v$  和  $\psi$  为

$$v = k \frac{\rho}{R} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

$$\psi = k \frac{(x_1 + y_1)^2 - (x_2 + y_2)^2}{2R}. \quad S$$

互相干函数(或互强度)的传布规律对研究部分相干成象是重要的。这里仅给出互强度传布的积分表达式。已知在非相干

面光源  $S$  照明下(见图 11.50),  $\xi$  平面上的互强度为  $J(\xi_1, \xi_2)$ , 那末  $x$  平面上的互

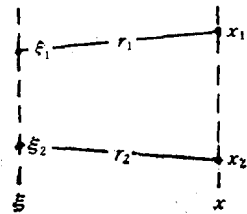


图 11.50

强度可由下式求得:

$$J(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = C \iint J(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2) \frac{e^{ik(r_1-r_2)}}{r_1 r_2} A_1 A_2^* d\xi_1 d\xi_2, \quad (139)$$

其中  $C$  = 常数;  $A_1, A_2$  为倾斜因子. 根据(136)式, 只要将  $\boldsymbol{x}_2$  重合在  $\boldsymbol{x}_1$  上, 便得到  $\boldsymbol{x}$  平面上的光强分布.

## § 6.2 部分相干照明时的成象

部分相干照明时的成象理论包括两个步骤: 第一步是从具体的光源和聚光镜出发, 计算物面上的互强度; 第二步由物面上的互强度求象强度分布. 但是, 在作了若干近似之后, 光源和聚光镜的作用可简化为由一个非相干的等效光源来代替.

### § 6.2.1 聚光镜的作用和等效光源的概念

如果光源和被照明的物体之间没有聚光器, 则物体上的互强度可从 von Cittert-Zernike 定理[式(135)]直接求得. 为了分析聚光器(以及后面的成象光学元件)的作用, 必须推广 von Cittert-Zernike 定理.

设光源和被照物体之间的介质不是均匀的, 则应该用  $i\bar{\lambda} \cdot K(S, P, \nu)$  代替(135)式中的  $e^{ikR}/R$ , 这时物面上的互强度表示为

$$J(P_1, P_2) = \bar{\lambda}^2 \cdot \int_{\sigma} I(S) K(S, P_1, \bar{\nu}) \cdot K^*(S, P_2, \bar{\nu}) dS, \quad (140)$$

$K(S, P, \bar{\nu})$  称为透射函数, 它表示位于  $S$  的、频率为  $\bar{\nu}$  的、具有单位辐射强度和零位相的单色点源在  $P$  点产生的复扰动. 它的平方就是一般所称的点扩散函数. 进一步令  $i\bar{\lambda} K(S, P, \bar{\nu}) \cdot \sqrt{I(S)} = U(S, P)$ , 则(140)式成为

$$J(P_1, P_2) = \int_{\sigma} U(S, P_1) U^*(S, P_2) dS. \quad (141a)$$

同样, 复相干度表示为

$$\mu(P_1, P_2) = \frac{1}{\sqrt{I(P_1)} \sqrt{I(P_2)}} \int_{\sigma} U(S, P_1) U^*(S, P_2) dS. \quad (141b)$$

式(141a)和(141b)称为 Hopkins 公式<sup>[35]</sup>. 当然, 频率为  $\bar{\nu}$  的单色源纯粹是虚构的, 因为单色源的复相干度应该等于 1. 但是, 它对复相干度的计算带来了许多方便.

下面以成象照明[例如显微镜中的所谓临界(critical)照明]为例, 计算物面上的复相干度的具体表达式. 设光源是半径为  $\rho$  的均匀圆盘(图 11.51), 则聚光镜入瞳上的复相干度[由(139)式]为



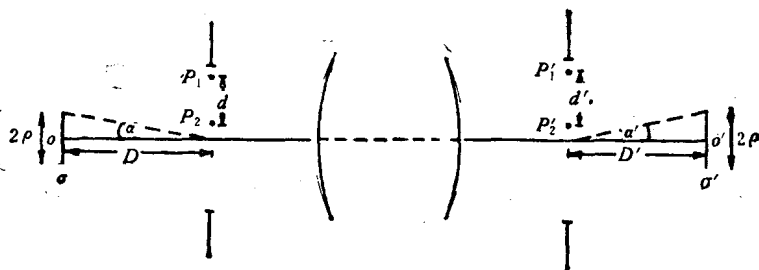


图 11.51

$$\mu(P_1, P_2) = \frac{2J_1(v)}{v} e^{i\psi}, \quad (142)$$

其中  $v = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \alpha$ .

为了计算聚光镜出瞳上的复相干度, 再设 Hopkins 虚源上一点  $S$  在入瞳的  $P_1, P_2$  点产生的复扰动为  $U(S, P_1), U(S, P_2)$ , 则出瞳上两共轭点  $P'_1, P'_2$  的复扰动为

$$U(S, P'_1) = K_{11}U(S, P_1), \quad U(S, P'_2) = K_{22}U(S, P_2),$$

$K_{11}, K_{22}$  表示聚光镜入瞳和出瞳之间的透射函数. 根据 Hopkins 公式(141), 出瞳上的复相干度为

$$\begin{aligned} \mu(P'_1, P'_2) &= \frac{K_{11}K_{22}^*}{|K_{11}||K_{22}|} \cdot \frac{1}{\sqrt{I(P_1)}\sqrt{I(P_2)}} \int_{\sigma} U(S, P_1)U^*(S, P_2)dS \\ &= e^{i(\psi_{11}-\psi_{22})} \cdot \mu(P_1, P_2). \end{aligned} \quad (143)$$

因此, 出瞳上的复相干度  $|\mu(P'_1, P'_2)|$  与入瞳上共轭点的复相干度  $|\mu(P_1, P_2)|$  相等, 位相变化与象差有关. 根据 Helmholtz 定理, 赛德尔变量  $v' = v$ . 因此, 均匀圆盘状非相干光源在聚光镜的出瞳上的复相干函数为

$$\mu(P'_1, P'_2) = \left(\frac{2J_1(v')}{v'}\right) e^{i(\psi_{11}-\psi_{22})}, \quad (144)$$

这里已略去  $\psi$ .

根据复相干度的传布定理[式(139)], 光源象平面上复相干度为

$$\begin{aligned} \mu(Q_1, Q_2) &= \frac{1}{\sqrt{I(Q_1)}\sqrt{I(Q_2)}} \\ &\cdot \iint \sqrt{I(P_1)}\sqrt{I(P_2)} \left(\frac{2J_1(v')}{v'}\right) \frac{e^{i[\psi_{11}-\psi_{22}+k(s_1-s_2)]}}{S_1 \cdot S_2} \\ &\cdot A_1 A_2^* dP_1 dP_2 \end{aligned} \quad (145)$$

积分是对出瞳进行的.

在大部分光学仪器中, 式(145)可以大为简化. 当出瞳远比相干面积为大时, 出

瞳近似地视作不相干的,可以把出瞳作为一个等效的非相干光源,则光源的象平面上的相干度近似地表示为

$$\mu(Q_1, Q_2) = \frac{1}{\sqrt{I(Q_1)}\sqrt{I(Q_2)}} \int I(P') \frac{e^{ik(S_1 - S_2)}}{S_1 S_2} dP'. \quad (146)$$

这样,  $\mu(Q_1, Q_2)$  就与照明系统的象差无关了。

进一步分析表明,在聚光镜的光瞳和光源本身远大于相干面积的条件下,被照明的物平面上的互相干函数和相干度仅与聚光镜的相对孔径有关,与照明系统的结构形式(及其象差)无关,不管将光源成象在物平面上,还是聚光镜的光瞳成象在物面上,甚至其他形式。因此,在计算物面上的复相干度时,都可以近似地想象有一个一定形状、大小和分布的非相干等效源,尽管这种近似的精度值得深入讨论<sup>[36]</sup>。

### § 6.2.2 象的形成<sup>[37]</sup>

如上所述,光源和照明系统合起来可用一个等效非相干光源表示,因此,成象过程简化为如图 11.52 所示。所有的坐标均采用赛德尔规范化坐标(第六章 § 1.1)。必须注意,在下面计算中,假设有一个场镜已把等效光源投影在物镜的入瞳上。

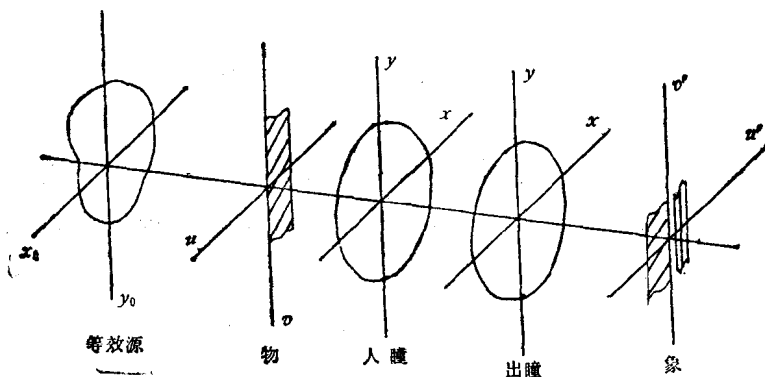


图 11.52

设物面上的互强度为  $J_0(u_1, v_1; u_2, v_2)$ , 物镜的透射函数(即振幅响应函数)为  $K(u_1, v_1; u'_1, v'_1)$ , 那末象平面上的互强度为:

$$J(u'_1, v'_1; u'_2, v'_2) = \iiint J_0(u_1, v_1; u_2, v_2) \cdot K(u_1, v_1; u'_1, v'_1) \cdot K^*(u_2, v_2; u'_2, v'_2) du_1 dv_1 du_2 dv_2 \quad (147a)$$

若物体足够小,以至等晕条件满足,则上式成为

$$J(u'_1, v'_1; u'_2, v'_2) = \iiint\!\!\!\int J_0(u_1, v_1; u_2, v_2) K(u_1 - u'_1, v_1 - v'_1) \cdot K^*(u_2 - u'_2, v_2 - v'_2) du_1 dv_1 du_2 dv_2. \quad (147b)$$

(147)式说明对四维空间 $(u_1, v_1; u_2, v_2)$ 中的互强度函数来说,部分相干的成象系统是线性的。但是,互强度是难于记录的。虽然,从互强度转移公式(147)很容易求得象强度。但是,这个更为复杂的函数的获得决不是信息量的增加,而是图象信息的损失。

为了更切合实际,下面分析透射物体的成象。设物体的复透过系数为 $F(u, v)$ ,并且限于照明孔径角不太大的情况,即物面上的互强度可表示为

$$J_0(u_1, v_1; u_2, v_2) = J_0(u_1 - u_2, v_1 - v_2), \quad (148)$$

则象强度为

$$I_1(u', v') = \iiint\!\!\!\int J_0(u_1 - u_2, v_1 - v_2) \cdot F(u_1, v_1) \cdot F^*(u_2, v_2) \cdot K(u' - u_1, v' - v_1) \cdot K^*(u' - u_2, v' - v_2) du_1 dv_1 du_2 dv_2 \quad (149)$$

后面(§ 6.4)将会看到,对一些特定的评价标准,谱面(光瞳)上的计算比较省时。把物函数 $F$ 和互强度 $J_0$ 进行傅里叶变换:

$$F(u, v) = \iint \mathcal{F}(x, y) e^{-2\pi i(xu + yv)} du dv \quad (150a)$$

$$J_0(u, v) = \iint \mathcal{J}_0(x, y) e^{-2\pi i(xu + yv)} du dv \quad (150b)$$

其中 $\mathcal{F}$ 为物谱, $\mathcal{J}_0$ 为等效光源在物镜入瞳上的投影,则

$$I_1(u', v') = \iiint\!\!\!\int \mathcal{F}(x', y'; x'', y'') \cdot \mathcal{F}^*(x', y') \mathcal{F}^*(x'', y'') \cdot e^{-2\pi i[(x' - x'')u' + (y' - y'')v']} dx' dy' dx'' dy'' \quad (151)$$

其中

$$\mathcal{F}(x', y'; x'', y'') = \iint \mathcal{J}_0(x, y) \mathcal{K}(x + x', y + y') \cdot \mathcal{K}^*(x + x'', y + y'') dx dy \quad (152)$$

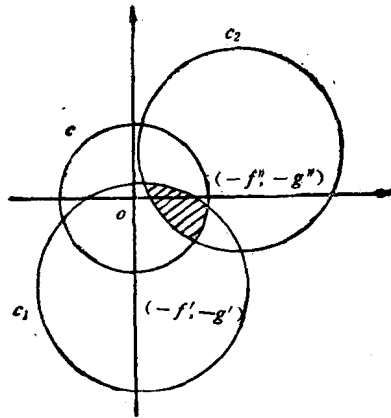


图 11.53

这里 $\mathcal{K}$ 为光瞳函数。(152)式的有效积分域如图 11.53 中的阴影部分,圆 $o$ 表示等

效源在物镜光瞳上的投影, 圆  $c_1$  及  $c_2$  表示位移后的光瞳.  $\mathcal{F}(x', y'; x'', y'')$  综合了照明系统和成象系统的效应, 称为交叉透射函数 (the transmission cross-function), 曾把它作为部分相干成象的质量评价函数之一.

Hopkins<sup>[37]</sup> 推导了一个与 (149) 式等效的强度公式:

$$I_1(u', v') = \iint \mathcal{J}_0(x_0, y_0) |\phi(x_0, y_0; u', v')|^2 dx_0 dy_0, \quad (153)$$

其中  $\phi(x_0, y_0; u', v')$  表示在位于等效源上  $(x_0, y_0)$  的单色点源照明下, 象的振幅分布函数. (153) 式把物函数和成象系统综合在一起, 而把等效源分离出来, 便于分析和计算照明对成象质量的影响.

### § 6.3 弱物体的衬度传递

在相干照明下, 低衬度和弱位相物体的衬度传递是一个线性过程<sup>[38]</sup>. 在部分相干照明下, 如果相干性较好, 则仍可近似地视为线性过程, 仅需加一个调制因子<sup>[39-41]</sup>. 这种近似理论为解决显微镜或电子显微镜中的大量实际问题带来了很大便利.

若考虑象的频谱而不是象强度, 则只要在 (151) 式两边乘以  $e^{2\pi i(xu'+yv')}$ , 对  $u', v'$  积分, 利用傅里叶积分定理, (151) 式成为

$$\mathcal{I}_1(\mathbf{x}) = \int \mathcal{F}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}, \mathbf{x}') \mathcal{F}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}) \mathcal{F}^*(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \quad (154)$$

设物透射透射为

$$F(\mathbf{u}) = 1 + O(\mathbf{u}), \quad (155a)$$

$$O(\mathbf{u}) = O_1(\mathbf{u}) + iO_2(\mathbf{u}). \quad (155b)$$

因此, 物谱为

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\mathbf{x}). \quad (156)$$

将 (156) 式代入 (154) 式, 得到

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1(\mathbf{x}) &= \mathcal{F}(\mathbf{x}, 0) \delta(\mathbf{x}) \\ &+ \{ \mathcal{F}(0, -\mathbf{x}) O^*(-\mathbf{x}) + \mathcal{F}(\mathbf{x}, 0) O(\mathbf{x}) \} \\ &+ \int \mathcal{F}(\mathbf{x}' + \mathbf{x}, \mathbf{x}') O(\mathbf{x}' + \mathbf{x}) O^*(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \end{aligned} \quad (157)$$

由 (152) 式可知,  $\mathcal{F}(\mathbf{x}, 0)$  和  $\mathcal{F}(0, \mathbf{x})$  是以等效源为权重的光瞳函数的自相关. (157) 式中的第一项为亮场照明的背景, 第二项与物谱成线性关系. 对于弱物体 ( $|O(\mathbf{u})| \ll 1$ ), 第三项可以略去. 因此, 在部分相干照明下, 弱物体的亮场象衬度与物函数成线性关系:

$$\mathcal{I}_2(\boldsymbol{x}) = \mathcal{F}(\boldsymbol{x}, 0)\mathcal{O}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{F}(0, -\boldsymbol{x})\mathcal{O}^*(-\boldsymbol{x}). \quad (158)$$

把物函数的实部和虚部分开, 注意到  $O_1(\boldsymbol{u})$  和  $O_2(\boldsymbol{u})$  均为实数, 所以  $\mathcal{O}_1(\boldsymbol{x})$  和  $\mathcal{O}_2(\boldsymbol{x})$  具有 Friedel 对称性<sup>1)</sup>, 故

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2(\boldsymbol{x}) = & \mathcal{O}_1(\boldsymbol{x})\{\mathcal{F}(\boldsymbol{x}, 0) + \mathcal{F}(0, -\boldsymbol{x})\} \\ & + i\mathcal{O}_2(\boldsymbol{x})\{\mathcal{F}(\boldsymbol{x}, 0) - \mathcal{F}(0, -\boldsymbol{x})\}. \end{aligned} \quad (159)$$

设光瞳函数  $\mathcal{K}(\boldsymbol{x})$  为

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{x}) = a(\boldsymbol{x})\exp(-2\pi i\chi(\boldsymbol{x})), \quad (160)$$

其中  $\chi(\boldsymbol{x})$  为以波长为单位的波象差函数,  $a(\boldsymbol{x})$  为

$$a(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & (\text{光瞳内}), \\ 0 & (\text{光瞳外}). \end{cases} \quad (161)$$

将式(160)和(161)代入(152), 计算  $\mathcal{F}(\boldsymbol{x}, 0)$  和  $\mathcal{F}(0, -\boldsymbol{x})$  的表达式, 代回到(159)式, 得到

$$\mathcal{I}_2(\boldsymbol{x}) = \mathcal{O}_1(\boldsymbol{x}) \cdot B_1(\boldsymbol{x}) + \mathcal{O}_2(\boldsymbol{x}) \cdot B_2(\boldsymbol{x}), \quad (162)$$

$$B_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}) = 2 \int \mathcal{J}(\boldsymbol{x}') a(\boldsymbol{x}') a(\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}) \frac{\cos}{\sin} \{2\pi[\chi(\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}) - \chi(\boldsymbol{x}')]\} d\boldsymbol{x}' \quad (163)$$

注意到(163)式的实际积分域, 对于等效源 ( $\mathcal{J}(\boldsymbol{x}')$ ) 的尺寸比物镜光瞳小得多的情况 (电子显微镜中一般如此), 积分内的  $a(\boldsymbol{x}')$  和  $a(\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x})$  近似地代之以 1. 把波象差函数在  $\boldsymbol{x}$  附近展开:

$$\chi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}') = \chi(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}' \cdot \nabla\chi(\boldsymbol{x}) + \dots \quad (164)$$

在相同的精度内 (一级近似),  $\chi(\boldsymbol{x}')$  中若没有低于二次的项, 则可以略去, 则(163)式成为

$$B_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}) = 2 \frac{\cos}{\sin} \{2\pi\chi(\boldsymbol{x})\} \cdot E(\boldsymbol{x}) \pm 2 \frac{\sin}{\cos} \{2\pi\chi(\boldsymbol{x})\} \cdot \hat{E}(\boldsymbol{x}), \quad (165)$$

其中  $E(\boldsymbol{x})$  和  $\hat{E}(\boldsymbol{x})$  分别为

$$E(\boldsymbol{x}) = \int \cos \{2\pi\boldsymbol{x}' \cdot \nabla\chi(\boldsymbol{x})\} \cdot \mathcal{J}(\boldsymbol{x}') d\boldsymbol{x}', \quad (166a)$$

$$\hat{E}(\boldsymbol{x}) = \int \sin \{2\pi\boldsymbol{x}' \cdot \nabla\chi(\boldsymbol{x})\} \cdot \mathcal{J}(\boldsymbol{x}') d\boldsymbol{x}'. \quad (166b)$$

如果等效源是对称分布的, 显然  $\hat{E}(\boldsymbol{x}) = 0$ . 最后得到部分相干照明时的低衬度振幅物体和弱位相物体的衬度传递函数为

$$B_{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x}) = 2 \frac{\cos}{\sin} \{2\pi\chi(\boldsymbol{x})\} \cdot E(\boldsymbol{x}). \quad (167)$$

1) 一个实函数  $g(\boldsymbol{x})$  的傅里叶  $G(\boldsymbol{k})$  满足  $G(\boldsymbol{k}) = G^*(-\boldsymbol{k})$ , 称为 Friedel 对称性.

因为  $2 \cos \{2\pi\chi(\mathbf{x})\}$  和  $2 \sin \{2\pi\chi(\mathbf{x})\}$  分别为相干照明时的振幅和位相传递函数<sup>[38]</sup>, 所以, 在上述近似条件下, 部分相干照明的作用是在相干传递函数上加了一个包络因子  $E(\mathbf{x})$ . 从(166)式可知,  $E(\mathbf{x})$  是等效源的傅里叶变换——从  $\mathbf{x}$  空间变换到  $\nabla \cdot \chi(\mathbf{x})$  空间(前者是频率空间, 后者是长度空间). 而等效源的傅里叶变换又是互相干函数, 因此有

$$E(\mathbf{x}) = \Gamma(\nabla\chi(\mathbf{x})). \quad (168)$$

上式表明, 包络函数等于以波象差在光瞳上的梯度为宗量的互相干函数. 根据互相干函数的性质可知, 波象差在光瞳上的梯度越大, 则传递函数下降得越严重. 这个结论是分别由 Frank<sup>[40]</sup> 和 Bonhomme<sup>[41]</sup> 等人导出的.

我们采用上述模型, 计算了高分辨率电子显微镜中的直边象, 解释了费涅尔条纹的位置与宽度等反常现象.

Frank 通过数值计算将(167)式与未经近似的(163)式作了比较, 证明了当有效源的大小为光瞳大小的 0.138 时, 在规化空间频率 0 到 1.5 之间, 两者符合得很好(图 11.54 中虚线为近似解).

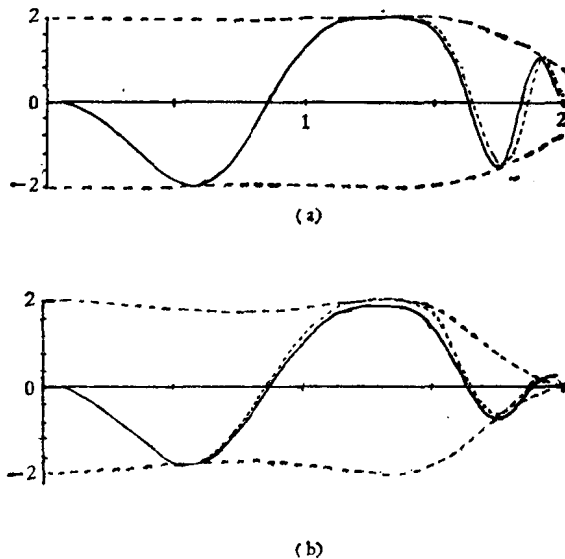


图 11.54

(a)  $\tilde{A}_z=1.732, \tilde{q}_0=0.069$ ; (b)  $\tilde{A}_z=1.732, \tilde{q}_0=0.138$

在二级近似下[即(164)式中取到  $\mathbf{x}'$  的二次项], Frank 定义了一个有效波象差函数[[39]中(69)式]:

$$\chi_{\text{有效}}(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}) - \frac{i}{2\pi} \ln E(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x}). \quad (169)$$

用  $\chi_{\text{有效}}(\alpha)$  代替(167)式中的  $\chi(\alpha)$ , 则可以直到归化频率 2 还有较高的精度(图 11.55).

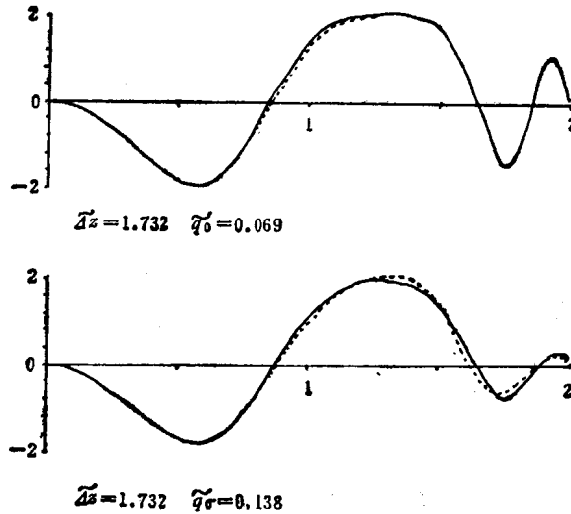


图 11.55

可以把包络函数  $E(\alpha)$  看作相干象变换到部分相干象的传递函数, 即把实际的成象系统分解为两个分系统的串接, 其中第一个分系统为相干成象系统, 第二个分系统把相干象退化为部分相干象<sup>[42]</sup>. 这样, 可以用 Linfoot 的象质评价标准<sup>[43]</sup> 单独研究第二个分系统. 失真度(dissimilarity)  $\mathcal{X}$  定义为

$$\mathcal{X} = \frac{\int |1 - E(\alpha)|^2 d\alpha}{\int d\alpha} \quad (170)$$

结构分辨率(the structural resolving power)定义为

$$\mathcal{S} = \frac{\int |E(\alpha)|^2 d\alpha}{\int d\alpha} \quad (171)$$

相应地, 逼真度(fidelity)  $\Phi = 1 - \mathcal{X}$ , 相关品质(correlation quality)

$$\Psi = -\frac{1}{2}(\Phi + \mathcal{S}).$$

图 11.56 和图 11.57 以离焦量<sup>1)</sup> 为参量, 分别表示失真度、结构分辨率与等效源大小

1) 采用 Hanszen-Trepte 广义坐标<sup>[44]</sup>, 即广义空间频率  $\tilde{k} = \sqrt{C_0} \lambda^3 k$ , 广义离焦量  $\tilde{\Delta}_f = \frac{\Delta f}{\sqrt{C_0 \lambda}}$ , 其中  $C_0$  为球差系数.

的关系。图 11.58 表示结构分辨率与空间频率的关系。

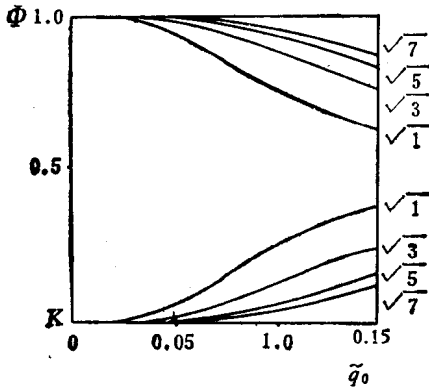


图 11.56

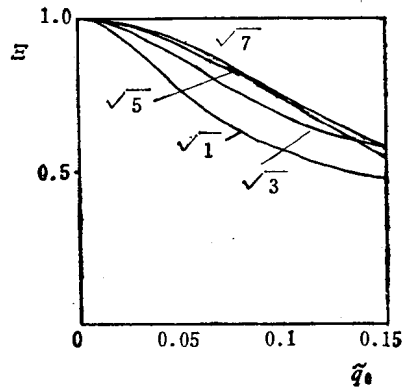


图 11.57

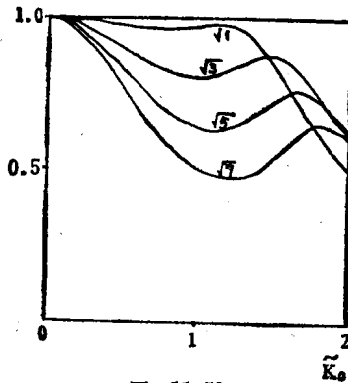


图 11.58

### § 6.4 其他评价方法

在部分相干成像理论中，交叉透射函数  $\mathcal{T}$  [(152)式] 综合了成像系统和照明系统的效应，似乎是一个好的评价函数。但是，它联系着两个空间频率。把它作为权重将物谱自相关才能得到一个频率的象强度 [(154)式]。因此，交叉透射函数是不直觉的和无法测量的。可以把  $\mathcal{T}(x'+x, x')$  在  $x$  附近按泰勒级数展开，进行若干近似后加以分析。但是，至今未有这方面的成功报道。

目前，部分相干照明时的成像质量评价，大多采用特定的标准，进行数值计算，再与实验作比较。

#### § 6.4.1 点分辨率

在非相干照明时，讨论点分辨率有两种标准，即 Rayleigh 判据和 Sparrow 判



据<sup>[44]</sup>。前者已在本章 § 2.6 中讨论过了；后者规定，当两个点源的合成象强度其二级微商在两个高斯象点的中心等于 0 时，这两个点是可以分辨的。

根据 Rayleigh 判据，Hopkins 和 Barnham<sup>[46]</sup> 讨论了照明孔径对显微镜的点分辨率的影响。对无象差的成象系统，当照明孔径角比物镜孔径角大 1.5 倍时，分辨能力最好。

Grimes 和 Thompson<sup>[46]</sup> 按 Sparrow 判据讨论了相干度不同时两个点象的强度分布。对于同一光学系统，非相干点分辨率比相干时好 1.56 倍（一维近似）。这与 Beran 和 Parrent 的结果<sup>[47]</sup> 一致（图 11.59）。

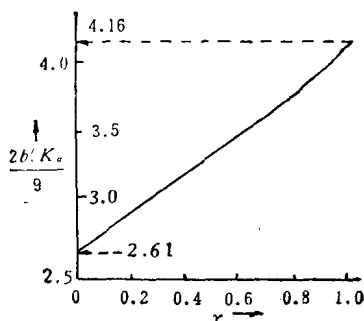


图 11.59

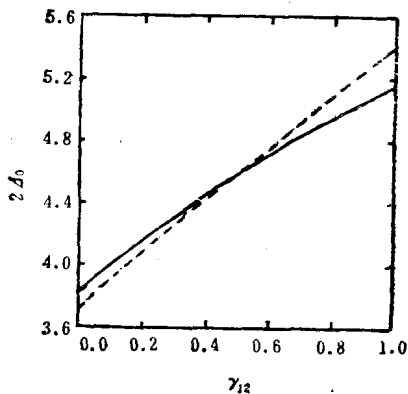


图 11.60

Som<sup>[48]</sup>，Kintner 和 Sillitto<sup>[49]</sup> 研究了象差系统的点分辨率，证明了点分辨率对象差是很不灵敏的（图 11.60）。当波象差达到  $18\lambda$  时（图中虚线），Strehl 强度已下降到 0.03，但是点分辨率的变化不到 6%。

上述结果都限于对称照明，两个物点也对称地位于光轴两侧，显然这两个象点是同位相的，它们相互干涉，在联线的中点相长。所以，无论 Rayleigh 判据或者 Sparrow 判据，都得到相干度越好，分辨率越差的结论。如果采用斜照明，使两个点的位相相反，那末相干照明的分辨率有可能超过非相干情况。当然，两个点象之间的距离会随着相干度的改变而不同。

根据线性传递理论，一个象点并不只与一个物点有关，而是一个物区域的综合贡献（线性迭加）。部分相干照明使综合的作用更为加强（非线性迭加）。因此，点分辨率的判据对评价部分相干象的不充分性是可以理解的。

§ 6.4.2 正弦物体的表现传递函数

由于 OTF 在象质评价中的普遍使用，很多人也试图用正弦试样的衬度传递作为

部分相干成象的评价标准。

Becherer 和 Parrent<sup>[50]</sup> 以一维正弦调制的振幅物体为对象, 即

$$t(u) = 1 + \cos(2\pi\mu_0 u). \quad (172)$$

它的强度分布为

$$|t(u)|^2 = \frac{3}{2} + 2\cos(2\pi\mu_0 u) + \frac{1}{2}\cos(2\pi 2\mu_0 u). \quad (173)$$

对于具体的成象系统和照明方式, 可以计算象强度分布:

$$I_1(u') = A + B\cos(2\pi\mu_0 u') + C\cos(2\pi 2\mu_0 u'). \quad (174)$$

定义基频分量的表观传递函数(MTF)为

$$\tau(\mu_0) = \frac{3B}{4A}. \quad (175)$$

同样, 二次谐波表观传递函数定义为

$$\tau(2\mu_0) = \frac{3C}{A}. \quad (176)$$

Swing 和 Clay<sup>[51]</sup> 讨论了正弦调制的强度物体的表观传递函数。

Iohioka<sup>[52]</sup> 分析了正弦复物体, 一直计算到六次谐波。

对于强物体, 部分相干成象是一个高次非线性过程, 象空间中的一个空间频率的谱强度综合了物空间中许多空间频率的非线性作用, 特别是位相特征, 会使象发生严重失真。因此, 正弦试样的表观传递函数不是一个很有意义的评价函数。

### § 6.4.3 直边的象分布、锐度和表观传递函数

部分相干照明的直边, 既反映相干函数的完整面貌(半平面), 又具有丰富的频谱分布。因此, 直边象作为评价标准应该比点分辨率或正弦试样的衬度传递函数更确切一些。

对于部分相干直边象的计算已有过许多报道<sup>[53-55]</sup>。设直边平行于  $v$  轴(图 11.52), 透射函数为

$$A(u) = \left. \begin{array}{l} 0 \quad u < 0 \\ 1 \quad u > 0 \end{array} \right\}. \quad (177)$$

$A(u)$  的傅里叶变换为

$$a(x, y) = 2\pi\delta(y) \left[ \pi\delta(x) - \frac{i}{x} \right]. \quad (178)$$

在等效源上位于  $(x_0, y_0)$  的单色点源照明下, 直边象的振幅分布为

$$\begin{aligned} \phi(x_0, y_0; u', v') = & 2\pi^2 H(x_0, y_0) \exp(i[kW(x_0, y_0) + u'x_0 + v'y_0]) \\ & - 2\pi i \exp(iv'y_0) \int_{-\sqrt{1-v'^2}}^{\sqrt{1-v'^2}} (x-x_0)^{-1} \exp(i[kW(x, y_0) + u'x]) dx \end{aligned} \quad (179)$$

其中  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $W(x, y)$  为波象差,  $H(x_0, y_0)$  为等效源的通光口径,

$$H(x_0, y_0) = \left. \begin{array}{l} 0 \quad x_0^2 + y_0^2 > 1 \\ 1 \quad x_0^2 + y_0^2 \leq 1 \end{array} \right\}.$$

将(179)式代入(153)式,进行数值积分,便得到象强度的分布。

我们对一具体的光学系统进行了计算,系统的波象差函数为:

$$\begin{aligned} W(x, y) = & A_{00} + A_{20}x^2 + A_{22}y^2 + A_{40}x^4 + A_{42}x^2y^2 \\ & + A_{44}y^4 + A_{60}x^6 + A_{62}x^4y^2 + A_{64}x^2y^4 + A_{66}y^6 \\ & + A_{80}x^8 + A_{82}x^6y^2 + A_{84}x^4y^4 + A_{86}x^2y^6 + A_{88}y^8 \\ & + A_{10}x + A_{32}xy^2 + A_{54}xy^4 + A_{76}xy^6 + A_{30}x^3 \\ & + A_{52}x^3y^2 + A_{74}x^3y^4 + A_{50}x^5 + A_{72}x^5y^2 + A_{70}x^7, \end{aligned}$$

波象差系数(以微米为单位)为

$A_{00}$	$A_{20}$	$A_{22}$	$A_{40}$	$A_{42}$	$A_{44}$	$A_{60}$	$A_{62}$	$A_{64}$	$A_{66}$	$A_{80}$	$A_{82}$	
0.00	0.63	0.06	-1.86	0.00	0.07	1.45	2.67	1.16	0.07	-0.23	-0.28	
$A_{34}$	$A_{36}$	$A_{38}$	$A_{10}$	$A_{52}$	$A_{54}$	$A_{76}$	$A_{30}$	$A_{52}$	$A_{74}$	$A_{50}$	$A_{72}$	$A_{70}$
0.25	0.35	0.05	0.00	0.00	-0.02	0.04	0.00	0.04	0.03	-0.02	0.06	0.05

图 11.61—11.63 分别表示照明孔径与物镜孔径之比为 0.25, 0.4, 0.7 时的直边象, 每幅图中的曲线 1, 2, 3 表示直边位置, 分别为平行于  $v$  轴, 与  $v$  轴成  $45^\circ$ , 垂直于  $v$  轴, 曲线 0 表示象差系数全部为 0 时的直边象。

图 11.64 表示照明孔径与物镜孔径之比为 0.4, 象差系数, 全部增加 2.68 倍时的情况, 可见直边象对物镜的象差变化是十分灵敏的。

我们的另一些计算表明, 对于有象差的成象系统, 当相干度提高时, 象质会有所改善。Offner<sup>[56]</sup> 对一个象差不对称的系统, 在象差的方向上减小照明孔径, 也有同样的结果。

计算还表明, 对一个不相干成象较好的系统, 如果用部分相干的直边象来评价时觉得不理想, 则适当改变离焦量可以获得一定程度的改善。

用直边象来评价光学系统的质量, 在 OTF 的理论和测量中早有采用<sup>[57]</sup>。直边象的微分为点扩散函数的一个截面, 将它进行傅里叶变换, 便得到一个方向上的传递

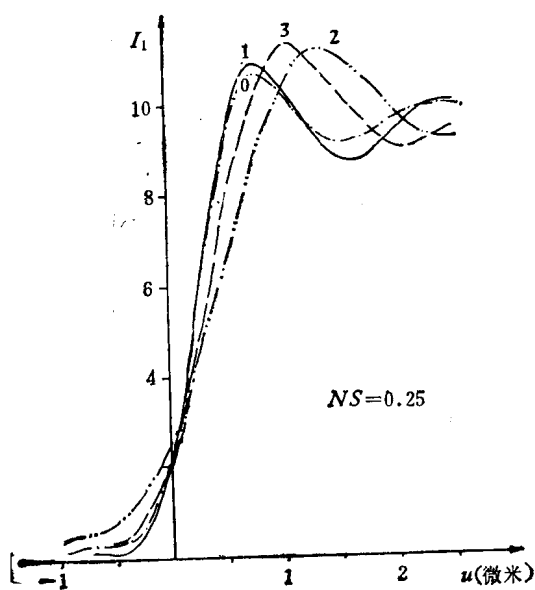


图 11.61

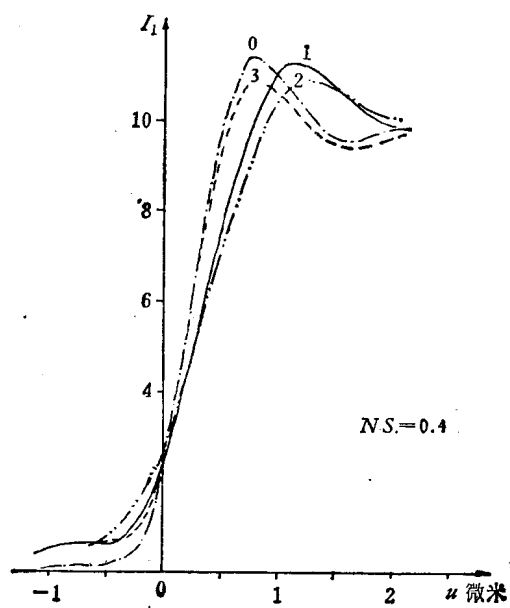


图 11.62

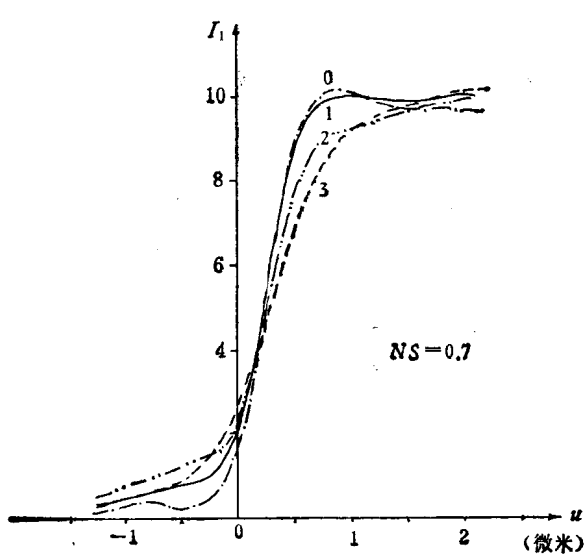


图 11.63

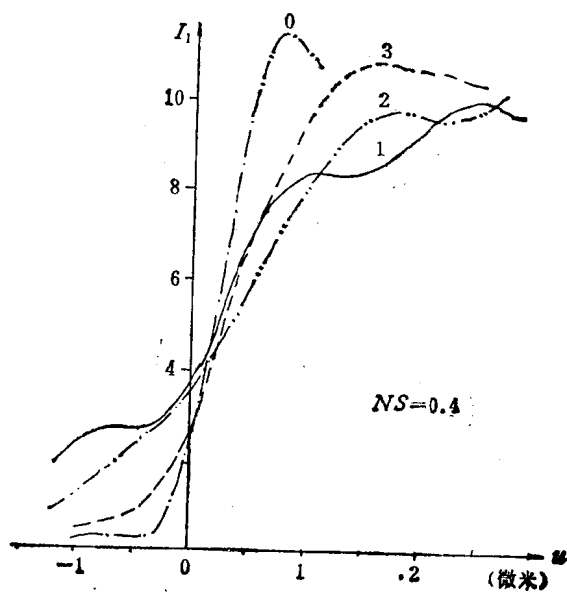


图 11.64

函数。根据傅里叶变换的性质, 传递函数也可表示为

$$\tau(x) = -2\pi i \mathcal{J}_1(x), \quad (180)$$

其中  $\mathcal{J}_1(x)$  为象的谱强度。

将部分相干直边象进行傅里叶变换所得到的  $\mathcal{J}_1(x)$  代入(180), 定义为部分相干表观传递函数。Thompson<sup>[58]</sup> 推导了它的表达式:

$$\begin{aligned} \tau(x) = & \int \mathcal{J}(x') \mathcal{H}(x-x') \mathcal{H}(x') dx' \\ & + \frac{i}{2\pi} \int \log \left[ \frac{x-x'-\beta}{x-x'+\beta} \right] \cdot \mathcal{H}(x-x') \cdot \mathcal{H}(x') dx', \end{aligned} \quad (181)$$

其中  $\beta =$  等效源  $\mathcal{J}(x')$  的大小与光瞳大小之比。图 11.65 表示无象差系统的表观传递函数  $\tau(x)$  的模和幅角。

除此而外, 尚有采用直边的锐度(acutance)作为评价标准的。锐度  $\alpha$  定义为直边象强度曲线(图 11.66)在阴影内 ( $u' < 0$ ) 的第一个极小  $u_1$  到直边外 ( $u' > 0$ ) 的第一个极大  $u_2$  之间的斜率的均方值:

$$\alpha = \frac{\int_{u_1}^{u_2} \left( \frac{dI_1}{du} \right)^2 du}{I_1(u_2) - I_1(u_1)}. \quad (182)$$

当极小值  $u_1$  不明显时, 可从某一个很小的强度点起算[例如取  $I_1(u_1) = 0.01I(\infty)$ ].

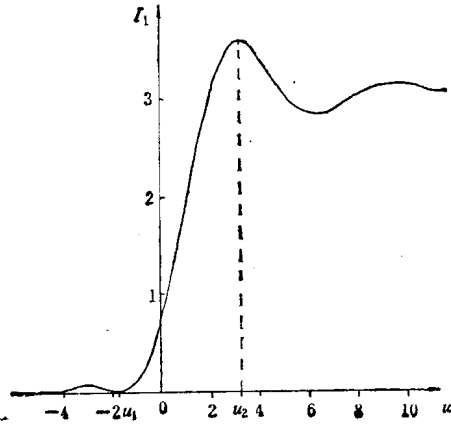


图 11.66

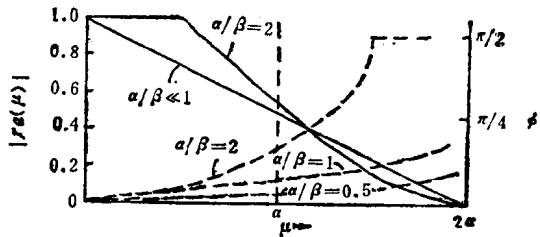


图 11.65

锐度与照明方式和物镜的象差有密切的关系。

直边象中还有两个指标:  $u=0$  处的强度  $I_1(0)$  和环带(ringing)效应。

$I_1(0)$  的大小代表象相对于几何边界的偏离。  $I_1(0)$  可表示为:

$$I_1(0) = \alpha [I_1(\infty) + I_1(-\infty)]. \quad (183)$$

在非相干情况下,  $\alpha = \frac{1}{2}$ 。在相干情况下,  $\alpha = \frac{1}{4}$ 。部分相干时,  $\alpha$  随相干度和象差的不同在  $\frac{1}{4}$  到  $\frac{1}{2}$  之间变化。

环带效应除了可以增加弱物体的衬度之外,几乎总是有害的,采用变迹术可以消除环带效应,但是以降低分辨率为代价<sup>[59]</sup>. Kintner 和 Sillitto<sup>[60]</sup>从理论上分析了部分相干的环带效应,定义了一个新的评价函数  $Q(u)$

$$Q(u) = K(u) \cdot \left[ \int [K(u-u') \cdot J(u')] du' \right]^*, \quad (184)$$

其中  $J(u')$  是互相干函数,“\*”代表复数共轭. 他们证明了  $\text{Re}\{Q(u)\} \geq 0$  为扼制环带效应的必要充分条件.

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Sommerfeld, A. und Rung, I., Anwendung der Vektorrechnung auf die Grundlagen der Geometrischen Optik, *Ann. Physik*, **B35**(1911), 277.
- [ 2 ] Launeberg, R. K., *Mathematical Theory of Optics*, Brown Univ. (1944).
- [ 3 ] Born, M. and Wolf, E., *Principle of Optics*, Pergamon Press (1960), Chapter I, VIII, XI.
- [ 4 ] Bouwkamp, C. J., *Diffraction Theory. Reports Prog. Phys.* (1954), pp. 35—100.
- [ 5 ] Linfoot, E. H. and Wolf, E., Phase Distribution near Focus in an Aberration-free Diffraction Image. *Proc. Phys. Soc.*, **B69**(1956), 823.
- [ 6 ] Maréchal, A., Étude des Effets Combinés de la Diffraction et des Aberrations Géométriques sur L'image d'un Point Lumineux, *Rev. Opt.*, **27**(1948), 73.
- [ 7 ] Linfoot, E. H., *Recent Advance in Optics*, Oxford (1955), pp. 58—72.
- [ 8 ] Zernike, F., Beugungstheorie des Schneidenerfahrens und Seiner Verbesserten Form. der phasenkontrastmethode, *Physica*, **1**(1934), 689.
- [ 9 ] Zernike, F. and Nijboer, B. R. A., Contribution to La Théorie des Images Optiques, Paris, *Revue d'Optique*(1949), p. 232.
- [10] Wang Ta-Hang, Note on The Best Focus in the Presence of Spherical Aberration, *Proc. Phys. Soc.*, **53**(1941), 157
- [11] Nijboer, B. R. A., Thesis, Univ. of Groningen(1942), p. 55; p. 62.
- [12] International Commission for Optics Nomenclature for Fourier Transforms of Functions, *Opt. Acta*, **8**(1961), 359.
- [13] Shannon, C. E., A Mathematical Theory of Communication, *Bell System tech. Jour.*, **27**(1948), 379; 623. 其系统解释如: Goldman, S., *Information Theory*, London(1953).
- [14] 例如: Brillouin, L., *Science and Information Theory*, N. Y. (1956).
- [15] Duffieux, P. M., *L'intégrale de Fourier et ses Application à l'optique*, Rennes, Privately Printed (1946).
- [16] Schade, O. H., Fourier treatment of Optical processes, *Jour. Opt. Soc. Amer.*, **43**(1953), 704
- [17] 王之江, 反应函数和成像质量评价(光学设计训练班讲义, 1957).
- [18] 佐柳和男、伊藤宏, *Information Volum of Photogr. Obj. (I); (III)*, 应用物理, **25**(1956), 189; 443.
- [19] Fellegett, P. B. and Linfoot, E. H., On the Assessment of Optical Images, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **A247**(1955), 369.
- [20] Hopkins, H. H., The Frequency Response of a Defocused Optical System, *Proc. Roy. Soc.*, **A231**(1955), 91.
- [21] Hopkins, H. H., The Aberration Permission in Optical Systems, *Proc. Phys. Soc.*, **B70**(1957), 449.
- [22] De, M., The Influence of Astigmatism on the Respones Function of an Optical System, *Proc. Roy*

- Soc.* **A233**(1956), 91.
- [23] De, M. and Nath, K., Response of Optical Systems Suffering from Primary Coma, *Optik*, **15** (1958), 739.
- [24] Goodbody, A. M., The Influence of Spherical Aberration on the Response Function of an Optical System, *Proc. Phys. Soc.*, **72**(1958), 411.
- [25] Black, G. and Linfoot, E. H., Spherical Aberration and the Information Content of Optical Images, *Proc. Roy. Soc.*, **A239**(1956), 522.
- [26] Higgins, G. C. and Jons, R. C., The Nature and Evaluation of the Sharpness of Photographic Images, *J. SMPTE*, **58**(1952), 277.
- [27] Higgins, G. C. and Wolf, R. N., The Relation of Definition to Sharpness and Resolving Power in a Photographic System, *Jour. Opt. Soc. Amer.*, **45**(1955), 121.
- [28] Herzberger, M., Light Distribution in the Optical Image, *Jour. Opt. Soc. Amer.*, **37**(1947), 485.
- [29] Miyamoto, K., On a Comparison between Wave Optics and Geometrical Optics by Using Fourier Analysis, I; II, *Jour. Opt. Soc. Amer.*, **48**(1958), 57; 567. III, *Jour. Opt. Soc. Amer.*, **49**(1959), 35.
- [30] E. Wolf, *J. Opt. Soc. Am.*, **68**(1978), 6.
- [31] L. Mandel and E. Wolf, *Rev. Mod. Phys.*, **37**(1965), 231. 王之江, 物理学报, **19**(1963), 320. 或参考 [32].
- [32] M. Born and E. Wolf, Principles of Optics, 5 th ed. (1975), ch 10.
- [33] P. H. van Cittert, *Physica*, **1**(1934), 201.
- [34] F. Zernike, *Physica*, **5**(1938), 785.
- [35] H. H. Hopkins, *Proc. Roy. Soc.*, **A208**(1951), 263.
- [36] K. Yamamoto, Y. Ichioka, T. Suzuki, *Optica Acta*, **23**(1976), 987.
- [37] H. H. Hopkins, *Proc. Roy. Soc.*, **A217**(1953), 408.
- [38] P. W. Hawkes, Image Processing and Computer-aided Design in Electron Optics, 1973, 2--53.
- [39] R. H. Wade and J. Frank, *Optik*, **49**(1977), 81. J. Frank, Proc. VI European Congress on Electron microscopy, 1976, 97.
- [40] J. Frank, *Optik*, **38**(1973), 519.
- [41] P. Bonhomme, A. Beorchia and N. Bounet, *C. R. Acad. Sci., Paris B* **277**(1973), 83.
- [42] J. Frank, *Optik*, **43**(1975), 103.
- [43] E. H. Linfoot, Fourier Methods in Optical Image Evaluation, 1964, 30.
- [44] G. Sparrow, *Astrophys. J.*, **44**(1916), 76.
- [45] H. H. Hopkins and P. M. Barnham, *Proc. Phy. Soc.*, **63**(1960), 72.
- [46] D. Grimes and B. J. Thompson, *J. Opt. Soc. Am.*, **57**(1967), 1330.
- [47] M. Beran and G. E. Parrent, Theory of Partial Coherence, 1964.
- [48] S. C. Som, *Optica Acta*, **18**(1971), 597.
- [49] E. C. Kintner and R. M. Sillitto, *Optica Acta*, **20**(1973), 721.
- [50] R. J. Becherer and G. B. Parrent, *J. Opt. Soc. Am.*, **57**(1967), 1479.
- [51] R. E. Swing and J. R. Clay, *J. Opt. Soc. Am.*, **57**(1967), 1180.
- [52] Yoshik Ichioka, *J. Opt. Soc. Am.*, **65**(1975), 892.
- [53] D. Canals-Frau and M. Rousseau, *Optica Acta*, **5**(1958), 15.
- [54] B. Watrasiewicz, *Optica Acta*, **12**(1965), 167.
- [55] R. Parakat, *Optica Acta*, **17**(1970), 337.
- [56] A. Offner and J. Meiron, *Appl. Opt.*, **8**(1969), 183.
- [57] R. E. Hopkins and D. Dutton, Lens Test Standardization Study, AD-710633.
- [58] B. J. Thompson, *Progress in Optics*, **7**(1969), 218.

- [59] P. C. Conside, *J. Opt. Soc. Am.*, **56** (1966), 1001.
- [60] E. C. Kintner and R. M. Sillitto, *Optica, Acta* **24**(1977), 591.
- [61] R. J. Glauber, ed., *Quantum Optics*, Enrico Fermi, Course 42, Academic Press, 1969.



## 第十二章

# 电子计算机和光学设计

### §1 概 述

在光学设计工作中运用电子计算机已经引起了很大变革。一开始是用以进行光路计算,将人们从繁重的光路计算工作中解放出来,并使复杂的光学系统(如变焦距物镜)的设计计算工作变为易于进行。再进一步,使人们能够对具体的光学系统做认真的质量评价和分析工作。这是由于质量评价通常涉及衍射积分计算、光学传递函数计算、部分相干照明下的成象计算等等。不用电子计算机时,这些计算工作都难以进行。再就是用计算机作自动修改自动平衡,逐步变更结构以使光学系统最佳化,这也是可以规范化的重复劳动,可以用计算机实现。这也就是所谓自动设计工作,这几方面的成功已导致光学系统的质量和性能的水平都有显著的提高。

除这些方面以外,人们将会期望机器做更多的代替人类脑力劳动的工作。例如在自动平衡过程中更少需要人的干预,更少依赖设计工作者的光学知识水平,自行选择结构型式和导出改进方向等等。某些设计程序的作者也曾声称,他的程序不要求使用者具有光学知识,或者夸耀程序输入结构是三块平板就可以设计出三片型照相物镜之类。但是,现有的自动设计程序共同的基础是:依据光学系统的质量(以一定的评价函数为标志)随自变量变化的微分值,作逐次接近而求解。从光学的角度看,它尚未能把已有的象差理论和设计经验概括进去;从数学的角度看,它也尚未能一般地解决多变数函数空间中求函数的极值的问题。因此,事实上,现在的程序还是要求程序使用者具有尽可能多的象差理论和设计经验。因此,自动设计是尚待进一步研究的方向。

计算机按一定的程序进行运算,和人工计算不同,它应事先预计到可能遇到的各种情况及其对策,事先排除可以排除的故障,否则计算就将常遇不测而停机,或对可算的对象拒绝计算。程序中所用的算法应是规格化的、通用的,随之而来的是这种算

法可能不是最简化的算法。由于这个原因,必须导出的一套与前面数章不同的、适用于电子计算机程序要求的各种计算方法。这种方法应能在各种情况下达到同一的计算精度,例如当物空间和象空间不是空气,物体和入瞳处于任意可能位置,入瞳有很大的象差,物和象都在无限远处,等等。为不致出现溢出——超出计算机容量的大数,所有除法公式都须仔细处理。改造一切大数相减成为小数的公式,问题的物理性质决定,这一点总是能够做到的。公式中避免使用一切可能为大值的量,例如截距。至于球面半径,按照习惯在输入输出时仍然使用,但在程序内部则一律用其倒数,即曲率。由此可见,适用于计算机的算法与人工计算的算法有相当大的不同。

## §2 高斯光学和初级象差

从象差理论看来(第九章 §1),同轴系统一定是最常用的系统。虽然由于种种特殊要求而使用了一些非同轴的光学系统,但同轴系统仍然是最主要的。因此,我们首先对它的各个方面进行研究,其中包括最基本的高斯光学量和初级象差。

光束的初值不能再取物距和物高,而取下列恒为有限的量:拉氏不变量  $j = n_1 u_1 n_1$ , 轴上光线坐标  $h_1$  和  $u_1$ , 以及光阑面数  $k$  (光阑在第  $k$  面上)。有了这些初值就可以算出一切高斯光学参数。按照(I. 27)式计算折射和转面过程:

$$\begin{cases} i = h/r - u, \\ ni = n' i', \\ u' = i + u - i', \\ h^* = h - d \cdot u'. \end{cases} \quad (1)$$

这就可以由轴上光线的初值算出各面的参量。为计算主光线则须先求其初值。为此任择  $h_{p1}$  之值,并由(VI. 11)求  $u_{p1}$  的初值:

$$u_{p1} = (u_1 h_{p1} - j/n_1)/h_1. \quad (2)$$

按此初值计算到光阑面上得高度  $h_{pk}$ , 轴上光线在此面高度为  $h_k$ , 则由(VI. 40)求出  $h_{p1}^*$ :

$$h_{p1}^* = h_{p1} - h_{pk} \cdot h_1/h_k. \quad (3)$$

重新由(2)式求  $u_{p1}$ , 这就求得了主光线初值。这二条近轴光线光路计算结果即决定了此光学系统的全部高斯光学性质,例如主面位置和焦距均可由  $h_m, u'_m, h_{pm}, u'_{pm}$  算出。根据二光线在前后主面上高度相同,而决定二主面距第一面和第  $m$  面的距离  $l_H, l'_H$ :

$$\begin{cases} l_H = \frac{(h_1 - h_m)u'_{pm} - (h_{p1} - h_{pm})u'_m}{u_1 u'_{pm} - u'_m u_{p1}}, \\ l'_H = \frac{(h_1 - h_m)u_{p1} - (h_{p1} - h_{pm})u_1}{u_1 u'_{pm} - u'_m u_{p1}}. \end{cases} \quad (4)$$

当  $u_1 u'_{pm} - u'_m u_{p1} = 0$  时系统为望远镜系统。当不等于零时焦距有定值为：

$$f = \frac{h_1 - l_H u_1}{n'_m u'_m - n_1 u_1}. \quad (5)$$

(5)式的“焦距”是一般焦距除以折射率后之值，从而在物象空间大小相同。

计算初级象差用公式(VI. 89)和(VI. 60)：

$$\begin{cases} S = h(i' - u)(n' - n) \cdot n/n', \\ S_1 = S \cdot i^2, \\ S_2 = S \cdot i i_p, \\ S_3 = S \cdot i_p^2, \\ S_4 = j^2(n' - n)/(nn'r), \\ S_5 = h_p \cdot ni(i'_p - u_p)(i_p - i') + j(u_p^2 - u_p'^2). \end{cases} \quad (6)$$

及

$$\begin{cases} C_1 = hni(\delta n'/n' - \delta n/n), \\ C_2 = hni_p(\delta n'/n' - \delta n/n). \end{cases} \quad (7)$$

非球面的初级象差修正值为(VIII. 24)：

$$\begin{cases} W = (n - n')(b + 1)/r^3, \\ \Delta S_1 = h^4 \cdot W, \\ \Delta S_2 = h^3 h_p \cdot W, \\ \Delta S_3 = h^2 h_p^2 \cdot W, \\ \Delta S_5 = h h_p^3 \cdot W. \end{cases} \quad (8)$$

式中  $b$  是二次曲面二次项系数，见后面(16)式。

### § 3 光束的初值

按初值  $j, h_1, u_1$  决定的孔径和视场范围内，各条光线的初值还由孔径分割常数  $\rho$  和视场分割常数  $\omega$  而定，这二分割常数的最大值均为 1。为定这些光线初值，首先须计算主光线的初值。为决定光线位置，取坐标面和折射面相切并与光轴( $X$  轴)垂直(见图 12.1)。

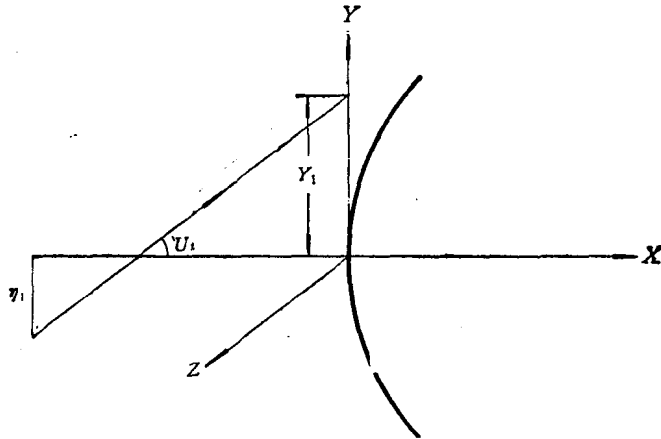


图 12.1

主光线与坐标面交点坐标为  $Y_1$ ，和光轴夹角为  $U_1$ ，则  $Y_1$  和  $U_1$  之值可取为：

$$Y_1 = \omega h_{p1} - \omega^3 S_{1p} \cdot h_1 / 2j, \quad (9)$$

$$\tan U_1 = (-u_1 Y_1 + j \cdot \omega / n_1) / h_1. \quad (10)$$

(9) 式中  $\omega h_{p1}$  是主光线的高斯光学初值， $S_{1p}$  是第一面到光栏为止的光瞳球差初级量，相应的项即坐标初级修正。(10) 式则是使坐标  $Y_1$  的光线穿过物点而得的简单几何关系。按(9)式修正的主光线一般仍不会通过光栏中心(存在高级光瞳球差)，为此可以用逐次接近的方法作迭代，即算出光栏上高度  $Y_k$  时，按(3)式修正  $Y_1$ ：

$$Y_1^* = Y_1 - Y_k \cdot h_1 / h_k. \quad (11)$$

重复计算，直到光栏上高度  $Y_k$  小于预定精度范围为止。这样就可得主光线初值  $Y_{p1}$ 。

同一视场的子午光线坐标就是  $(Y_{p1} + \rho h_1, 0)$ ，弧矢光线坐标为  $(Y_{p1}, \rho h_1)$ 。这样定出的光束初值一般不能充满光栏，对于光瞳象差甚大的系统(如 *Pyocap*)甚至发生成倍的误差，因此对上述初值宜作初级修正。由初级象差理论，子午光线和弧矢光线的初级象差分别是：

$$\begin{cases} 2nu_p T A_y = S_{1p} \omega^3 + 3S_{2p} \omega^2 \rho + (3S_{3p} + S_4) \omega \rho^2 + S_{5p} \rho^3, \\ 2nu_p T A_z = S_{2p} \omega^2 \rho. \end{cases} \quad (12)$$

由于  $Y_{p1}$  中已包括了各级光栏球差修正，再由于  $S_{5p}$  项与视场无关，故子午光线坐标  $Y_1$  的值应为：

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y_{p1} + \rho h_1 - T A_y \cdot \frac{l_1}{l_1 - l_{p1}}, \\ &= Y_{p1} + \rho h_1 - (2nu_p T A_y) \cdot h_1 / 2j, \end{aligned}$$

$$= Y_{p1} + \rho h_1 [1 - 3S_{2p} \cdot \omega^2 / 2j - (3S_{3p} + S_4) \cdot \omega \rho / 2j]. \quad (13)$$

而相应的弧矢光线坐标  $Z_1$  修正值为:

$$Z_1 = \rho h_1 (1 - S_{2p} \cdot \omega^2 / 2j). \quad (14)$$

对于在第一坐标面上坐标为  $(Y_1, Z_1)$  的光线, 为通过视场  $\omega$  的物点, 则其方向余弦  $(\alpha, \beta, \gamma)$  就由几何关系完全决定. 因

$$\frac{l}{\alpha} = \frac{Y - \eta}{\beta} = \frac{Z}{\gamma},$$

及

$$\frac{\eta}{l} = \frac{\omega j}{n_1 h_1},$$

故有:

$$\begin{cases} \alpha_1 = n_1 / [1 + (Y_1 u_1 - \omega j / n_1)^2 / h_1^2 + Z_1^2 u_1^2 / h_1^2]^{1/2}, \\ \beta_1 = -\alpha_1 (Y_1 u_1 - \omega j / n_1) / h_1, \\ \gamma_1 = -\alpha_1 Z_1 u_1 / h_1. \end{cases} \quad (15)$$

(15) 式中已将光线方向矢量之长取为折射率  $n$  而非 1.

## § 4 光路计算

在第一章以及第八章 § 2、第九章 § 3.1, 都是讨论光路算法的, 但因欲使公式简化, 这些计算中采用的坐标系处在球心, 或处在法线和轴的交点, 这就使公式对大半径曲面的精度下降, 而且对平面要采用不同的公式组. 它们虽适于手工计算, 但对计算机程序则不适宜. 这是现在讨论光路算法的原因.

### § 4.1 曲面的形式

轴对称二次曲面可表示为:

$$y^2 + z^2 = 2rx + bx^2. \quad (16)$$

高次曲面则为:

$$y^2 + z^2 = 2rx + bx^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5 \dots \quad (17)$$

(17) 式表示的高次曲面不够十分普遍, 它不能表示 Schmidt 校正板一类的轴对称曲面, 这种曲面在同一  $x$  值可以对应几个不同的  $y^2 + z^2$  值; 另外, 在当半径  $r$  很大以致  $x$  很小时, 高次项不能起应有的校正高级象差的作用. 因此, 曲面有时宜表示为  $\phi$  的函数,

$$\phi = \sqrt{y^2 + z^2} \quad (18)$$

由(16)式解二次方程, 即可得二次曲面相应表示为<sup>[1]</sup>:

$$x = \frac{c\phi^2}{1 + \sqrt{1 + bc^2\phi^2}} \quad (19)$$

式中  $c=1/r$  是曲面顶点曲率, 相应的高次曲面表示式为:

$$x = \frac{c\phi^2}{1 + \sqrt{1 + bc^2\phi^2}} + c_3\phi^6 + c_4\phi^8 + c_5\phi^{10} + \dots \quad (20)$$

(20)式的高次修正由  $\phi^6$  开始, 这是由于系数  $b$  表示的项相当  $\phi^4$  以上的修正项之故。由于(19)式表示的二次曲面方程中已略去了开方的负号, 亦即略去了同一  $\phi$  值的另一个  $x$  值解, 因此, 对于超半球之类情况不能使用。由此可见, 十分普遍的曲面表示方法似乎是不可能找到的, 它们都有局限性。程序对二种表示方式均可适用。

为计算光路就须求出曲面上各点的法线方面余弦。由第八章 § 2, 这就要求出曲面上各点的弧矢方向曲率半径  $r_s$ 。由于

$$m = \phi \cdot \frac{d\phi}{dx} = r + bx + \frac{3}{2} b_3 x^2 + 2b_4 x^3 + \frac{5}{2} b_5 x^4, \quad (21)$$

或

$$1/m = \frac{c}{\sqrt{1 + bc^2\phi^2}} + 6c_3\phi^4 + 8c_4\phi^6 + 10c_5\phi^8, \quad (22)$$

而可得

$$\begin{aligned} 1/r_s &= 1/(m^2 + \phi^2)^{1/2}, \\ &= \frac{1}{m} \cdot [1 + \phi^2/m^2]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (23)$$

(23)式中已考虑了开方的符号; 按(21)式计算时, 须将  $1/m$  表示为  $1/r$  的表示式。对于子午方向的曲率  $1/r_t$  则由(VIII. 9)式, 可写作:

$$\begin{aligned} 1/r_t &= \ddot{\phi}\phi^3/r_s^3, \\ &= 1/r_s - (\phi^2/r_s^3)(b + 1 + 3b_3x + 6b_4x^2 + 10b_5x^3). \end{aligned} \quad (24)$$

或

$$1/r_t = \frac{c}{(1 + bc^2\phi^2)^{3/2}} + \frac{30c_3\phi^4 + 56c_4\phi^6 + 90c_5\phi^8}{(1 + \phi^2/m^2)^{3/2}} \quad (25)$$

对于柱面来说, 上述公式组仅须作很少修正就可适用, 即: ① 将  $\phi$  理解为  $y$  (或

\*)即成为母线在  $z$  轴方向(或  $y$  方向)的一般柱面; ②  $1/r_s \equiv 0$ .

### § 4.2 光线在曲面上折射

为求光线和曲面的交点,一般要解高次代数方程,这是不方便的.因光学上使用的非球面一般离二次曲面不远,直线和二次曲面的交点易于解出,以之为初值用牛顿迭代法求解时,一般可以很快收敛得解.

不论曲面以(17)式或(20)式表示,其二次项部分同为(16)式.至于和坐标面交点为(0,  $Y$ ,  $Z$ )方向余弦为( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ )的光线方程式则为:

$$\frac{y-Y}{\beta} = \frac{z-Z}{\gamma} = \frac{x}{\alpha}, \quad (26)$$

(26)和(16)式联立得解  $x$  为:

$$x = W_2 \cdot W_3 / (1 + \sqrt{1 - W_1 W_2 W_3 W_2}), \quad (27)$$

其中

$$\begin{cases} W_1 = n^2/\alpha^2 - b - 1, \\ W_2 = c/[1 - (\beta Y + \gamma Z)c/\alpha], \\ W_3 = Y^2 + Z^2. \end{cases} \quad (28)$$

(27)式中根号内的值若小于零,则表示光线和曲面无交点,式中已计及开方符号选择.以(27)式为初值,计算函数:

$$f(x) = W_1 W_2 x^2 - 2x + W_2 W_3 - W_2 (b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5). \quad (29)$$

若  $f(x) \neq 0$ ,则取

$$\begin{cases} \Delta x = -f(x)/f'(x), \\ x^* = x + \Delta x. \end{cases} \quad (30)$$

以  $x^*$  再代入(29)式,逐次迭代到  $\Delta x$  小于预定精度要求为止.曲面以(20)式表示时,仍可用类似方式求出准确的  $x$  值.

将  $x$  值代入(26)式求出交点坐标  $y, z$ ; 代入(23)式求得  $1/r_s$ , 从而得到法线方向单位矢量为  $(m/r_s, -y/r_s, -z/r_s)$ . 从而可用矢量形式的折射定律(I. 93)式求出折射后的光线方向余弦.由

$$\begin{cases} n \cos I = (m\alpha - y\beta - z\gamma)/r_s, \\ n' \cos I' = (n'^2 - n^2 + n^2 \cos^2 I)^{1/2}, \end{cases} \quad (31)$$

计算

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha + (n' \cos I' - n \cos I) \cdot m/r_s, \\ \beta' = \beta - (n' \cos I' - n \cos I) \cdot y/r_s, \\ \gamma' = \gamma - (n' \cos I' - n \cos I) \cdot z/r_s, \end{cases} \quad (32)$$

(31)式中开方号内为负时表示光线被全反射。这就算完了一个折射过程。

对于柱面,公式(28), (31), (32)中除去一切与 $z, Z$ (或 $y, Y$ )有关的项后,即可完全适用。

由于光线在各折射面上的交点坐标都已算出,因此各折射面间的光程长度 $D$ 易于得到,即

$$D_{12} = (d_{12} + x_2 - x_1) \cdot n_{12} / \alpha_{12}. \quad (33)$$

在计算光线光路时,可由(33)式算出光程,从而算出波面形式。为此,尚须计算物空间和象空间的光程。如图12.2,  $YZ$ 面是和折射面相切的坐标面, $A$ 点是物点(或主光线和高斯象面交点),坐标为 $(l, \eta, 0)$ 。 $C$ 点离坐标面为预定常数长度 $d$ ,以 $A$ 为球心经 $C$ 点作球面 $BC$ 作为参考波面,则波面方程为:

$$(x-l)^2 + (y-\eta)^2 + z^2 = \eta^2 + (l+d)^2, \quad (34)$$

和光线

$$\frac{y-Y}{\beta} = \frac{z-Z}{\gamma} = \frac{x}{\alpha} \quad (35)$$

相交,交点坐标为:

$$x = W_2 W_3 / (1 + \sqrt{1 - W_1 W_2 W_3 W_2}), \quad (36)$$

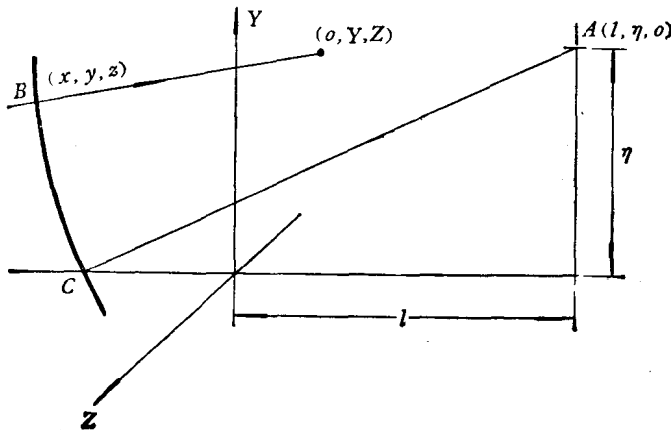


图 12.2



式中

$$\begin{cases} W_1 = n^2/\alpha^2, \\ W_2 = 1/l/[1 + \beta\eta/\alpha l - (\beta Y + \gamma Z)/\alpha l], \\ W_3 = Y^2 + Z^2 - d^2 - 2\eta Y - 2ld. \end{cases} \quad (37)$$

由(36)式算出  $\alpha$ , 即可算出坐标面到参考波面间光程, 这也就是物(象)空间光程。用这种算法就可适应物象在无限远, 或出瞳入瞳在无限远等情况。

### § 4.3 细光束焦点

改造细光束计算的杨氏公式, 使式中不出现截距之类的量。用高度和角度:

$$\begin{cases} h_i = \frac{t \cdot u_i}{\cos I} = \frac{t' \cdot u'_i}{\cos I'}, \\ h_s = s \cdot u_s = s' \cdot u'_s, \end{cases} \quad (38)$$

则杨氏公式成为:

$$\begin{cases} n' \cos I' \cdot u'_i = n \cos I \cdot u_i + (n' \cos I' - n \cos I) h_i / r_i, \\ n' u'_s = n u_s + (n' \cos I' - n \cos I) h_s / r_s. \end{cases} \quad (39)$$

转面公式则为:

$$\begin{cases} h_i^* \cos I^* = h_i \cos I' - D \cdot u'_i, \\ h_s^* = h_s - D \cdot u'_s. \end{cases} \quad (40)$$

计算得出的角  $u'_i$ ,  $u'_s$  与近轴光线角  $u'$  相比较, 也反映象差的产生情况。

## § 5 计算结果处理

光线光路的计算结果应加适当处理, 以供人工分析判断之用。为此首先考虑象差的表示方式。可以认为, 将象差表示成波差的量纲较为合理, 既避免几何象差变化范围过大, 也与象质有更简明的联系。其次是利用有限的光路计算结果, 外推整个光束的质量。这就是在一定的象差多项式形式假定下, 求出象差的多项式表示。再就是根据象差的情况决定此光学系统的最佳象点和象面、最佳光阑位置和拦光方式等等。这些工作的规范化都与象质评价方法有关, 因之也存在某些不确定性。

由(I 72)式, 光路计算得出  $TA_y$  和  $TA_x$  乘以近轴光线和轴的夹角  $u$ , 即与波差为同一量纲。由于

$$u \cdot TA = h \cdot (TA/l), \quad (41)$$

当  $u \rightarrow 0$  时,  $l$  和  $TA$  均趋于  $\infty$ , 但  $TA/l$  则为象差的角值表示, 故恒有限。这就是象

面在无限远处时的情况。正因如此,光路计算到最后折射面后为止,不必计算光线和象面的交点。用光线折射后在坐标面上坐标 $(0, Y, Z)$ ,  $(\alpha, \beta, \gamma)$ 即可算出象差:

$$\begin{cases} uT A_y = (Y_p - Y)u + (\beta_p/\alpha_p - \beta/\alpha) \cdot h, \\ uT A_z = Zu + h\gamma/\alpha. \end{cases} \quad (42)$$

同样,对细光束象差 $x_i, x_s$ 有:

$$\begin{cases} nu_i x_i = nh u_i - u h_i \alpha_p, \\ nu_s x_s = nh u_s - u h_s \alpha_p, \end{cases} \quad (43)$$

式中 $h, u$ 是轴上近轴光线量, $Y_p, \alpha_p, \beta_p$ 是主光线的量。(43)式的量纲和(42)式的相同,但还不直接与 $T A_y, T A_z$ 相当,即有关系:

$$\begin{cases} nuT A_y = nu \cdot u_i x_i / \cos^2 U_p, \\ nuT A_z = nu \cdot u_s x_s / \cos U_p. \end{cases} \quad (44)$$

用这些坐标表示的OSC是:

$$OSC = -(\beta \cdot h_p + Y \alpha u_p) / j_1 - 1, \quad (45)$$

式中 $h_p, u_p$ 是近轴主光线的量, $Y, \alpha, \beta$ 是轴上实际光线算出的值, $j_1$ 是 $j$ 与孔径分割常数和 $\alpha_1/n_1$ 之积,后一因子是由于孔径分割和正弦分割不同之故。

当按上列各式算出各条光线的各种象差后,为分析方便,宜减去相应的初级量而分离出高级象差部分。将实际象差和其高级部分同时列出,对于分析光学系统当时所处的校正状况是会有帮助的。

由第六章§1,轴对称系统的波象差多项式具有确定的型式,当限于一定的级次时,象差就有确定的项数。此时,易于由少数光线光路计算的结果定出所有多项式系数,从而决定整个光束的象差产生情况。对于多项式的形式作分析,也可以看出所算的光线坐标应如何选择,方能有效地决定象差系数。

低于光瞳坐标八次方的波差项共23项,可分为下列二组:

$$\begin{array}{cccc} y^2 + z^2 & y & y^2 & y^3 \\ (y^2 + z^2)^2 & y(y^2 + z^2) & y^2(y^2 + z^2) & y^3(y^2 + z^2) \\ (y^2 + z^2)^3 & y(y^2 + z^2)^2 & y^2(y^2 + z^2)^2 & y^3(y^2 + z^2)^2 \\ (y^2 + z^2)^4 & y(y^2 + z^2)^3 & y^2(y^2 + z^2)^3 & \end{array} \quad (46)$$

及

$$\begin{array}{cccc} y^4 & y^5 & y^6 & y^7 \\ y^4(y^2 + z^2) & y^5(y^2 + z^2) & y^6(y^2 + z^2) & \\ y^4(y^2 + z^2)^2 & & & \end{array} \quad (47)$$

按照图 12.3 所示的光栏坐标分割计算十条光线就可以决定 (46) 式所列的十五项系数, 而 (47) 式所列的各项则必须作空间光线计算方能决定. 对此讨论如下:

前十五项波差决定的几何象差是:

$$\begin{aligned}
 n\mu T A_y = & a_{01} + a_{20}y + a_{11}y(y^2 + z^2) \\
 & + a_{21}(3y^2 + z^2) + a_{14}y(2y^2 + z^2) \\
 & + a_{24} \cdot 3y^2 + a_{12}y(y^2 + z^2)^2 \\
 & + a_{22}(5y^2 + z^2)(y^2 + z^2) \\
 & + a_{15}y(3y^2 + z^2)(y^2 + z^2) \\
 & + a_{25}(5y^2 + 3z^2)y^2 + a_{13}y(y^2 \\
 & + z^2)^3 + a_{23}(7y^2 + z^2)(y^2 + z^2) \\
 & + a_{16}y(4y^2 + z^2)(y^2 + z^2) \\
 & + a_{26}(7y^2 + 3z^2)y^2(y^2 + z^2);
 \end{aligned}
 \tag{48}$$

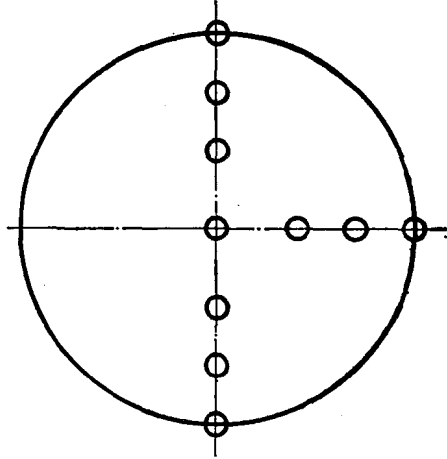


图 12.3

$$\begin{aligned}
 n\mu T A_z = & a_{10}z + a_{11}z(y^2 + z^2) + a_{21} \cdot 2yz + a_{14}y^2z + a_{12}z(y^2 + z^2)^2 + a_{22} \cdot 4yz(y^2 + z^2) \\
 & + a_{15} \cdot 2y^2z(y^2 + z^2) + a_{25} \cdot 2y^3z + a_{13}z(y^2 + z^2)^3 + a_{23} \cdot 6yz(y^2 + z^2)^2 \\
 & + a_{16} \cdot 3y^2z(y^2 + z^2)^2 + a_{26} \cdot 4y^3z(y^2 + z^2);
 \end{aligned}
 \tag{49}$$

对子午光线  $z=0$ , 上式简化为:

$$\begin{cases}
 n\mu T A_y = a_{01} + (3a_{21} + 3a_{24})y^2 + (5a_{22} + 5a_{25})y^4 + (7a_{23} + 7a_{26})y^6 \\
 \quad + a_{20}y + (a_{11} + 2a_{14})y^3 + (a_{12} + 3a_{15})y^5 + (a_{13} + 4a_{16})y^7; \\
 n\mu T A_z = 0.
 \end{cases}
 \tag{50}$$

对弧矢光线  $y=0$ , (48) 和 (49) 式简化为:

$$\begin{cases}
 n\mu T A_y = a_{01} + a_{20}z^2 + a_{22}z^4 + a_{23}z^6; \\
 n\mu T A_z = a_{10}z + a_{11}z^3 + a_{12}z^5 + a_{13}z^7.
 \end{cases}
 \tag{51}$$

系数  $a_{01}$  为畸变,  $a_{20}$  为子午场曲,  $a_{10}$  为弧矢场曲, 都可由主光线计算的结果得到, 即由 (43), (44) 式可得. 由三条弧矢光线计算得出彗差值后由 (51) 式解出系数  $a_{21}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{23}$ . 而弧矢球差则由 (51) 式解出  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{13}$ . 同样, 由坐标对称的六条子午光线算出子午彗差 ( $T A_y + T A_{-y}$ ) 和子午球差 ( $T A_y - T A_{-y}$ ) 即可由 (50) 式解出另外六个系数.

除 (46) 式所列十五项系数外, (47) 式所列的八项象差在子午光线和弧矢光线象差中不能与前者相区分. 例如  $y^7$  项与  $a_{26}y^3(y^2 + z^2)$  不能区分, 必须计算  $y$  和  $z$  都不等于零的光线, 方能将此二项系数分别求出. 由此可见光线坐标的选择对求解象差

系数是十分重要的事。一般手工方式光路计算时仅计算子午和弧矢光线，此时原则上仅能求得(46)式中的十五项系数，不能求出另外八项。略去这个部分的根据是：这些项至少与象高的四次方到七次方成正比。故仅在视场角甚大而且相对孔径也不小时方会出现。

由(50)和(51)式解象差系数的问题都归结为求下列形式的线性方程组的解：

$$\begin{cases} x + a^2y + a^4z = k, \\ x + b^2y + b^4z = l, \\ x + c^2y + c^4z = m, \end{cases} \quad (52)$$

式中  $a, b, c$  是计算光路所用的孔径分割常数。可见其解的分母行列式之值为  $(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)$ ，故所算光线的取带应使此值尽可能大，以使计算误差减小。例如取值为 1, 0.7, 0.3。

对一条光线来说，它的入瞳坐标规范化值和出瞳坐标规范化值将因有光阑象差而有所不同。因此，采用的坐标不同将使解出的象差系数也有所不同。为使波象差和几何象差满足关系式(I. 72)，坐标应是象空间的光瞳规范化坐标；不仅如此，由第一章 § 4.3，还应该是光线和参考球面交点坐标的规范化值。

求得象差多项式后，即可求出象点和光阑的“最佳”值。所谓最佳显然与评价标准密切相关。为简单起见，下面以几何象差均方极小为准。这与点列图评价相当。

选择最佳象点的问题就是求适当的离焦量和光斑中心，此时几何象差的新值是：

$$\begin{cases} T A_y^* = a_{01} + a_{02}y + T A_y, \\ T A_z^* = a_{02}z + T A_z. \end{cases} \quad (53)$$

求  $a_{01}$  和  $a_{02}$  使函数

$$F = \int_A (T A_y^{*2} + T A_z^{*2}) dy dz \quad (54)$$

极小，式中积分域是通光区域。由

$$\frac{\partial F}{\partial a_{01}} = \frac{\partial F}{\partial a_{02}} = 0, \quad (55)$$

即可求得最佳光斑中心位置和离焦量为：

$$\begin{cases} a_{01} = (a_4 a_3 - a_2 a_5) / (a_3^2 - a_5^2), \\ a_{02} = (a_4 a_5 - a_2) / (a_3 - a_5^2), \end{cases} \quad (56)$$

式中  $a_1$  至  $a_5$  是下列积分值：

$$\left\{ \begin{aligned} a_1 &= \int_A dy dz, \\ a_2 &= \int_A (y - T A_y + z \cdot T A_z) dy dz / a_1, \\ a_3 &= \int_A (y^2 + z^2) dy dz / a_1, \\ a_4 &= \int_A T A_y dy dz / a_1, \\ a_5 &= \int_A y dy dz / a_1. \end{aligned} \right. \quad (57)$$

由此可见, 已知象差多项式时, 对于各种最佳使用方式的问题的解, 都可能求得。但是为寻找最佳光栏位置和拦光方式的问题, 应进行略为复杂的计算。

光栏移动相当于象差多项式作坐标变换, 对于新的光栏中心的坐标  $y^* = y + \Delta$ , 寻求  $\Delta$  之值使积分(54)极小即可。由于  $T A_y^*$ ,  $T A_z^*$  是  $\Delta$  的高次多项式, (54)式对  $\Delta$  微分所得是高次代数方程。可以用牛顿迭代法在零点附近求出解。

更复杂的问题是决定通光孔大小或轴外光束的拦光方式。此时由(54)式极小就会导致错误的结果。例如会要求通光孔直径为零以使象差极小。用传递函数极大作为评价标准时, 仍然会得到与实践经验不符的结果。例如照相物镜的传递函数一般都当孔径缩小为  $f/8 - f/5$  左右达到极大<sup>[9]</sup>, 这似乎是由于信息量不单由传递函数平方积分决定[(XI. 89)式], 而且和信号强度——能量有关。取通光孔面积的平方和(54)式之商作为价值函数时, 得出的通光孔形状与实验结果较符合。在计算机上用优选法解这个问题较为方便。

## § 6 象差分布值

初级象差可以确切地表示为各折射面上产生的分布值之和, 这对于分析和校正象差是十分有意义的。对于高级象差也同样可以这样做, 但此时的分布值与倍率的选择有关。如(III. 7), (III. 55), (IV. 6), (IV. 35), (IV. 45), (IV. 56)等关系式, 都已将各种实际象差表示为各面产生值之和, 这些公式对于球面系统已是可用的。当采用 § 3 的公式组计算一般的非球面光路时, 有必要推广这些关系式, 并代换以光路计算中所用的量值。

首先考察一般空间光线象差分布公式(IV.45)在非球面情况的推广。将图 4.7 中的  $C$  点作为非球面  $P$  点的法线和轴的交点,  $OC$  之长为  $r_0$  如(VIII. 7)式所示,  $CA_0$  之长为  $l - r_0$ , 矢量  $PC$  为  $\mathbf{r}_0$ , 则整个推导过程基本相同, 仅须有二处不同, 从而

增加出非球面修正项:

$$(r_0 - r)(i + u)\Delta e \times q. \quad (58)$$

即得到:

$$\Delta uc \times q = -ni\Delta \frac{1}{n} b \times q + (r_0 - r) \frac{h}{r} \Delta e \times q. \quad (59)$$

因此空间光线的象差分布表达式为:

$$u'_k \alpha'_k T A'_{z,k} - u_1 \alpha_1 T A_{z,1} = \sum_1^k \{ni[-z(\alpha'/n' - \alpha/n) + x(\gamma'/n' - \gamma/n)] \\ - (r_0 - r)(i + u)(\gamma' - \gamma)\}; \quad (60)$$

$$u'_k \alpha'_k T A'_{y,k} - u_1 \alpha_1 T A_{y,1} \\ = \sum_1^k \{ni[y(\alpha'/n' - \alpha/n) - x(\beta'/n' - \beta/n)] \\ + (r_0 - r)(i + u)(\beta' - \beta) + \omega j(\alpha' - \alpha)\}, \quad (61)$$

式中  $\omega$  是视场分割常数。本章中方向余弦的符号为  $\alpha\beta\gamma$ , 与前面各章不同, 这是为避免符号  $\eta$  的含义发生混淆之故, 比较公式时应加注意。

(60)式就可用作轴上球差和轴外弧矢方向垂轴象差计算之用, 并且包含了弧矢细光束场曲分布, 仿照(IV. 56)式有:

$$n'_k u'_k u'_{s,k} \alpha'_{s,k} - n_1 u_1 u_{s,1} \alpha_{s,1} \\ = \sum_1^k \{ni[h_s(\alpha'_p/n' - \alpha_p/n) + x_p(u'_s - u_s)] \\ - (r_0 - r)(i + u)(n'u'_s - nu_s)\} \quad (62)$$

式中  $\alpha_p$ ,  $\alpha'_p$  和  $x_p$  都是主光线计算时在各面的量。至于(61)式则可用以计算一般子午光线的象差分布。同样, 仿照(III. 54)式的论述, 非球面 OSC 的分布值为

$$j(OSC'_k - OSC_1) \\ = -\frac{1}{2} \frac{n_1 u_1}{\beta_1} \sum_1^k \{ni_p[y(\alpha'/n' - \alpha/n) - x(\beta'/n' - \beta/n)] \\ + (r_0 - r)(i_p + u_p)(\beta' - \beta)\}. \quad (63)$$

这里导出的一组非球面高级象差修正量, 对于分析用非球面校正高级象差时, 也许会有意义的。由(VIII. 7)式,  $r_0 - r$  的初级近似为  $(b+1)x$ , 即

$$r_0 - r \cong (b+1)x. \quad (64)$$

将(64)式代入前面各式就得出相应的初级修正值。例如由(60)式得出初级球差与(VIII. 24)式相同。由此可见, 非球面的高级象差与初级象差间的关系甚为简明。

由于象散分布值公式不便于计算, 为计算方便可以写成:

$$\Delta n u_s u_t (s-t) = h_s (n' u'_t - n u_t) - h_t (u'_s \alpha'_p - u_s \alpha_p). \quad (65)$$

到此,各种单色象差都可以表示成各折射面产生值之和。对色差则仍可用 $(d-D)\delta n$ 表示成各个透镜产生值之和。一个光路计算分析程序中若包含分布值计算时,对于分析高级象差于何处发生,从而加以校正,常会是很有帮助的。

## § 7 非轴对称光学系统

采用电子计算机进行光路计算时,本可以对更普遍而复杂的光学系统进行计算,例如计算毫无对称性的曲面及其组合,但是过于普遍就得要求程序过于复杂,而且使计算工作量不必要地加大。实用的光学系统中除轴对称系统外,还常遇到柱面和倾斜的平板,另外为计算公差还应能计算非同轴的轴对称系统等等。所以应该有适当解决这些要求的光路程序。

对于非同轴系统,既不存在光轴,而又不存在近轴区域的高斯光学;初级象差也与同轴系统完全不同,随对称性破坏的程度不同而完全不同。因此难以用象差理论来简化计算过程。运算过程常须用逐次接近法完成,例如使主光线通过光栏中心时,初值就难以预定,只能依靠较大量的试算,等等。

另外,失对称导致计算光线量必须加大。从一个物点发出的光线,在轴对称系统中可以代表离轴距相同的一个圆环上所有物点发出的相应光线。因此轴对称系统只须计算少量物点的象差就可以知道全面情况,完全失对称的系统就须计算大量物点才能了解到这种程度。

对于前数节所述的计算方法,加以不太多的改动,就可以适应较一般的非轴对称系统的计算。即按(a)曲面形式,(b)转面方式,(c)象点和象面的确定,(d)象差的表示,分述于下。

前已述及,轴对称非球面的计算仅须作少量改动就可以适用于柱面计算,实际上也容易使它适用于双曲率面计算,为此可以改曲面方程(17)式为:

$$py^2 + qz^2 = 2\gamma x + bx^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + \dots \quad (17a)$$

当参量 $p=q=1$ 时,该式表示轴对称非球面;当 $p=1, q=0$ 或 $p=0, q=1$ 时,就表示母线在 $z$ 方向或 $y$ 方向的柱面;而当 $p \neq q$ 时,就表示双曲率面。事实上,在式(17a)中令 $b_3=b_4=b_5=\dots=0$ ,再将坐标系原点沿 $x$ 轴移动以除去 $x$ 的一次方项,即得

$$\frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{a_2} + \frac{z^2}{a_3} = 1, \quad (17b)$$

即一般的二次曲面,当 $p>q>0, b=-1$ 时,就是椭球。显然,曲面形式的这种更动,

对于前述的计算方法不造成什么困难。

当各个双曲率面的轴不相互一致时,光路计算到转面时,就必须进行坐标的平移和转动,它将点坐标 $(x, y, z)$ 及方向余弦 $(\alpha, \beta, \gamma)$ 都转变为新坐标系内的值。例如当 $xy$ 坐标转角 $\theta$ ,则

$$\begin{cases} x^* = x \cos \theta - y \sin \theta, \\ y^* = x \sin \theta + y \cos \theta, \\ z^* = z, \\ \alpha^* = \alpha \cos \theta - \beta \sin \theta, \\ \beta^* = \alpha \sin \theta + \beta \cos \theta, \\ \gamma^* = \gamma. \end{cases}$$

当光路计算结束时,对轴对称系统只须求光线和高斯象面的交点,并与相应主光线的值作比较,即可得出象差。当实际象面并非平面,例如是很弯曲的球面,这种方式算出的象差也并不很合用。对于非轴对称系统而言,难以确定标准象面的位置,因此宜由光线计算结果算出各最佳象点位置,从而决定最佳象面的形状。

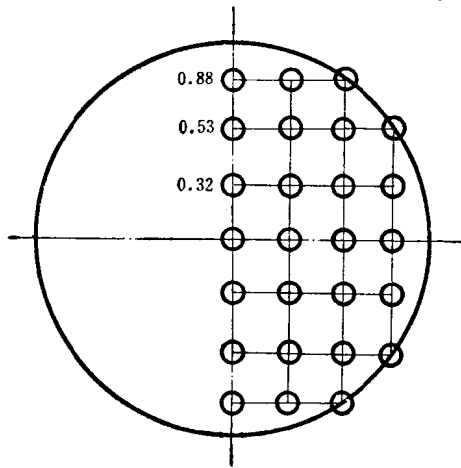


图 12.4

图 12.4 所示为光瞳面上所计算的各带光线位置,可以规定最佳象点是离 $(\pm 0.53, 0)$  $(0, \pm 0.53)$ 等四条光线最近的点。这样规定后,最佳象点的位置就很容易算出来。由于二条光线

$$\begin{cases} \frac{x}{\alpha_1} = \frac{y - y_1}{\beta_1} = \frac{z - z_1}{\gamma_1}, \\ \frac{x}{\alpha_2} = \frac{y - y_2}{\beta_2} = \frac{z - z_2}{\gamma_2} \end{cases}$$

上最靠近的点应使

$$f = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

极小(不一定相交),即应满足

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x_0} = 0,$$

故可解出

$$x = \frac{\alpha_1 [(y_1 - y_2) (\beta_2 \cos \theta - \beta_1) + (z_1 - z_2) (\gamma_2 \cos \theta - \gamma_1)]}{n^2 (1 - \cos^2 \theta)}, \quad (66)$$

式中 $\theta$ 是二条光线夹角,

$$n^2 \cos \theta = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2. \quad (66a)$$



这样先算出 $(\pm 0.53, 0)$ 的“交点”,然后再算出 $(0, \pm 0.53)$ 二光线“交点”,然后求平均,即得最佳象点坐标。

再约定取第一个物点发出的主光线在象空间的方向作为象面法线方向,并作为所有各个视场的象面法线方向。这样一来,象面就确定了,这个最佳象面是由通过最佳象点的相互平行的小平面镶嵌而成的。

当这个最佳象面不符合实际需要时,预先规定象面而计算象差则并无特别的困难。

对于这样算出的象差也可以按照 §5 的处理方法定离焦量以使象差极小。

## § 8 光学传递函数(OTF)计算

光学传递函数(OTF)计算并没有什么原则上的困难,但是经过十多年工作以后,多种计算程序所得的结果还不能很好地相互一致<sup>[3-5]</sup>。这种情况与光路计算程序很不同,计算 OTF 须在某些假定或预定条件下进行,这些先决条件的不一致是引起差异的主要原因。此外,也不排除某些程序中也许有不应有的疏忽之处,从而引起不应有的差异,这对轴外象点尤须注意。为与实测结果相一致,并可用作实测的标准值,OTF 的计算方法还值得研究。

几种不同的计算方式可以用框图表示,见图 12.5。基本分为二类:一类由光栏函数作自相关积分而得 OTF;另一类则由光栏函数作傅利叶变换(FT)得振幅分布函数,平方得强度分布,再由傅利叶变换算出 OTF。这二类算法的共同前提是标量衍射理论,或衍射理论的小孔径近似。有人怀疑它在大孔径角或大视场时失效,并从

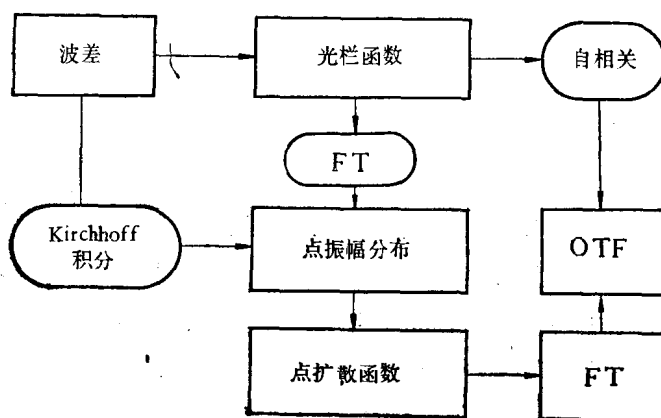


图 12.5

而采用 Kirchhoff 积分求振幅分布<sup>[6]</sup>。事实上, 孔径角过大时标量理论失效是可能的, 但采用 Kirchhoff 积分却并不能有根本性改善。要避免小孔径近似就须采用矢量理论。至于现在似乎还没有充分的否定标量理论的根据。

由于这两类算法并没有本质上的差异, 只是在计算工作量和计算精度方面有差别。从后一角度来看, 自相关法较优。不单是计算工作量较少, 而且不会象 FT 计算时的计算范围限制(象面尺寸有限制)而影响精度。因此下面只讨论了用自相关法计算时, 各个计算的环节和应于注意之点。

首先是坐标系的选择。衍射积分公式(XI. 90)成立从而使相关积分关系(XI. 93)式成立的条件是: 坐标系  $yz$  和  $\eta\zeta$  相互平行, 而且  $(y, z)$  应是波面上点的坐标。由于量  $y\eta + z\zeta$  是参考点作位移  $(\eta, \zeta)$  而增加的波差, 由(I. 72), 此关系在大孔径条件下仍然正确, 只要求坐标  $(y, z)$  是波面上点坐标的规化值就行。这也说明了标量理论下的 Kirchhoff 积分不会比简单傅利叶变换更精确。由此也决定了波差多项式中的自变量也应采用这个坐标, 与 § 4 的分析相同。为使大视场时的出瞳坐标与入瞳坐标接近, 作坐标变换后以主光线作为坐标轴(如图 12.6), 相应改变  $\eta$  轴的取向。

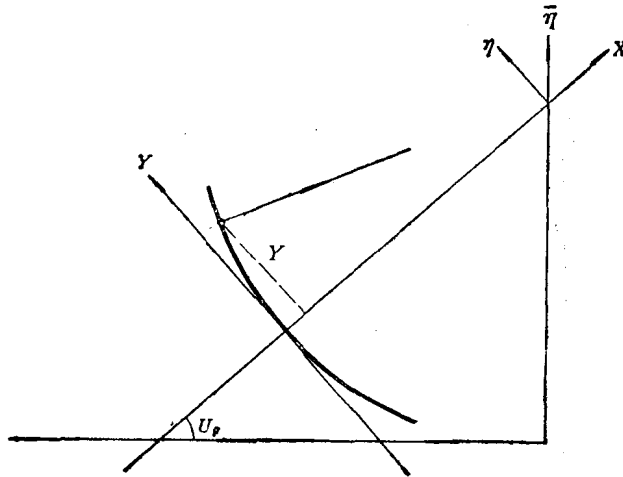


图 12.6

关于波差多项式的计算, 前面章节已进行过讨论。为使得到的波差函数准确, 多项式应有足够多的项数和幂次。项数愈多则须计算的光线数也愈多。至于不用多项式而用内插法求各点的波差值的做法, 也不能有所改进。内插必然是在多项式假定下方能进行, 如拉格朗日插值。它一般要求算更多的光线。光路计算时可以直接算出光程差, 从而用以解出波差多项式系数。光路计算得出的几何象差可用作校核之用。

有了光栏函数的位相部分后,还应计及其振幅部分。由于光学系统的光瞳象差,均匀照明的入瞳也不能使出瞳亮度均匀,因此光栏函数有实部:

$$A(y, z) = \frac{D(y_1, z_1)}{D(y, z)} = \frac{\partial y_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial z} - \frac{\partial y_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial y}, \quad (67)$$

式中  $(y_1, z_1)$  是入瞳规范化坐标。

有了光栏函数后,进行自相关积分时,还须规定积分域。积分域本应由各个元件的通光孔尺寸而客观地决定,但准确计算和定形却很不方便。积分域的计算方法差别是 OTF 差别的原因之一。现在多流行椭圆近似<sup>[7]</sup>,因为这时仅须决定通光孔长短轴之值后即可计算积分,较为方便。当轴外光束被拦光甚多时,椭圆近似会引起误差,另外,决定长短轴值的方式也会相互有不同。

最后一个问题是频率定标,比对不同的计算程序的 OTF 结果时,似乎表明某些程序间差别主要是定标频率的差别<sup>[4]</sup>。由第十一章 § 3.1, 规范化坐标  $\eta$  的周期  $\alpha$  与规范化频率  $s$  的关系是

$$\alpha = 2\pi/s. \quad (68)$$

再由 (I.72) 式和图 12.6,

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial Y} = \frac{n}{r} \Delta\eta, \\ \frac{\partial W}{\partial Z} = \frac{n}{r} \Delta\zeta, \end{cases} \quad (69)$$

式中  $r$  是参考波面半径,取规范化条件:

$$\begin{cases} \frac{y_0}{r} = \frac{y_0}{l} \cdot \frac{l}{r} = u_0 \cos U_p, \\ \frac{Y}{y_0} = y, \end{cases} \quad (70)$$

则有

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial y} = nu_0 \overline{\Delta\eta} \cos^2 U_p, \\ \frac{\partial W}{\partial z} = nu_0 \overline{\Delta\zeta} \cos U_p. \end{cases} \quad (71)$$

可见粗略的规范化条件 (XI. 48) 式须按 (71) 式校正,而 (XI. 106) 式所表示的截止频率和分辨线数的关系则由 (68), (71) 式改为:

$$\begin{cases} t = \frac{N\lambda}{nu_0 \cos^2 U_p}, \\ s = \frac{N\lambda}{nu_0 \cos U_p}, \end{cases} \quad (72)$$

式中  $N$  是单位长度内的线数,  $t$  和  $s$  是子午和弧矢方向的规范化频率。

在考虑到上述各项条件后,光学传递函数的计算就归结为计算积分(XI. 93):

$$R(s, t) = \frac{1}{E} \int_0^a dz \int_{-b}^b dy f(y + \frac{t}{2}, z + \frac{s}{2}) f^*(y - \frac{t}{2}, z - \frac{s}{2}), \quad (73)$$

其中

$$f(y, z) = A(y, z) e^{\frac{2\pi}{\lambda} W(y, z)}, \quad (74)$$

而  $E$  则为  $s=t=0$  时的积分值。当椭圆通光孔二半轴长为  $r_a, r_b$  时, 则计算  $s=0$  或  $t=0$  时的 OTF 所用积分域  $a, b$  为:

$$\begin{cases} a = r_b \sqrt{1 - t^2/r_a^2} - s/2, \\ b = r_a \sqrt{1 - (z+s/2)^2/r_b^2} + t/2. \end{cases} \quad (75)$$

用计算机作数值积分的方法也值得注意。在理论上,用高斯积分方法时,同样的计算工作量能达到双重的精度<sup>[8]</sup>。实践证明也是如此。

为了减少计算工作量,还发展过一些近似计算方法,例如按(XI. 96)或(XI. 102)式计算 OTF。前者为准几何近似,即以垂轴几何象差代  $\frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z}$  作积分计算,这仅当高级象差不大,且在低频区域时方才正确。后者亦仅适用于低频区。在(XI. 96)式中的指数部分可以作下述变换:

因

$$s \sim \lambda / nu \Delta, \quad (76)$$

故

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot s \cdot \frac{\partial W}{\partial y} = 2\pi \cdot (T A_y / \Delta), \quad (77)$$

式中  $\Delta$  是和规化频率  $s$  相应的周期结构间距。由此可见,当  $\Delta$  和  $\overline{T A_y}$  近相等时积分将趋近于零。这也正是 OTF 的一个几何解释。采用这个估计时,可以在程序中自行决定应算的 OTF 频率范围。

### 参 考 文 献

- [1] S. H. Brewer, *Proc. SPIE*, **39** (1973), 62.
- [2] H. Kondo et. al, *Optica Acta*, **22** (1975), 353. Criteria for the evaluation of photographic lenses.
- [3] R. E. Hopkins, AD-710633.
- [4] J. Macdonald, *Proc. SPIE*, **46** (1974), 45.
- [5] P. Kuttner, *Optica Acta*, **22** (1975), 265.
- [6] Y. Matsui, *Optica Acta*, **23** (1976), 389.
- [7] H. H. Hopkins, *Optica Acta*, **13** (1966), 343. W. B. King, *Appl. Opt.*, **7** (1968), 197.
- [8] Aleksandr Semenovitch Kronrod, *Nodes and Weights of Quadrature Formulas*, Consultants Bureau N. Y., 1965.

# 第十三章

## 光学自动设计

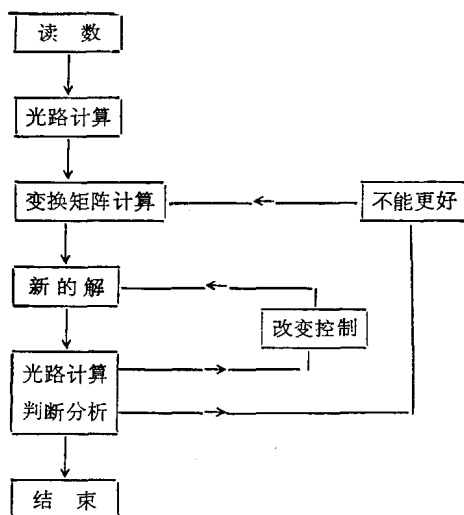
### §1 概述

随着电子计算机用于光学系统计算工作,在五十年代就开始对光学系统自动设计进行探索,到六十年代初期就已经有几个可用的程序<sup>[1]</sup>。在六十年代,自动平衡工作受到广泛重视和发展,形成了多种不同的方法,用以作设计已有相当的把握。反映这方面的进展是召开了数次国际性会议,如1963年美国召开的会议<sup>[2]</sup>,及1966年和1975年两次用大型计算机作光学设计的国际会议<sup>[3,31]</sup>。可以认为,在1963年后并没有发生本质性的进步,但以后的工作使程序更趋完善和多用。在美国已有多个商业程序对各界服务,并建立了多个以此为主要业务的公司。

在1980年召开了第三次国际光学设计会议,反映了近年的情况和动向<sup>[3a]</sup>。由于光学设计的现状是“既是一门科学又是一门艺术”,谁也不能说“设计已经最优,不能再改进了”。在这个问题上“电子计算机对设计工作者几乎没有什么帮助”。在这次会上R. C. Juergens的报告叙述了23人利用9个不同的程序,设计两个完全一样的课题的结果。表明:同一个程序对于不同的人会得出差异很大的结果。不同的程序看不出明显的优劣。没有经验的工作者多用40倍的时间所得结果也不优秀,等等。这次会上表现的另一动向是:更多的是采用微型计算机作设计,而不是日益用更大型的计算机,认为这样做时经费可以节省9/10。这大概也是由于设计过程中需要进行多次人工干预的缘故。

自动平衡的运算过程可以用框图表示。

当计算机读出输入的结构参数及有关信息后,如上一章所述,作光路计算以算出象差是容易做到的。然后计算机将一切可变参数一一作小变化,算出象差的相应变化。(当直接将象差作为平衡对象时,这种计算给出的变化表格就是所需的变换矩阵。)除将象差的平方和作为评价函数外,还可以用其他的形成评价函数的方式,例如几何象差的均方值、波象差均方值、OTF值等等。评价函数的各组分随自变量而变的



微分就构成一般的变换矩阵。在线性假定下，根据变换矩阵求逆，就可求出各自变量应有的改变值，即求出新的满足预定目标的结构参数。

由变换矩阵求解的问题就是对可能为病态的矩阵求逆的问题。这是一个专门的计算数学问题，由于电子计算机应用的发展以及多方面计算工作的需要，它已形成一个专门的分支，例如见文献[4]。光学自动设计工作中也曾应用过多种求解方法，其中最简单有效的也许是阻尼最小二乘法。

主要由于非线性，线性化的方程组解一般并不能达到预期目的；再由于新解的参数会不合实用，例如厚度过薄过厚之类；故须作适当的判断后重复求解的过程。如此作循环迭代求解。由于变换矩阵须作大量运算方能求得，因此程序中时常会利用已有的变换矩阵作多次迭代，直到认为不可再用为止。一般程序进行重算变换矩阵的迭代十次左右以后，应即考虑变更控制方式后再行工作，否则继续迭代的意义很小。在这个环节上设计人员应能发挥其分析判断和处置问题的能力。一般设计要进行这种人工干预二、三十次<sup>[2]</sup>。一个好的设计工作者应能用较少的时间作出较好的结果。

## §2 评价函数；象差的规化

评价函数  $\psi$  是自动平衡的校正对象，构造评价函数的最简单做法就是将所有的单个对象的平方乘权求和：

$$\begin{cases} \psi = \sum_1^m f_i^2, \\ f_i = w_i(d_i - t_i), \end{cases} \quad (1)$$

式中  $d_i$  是要求校正的对象,它主要是各种象差,也可以是其它要求,如焦距、截距、透镜厚度之类;  $t_i$  是它的目标值,对象差来说它常可能为零,也可能是为最佳匹配而定的适当的值;  $w_i$  则是这个对象的权。

象差本身就具有很不相同的量纲和量级,例如初级象差系数和轴向象差及垂轴象差,  $OSC$  和色差等等。因此一般程序必须对各项的权作仔细选取,以使各种象差能够同时均衡地校正。选择权重成为设计工作者控制程序运行情况的一个方面。

事实上,将各种象差归一化是可以做到的,例如将所有象差都表示为波象差量纲,那么它们的量级大小和影响大小就能相互一致。初级象差表示式(XII. 6, 7, 8)是波差系数,几何象差表示式(XII. 42, 43, 44)也是波差量纲。为使(XII. 45)式算出的  $OSC$  和它们的量级一致,则应乘以  $j$ , 见(III. 40, 55)式。这样就可以使各项象差对成象质量的影响基本一致。这时再用权时,权的作用就仅在区分各项的相对重要性,不再要求权作大幅度变化。

高斯光学的要求也可以归一为同一量纲。例如对截距和焦距的要求可表示为误差项:

$$\begin{cases} \Delta_1 = h_0 \cdot u'_k - h_k \cdot u'_0, \\ \Delta_2 = [h_{pk}(u'_k - u'_0) - (h_k - h_0) \cdot u_{pk}] \tau_k / j, \end{cases} \quad (2)$$

式中  $h_0$  和  $u'_0$  是目标值,两者决定了焦距和截距。(2)式前一式决定了截距是否正确,后一式决定  $j$  值正确,从而使焦距正确。

为使计算工作量尽量减少,当然希望只算少量光线,平衡尽可能少的象差,但又要求它们具有足够的代表性。从这个角度看来,取初级象差为校正对象是合理的。从光学设计的经验来看,对于远离目标的初始结构来说,若能首先校正初级象差而后再进一步工作,将会是事半功倍的。故程序应能只以初级象差及高斯光学参数为对象,进行平衡工作。除初级象差外还应由视场中选取几个点,每点选取几带光线计算象差,作为进一步校正的对象。使用小型计算机一般只对子午光线的象差,如下所列:

高斯光学:  $u', v;$

初级象差:  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, C_1, C_2;$

实际象差:  $LA_M, OSC_M, x_{t,M}, x_{s,M}, LA_T, K_T;$

实际象差:  $LA_z, OSC_z, x_{tz}, x_{sz}, LA_T, K_T, DT_M, (d-D)\delta n, (D_+ - D_-)\delta n.$

到第三行为止,校正对象共十五项,除近轴光线外,仅须计算子午光线四条。程序宜可将象差实际值作为校正对象,也可以将其中分出高级部分作为校正对象。后者有

利于使校正对象互相独立,对消除矩阵病态有利。其中  $LA_T$  和  $K_T$  应可以选带而不必是最大视场的边缘带,时常以选中间带为宜;此外,由于上下两条光线的象差常相对独立,此两象差不如代以  $TA_y$  和  $TA_{-y}$ 。第四行的添加象差有时是必需的,这就是存在更高级次的高级象差时的情况。

当子午光束尚不足以反映光学系统质量时,计算光线的选带可参见图 12.3。显然,光学系统存在的象差愈高级,则所须计算的光线和应平衡的对象也愈多。

为使评价函数的极小确实相当于光学系统质量最佳,曾进行过大量的尝试。由于象差一般不可能校正到全等于零,以各项象差为校正对象时,就须考虑它们怎样相互匹配为最佳,这个问题在第十一章 § 2.5 中曾有所论述;即由波差均方极小可以导出各种象差的匹配要求,从而规定各项象差的目标值。这在象差简单时不难做到。在象差性质复杂时则最佳匹配本身就须作大量计算,因此不如在程序中直接用波差均方值为校正对象。但为计算波差均方值,至少要算图 12.3 所示的十条光线,如第十二章 § 4 那样求出象差多项式系数,从而积分求均方值。显然波差均方值是象差系数的二次函数,函数形式就定出匹配条件或各象差系数的相对权。

除波差均方值外,也可以用垂轴几何象差均方, (XII. 54) 式作为评价函数,这两种做法所需的计算工作量是相近的。它们的优点是不必人工考虑如何匹配方式最佳,缺点是不利于有重点地去控制某些象差项从而较易达到最佳。也有人完全不考虑象差多项式的形式,完全依靠大量计算光线得出的点列图(亦即垂轴象差均方)作为评价函数<sup>[6]</sup>。它事实上不可能与多项式导出的点列图有差异,因此这种大量计算不能认为是必需的。也有用 OTF 作为评价函数的<sup>[6,7]</sup>,对于非相干成象类型的使用要求而言,OTF 当比波差方差更反映质量优劣。但它要求更大的计算工作量。某些算法如文献 [6, 7] 中所提到的也并不能改善这种情况。这就决定了它尚未达到实用阶段,也许仅在系统已接近最佳时,用以作最后的小量平衡校正。事实上,用多项式作波差近似时计算单一频率的 OTF 工作量与波差方差计算量相近,而适当的单一频率 OTF 值原则上已能基本反映质量(第十一章 § 5.1),实测的情况也是如此<sup>[8]</sup>。因此,适当的以 OTF 为评价函数的自动平衡程序还是可行的。

评价函数的形式直接影响它的线性程度,从而对是否可解发生严重影响。例如取  $f_i$  是几个不同视场的  $x_i$  和  $x_o$  而不取  $S_4$ ,此时虽给以很大的权也不能将象面校平,当改取为  $S_4$  后则很容易地得到校正。由此看来,评价函数的各个分量的形式愈复杂,它与结构变量的函数关系会更是非线性,对于解的收敛更不利。至今仍然普遍使用各单项象差构成的评价函数,这也许是主要的原因。



## § 3 最小二乘法; 变量的度规

如前所述, 作为数学问题, 最小二乘法在最近十多年内受到很大重视和发展<sup>[4]</sup>. 最小二乘法作为数学问题可表述为: 给定  $m \times n$  实矩阵  $A$ ,  $A$  的秩为  $k$ , ( $k \leq m$ ,  $k \leq n$ ); 给定  $m$  维实矢量  $b$ , 求  $n$  维实矢量  $x$  使矢量  $Ax - b$  之长为极小.

当  $m = n = k$  时, 矩阵  $A$  存在逆矩阵  $A^{-1}$ , 问题的唯一解为  $x = A^{-1}b$ . 为计算方便, 一般并不计算逆矩阵  $A^{-1}$ , 例如线性方程组解常用高斯消去法解  $x$  (即一般计算机内的库过程“主元消去法”). 但逆矩阵的概念仍是十分有用的概念.

当  $k < (m, n)$  时, 逆矩阵不存在; 但可证明, 此时存在唯一的赝逆矩阵  $A^+$ , 满足:

$$\begin{cases} AA^+A = A, \\ A^+AA^+ = A^+, \\ (AA^+)^T = A^+A, \\ (A^+A)^T = AA^+, \end{cases} \quad (3)$$

而最小二乘法解为

$$x = A^+b. \quad (4)$$

由于  $A$  并非满秩, 解  $x$  不是唯一的, 它可以在一定范围内变动, 从而可以在某些附加约束条件下求解.

由于矢量之长不因正交变换而变, 用正交变换的概念方法易于求得  $A^+$ . 采用 Householder 变换进行奇值分解 (SVD 方法) 即可一般地导出上述结论. 这种讨论不单在理论上是清晰的, 而且对实际运算也是方便的. 但是, 为在自动光学设计中应用它则尚待作进一步的工作. 光学设计中成功地应用着的阻尼最小二乘法, 可看作是这种解法的一个特例<sup>[4]</sup>. 下面仅对这一方法的有关问题作一讨论.

评价函数  $\psi$  由  $m$  个分量  $f_i$  ( $m$  个要求) 组成, 每个分量都是  $n$  个自变量  $x_j$  (半径、厚度、折射率、非球面系数等) 的函数.  $f$  一般并非  $x$  的线性函数, 但可在线性近似下求解, 也就是将  $f$  展开为级数并仅取  $x_j$  的一次项, 即

$$f_i = f_{i0} + \sum_1^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} (x_j - x_{j0}). \quad (5)$$

再将矩阵  $A$ , 矢量  $b$ ,  $x^*$  分别定义为:

$$\begin{cases} a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \\ b_i = -f_{i0}, \\ x_j^* = x_j - x_{j0}, \end{cases} \quad (6)$$

则自动设计问题就成为标准的最小二乘法问题: 求  $\boldsymbol{x}^*$  使  $\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}$  为极小.

式(1)表示的评价函数  $\psi$  就是向量之长, 在线性近似(5)以及当  $m \geq n$  时, 可以微分(1)式而得  $\psi$  为极小的条件:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_k} = 0 = \sum_1^m a_{ik} f_{i0} + \sum_1^m \sum_1^n a_{ij} a_{ik} (x_j - x_{j0}), \quad (7)$$

即

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{b} = 0, \quad (8)$$

其解为

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{b}. \quad (9)$$

采用(9)式求解是初期的光学自动平衡的主要做法, 也是一直很不成功的主要原因. 这是由于矩阵  $\boldsymbol{A}$  常会是病态之故. 采用多个象差为平衡对象时, 不可避免会发生线性相关或不相容, 例如同时对二带球差提出校正要求就会如此. 也会有二个变数起相同作用或起类似作用, 这二种情况都使变换矩阵  $\boldsymbol{A}$  成为病态的. 采用最小二乘法(7)式可以克服前一种相关, 但一般未完全克服病态, (9)式的解常因  $\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A}$  近于奇异从而使  $\boldsymbol{x}$  很大, 并因  $\boldsymbol{A}$  的小误差而使  $\boldsymbol{x}$  大变. 为此, Wynne 首先在程序中使用阻尼最小二乘法<sup>[9]</sup> 求解. 即代评价函数  $\psi$  为:

$$\psi + p^2 \sum_1^n (x_j - x_{j0})^2, \quad (10)$$

从而限制  $\boldsymbol{x}$  作过大的变动. 不仅如此, 增加的项使每个  $x_j$  起的作用各不相同, 从而消除其相关性. 修改后的(8)式成为:

$$(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} + p^2 \boldsymbol{I}) \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{b}, \quad (11)$$

其解为

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} + p^2 \boldsymbol{I})^{-1} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{b}, \quad (12)$$

$\boldsymbol{I}$  是单位矩阵. 在矩阵  $\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A}$  的对角线项上都加上了适当的阻尼  $p^2$ , 矩阵  $\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} + p^2 \boldsymbol{I}$  当然不再会是病态的.

按(12)式作自动平衡大概是现在最流行的程序方法. 它相对简单而有效. 在六十年代的自动平衡研究工作中也对最小二乘法进行了大量的改进尝试, 如最速下降法、变度规法、正交法等等<sup>[10]</sup>. 研究表明<sup>[1]</sup>, 这些方法的本质在于变更了变量的度规. 于是提出了“度规应怎样才适当”的问题. 实际上度规不完全是数学问题, 也是光学本身的问题. 也应从光学方面去考虑, 应有怎样的度规来使  $\psi$  在  $x$  空间的形式不过于细长而接近于球, 以使收敛加速. 对此, 我们将在下面再加以讨论.

当  $m \leq n$  时, 阻尼最小二乘法尚可适用, 但此时, 由于变数大于要求, 故所有要求

可能完全被满足, 所谓适应法<sup>[11]</sup>的实质就是在变量变化极小的约束条件下对这种问题的解。

这就是要求(5)式为零, 同时满足变化量极小。用拉格朗日乘子法, 就是要求

$$\sum_1^n \mu_j (x_j - x_{j0})^2 + 2 \sum_1^m \lambda_i f_i \quad (13)$$

为极小, 式中  $\mu_j$  是变量  $x_j$  的度规。(13)式对  $\lambda_i$  微分得:

$$f_i = f_{i0} + \sum_1^n a_{ij} (x_j - x_{j0}) = 0, \quad (14)$$

(13)式对  $x_j$  微分得:

$$\mu_j (x_j - x_{j0})^2 + \sum_1^m \lambda_i a_{ij} = 0. \quad (15)$$

将(15)式代入(14)式得  $\lambda_i$  的联立方程组:

$$\sum_1^m \lambda_k \sum_1^n a_{kj} a_{ij} / \mu_j + f_{i0} = 0. \quad (16)$$

由(16)式解出  $\lambda$  代入(15)式, 即得  $x$ 。故矩阵形式的解为:

$$\lambda = (AA^T)^{-1}b, \quad (17)$$

$$x = -A^T(AA^T)^{-1}b. \quad (18)$$

(17)和(18)式是度规  $\mu=1$  时的解, 显然  $\mu \neq 1$  时解将随之而变。在(13)式中引入度规的目的就是要表明它对解有严重影响。由于光学设计涉及的自变量有很不相同的量纲, 它们对象差的影响也大不相同。因此, 取相同的度规是极不合理的。从初级象差微分理论, (X. 10, 11, 12)式, 若以曲率变化  $\Delta c$  的度规为单位, 则  $\Delta d$  和  $\Delta n$  应有的变化量级是:

$$\begin{cases} \Delta d = f^2 \Delta c, \\ \Delta n = f \Delta c. \end{cases} \quad (19)$$

焦距  $f$  一般是很大的值, 可见这几种变量的度规应有很大差异方能使  $a_{ij}$  的大小相近, 也才能够使(13)式中的各类自变量均衡地起作用。若令度规为 1, 则显然将使  $d$  和  $n$  虽作为变量实不变化, 不能起到校正象差的作用。定际上确实是如此。(19)式表示的简单度规还不够有效, 尤其是在处理非球面系数时更是如此, 非球面系数的量级随半径而有很大不同, 各个  $d$  和  $n$  也是有差异的。为此, 可以对每个自变量分别取各不相同的度规, 度规的大小统一为所产生的球差和象散为分布最大值的 1%。这样做虽使计算工作量有所增加, 但却使收敛加速。

可以指出,解(18)不能排除(14)式所表达的多种要求中的线性相关或不相容。因此,采用适应法时须注意所选的校正对象是否相互独立。适应法的优点是可能将要求准确满足。为排除变量间相关,阻尼最小二乘法和适应法都采用了同一方法,即将自变量的变化量极小作为要求之一。我们也可以将 $\sum S_{1,i}^2$ ,或(和) $\sum S_{2,i}^2$ 作为要求校正的象差,从而排除自变量相关。这种做法的另一作用是使球差(或象散)均匀地产生,而非集中地产生,从而自动降低高级象差。

也有程序将象差分为两类,其一部分用平方极小处理,另一部分则用拉格朗日乘子法处理,这样的做法使计算工作量加大。

为使自动平衡程序正常工作,还须解决一些具体问题,如以下数节所述。

#### §4 阻尼和步长

阻尼最小二乘法和适应法都将自变量变化的步长加以限制,这是成功的关键之点。因此,选择步长显然很为重要。Wynne以选择阻尼因子 $p$ [见(11)式],来达到这一目的。他构造函数 $\theta$ :

$$\theta = \frac{\psi - \psi^*}{\psi - \psi_L^*}, \quad (20)$$

式中 $\psi^*$ 是新结构的评价函数实际值, $\psi_L^*$ 是此新结构的评价函数线性预期值, $\theta$ 的大小反映线性程度的好坏,从而增减 $p$ 值。当 $0.5 < \theta < 0.9$ 时, $p$ 不变;当 $\theta > 0.9$ 时下次 $p$ 值减半;当 $\theta < 0.5$ 时,下次 $p$ 值加倍。以后的程序中还曾采用过更为复杂的自动选择阻尼的方法。

实践表明,这种简单的选择阻尼的方法是可行的,但并不很好。阻尼对步长的影响是间接的,而且常不能使步长作充分变化。另外,若虽已非线性,但尚能使 $\psi^*$ 充分变小时,步长也不必减小。因此,直接优选步长更为有利。

式(10)和式(13)一样存在变量度规问题。通常仅对 $r$ , $d$ , $n$ 分别采用不同阻尼,如(19)式所示,事实上阻尼也就是度规,因此(10)式中的阻尼应随每一自变量而不同。当评价函数中一切象差均归一为波象差的量纲,一切自变量的度规均归一为使象差变化1%,由总评价函数(10)式中各项大小相近的考虑,就可决定公共阻尼 $p$ 应有的值,它可使步长的大小约变象差1%。

采用优选法<sup>[12]</sup>选择步长更为有利。例如解出步长为 $d$ ,则可在 $d/10$ 到 $10d$ 之间作步长优选,以使 $\psi$ 中的象差部分极小。我们采用的优选法与通常的618法一样,不过为使试验点作对数均匀的分布,故点的选取有所不同。考虑到程序中宜固定优

选的次数,例如五次,则就能在预定范围内定十四个点中选出最佳者。取十四个点的步长公倍数为  $100^{1/13} = 1.425$ , 故对数均匀的倍率值如下表:

618 法优选点	0.09 0.146 0.236 0.292 0.326 0.382 0.472 0.528 0.618 0.674 0.708 0.764 0.854 0.910
$1.425 \times$ 优选点	0.1 0.143 0.203 0.289 0.412 0.586 0.835 1.19 1.70 2.42 3.45 4.91 7.00 10.0

为对照起见,表中也列出 618 法五次优选的点分布位置。优选还可以递归进行。例如当优选结果在二端点时,为扩充优选范围,可以为新的解出步长再作一轮优选。这就可以前进尽可能大的步长。

由于在步长优选时不须重解  $\Delta x$ , 故平衡速度可以提高。实践表明,采用步长优选可以使平衡迭代次数减少一个量级。这对阻尼最小二乘法和适应法均可适用。当按适应法(18)式求解时,对线性程度较好的象差(如初级象差)可以用较少的次数得到象差等于机器零值的解。

## §5 边值问题

由于自变量的变化范围有限制,自动平衡程序中有处理边值限制的必要。例如限制厚度和间距不可太小,限制折射率和色散必须在一定范围内等等。这就要求程序中对解出的新自变量值进行检查,考察是否违反边值要求。若有违反则须作适当的处理。具体处理的作法是:(a)作为象差来处理,就象焦距和截距那样,厚度也可以这样做;(b)将溢出边界的自变量冻结在边界上,不再作为自变量,待数次迭代后再解冻。这两种作法都使变换矩阵变形后作重解,以后者为较优。

这些作法虽并不困难,但却使程序工作量加大。大型机的程序中边值处理占程序相当大的比重。

## §6 结组和保值

程序中会由一些预定的要求而减少自变量,如保持绝对对称而除去一半自变量,采用“弯曲”为变数而使三个曲率同时变化之类。

另有一类要求也使自变量减少。例如使某些高斯光学参数保持预定值:伽利略望远镜的物镜和目镜焦距;变焦距物镜的各组焦距;由薄透镜解转变为有厚度时,保持各面的  $i$  或  $i_p$  不变,以得接近目标的解;将对称型物镜的物体移到无限远而同时保持  $i$ , ( $i_p$ ) 不变等等。为这类目的就得有一个过程,用以保证指定面上的  $i$ ,  $i_p$ ,  $u$ ,  $u_p$  或  $h$ ,  $h_p$  为指定值。这是容易做到的事。

## §7 自动平衡程序的现状

现在的主要光学设计工作都是用电子计算机做的,所用计算机愈来愈大,不少程序是在速度为每秒千万次量级的计算机上用的,但也仍有用小型机的工作,已有不少商业化的程序。从程序对几个预定的要求进行设计比较来看,各种程序的功能不存在多少差别,按同一要求而得的设计结果是相似的。

由于计算机的采用,光学设计的水平有所提高,其标志之一是出现了大量的高质量变焦距物镜。由于它要求进行大量的计算,单靠手工是难以胜任的。标志之二是出现了一些性能独特的物镜,如视场  $100^\circ$ ,  $1:0.7^{[1]}$  及  $110^\circ$ ,  $1:1.8^{[3]}$  的反远距摄影物镜。标志之三是物镜设计质量有所提高,例如  $f=75$ , 视场  $40^\circ$ ,  $1:2.8$  的物镜可接近衍射极限分辨<sup>[4]</sup>。

从 1975 年国际会议来看,当时认为自动平衡程序的困难问题是:选择阻尼、要求的相关和不相容、可变参数的度规、评价函数的多变等方面。对于这些问题,我们在前数节给出了有关的论述以及某些解决。

自动平衡程序的使用大有利于光学设计的普及,确实可以不用多少光学和程序的知识,就可以完成一些光学系统的设计和修改工作。但也时常会由于一些简单的阻碍不能排除,使本来容易进行的设计不能进行下去。

如前所述,自动平衡程序中还存在不少具体的操作的要求,因此要求光学设计工作者应熟悉程序的各个细节,否则将不能良好地使用程序。为对象差和象质作出分析判断,还应能使用适当的计算分析程序,使能对当前结构的处境作出判断,从而决定进一步工作的方向。要能够辨别,那些象差或缺陷是可以由改变操作而纠正的;那些是原则上不具备校正可能性的;自变量数是否足够;是否存在有效的自变量(某些象差不存在有效自变量,这是变换矩阵病态的原因之一),等等。这就是说,设计者的经验、分析判断能力、决策能力一直都是十分重要的。绝不会由于有了自动平衡程序而降低了对设计工作者的要求。

### 参 考 文 献

- [1] C. G. Wynne, *Appl. Opt.*, **2** (1963), 1233.  
 D. P. Feder, *Appl. Opt.*, **2** (1963), 1209.  
 G. H. Spencer, *Appl. Opt.*, **2** (1963), 1257.  
 B. Brixner, *Appl. Opt.*, **2** (1963), 1281.
- [2] R. E. Hopkins, et. al. *J. SMPTE*, **76** (1967), 185.

- 
- [ 3 ] B. Sweet, B. Sherman, *Appl. Opt.*, **15** (1976), 302.
  - [3a] B. E. Fisher ed., *International Lens Design Conference*, SPIE, 1980.
  - [ 4 ] C. L. Lawson & R. J. Hanson, *Solving Least Squares problems*, Prentice-Hall Inc., 1974.
  - [ 5 ] B. Brixner, *Appl. Opt.*, **12** (1973), 2703.
  - [ 6 ] W. B. King, *Optical Instruments and Techniques 1969*, Oriel Press, 1970.
  - [ 7 ] A. Offner, *Optical Instruments and Techniques 1969*, Oriel Press, 1970.
  - [ 8 ] H. Kondo et. al, *Optica Acta*, **22** (1975), 353.  
H. Kond et. al, *Optica Acta*, **24** (1977), 841.
  - [ 9 ] C. G. Wynne, *Proc. Phys. Soc.*, **73** (1959), 777.
  - [10] 南京大学数学系计算数学专业编, 光学系统自动设计中的数值方法, 国防工业出版社, 1976.
  - [11] E. Glatzel, *Appl. Opt.*, **7** (1968), 265.
  - [12] 中国科学院数学研究所优选法小组, 优选法, 科学出版社, 1975.
  - [13] G. Courtes, *Appl. Opt.*, **5** (1966), 1350.
  - [14] H. B. Brown, *J. SMPTE*, **76** (1967), 100.

# 第十四章

## 光学仪器的光学整体设计

### §1 概 述

前面各章所述的纯粹是光学系统本身的问题。它不能解答光学仪器的设计问题。它们只是在光学仪器对光学系统的要求已定后,提供如何满足这些要求的方法。

光学仪器设计和单纯光学设计有很大的不同,单靠几何光学和物理光学不能完全解决它所遇到的问题。它的本质是充分利用光源、光学媒质、光能接收器和几何光学、物理光学的可能性来满足特定的使用要求。在现在的设计工作中最活跃可变的部份常是光学系统部分,即光学设计部分,这是由于其他部分一般是作为固定元件来使用的原故。但这也不应该是绝对的,其他部分尤其是接收显示部分,也应该根据使用要求而发展。这就是光电子学和光学信息处理的目的之一。

光学仪器的各部分是相互联系的,它们的共同性是:它们都是光学信息的传递环节。仪器的优劣在于它能传递的信息量大小,以及信号是否因传递而变形。

光学仪器一般所涉及的复杂的信号传递过程可用图 14.1 表示,它以方块图形式大致表示出信号所经历的变换。由于传递过程的不完善以及在各阶段引入噪音而使信号变形。这里的物体可以是显微镜下被观察的细菌,可以是被光谱仪分析的矿物样品,也可以是被望远镜瞄准的人造地球卫星。光学系统一般是问题的主体,其结构和运行是按照预定的观察分析目的而决定的,它应该能将所需的光信号经过可能的分析整理而输入接收器,接收器可以是人的眼睛,它将光信号变为神经脉冲而传给大

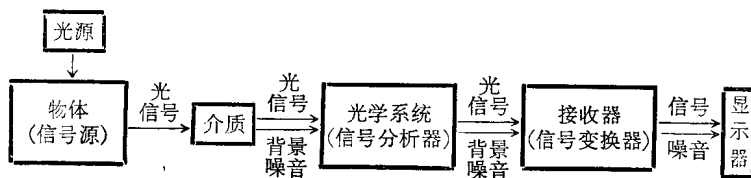


图 14.1



脑去进行分析;也可以是种种光电、热电元件或光化学元件(照象底片之类),至于将电信号或其他信号放大显示的问题已不是光学问题。但显示的结果多半还是供眼观察的。值得强调的是:光学技术的进一步进展不能脱离这个最后一步,也就是光电光度<sup>[41]</sup>和放大显示技术。由于其重要性,足可发展成为一个单独的分支学科,它在相互配合中的不可分割的地位和现在的薄弱情况不相适应,因此值得在发展中加以重视。最近十多年中已形成了光电子学这个分支,判读显示技术都已有重大进步<sup>[27-29]</sup>。

欲了解一定的成象机构能否达到预定目的,必须先对这种过程作出充分完满的描写,并决定其质量指标作为相互比较的根据。

看来,成象转换过程可分为三个方面来描述。首先是它的能量方面,也就是物体、光学系统和接收器的光度性质;其二是它的成象特性方面,也就是它能分辨的光信号在空间和时间方面的细致程度;其三是噪音方面,它决定接收到的信号不稳定的程度或可靠性。后两方面可概括为信息传递问题,它们决定能被传递的信息量大小。按照信息论的一般理论可知,前者由取样原理而决定独立的点数,后者和第一方面(信号强度)一起决定了每个独立点所包含的信息量 [(XI.89)]。在下面所作的讨论中不准备对信息量大小作定量讨论。

各种产生和传递光信号的元件对各个方面的影响很不相同,其一般情况将在下面分别讨论。

如何使各元件在各方面的性能相配合,如何选择适当的元件、条件和机构使预定要求在最大限度内实现,这是光学系统整体设计问题。这个问题在第二章就高斯光学范围已作过一些讨论,在第七章又以象差校正的观点作了讨论。

接收器和显示器的输出结果表示方法是个重要问题,它部分地决定了所得光学信息是否能为人所充分利用。广义而言它应是控制论的一个分支,是由人的思维和认识过程的特性和能力所决定的<sup>[2]</sup>,也是关于视觉的信息论<sup>[3]</sup>所应该研究的问题。现在光学信息处理已经是内容丰富的分支。可以指出:由于人眼对于光度的感觉只具有比较能力而无定量能力,光度性质缓慢变化的图形不能反映到脑中,所以,将光度变化的图形表示为等亮度(等黑度)图形(如地图上的等高线)的显示器<sup>[42]</sup>具有重大价值,它足可使某些光学技术的精度作数量级的提高(例如在底片上搜索判读一个和背景黑度相差不多的小点,再如阴影图和干涉仪技术)。利用这种技术在原则上可以提高对比度(削去背景亮度)。因此以光电方式作图象处理会是很有意义的。现在已经有多种进行密度分级的仪器,如假彩色密度仪。

将光学仪器中除光学系统以外的部分都看作是固定性能的元件时,光学仪器的

设计就归结为光学系统设计。此时,如何将使用要求翻译为光学要求,将光学要求划清范畴,分类解决是非常重要的。例如区分问题的范畴是属于光学的还是其他物理问题;属光源和接收器的问题,还是光能传播问题;是几何光学问题还是物理光学问题;是高斯光学问题还是象差问题等等。所以需要如此,是由于仪器中通常涉及的问题往往是多方面的、复杂地交缠在一起的,不加分类处理常会无从着手。

在本章中我们仅仅考虑仪器的光学整体问题。光学仪器当然不单是个光学整体问题,它还有机械结构、自动化等等须作全局考虑的问题,对于这些问题我们不去讨论。

## §2 光度性质

光度性质亦即能量传递特性,是最早被人们认识的方面,并且由此而建立了光学的的一个分支:光度学<sup>[5]</sup>。与仪器的另外两个方面——成象特性和噪音特性——相比,这个方面是比较成熟的。

区别于其他能量传递,光能量传递遵守几何光学定律的约束。也就是说,在几何光学近似正确可用的范围内,光能传递过程可由几何光学完全决定。由于几何光学不能决定能量的细致分布,光度学不考虑能量的细致分布所产生的影响。也就是说,在空间方面所考虑的是足够大的发光面积引起的种种后果,在时间方面所考虑的是稳定不变的光功率(直流信号)引起的影响。也正因为如此,一般情况下可采用高斯光学来考虑问题,从而使结果大大简化。

几何光学的主要约束是:光管变更遵守 Lagrange 不变量的要求,再由能量不灭定律就使亮度(单位面积单位立体角内的光功率)和折射率平方之比是不变量。当考虑到光能被介质吸收、反射或散射时,亮度将因之减弱。亮度实际值和理想值之比称为透过率。

光度学中的其他量均可看作是为表达方便而由光功率或亮度衍生出来的。例如称单位面积接受的光功率为照度,它显然由照明光束的亮度和光束总立体角决定。

由于不存在那种对无限小光功率都能反应的接收器,再由于接收器和显示器总只能分辨有一定对比的信号(二信号之功率差需大于某限值)。因此光度学方面的考虑就成为最基本的、重要的考虑之一。

很明显,光度考虑的基本目标在于:加强信号减弱背景。信号总是有别于背景而后才能被辨别;背景一定不是绝对黑暗的,由于散射和本身辐射,背景总是具有一定亮度。当信号和背景亮度之差小于接收和显示的阈值时,信号不能被觉察。

提高信号强度可能的途径是：提高光源亮度；改进照明方法（成象过程亮度“不变”，非成象过程，如漫射过程，亮度可锐减）<sup>1)</sup>，提高介质和光学系统的透射率；增大通光孔径以使照度增大等。前面几点是纯光度问题，后一点牵涉到光学系统的结构参数，而这个参数一般还和其他的使用要求有联系，因而对它常常不能作简单的决定。对这问题的具体分析常常可导出各性能相互制约的理论限度。

背景亮度的起因一般是大量的小因素累积的结果，主要来源于介质散射和各边缘的漫反射，在长波区域可缘起于热辐射或介质的其他非平衡辐射。减弱它的主要途径是选择观察条件和改善工艺过程。背景亮度的统计起伏即为噪音来源之一。

接收器的光度特征主要是它能探测的最小功率（最小探测功率）<sup>[6]</sup>以及它的灵敏度——光信号和它所产生的其他信号强度之比。灵敏度所决定的仅是：它需联用复杂的显示器抑或仅需用简单的就行；也就是说，它仅是显示难易程度的标志。最小探测功率的大小则大致上和背景噪音大小相同，这是由于我们不能分辨所测得的是信

表 1 光度学的术语与关系

物理量	关 系	符 号	单 位	单 位 间 关 系
光通量、 辐射通量	单位时间内通过 的能量；功率	$F$	流明、瓦	对波长 $555\text{ m}\mu$ 的单色光而言，每瓦约相当于 680 流明*。其他波长的单色光每瓦相当的流明数均小于 680。波长短于 $450\text{ m}\mu$ 或长于 $700\text{ m}\mu$ 者对眼无作用，故等价的流明数为零。非单色光源辐射的瓦数相当的流明数须由其辐射的光谱特性决定
亮 度	单位面积单位立 体角内的辐射通 量	$B$	照 提	照提 = 流明·厘米 <sup>-2</sup> ·立体弧度 <sup>-1</sup>
发 光 度	单位面积的辐射 通量	$R$	射辐透、 阿波照提	射辐透 = 流明·厘米 <sup>-2</sup> ；阿波照提 = 流明·米 <sup>-2</sup>
照 度	单位面积接收的 通量	$E$	辐透、勒克司	辐透 = 流明·厘米 <sup>-2</sup> ；勒克司 = 流明·米 <sup>-2</sup>
发光强度	点光源在单位立 体角内辐射的通 量	$I$	烛 光	流明·立体弧度 <sup>-1</sup>

\* 由于测定辐射的光当量是由人眼决定的，不宜作为光度学的标准，根据亮度所具有的不变量性质（这将在下面讨论），1940年国际度量衡委员会照度学咨询会议决定光度标准以铂熔点（2046.5°K）温度的黑体辐射作为标准，其亮度规定为 60 照提。

- 1) 这种情况完全是热力学问题的一种特例。成象过程属于不作功的可逆过程，而亮度是辐射温度的光学表示，故不变；漫射和其他损耗过程属不可逆过程，它只能导致高温体的温度降低。

号还是噪音之故(当我们清楚了解信号的统计性质或噪音的统计性质后情况当然就会不同<sup>[7]</sup>)。由此可见,最小探测功率实际上是噪音特性。

由于所有过程的特性都与波长有关,例如接收器对各波长有不同的相对灵敏度,因此,我们的光度标准应该标出所用的波长,而总结果是各波长的积分结果。古典的光度学以人眼为唯一的接收器,将能量的功率单位乘以眼的相对光谱灵敏度成为所谓光通量以避免一次次地作这种积分。但在现代,这种做法已因各接收器光谱灵敏度和眼睛不同而引起不少麻烦,合理的光度量都应该是光谱光度量,否则其价值是不大的。虽然如此,由于现在通用的原故,我们还常用光度单位来讨论问题。

表2 物体照度和需要照度(勒克司)

条 件	弧 度
月 光 下	0.1—0.2
白 天 室 内	50—1000
读 书 需 要	30—50
电 影 银 幕 需 要	30—100
精 细 工 作 需 要	100—300
直 射 日 光 下	1000000

## § 2.1 亮 度

由 Lagrange 不变量易于证明一个称为 Straubel 定理的光度学基本定理。它实际上不过是 Lagrange 不变量的空间表示。例如我们设第一章图 1.6a 中有一与图面垂直并通过  $O$  点的小线元  $\eta^*$  发出和  $OD$  夹  $\theta^*$  角的光束,则在此截面内必有  $n\eta^*\theta^* = n'\eta'^*\theta'^*$ 。因  $\eta\eta^*$  就是  $O$  点附近的小面积元  $ds$ ,  $\theta\theta^*$  就是  $O$  点发出的光管元立体角  $d\omega$ , 故有

$$n^2 ds d\omega = n'^2 ds' d\omega'. \quad (1)$$

当面积元与立体角不垂直,面元法线和细光束夹角  $\varphi$  时,上式应推广为:

$$n^2 \cos \varphi ds d\omega = n'^2 \cos \varphi' ds' d\omega'. \quad (2)$$

若  $ds$  表面亮度为  $B$ ,则辐射于此细光管内的总光通量  $dF$  是:

$$dF = B ds \cos \varphi d\omega. \quad (3)$$

象空间光管内总光通量有相似表示。若光学系统传输过程无能量损失,则由能量不灭定理应有

$$dF = dF', \quad (4)$$

从而由(2)式得:

$$\frac{B}{n^2} = \frac{B'}{n'^2}. \quad (5)$$

这就是由 Straubel 定理和能量不灭定理得出的推论: 光束亮度不因传递的方式而变化, 象空间的光束亮度由物空间光束原有亮度与二空间媒质折射率所完全决定.

由此可见唯有光源本身亮度增大才能使象的亮度提高, 当然假使有可能的话改变空间媒质的折射率也是有用的. 另外, 光学系统中总是有吸收、反射等损失, 因此尽量减少这种损失也很重要.

由于亮度具有上述不变量的特性, 绝大多数光度学问题以此为媒介时总能比较容易地导出结果.

当光能在光学系统中受到损失时, (4)式须写作:

$$dF' = k dF, \quad (6)$$

$k$  是光学系统的透过率(恒小于 1). 相应地(5)式成为:

$$k \frac{B}{n^2} = \frac{B'}{n'^2}. \quad (6')$$

### § 2.2 大光管的传递, 象面上各点的照度

为精确导出大光管被光学系统传递后的特性, 必须先知道各个细光管的相互关系, 亦即光线间相互关系. 这就是说, 大光管如何传递的问题是和象差有关的, 因此

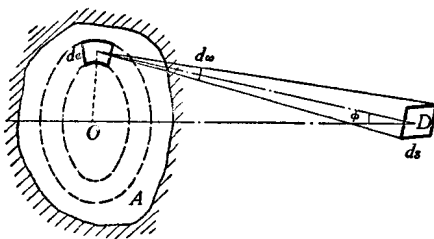


图 14.2

象面的照度和象差有关. 我们在下面将导出一种特殊情况下的象面照度, 由计算过程还可以看出一些象差将如何影响象点的照度特性.

图 14.2 中,  $A$  为光栏面,  $da$  为光栏上小面积元,  $ds$  为象面上小面积元,  $ds$  对  $da$  张立体角  $d\omega$ . 选取  $OD$  轴, 它与  $D$  点的象面面元  $ds$  垂直. 设光栏和象面平行, 由  $da$  射向  $D$  的细光管与此二面法线夹角为  $\varphi$ , 则由  $da$  射向  $ds$  的能量通量由(3)式为:

$$dF = B da \cos \varphi d\omega = B da \cos^2 \varphi \frac{ds}{R^2},$$

式中  $R$  为  $OD$  之长. 假若图 14.2 中一圈环带的光束亮度  $B$  相等, 则易于积分得出此环带射向  $ds$  的通量

$$dF = B 2\pi R^2 \tan \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \cdot \frac{ds}{R^2},$$

亦即

$$dF = B ds 2\pi \sin \varphi \cos \varphi d\varphi,$$

将上式对  $\varphi$  由 0 到  $U$  积分即可得出孔径角为  $U$  时  $ds$  上受到的能量通量:

$$dF = \pi B ds \sin^2 U, \quad (7)$$

积分时假设光束亮度  $B$  是常数。这就是孔径角为  $U$  的圆形光孔对它轴上面元发出的总通量, 故此面元的照度即为

$$E = \pi B \sin^2 U. \quad (8)$$

当光孔形状不规则或者光束亮度不均匀时, 将上式中  $B$  和  $U$  取适当的平均值就可得出满意的结果。可见当辐射源(光发面)亮度一定, 光学系统透过率一定时, 象面的照度只由光学系统相对孔径决定, 只有增大相对孔径才能提高象面照度。

上列的讨论显然与象差无关, 只要所讨论的光管是充满光孔的, 那么(8)式就是正确的; 但若光源恰好充满入瞳, 则象差可使出瞳不被光管充满, 于是象面照度可因此变化, 这就是说光瞳象差是有作用的。关于这个问题在 § 2.3 中再作讨论。

由(7)式可以导出由  $ds$  所发出的光管内能量完全集中到它的理想象  $ds'$  上的条件:

$$n'^2 ds' \sin^2 U' = n^2 ds \sin^2 U,$$

即

$$n'\eta' \sin U' = n\eta \sin U. \quad (9)$$

这就是正弦条件, 式中  $\eta'$  为  $\eta$  的理想象高。一般认为这种导出正弦条件的方法是所谓“光度学的”或看作是“能量不灭定律的推论”<sup>[24]</sup>。实际上如上所述, 这是 Lagrange 不变量的积分结果, 这种导出方法和我们在第三章中所作的推导(相当于一般的余弦条件的推导)并无区别。在导出(9)式的过程中能量不灭定律只是理想成象的另一种表述, 即能量不散出理想范围  $ds'$  而已。

由(8)式可以得出的另一重要推论是: 象面照度一定低于物面发光度。  $R = \pi B$ , 由(8)式:

$$\frac{E}{R} = \sin^2 U', \quad (10)$$

只有当  $\sin U' = 1$  时两者才能相等。

对于轴外点, 光阑  $A$  和象面元  $ds$  都不与光束轴垂直而均与之夹  $U_p$  角, 此时被光通量照明的面积大小由  $ds$  变为  $ds/\cos U_p$ ; 而通光孔面积不变时对象点所张的孔径角在一个方向减小为原来的  $\cos U_p$  倍; 另一方面, 轴外点到光阑中心  $O$  的距离也由  $R$

变为  $R/\cos U_p$ , 故孔径角  $U$  又变小  $\cos U_p$  倍; 综上所述, 轴外点的照度  $E_{U_p}$  和轴上点照度之比应为  $\cos^4 U_p$ , 即:

$$E_{U_p} = E \cdot \cos^4 U_p \quad (11)$$

若轴外点的出瞳面积由于象差而与轴上点不同, 再若有畸变或象面弯曲, 则得出(11)式的几个前提均发生变化, 此时轴外点照度可能不按  $\cos^4 U_p$  变暗。

我们导出(11)式时所用的考虑方法只在光栏孔径角无限小时才是准确的, 但在实际上作准确积分的结果与(11)式的差别并无实践意义, 将实际积分结果与(11)式的近似结果列表比较如下<sup>[8]</sup>:

$2n/f$ $U_p$	1:2	1:3.5	1:∞ (按 $\cos^4 U_p$ )
10°	0.947	0.943	0.941
20°	0.799	0.786	0.780
30°	0.590	0.571	0.563
40°	0.369	0.352	0.344
50°	0.185	0.175	0.171
60°	0.068	0.064	0.063

从准确积分的方法不容易看出  $\cos^4 U_p$  的来历 (其中有三次方是从光束子午截面孔径角变小引起的, 一次方是由弧矢截面孔径角引起的, 以及象差的作用等)。

### § 2.3 象差对照度的影响

前已提及, 象差可使象面上的照度变化, 现用象差理论来考虑这个问题。

对于轴上点附近的小面积元来说, 偏离正弦条件可使  $\sin^2 U$  大于理想数值从而使照度加大。

使轴外点照度不依  $\cos^4 U_p$  变小的可能性是很多的。例如使象面元和光束垂直 (象面弯曲), 此时照度仅因光栏张角在一方向缩小, 故按  $\cos U_p$  一次方的方式变暗。再如有畸变, 它将使象面元  $ds$  和  $ds'$  之比不同于理想系统, 象面元在子午方向收缩必同时招致这方向的孔径角加大, 这就可以使轴外点的照度增大。但是这两种可能性都使成象不理想。

再有一种可能的方案是使光栏有象差, 从而使出瞳对轴外点的张角加大 (若光学系统对物面成象良好, 则由能量不灭的观点看来, 入射光瞳对物面轴外点的张角一定

同时加大,由此可见光栏一定处在光学系统中间),这种方式显然比前两种好,用象差理论可以判定怎样的象差会起这种效果。

起作用的象差当然都是光栏象差,现将初级光栏象差的表示式写在下面:

$$W_p = \frac{1}{8} S_{I_p} (\eta^2 + \zeta^2)^2 + \frac{1}{2} S_{II_p} (\eta y + \zeta z) (\eta^2 + \zeta^2) + \frac{1}{2} S_{III_p} (\eta y + \zeta z)^2 + \frac{1}{4} (S_{III_p} + S_{IV}) (\eta^2 + \zeta^2) (y^2 + z^2) + \frac{1}{2} S_{V_p} (\eta y + \zeta z) (y^2 + z^2). \quad (12)$$

将它对  $\eta, \zeta$  微分即得垂轴几何象差,亦即光瞳和理想光栏象的差别:

$$\begin{cases} nu_p(TA_\eta)_{\zeta=0} = \left( \frac{\partial W}{\partial \eta} \right)_{\zeta=0} = \frac{1}{4} S_{I_p} \eta^3 + \frac{3}{2} S_{II_p} \eta^2 y + S_{III_p} \eta y^2 \\ \quad + \frac{1}{2} (S_{III_p} + S_{IV}) (y^2 + z^2) \eta + \frac{1}{2} S_{V_p} (y^2 + z^2) y, \\ nu_p(TA_\zeta)_{\zeta=0} = \left( \frac{\partial W}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=0} = \frac{1}{2} S_{II_p} \eta^2 z + S_{III_p} \eta y z + \frac{1}{2} S_{V_p} (y^2 + z^2) z. \end{cases} \quad (13)$$

微分后令  $\zeta=0$ , 这是由于对子午面内的物体来讨论并不失普遍性之故。从这组表示式就可以看出各种初级光栏象差对于出射光瞳面积所起的作用。显然  $S_{I_p}$  只使光瞳位置作正比于象高二次方的平移, 对面积并无作用(移动量和光栏坐标无关)。  $S_{III_p}$  和  $S_{IV}$  虽使光瞳形状变形, 但由于位移是  $y, z$  的偶次函数, 因之光瞳在有些部分加大的同时在另一部分必然缩小, 因之总面积大致不变。  $S_{V_p}$  虽使光瞳直径发生改变, 但改变量和  $\eta$  无关, 因之并不使轴外点相对改善, 实际上它的作用与不遵守正弦条件类似( $S_{V_p}$  和  $S_{II}$  有关)。因此只有  $S_{II_p}$  才是唯一起作用的初级光栏象差, 它使轴外点的出瞳由圆形变为椭圆形, 长轴在  $y$  轴方向。

从这些初级象差作用的讨论可以看出, 为讨论出瞳面积变化只须考虑那些对  $y, z$  为奇次方的波象差项, 而且畸变项也可以不考虑。由此可见二级象差中除高级彗差项  $(\eta y + \zeta z) (\eta^2 + \zeta^2)^2$  外仅轴外彗差  $(\eta y + \zeta z)^3, (\eta^2 + \zeta^2) (\eta y + \zeta z) (y^2 + z^2)$  项起作用。有关的二级几何象差的表示式是:

$$\begin{aligned} nu_p(TA_\eta)_{\zeta=0} &= \frac{5}{2} S_{II_p}^H \eta^4 y + S_{III}^H \eta^2 y^3 + \frac{3}{2} (S_{II}^H + S_{IV}^H) \eta^2 y (y^2 + z^2), \\ nu_p(TA_\zeta)_{\zeta=0} &= \frac{1}{2} S_{II_p}^H \eta^4 z + S_{III}^H \eta^2 y^2 z + \frac{1}{2} (S_{II}^H + S_{IV}^H) \eta^2 z (y^2 + z^2). \end{aligned} \quad (14)$$

用类似方法不难讨论更高级的光栏象差的影响。

对小孔径大视场系统, 显然仅与光栏正弦差相关的光栏彗差(初级和高级)亦即与光栏坐标正比的象差才对光瞳面积起作用, 因之计算主光线的  $OSC$  即可大致判定光瞳面积如何变化。为此须注意应先从  $OSC$  中分出和  $U_p^2, U_p^4, U_p^6, \dots$  正比的项(和



$\eta^2, \eta^4, \eta^6$ , 正比的项), 它们对椭圆子午轴的影响分别为 *OSC* 的 3, 5, 7... 倍。这个结果是 Русинов 首先用另外的方法导出的<sup>[9]</sup>。

### § 2.4 光度学和相干性

在古典光度学中, 总假定光源各点发出的光是完全不相干的, 也并不企图处理干涉衍射的光度学问题。激光的发展使情况发生了变化, 光度学要处理完全相干的光束传输问题。由于干涉现象将导致强度分布变化, 可以相干增强也可以相干减弱, 并可能形成无规斑纹 (§ 4), 从而有不同于光度学预期的照度和亮度。不仅如此, 应认为, 一般热光源也并非完全不相干, 因此有人认为要对辐射度学作一番改革<sup>[30]</sup>。

确实, 古典辐射度学(光度学)的基本假设过于简略, 因此也会与实际现象不符, 应作仔细的研究, 进行适当的修正。但是, 可以认为在现有的某些场合下, 光度学结论对于相干光传输也仍然正确。

首先考察尺寸有限的均匀平面波的传播。这问题已由衍射理论解决(第十一章 § 2)。从光度学看, 它仍然满足亮度不变的定律。由于衍射, 平面波的尺寸  $D$  与传播方向角范围  $\Delta\theta$  之积约等于波长。若用理想光学系统将它转变为球面波而聚焦时, 波面张角  $u$  和焦斑直径  $\Delta x$  之积仍然约等于波长, 由此可见面积和立体角之积不变, 单位面积单位立体角内的光功率不变, 即亮度不变。当然, 光学系统不理想时也同样导致亮度下降。事实上, 当上述的面积和立体角之积等于波长平方时, 它恰好就是规定电磁波状态的单位相格尺度<sup>[31]</sup>, 亮度不变是相空间相体积运动不变的特例。相空间的另外两个坐标是观测时间和光波频率, 对于单模式电磁波  $\Delta t \Delta \nu \sim 1$ <sup>[31]</sup>。所谓单模式也就是单位相格。当以适当的传输方式使光波的模式变化时, 单模功率极大值总与原来相等, 而不会变大。这可作为亮度不变定律的推广。模式变换可以有多种方式, 如透镜聚焦、波导耦合、强激光自聚焦等。

激光的基模与上述平面波相当。高阶模式则有一些特点。由于波面分裂为多块位相突变区, 单模激光的  $D\Delta\theta$  之积一般大于波长, 阶数愈高则愈大<sup>[32]</sup>, 对它作位相补偿后可使  $D\Delta\theta \sim \lambda$ <sup>[33]</sup>。这虽不符合亮度不能增大的定律, 但这并不使相空间尺度变化, 单位相格内的光子数(光子简并度)不变。由此可见, 光子简并度不变可以作为更基本的光度学定律, 作为亮度不变定律的推广。与上述的空间调制过程相对应, 在时间域作位相调制(调频和解调)也可以使相干光束的单色亮度变化, 频谱加宽时单色亮度下降, 解调变窄时可使单色亮度提高。

对于部分相干的情况作照度计算时, 须作仔细的积分<sup>[30]</sup>, 但对热光源而言, 看来

并不会导致重大修正; 古典光度学结论应似为真。这是由于 3000 K 的热光源简并度为  $3 \times 10^{-4}$ <sup>[31]</sup>, 故由光源不同点发出的光而能达到同一相格者, 即相干者的几率十分小。由干涉形成的修正不会显著。按相关自发辐射的理论<sup>[34]</sup>, 二点相距小于波长时将同步辐射, 但当温度不高时, 波长线度内的激态原子数常小于 1, 这可作为低简并度的一种解释。

### §3 成象性质

由光度性质讨论的前提就可看出, 它的局限性在于不能表明随空间或时间变化的光信号如何在传递中被变形。对传递过程的这方面特性的描述, 我们称之为成象特性, 也就是将一般的空间成象概念推广到光信号作时间分布的情况。

所以要将光度性质和成象性质区分开来的主要原因是: 由于种种原因使原来物空间一点发出的能量经历传递过程后被分散, 并不聚焦于象空间的对应点, 从而使能量的空间或时间分布情况不符合光度学所预计的值。由于这个原因, 不仅可能使原来可被探测出的能量功率成为不能测出的, 而且使我们得不到信号的真实形状(能量功率的时空分布), 而这一点恰是我们一般的观测的目的, 因之是十分重要的。

在考虑成象问题时我们一般都假定被测的光信号强度远大于背景噪音形成的信号强度, 也就是说, 在考虑问题时可设背景噪音等于零。除此以外, 我们再设信号强度处在所有传递过程的线性反应范围内。上述两个前提就使我们只需考虑信号功率经过传递过程的相对分布情况, 这种相对分布情况不因信号的强弱而变化。显然, 只有这样的条件才能使我们讨论的结果明确而单一。对于种种非线性传递过程(背景噪音也属于这种过程), 我们的结论须加以修正。

光学方面对成象过程的描述原来采用过几种方法。主要的两种就是分辨能力和中心点亮度。前者所确定的是两点光源由于传递过程引起能量分散, 使两“点”之间无明确亮度差别的两点间最小距离; 由于能区别的亮度差别随条件而异, 因此会使分辨能力值稍有变化, 一般所指的分辨能力约指两点之间亮度只降低 25% 左右的两点间距。中心点亮度则是指点光源象的中心最大亮度。由于传递过程的能量分散, 它小于同样亮度的大面积成象时象中央的亮度。

这两种判断方法都存在重大缺点, 亦即并不能由这种判断了解到一般的非单点或双点光源物体被传递后将变形到什么程度, 其象是否能为我们识别和区分。例如我们不能用它来判断两个很靠近的物体而非两个点光源时, 或是背景有一定亮度时能否为我们觉察的问题。这就说明, 上述古典判断方法是不充分的, 它并不能作为描

述成象过程(或能量分散过程)的完善标志,它们至多不过是总标志的一部分,在某些特定条件下它们当然也可能是重要的标志。

在线性假定下,亦即在能量信号可迭加的假定下,可以用点光源象的能量分布函数作为成象过程的完善描述。因为任意物体的象就是原来的亮度分布函数乘以上述函数后的积分,因此这种描述就已是充分完满的。但很明显,这种描述方法对于判断是不方便的。

实际上,凡和点光源形成的亮度分布函数一一对应的函数都可以作为成象过程的完善标志。因此我们完全有条件在种种对应关系中选出最便于应用的函数来作为标志。按照现在的了解,点光源亮度分布函数的傅利叶变换是最方便的,常称之为反应函数或光学传递函数。这种处理方法在电讯方面早就被应用来描述电信号的时间过程传递特性。这种方法常称为频谱分析方法,也就是第十一章所讨论的传递函数方法。

### § 3.1 接收器和光学系统联用时的问题

既然光学系统的目的在于使接收器接受到信号,故而评价光学系统而不考虑接收器特性是不可能的。在前面研究分辨能力时已看到了这一点,但是所作的考虑还是很不完全的。

接收器的特征可以从两个方面来考察,其一是能量方面的,即灵敏度、光谱灵敏度、量子效率、噪音水平等,这是基本方面。假若接收器在这方面性能优良,就有用适当的机构来充分发挥其特长的可能。另一是信息传递方面的,这就是它在单位面积上能容纳的信息量或单位时间内能接收的信息量(用扫描机构例如电视发射管就可以将空间信号转换为时间信号)。

由于科学发展迅速,接收器日新月异,而对于接收器的全面研究还是在最近才逐渐开始,因此对接收器的成象特性了解得不多。在本节中我们只是将接收器在信息传递方面的特性作一规定,以作为评价接收器优劣的标准,并表明光学系统和接收器同时使用时应如何描述此整体的特征。

在第十一章中我们以光学系统的传递特征为例,表明用传递函数方法考察信号传递是合适的。实际上第十一章 § 3 的结果对于接收器或其他信号处理过程也同样保持正确。因之,我们可以用点光源(或脉冲信号)所引起的物理量变化(如照象乳剂变黑,视网膜上形成的光刺激,光阴极面上形成的电子束发射)之空间(或时间)分布函数的傅利叶变换作为接收情况的特征,仍称之为传递函数。有了传递函数后,各种

频率的信号被接收后将如何变形就很清楚了。再因接收器能接收的信息量和能量集中度成正比,故用传递函数来描述接收器或其他信号处理过程是很恰当的。

另一方面,单周期信号(XI.77)经过一次处理后变为信号(XI.79),将信号(XI.79)看作输入第二个处理系统的原始信号,则它又将受第二系统的影响而成为信号:

$$B''(\eta) = a + b |R_1(s_0)R_2(s_0)| e^{i(\eta s_0 + \varphi_1 + \varphi_2)}$$

由此可见,两个处理系统(如光学系统和接收器)对信号的总影响等于将它们传递函数之乘积作为总传递函数时的影响。由此可见,多个系统将信号作连续处理时,此系统整体的传递函数等于各部分传递函数之乘积。因此当我们已知光学系统和接收器的传递函数后,整体的性质也就清楚了。显然,信号的处理过程越长经历的环节越多则传递函数绝对值一定越来越小,而位相推移也可能加大。

用传递函数描述各种机构的基础是(XI.75)式,此式的基本意义是:作用是可相互迭加的,或说这个迭加机构是线性的。光学系统对不相干照明下的信号是线性的,上面的讨论与电讯系统中的线性滤波器串联相当。

由于对接收器所作的测定很少,因此除人眼和少数照相底片外对它们的传递函数了解得不够。为粗略估计可用它的时间常数和分辨能力约略说明它对时空信号的传递能力。

#### A. 非单色的影响

前面计算的光学系统传递函数常是对某一单色辐射而作的。假若我们的接收器只对某一波长灵敏而对其他波长毫无作用,或者所用的光源是单色的,那末计算就已经全面了,但实际情况很少如此。

为考虑非单色的影响可由光源开始,设光源辐射的各波长的相对功率为 $P(\lambda)$ ,被观察的物体的反射率或透过率之平均值是 $T(\lambda)$ ,接收器的光谱灵敏度相对值为 $S(\lambda)$ ,则某一定波长 $\lambda$ 的光线在接收器上形成的物理量变化和 $P(\lambda) \cdot T(\lambda) \cdot S(\lambda)$ 成正比。因之多色辐射在接收器上产生的作用是单位能量的单色辐射之作用乘以 $P(\lambda) \cdot T(\lambda) \cdot S(\lambda)$ 后相加之总和。由于傅利叶变换为线性算子,故总作用的傅利叶变换为各项傅利叶变换之和。因此,在多色辐射条件下的传递函数是各单色传递函数以 $P(\lambda) \cdot T(\lambda) \cdot S(\lambda)$ 为权作平均所得的平均值。

#### B. 非线性效应的影响

当传递过程是非线性的,例如亮度超过某定值后形成饱和以致反应并不随信号增强而增强,这就使高亮度时的传递函数低于上述的线性部分的结果;反之则高于线

性部分。一般我们避免使用前一种特性区域,并对后一种特性区域的近线性部分另定一传递函数以描述之。

在不相干照明下,光学系统对亮度满足迭加原理,因之传递函数可作为其成象质量的准确描述,但是在相干照明下则仅振幅而非亮度满足迭加原理,而部分相干时情况更为复杂。显微镜和投影仪等光学仪器就属这种情况。

### C. 接收器的结构发展;扫描

光电接收器由于其输出的电信号可以作各种转换因而发展成各种器件。电子倍增过程使接收器的灵敏度提高;象转换器使电子束象成为光学象;静电照相使电位象成为光学象<sup>[22]</sup>;近年还发展了列阵接收器、电荷耦合器件(CCD)等列阵成象器件<sup>[26]</sup>;电子光学扫描系统使空间象变为电讯上易处理的时间信号(电视管)。声光偏转、机械扫描(转镜和振镜)也可以起这种作用,后者对各种波长都可行,如文献[21];这种技术在激光出现以后有较大发展<sup>[27-29]</sup>。

## § 3.2 光学系统对仪器成象特性的影响

光学系统对成象特性的影响可分为四个方面。即高斯光学性质,光度性质,衍射及象差校正状况。它们并不是完全孤立而是相互影响的,同时它们的数值或特征可以在相当宽的范围内变化。这种情况就使光学系统的性能选择和设计成为匹配整体中各个单元的主要手段。它使接收和显示部分能够接受到恰巧能被接收和显示的信号,而这信号恰巧又是我们所企图了解的物体的特征。

光学系统的最重要的成象特性是高斯光学性质。它使物体在一定位置成出一定大小的象,以符合整体的需要。关于这种可能性及达到此目的的方法已在第二章中述及。

其次是它的光度性质。由§ 1,光学系统会使光束亮度降低,但将接收器与高折射率介质相贴合时可使亮度加大。另外,接收器感知的照度则由孔径角决定,即约与通光直径平方成正比。由于光度性质直接影响信号强度,从而影响到整体的信号噪音比。

由于衍射和象差校正状况决定了光学系统的传递函数值,从而决定了它能区分的信号细节的线度。这就是第十一章所讨论的内容。衍射决定了理想条件下使用光学系统的限度,而象差校正不完善则使这个限度更为紧缩。校正象差是本书所讨论的中心。对于一些方案选择及原则可能性的问题已在第七章讨论过。

光学系统设计的主要矛盾是仪器尺寸要求与高斯光学的矛盾;增大孔径、视场与

象差校正的矛盾。增大孔径不单使光信号强度增大而且使理想传递函数加大,但象差则将使传递函数减小。优良的设计就在于在具体条件下解决这个矛盾,使各个要求恰到好处地实现。

光学成象不单可以用几何光学方法实现,也可以由物理光学的方法实现。Fresnel 环带板就是一个例子,而 Gabor 的“波面重结构”术成象实质上是它的一个发展。Zernike 的位相显微镜又是另一方面的例子,它由光栏函数的变更而故意使物象不一致,使位相物体成为可观察的。这种变更物象关系的方法近年有很大发展<sup>[23]</sup>,采用这种方法——光栏函数作适当的振幅和位相变化,已得出下列一些结果:使图形的清晰度提高;除去图形中的某些线条;变更焦深;使瞄准精度增加等等。

光学系统对成象的这种特殊影响具有很大的意义。

#### §4 噪音和背景

当我们观察探测的目标亮度处在接收器最小探测功率的数量级时,上节的处理方法就不充分了。这里不单是由于背景噪音引起的非线性使线性处理方法失效,更主要的是背景噪音随机起伏而形成假信号。这里的主要问题是:如何在噪音中区别出真实信号。看来,由于光学探测方法落后于电讯探测方法,被探测对象的光信号强度还远大于噪音,因此这个问题还没有提上研究的日程。

当准确了解到噪音的统计规律性后,就有可能用适当的过滤方法将噪音滤去而显出原有的信号。在电讯方面已进行了大量的工作而且已经得到了一些理论和实践上的成就<sup>[7]</sup>,这些成就的大部分都可直接引用于光学上。

真实信号以外的信号,其统计平均值不为零的部分我们称之为背景,仅平均值为零的部分才称之为噪音;前者仅使真实信号对比变坏,我们将它归入光度性质。噪音的主要标志是它的平方平均值,也就是它可能引起的假信号的大小的平方,对接收器而言也就是它的最小探测功率(实际上最小探测功率不是光度特性而是噪音特性)。

当几个噪音属于各不相同的来源,相互无关时,它们的均方值相迭加<sup>[7]</sup>(实际上只在高斯分布时才准确地如此),因此无论那一个元件引入噪音都使整个系统的噪音无法避免。

绝大部分接收器的噪音时间谱分布是均匀的(所谓白噪音),因此用选频接收并将频带限制得愈窄噪音的影响就愈小<sup>[7,25]</sup>。

对噪音的空间谱分布了解得还很差,这方面的研究几为空白。但是这个问题对于进一步运用光学方法探测微弱信号却是有决定性意义的。

在非相干成象时, 噪音的主要来源是接收器和其他记录介质。在采用激光作为光源时, 相干光成象的斑纹 (speckle) 噪音会发生严重的影响, 因此如何消除斑纹和如何利用斑纹作为检测工具的工作引起了广泛兴趣<sup>[35]</sup>。

用第十一章 § 6 所述的方法就可以讨论计算斑纹的某些性质。在第十一章 § 6 中, 物体的振幅、位相都是确定的, 没有考虑随机的因素。当光路中存在尘埃等散射点以及光学元件的疵病时, 这些无规分布的散射源将在物函数上迭加一个漫射函数:

$$O(u) = \sum_i^M e^{i\theta_i} \delta(u - u_i), \quad (15)$$

其中  $\theta_i$ ,  $u_i$ ,  $M$  都是随机变量。将 (15) 式代入 (XI.149) 式得:

$$I(u) = \sum_i^M \sum_j^M e^{i(\theta_i - \theta_j)} \Gamma(u_i - u_j) K(u' - u_i) K^*(u' - u_j), \quad (16)$$

设  $\Gamma(u_i - u_j) = 0$  ( $i \neq j$ ), 则 (16) 式成为:

$$I_{inc}(u') = \sum_i^M |K(u - u_i)|^2, \quad (17)$$

这就是背景。当  $\Gamma(u_i - u_j) = 1$  时 (16) 式成为:

$$I_c(u') = \sum_i^M \sum_j^M e^{i(\theta_i - \theta_j)} K(u' - u_i) K^*(u - u_j). \quad (18)$$

(18) 式可以分解为两部分, 第一部分是  $i = j$  的项 [即  $I_{inc}(u')$ ]; 第二部分是  $i \neq j$  的项, 这部分就是斑纹噪音<sup>[36]</sup>。

设  $\theta_i$ ,  $u_i$  是在区间  $[0, 2\pi]$  内均匀分布的随机变量,  $M$  满足泊松分布, 而且三者统计独立, 则可对 (16) 式求系综平均<sup>[37]</sup>, 进一步计算噪音的自相关和功率谱等。计算表明, 当有效源尺寸增大时, 噪音下降。

如何消除相干成象 (如全息成象) 中的斑纹噪音, 对相干成象是个重要问题<sup>[35]</sup>。

## § 5 一些光学技术特征数据

在光学仪器中除光学系统外, 其他有关的元件和介质也有重要作用, 而且经常影响仪器性能水平, 决定某些预定要求能否实现。因此需要这些有关的特征和数据。由于它们本身的每一方面都已经是专门研究的对象, 对其特性也已有多种手册可供查阅, 下面各节所列的特性和数据仅可作为手册的索引罢了。

### § 5.1 光 源

光源是一切光学观测的能量来源, 大部分光学设备都由于光源亮度不足而受限制。这就是激光出现后, 光学技术发生显著变革的原因所在。现在激光的亮度水平

虽已比一般光源高出十多个量级,但对某些应用目的还有多种不足之处。除亮度以外光源还有多方面的与应用有关的特征,如发光的角分布、面分布、光谱分布,是否连续发光,寿命,电源的复杂性,等等。

可见光源的亮度常以熙提表示,涉及不可见光时宜表示为瓦/厘米<sup>2</sup>/立体弧度。下表列出一些典型的光源亮度<sup>[10, 38, 39]</sup>。由此可见激光和普通光源之显著差别,表中所称的激光装置实是占地面积甚大的庞大的多台激光器件的组合。

光 源	亮 度 (熙 提)
夜空无云	10 <sup>-8</sup>
月 面	0.25
钨丝白炽灯	250—700
超高压水银灯	10 <sup>5</sup>
碳 弧	10 <sup>5</sup>
日 面	10 <sup>5</sup>
脉冲氙灯	10 <sup>7</sup> (=4×10 <sup>4</sup> 瓦/厘米 <sup>2</sup> /立体弧度)
10毫瓦衍射限 He-Ne 激光	10 <sup>7</sup> 瓦/厘米 <sup>2</sup> /立体弧度
10瓦 YAG 激光	10 <sup>7</sup> 瓦/厘米 <sup>2</sup> /立体弧度
100瓦衍射限 CO <sub>2</sub> 激光	10 <sup>8</sup> 瓦/厘米 <sup>2</sup> /立体弧度
脉冲红宝石激光	10 <sup>10</sup> 瓦/厘米 <sup>2</sup> /立体弧度
调 Q 红宝石激光	10 <sup>13</sup> 瓦/厘米 <sup>2</sup> /立体弧度
高功率 CO <sub>2</sub> 激光装置	10 <sup>16</sup> 瓦/厘米 <sup>2</sup> /立体弧度
高功率钕玻璃激光装置	10 <sup>18</sup> 瓦/厘米 <sup>2</sup> /立体弧度

热光源的亮度完全由其温度决定。按照斯蒂芬-波兹曼定律,黑体表面辐射的总功率密度和温度四次方成正比,故黑体辐射的亮度如下表:

黑体温度 (K)	10 <sup>8</sup>	10 <sup>7</sup>	10 <sup>6</sup>	10 <sup>5</sup>	10 <sup>4</sup>	3000	300
亮度 (瓦/厘米 <sup>2</sup> /立体弧度)	10 <sup>20</sup>	10 <sup>16</sup>	10 <sup>12</sup>	10 <sup>8</sup>	10 <sup>4</sup>	10 <sup>2</sup>	0.01

普通光源所以亮度不高,是由于难以获得并保持高温。脉冲灯之所以亮度高是由于材料尚能承受瞬时高温。激光技术利用原子体系的非平衡辐射,以受激发射的方式得到了前所未有的高亮度。从而反过来,用激光聚焦可以得到高温等离子体,产生热核反应(10<sup>7</sup>—10<sup>8</sup>K)。

## § 5.2 大气; 自适应技术

当透过厚层大气进行观察时,大气不但对光度性质发生影响<sup>[12]</sup>,而且对成象和噪音发生影响。在可见光区域主要由于散射而致亮度衰减,在以公里为单位时亮度衰减因子约为 0.02—0.20 公里<sup>-1</sup>(晴朗的好天气),波长越长衰减越小。大气衰减率



随高度而变小,近似于按指数降低,垂直地面观察时,大气总衰减相当平行地面通过5—8公里所形成的衰减,因之斜视程可大大超过水平视程。

由于日光散射,天空背景具有一定亮度,天空亮度随太阳方位和天空方位而异,在晴天日出后变化约在0.1—1.0熙提之间。这就使观察以天空为背景的对象时,背景有相当亮度。

地面因其各种覆盖物(草木,房顶等等)漫射日光的结果;以地面为背景时也有一定的背景亮度,一般情况下其亮度低于天空<sup>[13]</sup>。

这就是大气和太阳对光度性质的影响。

由于大气运动而造成的大气密度不均匀使光线光路不时地偏离原来方向,长时间的平均结果是使能量分散。为量度其影响,最好测出光线偏折到各方向的几率。直接测量传递函数时会混入大气散射对对比的影响。这方面的测定数据很少,仅有夜里对星光测出的数值,在良好条件下约为 $1''$ — $2''$ ,大气中气团尺寸的均方值约70—100毫米。闪动频率约 $100\text{秒}^{-1}$ <sup>[14]</sup>。近来才用光学传递函数方法在白天进行这种抖动的测定<sup>[15]</sup>。

大气运动和散射的起伏形成背景噪音,在红外区有一些测定结果。

总起来看,对大气的光度性质有比较充分的测定资料和理论解释(散射和辐射传输理论),对它的成象性质和噪音性质则缺乏资料,对于远距离观察这个问题是很重要的。

当考虑到大气中各个组分对光的吸收而形成衰减时,衰减率必随波长而迅速变化。由于已往测量的是很宽波段内的衰减率平均值,因此已往的测量值并不反映这种变化。随着近年来受激光发射技术应用发展的需要,大气光度性质已重新作了一些仔细测定<sup>[38]</sup>。

下面将可看到(§ 8),光束作远距离传输时,大气抖动的影响实是最严重的,例如当大气湍流形成 $2''$ 的抖动,那么望远镜的衍射分辨角小于 $2''$ 就没有什么意义。这是大望远镜不能高分辨的主要原因。为克服这种困难,曾在多方面进行了研究:如空间大望远镜将在八十年代实现<sup>[40]</sup>;如斑纹干涉术作图象处理,已获得大量双星数据;达到5米大望远镜的衍射极限分辨<sup>[41]</sup>;再就是自适应技术<sup>[42]</sup>。

所谓自适应光学,就是将闭路反馈控制技术用到光路传输中,用适当的波面校正器主动地对测出的波面误差作实时校正,如框图14.3所示。

对于点光源发出的波面可以用剪切干涉仪进行探测,也可以用其他光学检测方法实现。为按测量结果进行波差校正,可将大望远镜分为多个小块,每块大小和运动

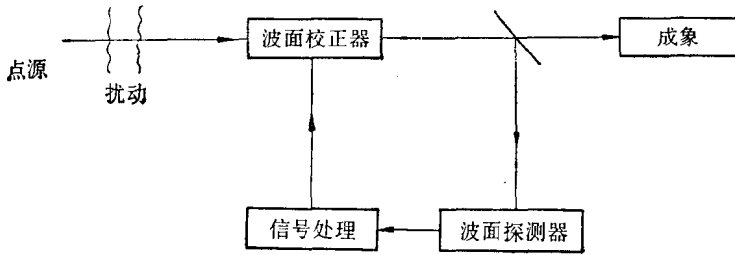


图 14.3

气团尺寸相近,每块是用压电材料分别控制即可。采用这种技术后,已能使直径半米的望远镜达到衍射角分辨。

自适应光学技术的各个环节,以及具体实现自适应的技术路线,都正在迅速地发展着。利用电子计算机作为随动控制的中枢,当望远镜更大,分块数增多时,计算量将大为增加,这对于自适应光学技术的发展是一个障碍。

### § 5.3 光学薄膜

多层膜技术已经形成了各种光学功能。单层增透膜可使玻璃表面反射由 4% 降到 1% 左右,三层膜可使可见光波段反射率降到 0.3% 以下<sup>[43]</sup>。增透膜使多折射面光学系统的透过率增大,杂光下降,从而改善质量。

新鲜铝膜的反射率约为 90%,为使反射率增大,可在其上再涂二到四层  $\lambda/4$  介质膜,这可使部分波段的反射率增至 99.7%<sup>[43]</sup>。纯  $\lambda/4$  多层介质膜的反射率是层数的单调函数,理论上计算 12 层膜反射率已大于 99.8%,实际上常常需要更多层数,反射带宽则为中心波长的  $\pm 20\%$ 。因此,用多层膜平面镜代替光学仪器中的全反射棱镜有时是有利的。全反射棱镜二面均增透后,玻璃本身的吸收损耗也会大于  $0.01 \text{ 厘米}^{-1}$ ,还有甚大光损失。

多层膜还可以形成高通带或低通带滤光片,将它用于照明系统中时,可使红外线不进入主光路,从而减少热的不良影响。

用多层介质膜形成半透膜时,分光损耗小于金属半透膜。多层膜形成的窄带滤光片在半宽 5 埃时透过率可达 50%。

随激光技术的发展,对增透和高反膜提出了更高的要求,还要求膜对几个波长同时具有高反射率等等<sup>[38]</sup>。由于膜层设计技术的成熟,这些要求都可以满足。

### § 5.4 人眼和其他接收器

人眼获得的信息形成人类知识的主要来源,人眼在暗适应时具有极高的灵敏度,

但此时的分辨能力甚低。人眼不仅是光能的接收器而且是成象的接收器，所成的象为视网膜和视神经处理，形成人的感觉，决定人眼特殊的不是成象过程所能描述的特殊处理信息功能。人眼有多方面的缺陷，从而发展了多种光能接收器为其补充。

原则上，任何物质与光能相互作用而发生状态变化者都可用作接收器，但只当它的灵敏度足够高，或光谱范围更宽，或能够记录（如照相），或既能记录又可擦除者，方有实用意义。各类接收器基于各不相同的物理化学效应，有各不相同的用途，因此不可能用同一标准来衡量其优劣。

近年来对人眼进行了大量的测量和研究<sup>[44]</sup>。为充分发挥人的视觉功能，为使图象处理的结果更合用，这种研究都是十分必要的。人眼的象差，它的点扩散函数和光学传递函数，都已有不少测量结果。对于眼球运动、网膜散射以及感光单元的有限尺寸及接收功能等等对光学传递函数的影响都进行了深入研究。眼睛光学系统的点扩散函数和传递函数如图 14.4(a)和(b)所示。单光学系统还不能决定眼的判读能力，实测人眼分辨不同亮度和不同调制度的正弦光栅时，所得结果如图 14.5 所示。由于感光细胞的有限大小以及它的感光性质，使 OTF 有峰值在 10 周/度处。这和一般光学系统已很不同。还由实验测出过多种情况的辨认能力，例如在天空分辨暗星(图 14.6)；在亮背景中辨识圆盘(图 14.7)等。由图 14.7(b) 可以看到反差对辨认的作用。人眼辨认目标本身受更复杂的多因素影响，对此已做过大量的工作<sup>[44a]</sup>。

除人眼外，还有由光电阴极为接收器的成象器件；光阴极和电子光学成象系统及荧光屏组成变象管和象增强管。它与电子光学扫描系统组成电视摄像管和显象管。它们的成象性质也可以用传递函数描写，如图 14.8 所示。光接收器与适当的机械扫

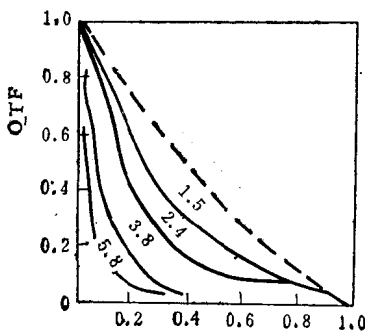


图 14.4 (a)

OTF 曲线中虚线是理想光学系统的曲线，曲线上的数字是瞳孔直径，曲线横坐标是归化频率

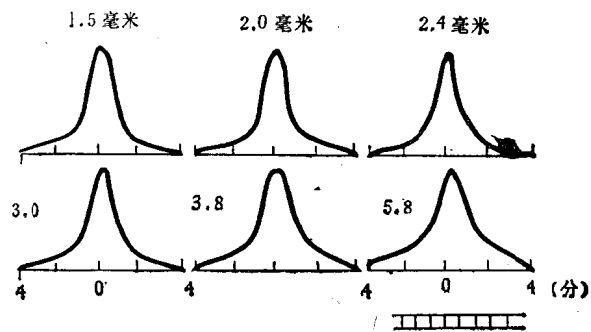


图 14.4 (b)

各个瞳孔直径的眼睛光学系统点扩散函数，横坐标为张角分数，以瞳孔直径 2.4 毫米时最佳。图下表示细胞尺寸，约 0.7'

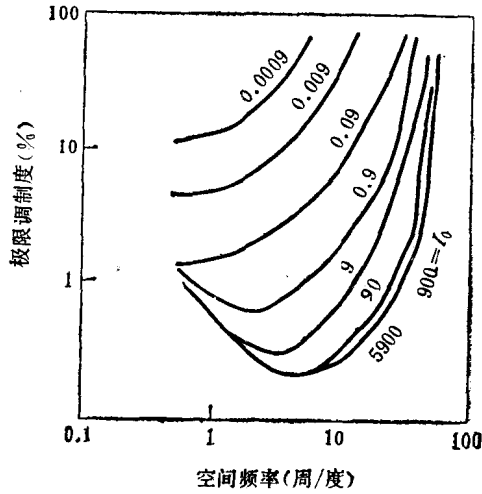


图 14.5 图上数字是光栅平均亮度:  $I_0 = (I_{max} + I_{min})/2$ . 调制度定义为:  $(I_{max} - I_{min}) / (I_{max} + I_{min})$

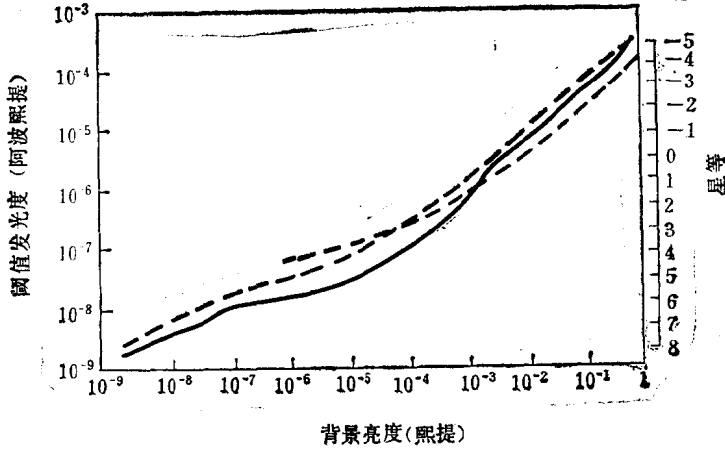


图 14.6 在一定背景亮度下人眼辨别点光源的能力。图中的几条曲线是几个不同测量结果

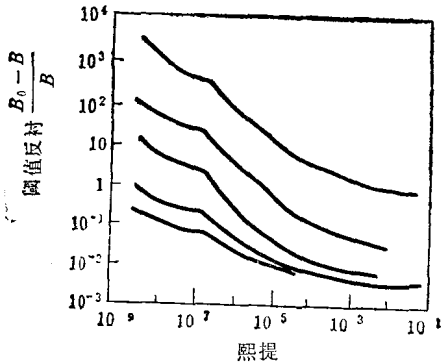


图 14.7(a) 在一定背景亮度下辨认各种大小的物体时要求的反差阈值

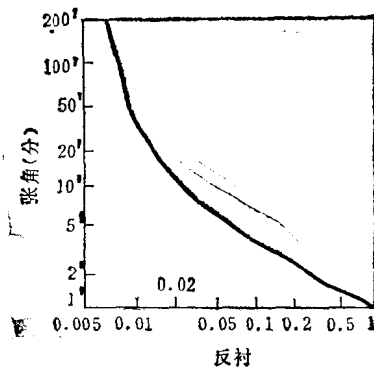
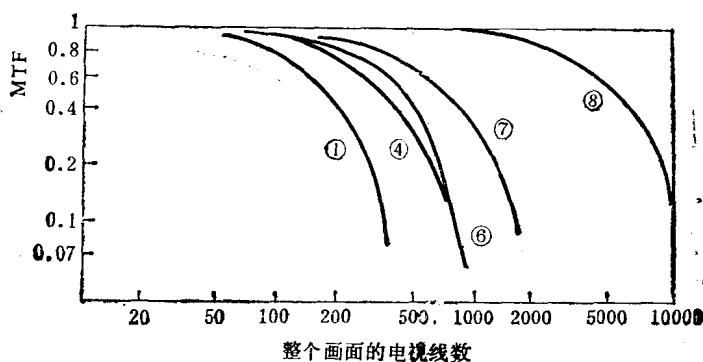
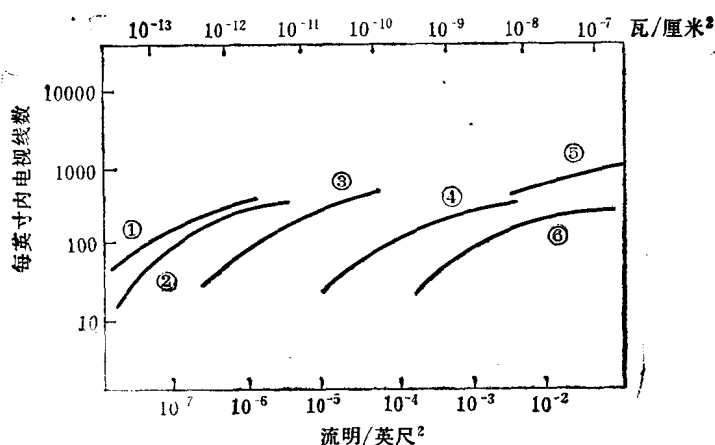


图 14.7(b) 背景亮度  $10^{-2}$  照提时, 人眼分辨图形物的张角和反差的关系



(a) 各种光电成像管的光学传递函数



(b) 各种光电成像管的灵敏度和分辨能力

图14.8 图中数字表示各种管型。① 倍增正析管，② 象增强管，③ 高增益正析管，④ 正析管 (orthicon)，⑤ 视频管 (vidicon)，⑥ 等质管 (isocon)，⑦ 高分辨正析管，⑧ 高分辨 4.5" 视频管。图中的电视线数和光学分辨线数不同，后者分辨一条线相当前者  $2\sqrt{2}$  条线。

描系统联用时，性能与电视摄像管相似。这类系统将空间光信号转变为电信号的时间系列，信号可以由电子线路处理后再显示，从而变更其传递函数形式，如减去背景强度等。这是光学信息处理的一种可行方式。用于扫描接收的光接收器的时间响应特性就起着空间传递函数的作用。除光电阴极外，红外接收元件大都响应不快，从而成为快速接收图象的一种限制。

由于光信息记录和存储的需要，照相底片和其他记录介质的研究有很大进展。对银盐照相底片的成像性能测定也日益完善；这种底片作为记录介质的缺陷是不能将图象擦除以重复使用；除这一点以外，它是现有记录介质中最优越的。当要求记录介质具有高灵敏度时，感光显示的机制中若无适当的倍增过程，则高灵敏度似不可能。

这似乎是近年来大量出现的记录介质的主要问题所在。现有的较优的可擦除记录介质大概是热塑料<sup>[39]</sup>，它也有显影倍增的过程。

柯达航空底片和部分其他照相底片的性能如下表所列。表中的航空曝光指数约为 ASA 灵敏度值的 1/2，它的定义是：达到 0.68 所需的曝光量(勒克司秒)倒数的二

底片型号	航空指数	尔格/厘米 <sup>2</sup>	分辨能力(每毫米线数)			
			1000:1	6.3:1	2:1	1.6:1
3404	1.3	1.2	840	550	280	200
SO-243	1.6	1.0	540	440	260	
SO-4404	1.6		475			
SO-206	7.6	0.3	380	270	160	
SO-226	8.5	0.3	340	260	160	65
SO-190	8.5	0.25	240	180	120	
SO-136	20	0.1	180	150	100	
3400	20	0.1	170	150	100	
Panatomic-X	20		170			30
3401	80	0.05	120	100	65	
Super XX	100		75			22
Tri X	200		71			

分之一。表中另一行曝光量(尔格/厘米<sup>2</sup>)是指为黑度达到  $D_0+0.3$  所需的曝光量。表中还列出几种目标反差时的分辨能力，它不是非常确定的值，会随曝光和洗片条件而有变化，但它们还是大致确定的量<sup>[45]</sup>。与此相比，阿克发全息底片 10E75 所需曝光量为 1.6 尔格/厘米<sup>2</sup>，分辨线数约 3000 线/毫米<sup>[46]</sup>。几种照相底片的 MTF 如图 14.9 所示。

红外接收器经常有新的发展，如多碱光阴极，以半导体 GaInAs 为基底的光阴极，热释电接收器，列阵接收器等。可望会有新的突破。但现有的 CCD 器件与其他成象接收器相比，单元数还太少，还有甚大差距，但看来会很快发展。

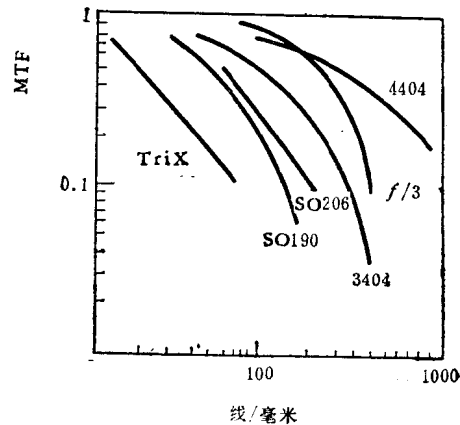


图 14.9

## § 6 光学信息处理

光学信息处理是最近十多年来迅速发展的一个方向。从电视技术发展开始，作

为光学和电子学技术的结合,也可看到光学图象不再是被动地不可改变的,而是象电信号一样可以能动地加以改变。激光和相干光成像技术、全息术的发展也使思路扩展,开拓了频谱域的过滤处理方式。现在的信息光学已经包含了多方面的内容,除处理图象以求从中获得更多信息外,还包括其他方面,例如:图象编码和信息频带压缩,全息术及其他二次成像方法,光学方法作信息综合以及处理非光学信息,光学计算机,等等。这些都扩展了光学传输图象信息的功能。单从处理图象信息而言,也有多方面的内容,如消模糊、图象复原和增强、超分辨、相关过滤、识别、相减等等。为这些目的又可以采用各种不同的方法<sup>[47]</sup>。

以消模糊为例,我们的愿望是将原来不清晰的图象变为清晰。设原图是非相干成像的结果,即由一定的点扩散函数与物函数卷积的结果,见(XI.75)式。这过程由一定的传递函数为标志。若将此图再次成像,并使第二次成像的传递函数恰为前者的倒数,那么总结果的传递函数为二者之积,即等于1,从而得出原物的清晰的象。这就是倒数滤波的基本思想。可以用全息照相方法形成倒数滤波器,此时须用相干光作第二次成像;全息倒数滤波器还可以用数字计算方法画出来。另外,也可以将模糊象输入计算机,由计算机作数字计算滤波后输出清晰的象;这就是图象的数字处理方法。

倒数滤波方式虽已获得相当大的成功,如处理人造卫星摄出的月球照片、火星照片等,但也存在不少问题,例如 OTF 函数有零点,对这些频率作倒数复原是不可能的;再因 OTF 总有截止频率,在截止频率范围内进行倒数滤波的结果,是使整体的 OTF 成为方波函数,其傅氏变换为 Sino 函数,有负值,显然不真与原物一致;图象中不免会迭加有噪声,噪声将因倒数甚大(OTF 的零点附近)而增大影响;相干光成像又因斑纹效应而增大噪声,等等。在以数字计算方法作滤波时,可以在计算过程中作适当的附加条件,使所得结果最佳化,例如所谓熵极大方法等。

还可以用光电扫描方式,作光学模拟计算机处理,此时不在频谱域作复原,而直接在模糊象中取样处理。若使取样函数和点扩散函数的卷积逼近  $\delta$  函数,即可达到消模糊的目的。在象面上作取样乘权(可为负值)求和的工作可以用光电方法完成。由于数字计算程序的通用性,这种处理方法同样可以由计算机完成,并已作出有效的实例,以致达到超分辨。

各种不同的处理方式各有其优缺点。数字计算机处理的优点是通用,适应任意的处理要求;缺点是它仅能以级联方式处理信号的时间系列,图象中包含的大量信息的逐个处理就要求很长的时间。光学处理方法恰相反,无论是相干光和非相干光处

理, 都能同时处理一帧图象中的全部信息, 例如作傅利叶变换; 它的缺点是不很通用、不够全能, 例如难以作非线性变换, 更难在一定附加条件下作非线性变换; 由于它属模拟计算机, 从而精度不高, 这虽也是缺点, 但从人的辨认能力来看, 高精度计算多半并不必要, 故此缺点似不重要。相干光处理中难以抑制斑纹噪声, 使信噪比下降, 使实用性受到很严重的削弱。光电扫描处理的优缺点似在二者之间, 它可以作任意的非线性反差增强, 也适于作较复杂的运算。

光学信息处理发展到现在, 其内容已不能在较小的篇幅中作系统的论述。虽然实用性的东西还不多, 但优越的示例性的演示成果是大量的, 预示着它将发挥越来越大的作用。

## §7 综合评价

对整个系统或其局部进行全面评价时, 随实际情况不同着重点也就会完全不同。例如当信号很强时光度问题就是次要问题; 当信号远超过背景且超过噪音时噪音就不必重视; 当只须粗略了解信号的时空分布时, 反应能力就不是重要问题; 当信号高于显示器极限时接收器灵敏度不重要, 反之就成为重要问题。

时常有这样的企图: 用几个量甚至一个量来标志一个元件或整体的质量。这种企图的来源在于希望对某些问题作出肯定的比较, 而不要去说例如“A 的低频反应能力好些, 但 B 的高频部分好些”这类的话。实际上这种企图只能在完全特定的条件下才能做到, 一般情况下并不可能将各方面、各个范围的特性数字归结为一个数字。无论那种元件, 其某一方面的特色都会在一定的条件下起主导作用。反过来, 各方面良好的元件也许有致命的个别缺陷。另一方面, 无限制地追求准确描写往往会导向繁琐。按准确要求, 上述三方面的描写也还是不够的。准确应以实用为限度, 也正因为如此, 须在尽可能普遍的条件下将上述的描写简化为一个量或几个量。下面就列出一些这样的量。

(A) 将整个系统的对比传递能力概括为:

对于某一定对比(例如 1:0.8)的信号(物体)的分辨能力(以频率为单位);

(B) 将接收器对于同一显示器的光度噪音特性归结为:

$$\frac{\text{灵敏度}}{\text{噪音}} = \left( \frac{\text{输出信号}}{\text{输入光信号}} \right) \times \frac{1}{\text{以输出为量度单位的噪音}};$$

(C) 将接收器的全部特性归结为:

$$(\text{分辨能力}) \times (\text{灵敏度噪音比});$$



(D) 将整个系统的全部特性归结为(背景远小于信号强度时):

(经系统后的光信号强度) × (分辨能力) × (灵敏度噪音比).

合理的综合评价应结合完全具体的条件来进行, 上面的评价不能对具体问题得出准确的结论, 仅可供初步粗略判断的参考.

以日用照象物镜为例, 由于它在大相对孔径时的象差超过底片分辨能力, 因之除非接收器(底片)在某一照明条件和曝光时间内不能将物体摄出, 不然是不需要使用大相对孔径来照象的. 由于实际存在这种照象条件, 因之适当大的相对孔径还是需要的, 不过现在看来用途已经不大.

将相对孔径适当缩小时分辨能力的提高比能量的减弱要多, 因而缩小到某一数值时物镜的上列性能指标( $D$ )将达最大值; 将孔径缩得过小, 虽然象差减小使分辨能力提高(但因接收器限制, 提高不多)而能量减弱过多, 反而不利.

## §8 一个例子

以人造卫星的光学观察为例.

### A. 理想的观察条件

为增大对比应使物体亮而背景暗. 在黑夜观察, 天空很暗但卫星也不亮, 假若在卫星上放一光源而在夜间进行观察就是最好的, 但须考虑本身发光和太阳照明对于卫星设计的利弊问题. 如不宜本身发光, 则最好的时间是在早晨或黄昏, 太阳刚出地平线或在地平线下但已照亮了卫星. 假若我们测定了各种太阳高度(包括太阳在地平线下数度的情况)的天空背景亮度, 而且背景亮度是对所有方位角进行测定的, 那么就足以由测定的结果决定观测的时间和方位.

观察时的大气透明度当然愈高愈好, 它不但影响物体亮度衰减, 同时也使背景亮度变更.

### B. 大气抖动和照明方案

假设是太阳照明而且物体表面绝对光滑, 那么它的亮度和太阳一样, 为  $10^5$  数量级(指照提, 下同), 远大于背景, 似乎天空背景可不加考虑. 但由于物体张角过小, 由大气抖动形成的能量分散使对比大大降低. 例如卫星为直径 10 公尺的球, 所成太阳象仅 25 毫米, 当距离地面为一万公里时张角仅  $5 \times 10^{-4}$  秒. 若能量因抖动而分散到 1 秒张角范围时, 亮度将降低  $25 \times 10^{-8}$  倍, 即成为 0.025, 远小于白天的天光亮度.

另一极端是表面如氧化镁那样的白面, 那么它在日光下的亮度降为 10 而发光面张角为 0.2 秒, 因大气抖动将使亮度降为 0.4 还是小于白天的天光亮度.

假若卫星带有光源, 并使之聚光后对准地面, 设聚光镜直径为 250, 那么它的张角为  $5 \times 10^{-3}$  秒, 于是当光源亮度为  $10^6$  时抖动使它降为 2.5 (此时的光源仍可是太阳)。若光源亮度为  $10^7$  则降为 250, 在白天就可以看到。

由于大气抖动对远距离观察有重大影响, 观察条件应主要以它为转移。

### C. 光学系统和接收器

用眼观察时, 用望远镜有利, 这是由于背景随倍率平方减暗而微小目标亮度不变之故。倍率大到出瞳略小于眼瞳时还是好的。

用照相记录时, 物镜直径愈大愈好, 这是由于焦距长度应使目标线度略大于底片分辨能力之故。否则由于底片的分辨能力不够, 能量再分散, 就使对比再降低。显然光学系统的对比传递能力也应达到这个数量级。因之照度增大只能依靠相对孔径增大亦即直径增大。

由于低分辨能力的底片灵敏度远大于高分辨能力者, 故用同一直径的光学系统时, 采用长焦距镜头与低分辨能力底片时效果会优于短焦距者, 由此可见高灵敏度底片非常重要, 这在近代有很大发展。

由于底片灵敏度远小于光电倍增管, 故用电视摄像管、列阵接收器等作为接收系统代替底片时将显著地增长观测距离, 缩小仪器体积 [尤其是对红外灵敏者 (能减弱背景)]。

当各方面都有准确的质量数据时显然不难算出具体的数字以确定所能观察的距离等。

由于物镜直径加大能使象面照度加大, 故即使它的分辨能力不加大 (由于象差的影响) 也还是有利的。但实际上这要受到工艺技术的限制。因此实际仪器是由设计及工艺水平共同决定一个折衷的大小, 过大也许虽使能量加大, 但却使分辨能力降低, 总结果的信息量反而可能减少。

### D. 判读显示和过滤

大家知道, 同一幅图画被不同的观察者观察时, 一般都不会看到画中所包含的全部信息, 而且各人所得的也会不同。怎样才能在光学图象中找出所需信息是个困难问题。但在白纸上找出一个小黑点却似乎并不困难, 只是由于前述各种降低对比的因素的作用, 以及底片上无规则的黑度变化——噪音, 才使观察变得困难。

照明条件和观察时所用的放大倍率适当, 会使人眼易于发现目标。而本章之初提及的等黑度方法能使更低对比的小点显现出来。

从电讯过滤的经验可以想到, 假若我们已知接收器的噪音空间谱分布以及大气

背景噪音的空间谱分布等资料,就不难在人眼根本不能辨出目标、目标黑度低于噪音水平时,用过滤法将目标找出来。采用了这种判读方法,仪器的有效视程将大大提高。这些问题将随信息光学的发展而逐步解决,从而扩大人们的视野。

## 参 考 文 献

- [1] 例如: Braddick, H. J. J., *Photoelectric Photometry, Reports Prog. Phys.* (1960), pp.154—175.
- [2] 维纳, N., *控制论*, 科学出版社(1962).
- [3] Гюэер, В. Д., *Информация и время*, Изд. АН СССР(1961).
- [4] Lau, E. und Krug, W., *Äquidensdometric*, Akademie-Verlage, Berlin(1957).
- [5] Walsh, J. W. T., *Photometry*, 3th ed., Constable Co. Ltd., London(1958).
- [6] 例如: Smith, Jones, Chasmer, *The Detection and Measurement of Infra-Rad Radiation*, Oxford (1957).
- [7] 例如: 1. Goldman, S., *Information Theory*, London(1953);  
2. Woodward, P. M., *Probability and Information Theory, with Application to Radar*, Pergamon Press Ltd., London (1955);  
3. Helstrom C. W., *Statistical Theory of Signal Detection*, Pergamon(1960).
- [8] 杜德罗夫斯基, А. И., *光学仪器理论*, 第一卷, 科学出版社(1958), 295 页。
- [9] 鲁西诺夫, М. М., *技术光学*, 科学出版社(1961), 65—68 页。
- [10] 例如: 1. *Справочная книга по светотехнике*, АН СССР, 7(1956—1958) (1961).  
2. 伊凡诺夫, А. П., *电气光源*, 高等教育出版社 (1952).  
3. Ванюков, М. П. и Мак, А. А., *Импульсные источники света высокой яркости, УФН*, **66**(1958), 301.
- [11] Maiman, A., *Stimulated Optical Emission in Fluorescent Solids, I, II. Phys. Rev.*, **123** (1961), 1145.
- [12] Flüge, F. ed., *Handbuch der Physik*, B. XLVIII, Springer(1957).
- [13] Middleton, W. E. K., *Vision Through the Atmosphere*, Univ. of Toronto Press(1952), p. 122.  
В. И. 塔塔尔斯基, *湍流大气中波的传播理论*, 科学出版社, 1978.
- [14] Zdenek, Kopel, ed., *Astronomical Optics*, North-Holland Pub. Co.
- [15] Scott, A., *J. App. Opt.* **1**(1962), 342.
- [16] 1. Spicer, W. E., *Photoemission and Related Properties of the Alkali-Antimonides, Jour. Appl. Phys.*, **31**(1959), 2077.  
2. Spicer, W. E., *Photoemission, Photoconductive, and Optical Absorption, Studies of Alkali-Antimony Compounds, Phys. Rev.*, **112**(1958), 114.
- [17] Forrester, A. T., Gunmundson, R. A. and Johnson, P. O., *Photoelectric mixing of Incoherent Light, Phys. Rev.*, **99**(1955), 1691.
- [18] 万欣等编译, *红外光电探测器及其材料*, 科学出版社(1960).
- [19] 1. Westheimer, G., *Light Distribution in the Image Formed by Living Human Eye, Jour. Opt. Soc. Amer.*, **52**(1962), 1040.  
2. Krauskopf, J., *Light Distribution in Human Retinal Images, Jour. Opt. Soc. Amer.*, **52**(1962), 1046.
- [20] 1. Гороховский, Ю. Н., *Свойство фотографических материалов на прозрачном подложке*, Гостехизд. (1955).  
2. Jones, C., *On the Quantum Efficiency of Photographic Negatives, Photo. Sci. and Eng.*, **2**

- (1958), 57.
- [21] Artheimer, R. M., Instrument for Thermal Photography, *Jour. Opt. Soc. Amer.*, **49** (1959), 184.
- [22] 1. Hughes, J. Xerographic Development Methods, *Jour. of Photo. Sci. London.*, **7** (1959), 128.  
2. Cook, W. A., Xerography and its Applications, *Jour. of Photo. Sci. London.*, **7** (1959), 93.
- [23] 1. Tsujiuchi, J., Un filtre améliorant les images aberrantes et son utilisation comme filtre à deux ou trois foyers, *Rev. Opt.*, **37** (1958), 1.  
2. Tsujiuchi, J., Restitution des images aberrantes par le filtrage des fréquences, *Opt. Acta*, **7** (1960), 385.  
3. Lansraut, G., Filtres d'amplitude réduisant la lumière diffractée dans une zone annulaire de l'image d'un point, *Rev. Opt.*, **32** (1953), 475.  
4. Barakat, R., Solution of Launeberg Apodization Problems, *Jour. Opt. Soc. Amer.*, **52** (1962), 264.  
5. Dossier, B., Recherches sur l'apodization des images optiques, *Rev. Opt.*, **33** (1954), 57; 147.  
6. Macdonald, J. A., Apodization and Frequency Response with Incoherent Light, *Proc. Phys. Soc.*, **72** (1958), 4.
- [24] 杜德罗夫斯基, A. И., 光学仪器理论, 第一卷, 科学出版社 (1958), §103, 289—290 页.
- [25] Van der Ziel, Fluctuation Phenomena in Semi-Conductors (1959).
- [26] Trans, *IEEE*, **ED-23** (1976), N.2.
- [27] E. Camatini, Progress in Electro-optics, Plenum Press, 1975.
- [28] N. Jensen, Optical and Photographic Reconnaissance System, John Wiley, 1968.
- [29] B. Kazan, ed., Advance in image pickup and display, V. 1, 2, Academic Press, 1975.
- [30] E. Wolf, *J. Opt. Soc. Amer.*, **68** (1978), 6.
- [31] 王之江, 物理学报, **19** (1963), 320.
- [32] 方洪烈, 物理, **1** (1972), 106.
- [33] 谢培良, 物理学报, **27** (1978), 496.
- [34] R. H. Dicke *Phys. Rev.*, **93** (1954), 99.
- [35] J. C. Dainty, ed., Laser Speckle, Springer Verlag, 1975.
- [36] L. H. Enloe, *Bell. Syst. Tech. Jour.*, **46** (1967), 1479.
- [37] Y. Ichioka, *J. Opt. Soc. Amer.*, **64** (1974), 919.
- [38] R. J. Pressly, CRC Handbook of Lasers, Chemical Rubber CO, 1971.
- [39] W. W. Simmons, *Appl. Opt.*, **17** (1978), 999.
- [40] B. J. Thompson & R. R. Shannon ed., Space Optics, Nat. Academy of Sciences, 1974.
- [41] A. Labeyrie, *Progress in Optics*, **14** (1977), 1. A. Labeyrie, *Sky & Telescope*, **53** (1977), 346.
- [42] Topical Issue on Adaptive Optics, *Jour. Opt. Soc. Amer.*, **67** (1977), N.3. J. W. Hardy, *Proc. IEEE*, **66** (1978), 651.
- [43] R. Kinslake ed., Applied Optics and Optical Engineering, V. 1—5, Academic Press, 1965.
- [44] I. Overington, *Optica Acta*, **22** (1975), 365. W. M. Rosenblum et. al., *Progress in Optics*, **13** (1976), 71. R. H. Ruddock *Reports on Progress in Physics*, **40** (1977), 603.
- [44 a] I. Overington, Vision and Acquisition, Pentech Press, London, 1976.
- [45] R. Kinslake, *Proc. SPIE*, **22** (1971), 72.
- [46] M. J. Landry et. al, *Appl. Opt.*, **14** (1975), 2260.
- [47] Digest of International Optical Computing Conference, Zurich 1974, *IEEE*, 1974; Wash 1975, *IEEE*, 1975; San Diego 1977, *IEEE*, 1977; London 1978, *IEEE* 1978.
- [48] J. W. Goodman, Introduction to Fourier Optics, McGraw-Hill, 1968. (中译本: 顾德门, 傅利叶光学导论, 科学出版社, 1976.)

- 
- [49] F. T. S. Yu, Introduction to diffraction, Information Processing and Holography, MIT Press, 1973.
- [50] G. L. Rogess, Nancoherent Optical Processing, John Wiley & Son, 1977.
- [51] T. S. Huang ed., Picture Processing and digital filtering, Springer Verlag, 1975.
- [52] A. Rosenfeld, Digital Picture Processing, Academic Press, 1976.

### 再版后记

本书再版时,除校正了原书中的一些笔误外,还进行了下列补充。在十一章增加一节论述部分相干照明下的成象问题。由于国际和国内应用电子计算机进行光学设计已很普遍,为此增加两章,并对第一章作了删节。由于光学玻璃和光学加工工艺等有所发展,对书中有关部分做了些相应的修改。最后,对光学仪器整体设计做了补充和改写,以求能够反映近年来在光电子学和信息处理的进展和影响。看来,后二方面的迅速发展,将会显著改变光学设备的面貌。

对李元康、王能鹤、王书泽等同志在工作中的协助谨致谢意。

王之江

1982.6.

[General Information]

书名=光学设计理论基础 第二版

作者=王之江

页数=479

SS号=10171785

DX号=

出版日期=1965年10月第1版

出版社=科学出版社

书名  
前言  
目录

## 第一章 轴对称球面光学系统中的光线光路计算方法

- 1 概述
  - 1.1 符号规则
- 2 空间光线计算
- 3 含轴面内光线光路计算
  - 3.1 计算误差问题；计算的可能错误及校对
  - 3.2 平面计算和计算公式的通用性
  - 3.3 近轴光线计算；倍率；象差
- 4 波面；光程；波象差；波象差与几何象差的关系
  - 4.1 几何光学的基本定律
  - 4.2 波象差与几何象差的关系( )
  - 4.3 波象差与几何象差的关系( )
  - 4.4 因参考点移动而产生的波象差
- 5 光程计算
- 6 细光束焦点位置计算
- 7 矢量形式的折射定律
- 8 代数方法
  - 8.1 平面；校对
  - 8.2 弧矢元光束
  - 8.3 含轴面内光线
- 9 光线计算的初始值

参考文献

## 第二章 理想光学系统

- 1 高斯光学系统的物象关系
- 2 光阑和轴外光束晕暗，投影和景相
- 3 高斯光学和结构尺寸中的长度问题
  - 3.1 倍数 $100\times$ ，总长200的望远镜
  - 3.2 倍数 $2000\times$ ，总长200的放大镜或显微镜
  - 3.3 共轭距1000，工作距100的 $100\times$ 投影物镜
  - 3.4 瞳孔距及工作距
- 4 高斯光学和结构尺寸中的直径问题
  - 4.1 望远镜的倍数和孔径
  - 4.2 显微物镜的倍数和数值孔径
  - 4.3 通光孔径；视场
  - 4.4 转象系统和场镜
- 5 反射系统的杂光、孔径及视场
  - 5.1 光路偏折的折反射系统
- 6 正象和光路转折
- 7 全反射棱镜的物象关系

参考文献

## 第三章 球差、正弦条件

- 1 象差的转面倍率；球差的各种表示
  - 1.1 球差的正负
- 2 初级球差
- 3 高级球差、本征高级球差
  - 3.1 折射率和相对孔径
  - 3.2 物距和相对孔径
- 4 衍生高级球差
- 5 为校正球差时光学系统应有的结构
- 6 相邻点波象差间的关系，正弦条件及其他
- 7 同轴球面光学系统中的正弦条件
- 8 正弦差分布值
  - 8.1 同轴球面系统中正弦差和光阑位置的关系
- 9 薄透镜理论
- 10 计算结果的图示和判断

#### 参考文献

#### 第四章 轴外象差

- 1 同轴球面系统的畸变表示式
- 2 初级畸变；高级畸变；畸变和物体位置、光阑位置的关系
  - 2.1 同轴球面系统中畸变和物体位置的关系
  - 2.2 单个球面的畸变和光阑位置的关系
- 3 细光束的聚焦特性
  - 3.1 邻主光线高斯光学；物体移动时象面弯曲的变化
- 4 同轴球面系统的象散
- 5 空间光线的象差分布
  - 5.1 象差分布的分量表示
  - 5.2 象面弯曲表示为各面贡献之和
- 6 初级象散、象面弯曲和畸变
- 7 高级象散和象面弯曲
  - 7.1 薄透镜的高级象散和象面弯曲
- 8 为使轴外细光束成象理想时，光学系统应有的结构
- 9 象散、象面弯曲和畸变的表示及评价
- 10 邻主光线波象差级数展开，轴外初级球差和轴外初级彗差
- 11 轴外初级球差和轴外初级彗差的近似展开

#### 参考文献

#### 第五章 色差

- 1 光学材料
- 2 将色象差看作光程差
- 3 初级色差
  - 3.1 分离薄透镜
- 4 二级光谱
- 5 讨论色差的光线光路方法，色差图示——轴上点
- 6 用光线光路方法讨论轴外色差

#### 参考文献

#### 第六章 象差的一般性质



- 1 对称性和象差，变数分离法，规化条件
  - 1.1 规化坐标
- 2 象差的几何意义和描写光束特性的方法
  - 2.1 球差
  - 2.2 轴外球差
  - 2.3 畸变
  - 2.4 彗差
  - 2.5 轴外彗差
  - 2.6 象散和象面弯曲
  - 2.7 色差
- 3 光阑移动时的象差变化，计算结果的图示和判断
  - 3.1 计算结果的图解法
- 4 光阑象差与物面象差的关系
- 5 物面移动时的象差变化
- 6 初级色差
- 7 球面的初级象差
  - 7.1 由球差表示式导出其他象差表示式——将轴外象差看作球差
  - 7.2 由畸变表示式导出其他象差表示式——将子午象差看作畸变差异
  - 7.3 薄透镜的初级象差
  - 7.4 将球面的二级本征象差看作球差
- 8 衍生二级象差
- 9 用Fermat原理讨论高级象差的可能性

## 参考文献

### 第七章 由象差确定光学系统结构

- 1 引言；初级象差公式组
  - 1.1 象差系数和象差的关系
  - 1.2 轴对称光学系统中象差系数间的相互关系
  - 1.3 同轴球面光学系统中的象差系数表示式
  - 1.4 一组贴合薄透镜的象差系数表示式和相互关系
- 2 由象差要求决定薄透镜焦距分配
- 3 象差和薄透镜弯曲( $P, W$ )
- 4 用薄透镜产生定值象差的可能性
  - 4.1 单薄透镜
  - 4.2 正负胶合双透镜
  - 4.3 无光焦度胶合双透镜
  - 4.4 无光焦度等折射率双薄透镜
  - 4.5 两组定焦距薄透镜
- 5 薄透镜产生象差的可能性——对高级象差的考虑
  - 5.1 胶合双透镜的 $P_0$ 和 $W$  的限度
  - 5.2 薄透镜象差的极值
  - 5.3 双透镜象差的极值
  - 5.4 胶合面或无光焦度双透镜的作用和限度
- 6 以厚透镜代替分离薄透镜
  - 6.1 用厚透镜校正 S

- 6.2 校正色差的厚透镜，球差校正板
- 7 用厚透镜与薄透镜组合以校正象差
- 8 对称型
- 9 光学设计概论
  - 9.1 校正象差的可能性
  - 9.2 象差校正方案的确定
  - 9.3 校正象差的结构的选择和有效参数
  - 9.4 现代光学设计所达到的水平

#### 参考文献

### 第八章 轴对称非球面

- 1 使用非球面的可能性
- 2 光线光路计算
  - 2.1 曲面的参数表示
  - 2.2 三角法计算子午光线光路
  - 2.3 用代数方法计算空间光线
  - 2.4 逐次接近法
- 3 初级象差理论
- 4 非球面的高级象差和由象差要求确定非球面面形
- 5 用单个非球面准确校正球差
- 6 用单个非球面准确校正象散
- 7 用单个非球面校正子午光束象差

#### 参考文献

### 第九章 非轴对称非球面

- 1 对称性和象差的级数展开
  - 1.1 双曲率系统的高斯光学
  - 1.2 双曲率系统中象差之间的关系
  - 1.3 象差的几何意义
- 2 同轴柱面系统的初级象差
  - 2.1 物体在无限远处时的象差
- 3 柱面望远镜的象差
  - 3.1 圆柱面折射光线光路计算
  - 3.2 象差分布及校正方法
  - 3.3 一般的同轴柱面系统
  - 3.4 柱面望远镜的象差估值
  - 3.5 柱面望远镜的畸变

#### 参考文献

### 第十章 光学零件的制造和装配公差

- 1 引言
- 2 单个因素变更时的直接影响
- 3 衍生变化
- 4 偏心系统的象差，固定透镜的原则
- 5 透镜系统公差的确定
- 6 棱镜
- 7 局部误差和光洁度

## 参考文献

### 第十一章 光学系统的质量评价

- 1 几何光学和光能传播的基本定律
  - 1.1 由Maxwell方程导出程函方程
  - 1.2 程函方程、Fermat原理及折射定律
  - 1.3 由Maxwell方程导出Huygens-Fresnel原理
- 2 光学系统形成的能量分布和质量判断
  - 2.1 理想波面的衍射图形
  - 2.2 有象差时的衍射图形
  - 2.3 Strehl判断和小象差近似
  - 2.4 Rayleigh判断,图解法
  - 2.5 象差最佳校正方案的几何特征和公差的几何值
  - 2.6 衍射图形的特征及质量判断;分辨能力
- 3 光学传递函数方法
  - 3.1 反应函数和分辨能力
  - 3.2 反应函数和中心点亮度
  - 3.3 反应函数和能量集中度
- 4 光学系统的反应函数
  - 4.1 理想光学系统的反应函数;通光孔形状的影响
  - 4.2 轴向离焦和象散的影响
  - 4.3 初级彗差
  - 4.4 球差
- 5 质量评价的标准和光学系统象差的公差
  - 5.1 质量指标问题
  - 5.2 象差公差问题
  - 5.3 几何光的反应函数和能量集中度
  - 5.4 低对比分辨能力判断
- 6 部分相干照明时的成象质量评价
  - 6.1 vonCittert-Zernike定理
  - 6.2 部分相干照明时的成象
    - 6.2.1 聚光镜的作用和等效光源的概念
    - 6.2.2 象的形成
  - 6.3 弱物体的衬度传递
  - 6.4 其他评价方法
    - 6.4.1 点分辨率
    - 6.4.2 正弦物体的表观传递函数
    - 6.4.3 直边的象分布、锐度和表观传递函数

## 参考文献

### 第十二章 电子计算机和光学设计

- 1 概述
- 2 高斯光学和初级象差
- 3 光束的初值
- 4 光路计算
  - 4.1 曲面的形式

- 4.2 光线在曲面上折射
- 4.3 细光束焦点
- 5 计算结果处理
- 6 象差分布值
- 7 非轴对称光学系统
- 8 光学传递函数 (OTF) 计算

参考文献

### 第十三章 光学自动设计

- 1 概述
- 2 评价函；象差的规化
- 3 最小二乘法；变量的度规
- 4 阻尼和步长
- 5 边值问题
- 6 结组和保值
- 7 自动平衡程序的现状

参考文献

### 第十四章 光学仪器的光学整体设计

- 1 概述
- 2 光度性质
  - 2.1 亮度
  - 2.2 大光管的传递，象面上各点的照度
  - 2.3 象差对照度的影响
  - 2.4 光度学的和相干性
- 3 成象性质
  - 3.1 接收器和光学系统联用时的问题
  - 3.2 光学系统对仪器成象特性的影响
- 4 噪音和背景
- 5 一些光学技术特征数据
  - 5.1 光源
  - 5.2 大气；自适应技术
  - 5.3 光学薄膜
  - 5.4 人眼和其他接收器
- 6 光学信息处理
- 7 综合评价
- 8 一个例子

参考文献